

1310

Constantes de Kazhdan et rayons
spectraux de marches aléatoires

Thèse

présentée à la faculté des sciences pour l'obtention du grade de
docteur ès sciences, par

Pierre-Alain Cherix

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Institut de mathématiques
Rue E. Argand 13
2007 NEUCHATEL (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Constantes de Kazhdan et rayons spectraux
de marches aléatoires

de M. Pierre-Alain Chérix

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

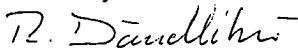
La Faculté des sciences de l'Université de
Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

Messieurs A. Valette, F. Sigrist, P. Jolissaint,
P. de la Harpe (Genève) et M. B. Bekka (Metz)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 13 juin 1996

Le doyen:



R. Dändliker

Remerciements

Je suis heureux de savoir qu'avant d'être mon directeur de thèse, Alain Valette est mon ami et je le remercie de la confiance qu'il m'a accordée.

La disponibilité, la patience et la gentillesse qu'il manifestait chaque fois que je m'adressais à lui, les conseils, les indications et la clarté des explications qu'il me prodiguait; tout cela est pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail. Je tiens à l'en remercier du fond du cœur.

Ma gratitude s'adresse aussi à Mohammed Bekka, Pierre de la Harpe, Paul Jolissaint et François Sigrist.

Chacun d'eux m'a prodigué des conseils judicieux et des suggestions avisées et a accepté de faire partie de mon jury; ce qui implique un travail non négligeable. Merci à chacun d'eux d'avoir fait cet effort.

Je remercie également Christophe Champetier avec lequel j'ai pu collaborer efficacement.

Je veux remercier ici les membres de l'institut de mathématiques de l'Université de Neuchâtel pour l'harmonie qui y règne. Pendant mes années passées dans cet endroit, j'y ai été heureux. La disponibilité et la gentillesse de chacun m'ont permis d'avoir des discussions mathématiques (et autres) très enrichissantes.

Je remercie aussi mes parents pour leur amour et leur soutien durant mes études, ainsi que ma fiancée qui m'a soutenu dans les périodes difficiles de la rédaction.

Mais avant tout, je me dois de louer celui qui m'a donné la vie en abondance, Jésus-Christ. Grâce à lui, j'ai une espérance et une foi qui me permettent de vivre heureux.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	7
1.1 La propriété (T) de Kazhdan	7
1.2 Les groupes de Lie	9
1.3 Cohomologie et représentations	11
1.4 Un peu de théorie des graphes	13
1.5 Les groupes finiment engendrés	15
1.5.1 Les groupes à un relateur	18
1.6 Les diagrammes et la petite simplification	19
1.7 Les propriétés génériques	21
2 Propriété (T) et constantes de Kazhdan	23
2.1 L'intérêt des constantes de Kazhdan...	23
2.2 Calculs de constantes de Kazhdan	24
2.2.1 Premiers exemples.	24
2.2.2 Les produits semi-directs	25
2.2.3 Les groupes diédraux	29
2.2.4 Le groupe $O(2)$	32
2.3 Les constantes l^2	34
2.3.1 Définition et premières propriétés	34
2.3.2 Le groupe multiplicatif des quaternions	38
3 Constantes L^2	45
3.1 Définitions...	45
3.2 Caractérisation spectrale...	49
3.3 Comparaison avec les constantes classiques	55
4 Cohomologie des groupes et propriété (T)	57
4.1 Le problème de Gromov	57
4.2 Quelques propriétés de $H^1(\Gamma, \pi)$	60

5 Les opérateurs d'adjacence...	67
5.1 Estimations de rayons spectraux	67
5.2 Estimations de normes opérateurs	74
5.3 Les groupes de surfaces	77
6 Les résultats génériques	79
6.1 Le cas des groupes à un relateur	79
6.2 Le cas des groupes de présentation finie	81
Perspectives	91

Introduction

La notion de groupe est omniprésente dans les mathématiques contemporaines. Depuis F. Klein, on s'est rendu compte que la structure de certains objets était en partie contenue dans leur groupe d'automorphismes. L'étude du groupe des automorphismes d'un objet s'est ainsi substituée à l'étude de l'objet lui-même. L'étude des groupes dans divers contextes a donc été un sujet crucial depuis le milieu du 19^e siècle. Dans le cas des groupes finiment engendrés, on sait depuis Cayley et Dehn qu'on peut "visualiser" de tels groupes en leurs associant des graphes, les graphes de Cayley.

Un graphe de Cayley dépend de la donnée d'un système fini de générateurs du groupe. Comme des groupes non isomorphes peuvent avoir des graphes de Cayley isomorphes, il est naturel de se demander quelle information sur le groupe on peut récupérer à partir de la donnée d'un graphe de Cayley. Kesten ([35], [34]) a attaqué ce problème à la fin des années cinquante par des techniques probabilistes. Il a montré que le comportement des marches aléatoires simples sur le graphe de Cayley permet de détecter la moyennabilité du groupe, ou bien le fait que le groupe est librement engendré par le système de générateurs choisi.

D'autre part, la présence d'une structure de groupe sous-jacente au graphe de Cayley a permis de résoudre des problèmes en théorie des graphes. Ainsi, Margulis [40] a été le premier à décrire explicitement une famille d'expandeurs en employant des groupes ayant la propriété (T) de Kazhdan.

Il se fait que les propriétés groupales mentionnées ci-dessus (moyennabilité, liberté, propriété (T)) sont liées au spectre d'un opérateur, ou parfois à la présence d'un trou dans ce spectre. Cet opérateur est soit l'opérateur de transition h associé à une marche aléatoire symétrique sur le graphe de Cayley, soit le laplacien combinatoire Δ sur ce même graphe. Ainsi, le résultat de Kesten auquel il est fait allusion ci-dessus affirme qu'un groupe Γ de type fini est infini et moyennable si et seulement si 1 n'est pas isolé dans le spectre de h dans la représentation régulière gauche de Γ . De même, le groupe Γ n'a pas la propriété (T) si et seulement si 1 n'est pas isolé dans la représentation universelle de Γ (voir [17]). C'est autour de ce "trou spectral"

que cette thèse s'est développée.

Ce travail contient essentiellement deux directions de recherche. La première concerne la propriété (T) . La seconde, le calcul de spectres d'opérateurs de transition sur les groupes à un relateur ainsi que des résultats généraux sur les rayons spectraux de certains opérateurs de transition sur les groupes de présentation finie.

Les deuxième, troisième et quatrième chapitres sont consacrés à plusieurs aspects de la propriété (T) . Dans le chapitre deux, l'intérêt est porté sur les constantes de Kazhdan qui mesurent la "distance" entre la représentation triviale et le reste du dual d'un groupe, ou encore l'amplitude du trou spectral à la gauche de 1 dans le spectre de h dans la représentation universelle de Γ . Il est en général difficile de calculer ces constantes de Kazhdan pour un groupe donné (même fini) et un système de générateurs fixé. On montre comment, dans le cas de certains produits semi-directs, on peut calculer la constante de Kazhdan du produit semi-direct $H \rtimes N$ en fonction des constantes de H et de N (proposition 2.2.4) et on donne des exemples de constantes de Kazhdan (en particulier pour les groupes diédraux). Ces calculs ont fait l'objet de la publication [14]. Dans ce même chapitre, on introduit une autre constante, la constante l^2 , qui permet, pour les groupes finiment engendrés, de donner des bornes inférieures et supérieures à la constante de Kazhdan et qui est calculable à l'aide des représentations irréductibles uniquement.

Dans le chapitre 3, le même type d'idées amène à une définition spectrale de la propriété (T) pour les groupes de Lie connexes. Ce chapitre est essentiellement consacré à la preuve du résultat suivant : soit G un groupe de Lie connexe, et soit $\{X_i\}$ une base de son algèbre de Lie; le groupe a la propriété (T) si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute représentation unitaire π de G , le trou spectral à droite de 0 de l'opérateur infinitésimal h_π est d'amplitude au moins ϵ ; ici h_π correspond à la fermeture du laplacien $d\pi(-\sum_i X_i^2)$. Ce résultat, qui répond positivement à une question de Y. Colin de Verdière, permet la définition des constantes de Kazhdan- L^2 pour un groupe de Lie connexe.

Le chapitre 4 a été motivé par la définition cohomologique de la propriété (T) , en termes de l'annulation de la 1-cohomologie à valeurs dans n'importe quelle représentation unitaire. (L'annulation de cohomologie est une propriété de trou spectral puisqu'elle peut se traduire par l'inversibilité d'un laplacien, cf. la théorie de Hodge). On s'intéresse donc à l'annulation du H^1 pour certains groupes et certaines représentations. Le résultat le plus marquant répond à une question de M. Gromov dans [29] : un groupe moyennable possède toujours un 1-cocycle propre par rapport à une représentation convenable ("propre" signifie que l'image inverse d'une partie bornée de l'espace de Hilbert de la représentation est une partie finie du groupe). Ce résultat,

obtenu en commun avec M.E.B. Bekka et A. Valette, a été publié dans [6]; selon M. Gromov, il pourrait servir à démontrer la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures pour les variétés à groupe fondamental moyennable.

Dans le chapitre 5, on aborde la deuxième direction de recherche : le calcul du spectre de certains opérateurs d'adjacence sur les groupes à un relateur.

Au départ, il s'agissait de répondre à la question de P. Sarnak : pour les groupes de surface Γ_g avec leur présentation standard

$$\langle X, r \rangle = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle,$$

quel est le spectre de l'opérateur de transition h_S sur le graphe de Cayley de Γ_g par rapport à $S = \{a_i^{\pm 1}, b_i^{\pm 1}, \dots, a_g^{\pm 1}, b_g^{\pm 1}\}$?

Cette question a été à l'origine du chapitre 5.

Si Γ est un groupe engendré par une partie finie X , on peut considérer l'opérateur h_X de transition sur le graphe de Cayley orienté de Γ par rapport à X , ainsi que l'opérateur h_S de transition sur le graphe de Cayley usuel de Γ par rapport à $S = X \cup X^{-1}$. L'opérateur h_S est auto-adjoint, l'opérateur h_X ne l'est en général pas. Si on note $r(h_X)$ le rayon spectral de h_X , on a les inégalités :

$$r(h_X) \leq \|h_X\| \leq \|h_S\|.$$

P. de la Harpe, G. Robertson et A. Valette [17] ont introduit le nombre $\sigma(X) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|h_X^k\|_2^{1/k}$ et ont montré que, pour $\#X \geq 2$, on a les inégalités :

$$\frac{1}{\sqrt{\#X}} \leq \sigma(X) \leq r(h_X)$$

avec $\frac{1}{\sqrt{\#X}} = \sigma(X)$ si et seulement si X engendre un semi-groupe libre, et $\sigma(X) = r(h_X)$ si Γ est hyperbolique au sens de Gromov (voir 1.5.6).

Nous avons essayé d'estimer certains des nombres $r(h_X)$, $\|h_X\|$, etc... pas uniquement dans le cas des groupes de surface, mais dans le cadre un peu plus général des groupes à un relateur $\langle X, r \rangle$. Nous partons d'une remarque : le fait que X engendre un semi-groupe libre dans $\langle X, r \rangle$ implique une condition d'alternance de signes sur la relation r ; nous disons alors que r alterne suffisamment. Nous donnons la réciproque suivante : si le groupe à un relateur est à petite simplification $C'(\lambda)$ avec $\lambda < 1/6$ et si r alterne suffisamment alors X engendre un semi-groupe libre dans $\langle X, r \rangle$. Dans ce cas, $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$.

De plus, si r est dans les sous-groupes H_r et H_l du groupe libre \mathbb{F}_X engendrés par les éléments de la forme xy^{-1} (resp. $x^{-1}y$) avec x, y dans X , alors $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$ (voir proposition 5.1.9).

Dans le cas où r n'appartient pas à $H_r \cup H_l$, on obtient $\|h_X\| = \frac{2\sqrt{\#X-1}}{\#X}$. Ceci permet de donner une réponse partielle mais pas optimale à la question de P. Sarnak : pour le groupe de surface Γ_g comme ci-dessus, le spectre de h_S est un intervalle symétrique $[-r_g, r_g]$ avec $r_g \leq \sqrt{2g-1}/g$.

En dernier lieu, le chapitre 6 est consacré aux propriétés génériques des groupes de présentation finie. Il s'agit de résultats statistiques permettant de dire si une propriété de groupe est fréquente ou non. Plus précisément, on dit qu'une propriété est générique si le rapport entre le nombre de présentations à k générateurs et n relations ayant cette propriété et le nombre total de présentations à k générateurs et n relations tend vers 1 quand on fait tendre la longueur de toutes les relations vers l'infini (voir la définition 1.7.1).

Dans [15], nous démontrons que pour les groupes à un relateur, le fait que X engendre un semi-groupe libre dans $\langle X, r \rangle$ est une propriété générique pour les groupes à un relateur (voir la proposition 6.1.2). Ce qui permet de dire que le rayon spectral $r(h_X)$ vaut génériquement $\frac{1}{\sqrt{\#X}}$. Il suffit pour cela de voir que les conditions suffisantes données plus haut pour l'existence d'un semi-groupe libre engendré par X dans Γ sont génériques.

Finalement, nous avons pu montrer un résultat inattendu : " X engendre un semi-groupe libre dans $\langle X, r \rangle$ " reste une propriété générique dans le cas des groupes de présentations finies (proposition 6.2.2). Ce résultat a été publié dans [13].

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est conçu comme un recueil de résultats connus, cités sans preuve, qui vont être employés dans les chapitres suivants. Une lecture linéaire de ce chapitre n'est donc pas recommandée. Bien que la plupart des remarques faites dans cette section soient évidentes, elles permettent de fixer un certain nombre de notations et de conventions.

1.1 La propriété (T) de Kazhdan

Soient G un groupe localement compact, que l'on suppose de plus à base dénombrable (i.e. métrisable, dénombrable à l'infini) et K une partie compacte engendrant G . Toutes les représentations π considérées sont des représentations unitaires fortement continues de G sur un espace de Hilbert complexe séparable H_π . On note H_π^1 l'ensemble des vecteurs de longueur 1 dans H_π .

Définition 1.1.1 1) Soient $\pi : G \rightarrow U(H_\pi)$ une représentation et $\epsilon > 0$; un vecteur $\xi \in H_\pi^1$ est (ϵ, K) -invariant si $\max\{\|\pi(g)\xi - \xi\| \mid g \in K\} < \epsilon$.

2) π a presque des vecteurs invariants si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout compact K de G , il existe un vecteur (ϵ, K) -invariant.

Définition 1.1.2 Un groupe localement compact G a la propriété (T) si toute représentation ayant presque des vecteurs invariants a un vecteur fixe non nul.

Remarquons que si une représentation π de G a presque des vecteurs invariants, alors il existe une suite de vecteurs $(\xi_n)_{n \geq 1}$ dans H_π^1 telle que pour tout compact K de G ,

$$\max_{g \in K} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, il existe une suite emboîtée de parties compactes K_i de G telle que $\bigcup K_i = G$. Pour tout K_i il existe un vecteur ξ_i qui est $(1/i, K_i)$ -invariant. Pour un i fixé, comme les K_i sont emboîtés, on a

$$\max_{g \in K_i} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Comme la réunion des K_i recouvre tout G , pour tout K compact de G , il existe un N tel que $K \subset K_N$; on en déduit

$$\max_{g \in K} \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On note

- \tilde{G} , l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires de G sur des espaces de Hilbert séparables;
- \tilde{G}^* , le sous-ensemble de \tilde{G} formé des représentations n'ayant pas de vecteur fixe non nul.
- \hat{G} , l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G ,
- \hat{G}^* , le complément dans \hat{G} (de la classe) de la représentation triviale de dimension 1.

Définition 1.1.3 Soit (π, H_π) une représentation de G et soit K une partie génératrice compacte de G . On définit la constante de Kazhdan $\kappa(G, K, \pi)$ associée à K et π comme suit :

$$\kappa(G, K, \pi) = \inf_{\xi \in H_\pi} \max_{s \in K} \|\pi(s)\xi - \xi\|.$$

Les constantes de Kazhdan de G associées à K sont définies par :

$$\kappa(G, K) = \inf_{\pi \in \tilde{G}^*} \kappa(G, K, \pi) \text{ et } \hat{\kappa}(G, K) = \inf_{\pi \in \hat{G}^*} \kappa(G, K, \pi).$$

Comme \hat{G}^* est contenu dans \tilde{G}^* , on a $\hat{\kappa}(G, K) \geq \kappa(G, K)$.

Remarquons qu'il est toujours possible de trouver une représentation (π, H_π) sans point fixe non nul telle que $\kappa(G, K, \pi) = \kappa(G, K)$. La définition de $\kappa(G, K)$ permet de choisir une suite de représentations (π_n, H_n) telles que la suite $\kappa(G, K, \pi_n)$ tend vers $\kappa(G, K)$. Il est facile de voir que

$$\left(\bigoplus_{n \geq 0} \pi_n, \bigoplus_{n \geq 0} H_n \right) \text{ réalise } \kappa(G, K).$$

Proposition 1.1.4 *Pour G un groupe localement compact et K une partie génératrice compacte de G , les énoncés suivants sont équivalents :*

1. G a la propriété (T)
2. $\kappa(G, K) > 0$
3. $\widehat{\kappa}(G, K) > 0$

Une preuve de ce résultat est donnée dans [19].

1.2 Les groupes de Lie

Soient G un groupe de Lie connexe, \mathfrak{g} son algèbre de Lie et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} (voir [25]), c.à.d. l'algèbre associative sur \mathbb{C} ayant la propriété universelle suivante : Soient A une algèbre associative sur \mathbb{C} (munie du crochet $[X, Y] = XY - YX$) et α une application linéaire de \mathfrak{g} dans A telle que $\alpha([X, Y]) = \alpha(X)\alpha(Y) - \alpha(Y)\alpha(X)$ pour tout X et Y dans \mathfrak{g} ; alors il existe un unique homomorphisme d'algèbre α' de $U(\mathfrak{g})$ dans A satisfaisant $\alpha' \circ \sigma = \alpha$, où σ est l'injection canonique de \mathfrak{g} dans $U(\mathfrak{g})$.

Définition 1.2.1 *Soient (π, H_π) une représentation unitaire de G et deux vecteurs ξ et η dans H_π , le coefficient de π relativement à ξ et η est la fonction $\varphi_{\xi, \eta} : G \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g \mapsto \langle \pi(g)\xi | \eta \rangle$.*

Définition 1.2.2 *Soit (π, H_π) une représentation unitaire de G . On définit l'espace des vecteurs C^∞ relativement à π comme l'ensemble des vecteurs ξ tels que l'application $g \rightarrow \pi(g)\xi$ est lisse de G dans H_π . On note cet ensemble $C^\infty(H_\pi)$.*

Un intérêt des vecteurs C^∞ est que l'on peut définir à partir de π une représentation de l'algèbre de Lie $d\pi$ de \mathfrak{g} dans l'espace des opérateurs linéaires sur $C^\infty(H_\pi)$. Cette représentation se prolonge à $U(\mathfrak{g})$ par propriété universelle. Les vecteurs C^∞ peuvent se caractériser comme suit :

Lemme 1.2.3 *Soit ξ dans H_π . ξ est un vecteur C^∞ si et seulement si pour tout η dans H_π le coefficient $\varphi_{\xi, \eta}$ est C^∞ .*

Ce lemme découle du lemme suivant dû à Poulsen (lemme 1.2 dans [44]).

Lemme 1.2.4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et f une application de I dans le dual B^* d'un espace de Banach B telle que la fonction $t \rightarrow \langle x, f(t) \rangle$ est de classe C^2 pour tout x dans B , alors f est de classe C^1 pour la topologie normique de B^* .*

Définition 1.2.5 Soit (π, H_π) une représentation unitaire de G . On définit l'espace de Gårding de π comme le sous-espace de H_π engendré par l'ensemble $\{\pi(\phi)\xi \mid \phi \in C_c^\infty(G), \xi \in H_\pi\}$ où $\pi(\phi)\xi = \int_G \phi(g)\pi(g)\xi dg$. L'intégration se fait relativement à la mesure de Haar invariante à gauche sur G .

Dixmier et Malliavin ont montré (voir [26]) que l'espace de Gårding de π et l'espace des vecteurs C^∞ coïncident.

Notons h_π la fermeture de $d\pi(h)$. Dans [32], Jorgensen montre le résultat suivant :

Théorème 1.2.6 Soit π une représentation unitaire du groupe de Lie G , soient y_1, \dots, y_n des éléments arbitraires de \mathfrak{g} et z une combinaison linéaire des y_i . Alors l'opérateur $d\pi(\sum_{i=1}^n y_i^2 + z)$ est un opérateur essentiellement autoadjoint sur $C^\infty(H_\pi)$ (i.e. sa fermeture est autoadjointe).

Citons pour terminer un théorème dû à Hille et Yosida.

Théorème 1.2.7 Soient X un espace de Banach et A un opérateur linéaire non borné sur X . A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés $T(t)$ avec $\|T(t)\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, si et seulement si :

- a) A est fermé et $D(A)$ est dense dans X .
- b) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ , et pour tout $\lambda > 0$, l'inverse $R(\lambda)$ de $(A - \lambda\mathbb{I})$ satisfait $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Pour une preuve de ce théorème ainsi que pour les définitions de semi-groupe fortement continu et de générateur infinitésimal d'un semi-groupe, nous renvoyons le lecteur à [43].

Lemme 1.2.8 Soit A un opérateur linéaire sur un Hilbert H , auto-adjoint de domaine $D(A)$ et défini-négatif; alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$ d'opérateurs bornés avec $\|T(t)\| \leq 1$.

Preuve Il s'agit d'appliquer le théorème de Hille-Yosida, donc de contrôler les conditions a) et b) décrites dans le théorème 1.2.7. Comme A est auto-adjoint, la condition a) est claire. De plus le fait que A soit défini-négatif implique que $Sp(A)$ est contenu dans \mathbb{R}^- . Il s'agit donc de montrer pour tout $\lambda > 0$ que $R(\lambda) = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$ satisfait

$$\|R(\lambda)x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

Remarquons tout d'abord que pour tout y dans $D(A)$, on a :

$$\|(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda})y\| \geq \|y\|$$

Pour cela, il suffit de remarquer que comme $\langle Ay|y \rangle \leq 0$ et que $\lambda > 0$, on a :

$$- \langle \frac{A}{\lambda}y|y \rangle \geq 0.$$

On obtient donc la suite d'inégalités :

$$\|y\|^2 \leq \langle (\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda})y|y \rangle \leq \|(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda})y\| \|y\|.$$

En simplifiant par $\|y\|$, on obtient l'inégalité voulue. Il suffit maintenant de conclure en remarquant que pour tout x dans H , on a :

$$\|R(\lambda)x\| \leq \|(\mathbb{I} - \frac{A}{\lambda})R(\lambda)x\| = \frac{1}{\lambda} \|x\|.$$

□

1.3 Cohomologie et représentations

Nous rappelons ici la définition ainsi que quelques résultats concernant la cohomologie des groupes. Pour plus de détails, voir [30] ou [19].

Définition 1.3.1 Soit G un groupe topologique et (π, H_π) une représentation unitaire de G .

1. $Z^1(G, \pi)$, l'ensemble des cocycles de G relativement à π , est l'ensemble des applications continues $b : G \rightarrow H_\pi$ satisfaisant la relation

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \quad \forall g, h \in G.$$

2. $B^1(G, \pi)$, l'ensemble des cobords de G relativement à π , est l'ensemble des applications f définies par $f(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout ξ fixé dans H_π .

Définition 1.3.2 Pour G un groupe et H un espace de Hilbert, une action isométrique affine α de G sur H est un homomorphisme de G dans le groupe $\text{Isom}(H)$ des isométries affines de H .

Une isométrie affine est la composée d'une isométrie (unitaire ou orthogonale) et d'une translation.

Si α est une action isométrique affine de G , on peut écrire $\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$ où π est une représentation unitaire (ou orthogonale) de G sur H et b un cocycle de G relativement à π . On appelle π la partie linéaire de α et b la partie translation de α .

Il est clair que $b(g) = \alpha(g)(0)$ pour tout $g \in G$ et que $b(e) = 0$ pour tout $b \in Z^1(G, \pi)$.

Remarquons aussi que, comme dans [19], G est un groupe localement compact qui est supposé à base dénombrable. Ceci permet de montrer que $Z^1(G, \pi)$ est un espace de Fréchet relativement à la famille de semi-normes ν_K définies par $\nu_K(b) = \max_{g \in K} \|b(g)\|$ et indicées par les parties compactes K de G . Pour une preuve de ce fait, voir [19].

Remarquons aussi que $B^1(G, \pi)$ est contenu dans $Z^1(G, \pi)$. En effet, pour b dans H_π ,

$$\begin{aligned} \pi(gh)\xi - \xi &= \pi(g)\pi(h)\xi - \pi(g)\xi + \pi(g)\xi - \xi \\ &= \pi(g)(\pi(h)\xi - \xi) + \pi(g)\xi - \xi \end{aligned}$$

On peut donc définir ce qui suit :

Définition 1.3.3 Le premier groupe de cohomologie de G relativement à π est $H^1(G, \pi) := Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi)$.

On a la proposition suivante.

Proposition 1.3.4 Pour G un groupe localement compact, les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G , on a :

$$H^1(G, \pi) = \{0\}.$$

2. Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G , tout cocycle par rapport à π est borné en tant que fonction sur G .

3. Pour toute représentation orthogonale ou unitaire π de G , $H^1(G, \pi)$ est séparé.

4. G a la propriété (T).

La preuve de ce résultat se trouve dans [19]. L'équivalence entre le point 3) et les autres est un lemme de A. Guichardet (voir [30]). Nous employerons un autre résultat de Guichardet : La proposition 2.6 du chapitre III de [30] qui est donnée sous une forme un peu plus générale.

Lemme 1.3.5 (Guichardet) Soient G un groupe et $(\pi_n)_{n \geq 1}$ une suite de représentations unitaires de G telles que $H^1(G, \pi_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$,

alors $B^1(G, \bigoplus_{n \geq 1} \pi_n)$ est dense dans $Z^1(G, \bigoplus_{n \geq 1} \pi_n)$.

1.4 Un peu de théorie des graphes

Dans tout ce travail, un graphe sera toujours supposé sans boucle, ni arêtes multiples, de degré borné et non orienté. Chaque fois que l'on introduit une orientation, on parle de graphe orienté.

Pour un graphe G , on note G^0 l'ensemble des sommets de G et G^1 l'ensemble des arêtes de G (une arête étant donnée par une paire de sommets $\{g_1, g_2\}$). On dit que deux sommets sont adjacents s'il existe une arête les reliant. Pour un sommet x dans G^0 , on note $d(x)$ le nombre de sommets adjacents à x , et on appelle $d(x)$ le degré de x . Si tous les sommets ont le même degré, on dit que le graphe est régulier.

On définit aussi :

- $\mathcal{F}(G^0) = \{f : G^0 \rightarrow \mathbb{C}\}$, l'ensemble des fonctions allant de l'espace des sommets du graphe dans \mathbb{C} . On appelle souvent les fonctions sur les sommets d'un graphe "fonctions sur le graphe" et on note parfois par abus de langage $\mathcal{F}(G)$ pour $\mathcal{F}(G^0)$.
- $\mathcal{F}_0(G^0) = \{f \in \mathcal{F}(G^0) \mid f \text{ à support fini}\}$. Cet ensemble est parfois noté $\mathcal{F}_0(G)$.
- $l^2(G^0) = \{f \in \mathcal{F}(G^0) \mid \sum_{x \in G^0} |f(x)|^2 < \infty\}$, l'ensemble des fonctions de carré sommable sur le graphe. $l^2(G^0)$ est aussi noté $l^2(G)$. $l^2(G)$ est un espace de Hilbert relativement au produit scalaire donné par $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in G^0} f(x)g(x)$. On identifie l'espace des sommets G^0 à la base hilbertienne canonique $\delta_g \in l^2(G^0)$ définie par :

$$\delta_g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour tout } g \text{ dans } G^0.$$

Il est clair que $\mathcal{F}_0(G^0) \subset l^2(G^0) \subset \mathcal{F}(G^0)$.

Définition 1.4.1 Sur l'espace $l^2(G)$, on définit un opérateur linéaire A appelé opérateur d'adjacence par sa valeur sur la base hilbertienne (δ_g) . On pose

$$(A\delta_g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ est adjacent à } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

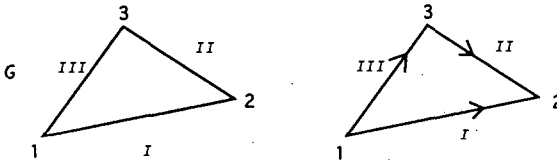
$$(Af)(x) = \sum_{g \text{ adjacent à } x} f(g)$$

Dans le cas des graphes finis, il s'agit de la matrice d'adjacence, bien connue en théories des graphes. Il est clair que l'opérateur d'adjacence caractérise le

graphe. Par contre, la connaissance unique du spectre de A (souvent appelé spectre du graphe) ne suffit pas pour définir le graphe univoquement.

Définition 1.4.2 Une orientation d'un graphe G est le choix pour chaque arête d'une direction, en d'autres termes le choix d'un sommet de l'arête comme origine et de l'autre comme extrémité de l'arête. Cela revient à donner deux applications allant de G^1 dans G^0 , notée $+$ (resp. $-$) de telle sorte que pour une arête e , e_+ (resp. e_-) soit l'extrémité de l'arête (resp. l'origine).

Exemple 1.4.3 Pour le graphe G , dont on a numéroté les sommets de 1 à 3 et les arêtes de I à III, on choisit une orientation (graphe de droite).



Dans cet exemple, on a $(I)_+ = 2$, $(I)_- = 1$, $(II)_+ = 2$, $(II)_- = 3$, $(III)_+ = 3$ et $(III)_- = 1$.

Définition 1.4.4 Le laplacien sur G est l'application $\Delta : \mathcal{F}(G^0) \rightarrow \mathcal{F}(G^0)$ définie par :

$$\Delta \xi(x) = \delta(x)\xi(x) - A\xi(x) \text{ pour tout } \xi \text{ dans } l^2(G), \text{ avec } \delta(x), \text{ le degré en } x.$$

Pour un graphe régulier, on obtient donc $\Delta = \delta \mathbb{I} - A$ où δ est le degré du graphe.

Quand on a choisi une orientation, on peut définir $d : \mathcal{F}(G^0) \rightarrow \mathcal{F}(G^1)$ par $(df)(e) = f(e_+) - f(e_-)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(G^0)$ et pour toute arête orientée de G^1 .

Remarquons qu'il y a une relation entre le Laplacien combinatoire et l'application d liée au choix d'une orientation, qui est la suivante : $\Delta = d^*d$.

Définition 1.4.5 Un connecteur uniforme est un graphe G fini, orienté, biparti à $2n$ sommets répartis en n récepteurs et n émetteurs (un émetteur étant un sommet qui est seulement origine de certaines arêtes et un récepteur n'étant lui qu'extrémité). On note $E(G)$ (resp. $R(G)$) l'ensemble des émetteurs de G (resp. l'ensemble des récepteurs).

Définition 1.4.6 Soient n, k des entiers positifs et d un réel positif; un (n, k, d) -expasseur est un connecteur uniforme à $2n$ sommets et au plus $k \cdot n$ arêtes qui satisfait l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$\forall X \subseteq E(G), X \neq \emptyset, \frac{|N(X)|}{|X|} \geq 1 + d \left(1 - \frac{|X|}{n}\right), \text{ avec } N(X), \text{ le bord de } X.$$

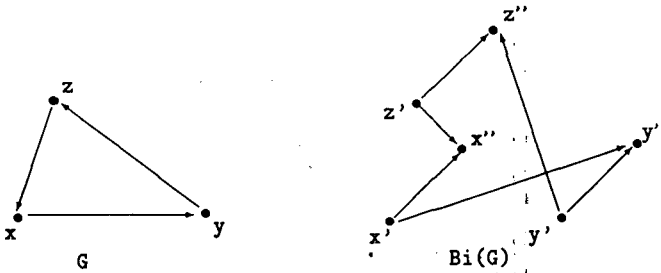
La meilleure constante d est appelée la constante d'expansion, $d(G)$ de G .

Définition 1.4.7 Le revêtement double d'un graphe fini orienté G , noté $Bi(G)$, est un connecteur uniforme défini comme suit :

$E(Bi(G)) = \{x'_1, \dots, x'_n\}$, $R(Bi(G)) = \{x''_1, \dots, x''_n\}$ sont deux copies de $G^0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ et les arêtes sont définies par :

$$(Bi(G))^1 = \{(x', x'') \mid \forall x \in G^0\} \cup \{(x', y'') \mid \forall (x, y) \in G^1\}.$$

Dessignons un exemple d'un revêtement double.



1.5 Les groupes finiment engendrés

Donnons tout d'abord un premier exemple de groupe finiment engendré.

Exemple 1.5.1 Le groupe libre \mathbb{F}_X librement engendré par $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. On peut décrire le groupe libre \mathbb{F}_X comme l'ensemble des mots finis écrits sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$, la loi de groupe étant la concaténation et les seules simplifications permises étant de la forme $xx^{-1} = e$ ou $x^{-1}x = e$ pour tout $x \in X$.

Cet exemple a une importance capitale puisque tout groupe finiment engendré est quotient d'un groupe libre. Il s'agit d'ailleurs d'une des propriétés universelles des groupes libres (pour plus de détails voir [38]). Cela nous permet de définir la notion de présentation d'un groupe finiment engendré.

Définition 1.5.2 Soit Γ un groupe finiment engendré; une présentation du groupe Γ est la donnée d'un ensemble fini X appelé système de générateurs et d'un ensemble R de mots sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$ (appelé ensemble des relations) tels que Γ soit isomorphe à \mathbb{F}_X/N où N est la clôture normale de R dans \mathbb{F}_X . On note une présentation $\langle X, R \rangle$.

On dit qu'un groupe est de présentation finie, s'il admet une présentation avec un nombre fini de générateurs et de relations.

La donnée d'un système de générateurs nous permet d'associer au groupe Γ deux graphes.

Définition 1.5.3 Soit Γ un groupe de génération finie et X un système fini de générateurs non nécessairement symétrique, mais ne contenant pas le neutre. Posons $S = X \cup X^{-1}$; le graphe de Cayley de Γ relativement à S , noté $G(\Gamma, S)$, est défini comme suit

- L'ensemble des sommets du graphe, noté $G(\Gamma, S)^0$, est Γ .
- L'ensemble des arêtes du graphe, noté $G(\Gamma, S)^1$, est défini par la relation $\{g_1, g_2\} \in G(\Gamma, S)^1$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que $g_1 = g_2 s$.

$G(\Gamma, S)$ est non orienté, car $S = S^{-1}$. Il n'a pas de boucle, car $1 \notin S$, et il est connexe car S engendre Γ .

On peut de même définir le graphe de Cayley orienté $G(\Gamma, X)$ relativement à X , comme le graphe dont les sommets sont les éléments du groupe Γ et l'ensemble des arêtes $G(\Gamma, S)^1$ est défini par $(g_1, g_2) \in G(\Gamma, S)^1$ si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $g_1 = g_2 x$. (g_1, g_2) est un couple, l'ordre y est important, on dit que g_1 est l'origine de l'arête (g_1, g_2) et g_2 en est l'extrémité.

Un lien classique entre un objet algébrique comme Γ ou géométrique comme $G(\Gamma, S)$ et l'analyse est donné par la représentation régulière de Γ sur l'espace de Hilbert $l^2(\Gamma)$. Sur cet espace de Hilbert, on va considérer deux opérateurs.

Définition 1.5.4 Sur $l^2(\Gamma)$, on définit les deux opérateurs h_S et h_X par

$$(h_X \xi)(x) = \frac{1}{\#X} \sum_{s \in X} \xi(xs) \text{ et } (h_S \xi)(x) = \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} \xi(xs) \quad (\xi \in l^2(\Gamma), x \in \Gamma).$$

$(\#S) h_S$ est exactement l'opérateur d'adjacence du graphe $G(\Gamma, S)$ défini en 1.4.4. On appelle h_S (resp. h_X) l'opérateur de transition sur $G(\Gamma, S)$ (resp. $G(\Gamma, X)$).

Ce sont des opérateurs de normes plus petites ou égales à 1. Remarquons que l'on peut décrire h_S et h_X à l'aide de la représentation régulière droite de Γ , que l'on note ρ .

$$h_X = \frac{1}{\#X} \sum_{s \in X} \rho(s) \text{ et } h_S = \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} \rho(s).$$

D'un point de vue probabiliste, h_S (resp. h_X) correspond à l'opérateur de transition associé à la marche aléatoire équiprobable sur $G(\Gamma, S)$ (resp. sur le graphe orienté $G(\Gamma, X)$). Ces deux opérateurs permettent d'investiguer certaines propriétés des graphes de Cayley $G(\Gamma, S)$ et $G(\Gamma, X)$ et donc de définir analytiquement des propriétés du groupe Γ . On note $Sp(h_X)$ et $r(h_X)$ (resp. $Sp(h_S)$ et $r(h_S)$) le spectre et le rayon spectral de l'opérateur h_X (resp. le spectre et le rayon spectral de l'opérateur h_S). Citons quelques résultats de ce type :

1. Théorème 1.5.5 (Kesten [35], [34], Day [16]).

a) Les énoncés suivants sont équivalents :

- i) $r(h_X) = 1$;
- ii) $1 \in Sp(h_X)$;
- iii) Γ est moyennable.

b) Supposons que $\#X \geq 2$; alors $\frac{\sqrt{2(\#X)-1}}{\#X} \leq r(h_S)$. L'égalité est réalisée si et seulement si Γ est isomorphe au groupe libre \mathbb{F}_X sur X . Dans ce cas

$$Sp(h_S) = \left[-\frac{\sqrt{2(\#X)-1}}{\#X}, \frac{\sqrt{2(\#X)-1}}{\#X} \right].$$

2. Théorème 1.5.6 (de la Harpe, Robertson et Valette [17]).

a) Soit \mathbb{T} le cercle (i.e. le groupe des nombres complexes de module 1); fixons $z \in \mathbb{T}$. S'il existe un caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{T}$ tel que $\chi(x) = z$ pour tout $x \in X$, alors $Sp(h_X)$ est invariant par multiplication par z . La réciproque est vraie si une des conditions suivantes est vérifiée : soit Γ est moyennable, soit X est symétrique (i.e. $X = X^{-1}$).

b) Supposons $\#X \geq 2$. Posons $\sigma(X) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|h_X^k\|_2^{1/k}$, où h_X est vu comme la fonction caractéristique normalisée de X et h_X^k dénote la $k^{\text{ième}}$ puissance de convolution de h_X ; alors

$$\frac{1}{\sqrt{\#X}} \leq \sigma(X) \leq r(h_X)$$

avec $\frac{1}{\sqrt{\#X}} = \sigma(X)$ si et seulement si X engendre un semi-groupe libre, et on a l'égalité $\sigma(X) = r(h_X)$ si, soit X est symétrique, soit Γ est hyperbolique au sens de Gromov.

- c) Si Γ est soit un groupe libre $\mathbb{F}(X)$, avec $\#X \geq 2$, soit un groupe de surface Γ_g , (i.e. $\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$ avec $X = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ et $g \geq 2$); alors

$$Sp(h_X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{\sqrt{\#X}}\}.$$

1.5.1 Les groupes à un relateur

Définition 1.5.7 *Un groupe Γ est un groupe à un relateur s'il existe une présentation de $\Gamma = \langle X, R \rangle$ avec R ne contenant qu'un seul élément ($R = \{r\}$).*

Pour Γ un groupe à un relateur, on notera $\langle X, r \rangle$ de préférence à $\langle X, \{r\} \rangle$. De plus, pour éviter des cas triviaux ou des dégénérescences, on supposera toujours que le nombre d'éléments de X est plus grand ou égal à 2 ($\#X \geq 2$) et que la longueur de r est plus grande ou égale à 3 ($|r| > 2$). Le cas $\#X = 1$ est le cas des groupes cycliques. D'autre part, supposer $|r| > 2$ n'est pas une grande restriction puisque $|r| = 1$ revient à dire que l'on a pris le neutre dans le système de générateurs de Γ et $|r| = 2$ signifie que deux éléments x, y (non nécessairement distincts) du système de générateurs sont soit égaux, soit inverses l'un de l'autre.

Théorème 1.5.8 *(Le Freiheitssatz de Magnus)*

Soient $\Gamma = \langle X, r \rangle$ un groupe à un relateur avec r cycliquement réduit (i.e. de longueur minimale dans sa classe de conjugaison) et avec le système de générateurs $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Supposons que x_1 apparaisse dans r ; alors $X - \{x_1\}$ engendre un groupe libre dans Γ .

Pour une preuve de ce résultat, voir [38], Proposition 5.1 du chapitre II.

Il est bien connu que l'existence d'homomorphismes dans le cas des groupes de présentation finie est une chose facile à vérifier. Il suffit en effet d'affecter des valeurs aux générateurs et de contrôler que les relations sont compatibles avec ces valeurs.

Essayons de voir quelles sont les conditions pour avoir un homomorphisme d'un groupe à un relateur $\Gamma = \langle X : r \rangle$ dans \mathbb{T} , le cercle de rayon 1 dans \mathbb{C} . Notons Σ la somme de tous les exposants dans r et fixons $z \in \mathbb{T}$; alors :

- pour z une racine primitive de 1 d'ordre d , il existe un caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{T}$ tel que $\chi(x) = z$ pour tout $x \in X$ si et seulement si $\Sigma \equiv 0 \pmod{d}$;
- pour z n'étant pas une racine de 1, il existe un caractère $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{T}$ tel que $\chi(x) = z$ pour tout $x \in X$ si et seulement si $\Sigma = 0$.

De cette remarque et du théorème 1.5.6, on déduit directement :

- Proposition 1.5.9**
- a) Si $\Sigma \equiv 0 \pmod{d}$, alors $Sp(h_X)$ est invariant par multiplication par $\exp(2\pi i/d)$;
 - b) Si $\Sigma = 0$, alors $Sp(h_X)$ est une réunion de cercles concentriques centrés en 0;
 - c) $Sp(h_S)$ est symétrique par rapport à 0 si et seulement si Σ est pair.

1.6 Les diagrammes et la petite simplification

Soit $\langle X, R \rangle$ une présentation d'un groupe Γ . Notons R^* l'ensemble des conjugués cycliques d'éléments de R ou de leurs inverses :

$$R^* = \{\omega \in \mathbb{F}_X \mid \omega \text{ soit le conjugué cyclique d'un } r_i \in R \text{ soit de son inverse}\}.$$

Définition 1.6.1 Soit $\Gamma = \langle X, R \rangle$ un groupe finiment présenté. Une pièce est un préfixe u qui est commun à deux éléments au moins de R^* (par préfixe, on entend toute partie initiale non vide d'un mot; en particulier un mot est préfixe de lui-même).

Fixons $\lambda \in]0, 1[$. On dit que la présentation $\langle X, R \rangle$ satisfait la condition de petite simplification $C'(\lambda)$ si on a l'inégalité : $|u| < \lambda|r|$ pour tout $r \in R^*$ et pour tout préfixe u de r qui est une pièce.

Définition 1.6.2 Un groupe $\Gamma = \langle X, R \rangle$ satisfait un algorithme de Dehn si, pour tout mot réduit $\omega \in \mathbb{F}(X)$ représentant 1 dans Γ , il existe un préfixe u d'un certain mot de $r \in R^*$ tel que u est un sous-mot de ω et $|u| > \frac{1}{2}|r|$.

Proposition 1.6.3 Un groupe Γ à petite simplification $C'(\lambda)$ avec $\lambda \leq 1/6$ possède un algorithme de Dehn.

Pour une preuve de ce résultat voir [38], Théorème 4.4 du chapitre V ou le Théorème 25 de [50].

Proposition 1.6.4 (Gromov) Un groupe possédant un algorithme de Dehn est hyperbolique.

Ce résultat est dû à Gromov ([28], Théorème 2.3.D ou théorème 36 dans [50]). L'intérêt de [50] étant qu'on y trouve une preuve directe montrant que la condition $C'(1/6)$ implique l'hyperbolicité.

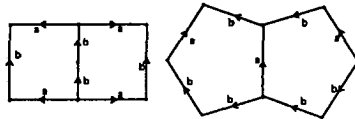
Définition 1.6.5 Soit $\langle X, R \rangle$ une présentation d'un groupe Γ et ω un mot dans \mathbb{F}_X représentant le neutre dans Γ . Un diagramme de Van Kampen du mot ω est un 2-complexe cellulaire Δ ayant les propriétés suivantes :

1. le 1-squelette de ce 2-complexe cellulaire est un graphe planaire
2. chaque arête de ce graphe est étiquetée par un élément de X ou X^{-1}
3. l'étiquetage du bord de chaque 2-cellule représente un élément de R^* et l'étiquetage du bord de Δ est le mot ω .

On note de plus $I(\Delta)$ (resp. $E(\Delta)$ et $\#(\Delta)$) le nombre d'arêtes intérieures de Δ (resp. le nombre d'arêtes extérieures de Δ et le nombre d'arêtes total de Δ).

Donnons l'exemple suivant :

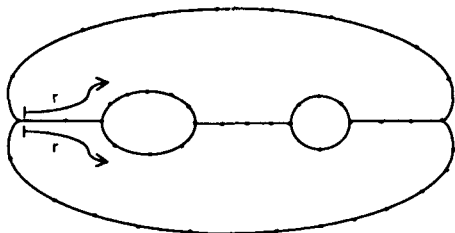
Exemple 1.6.6 Soit la présentation $\langle a, b, aba^{-1}b^{-2} \rangle$ (il s'agit du premier groupe de Baumslag-Solitar). Les deux dessins suivants représentent des diagrammes associés aux mots $aba^{-1}ab^{-1}a^{-1} = aba^{-1}b^{-2}b^2ab^{-1}a^{-1} = rr^{-1}$ et $b^2ab^{-2}a^{-1}b^2 = b^2ab^{-1}a^{-1}ab^{-1}a^{-1}b^2 = r^{-1}ab^{-1}a^{-1}r^{-1}aba^{-1}$.



La lecture des bords de chaque 2-cellule d'un diagramme Δ avec un retour sur un point base fixé entre chaque parcours du bord d'une 2-cellule revient exactement à considérer le mot ω qui est le bord de Δ comme un produit de conjugués cycliques des relations et de leurs inverses (i.e. $\omega = \prod_{i=1}^n m_i r_i m_i^{-1}$ avec m_i dans \mathbb{F}_X et r_i dans R^*).

Définition 1.6.7 On appelle diagramme réduit, tout diagramme ne possédant pas la configuration suivante : deux faces intérieures (éventuellement confondues) partageant au moins un sommet en commun et tel qu'en lisant les bords des deux faces à partir de ce sommet dans le sens positif, on obtienne un mot (conjugué cyclique d'un relateur r ou de r^{-1}) et son inverse (voir la figure ci-après).

Cette définition est donnée par Champetier dans [9].



Définition 1.6.8 On appelle aire combinatoire d'un diagramme, le nombre de ses faces intérieures.

Lemme 1.6.9 Un diagramme d'aire minimale parmi les diagrammes représentant un mot ω dans \mathbb{F}_X est réduit.

Il s'agit du lemme 2.1. du chapitre V de [38].

Définition 1.6.10 On dit qu'une présentation finie $\langle X, R \rangle$ satisfait une condition θ , si pour un $0 < \theta < 1$ fixé et pour tout diagramme réduit Δ on a la relation suivante entre le nombre d'arêtes intérieures $I(\Delta)$ et le nombre d'arêtes totales $\#\Delta$,

$$I(\Delta) < \theta(\#\Delta).$$

1.7 Les propriétés génériques

Définition 1.7.1 Pour P une propriété d'un mot r dans \mathbb{F}_X , on dit que P est asymptotiquement presque sûre (ou générique) si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{r \in \mathbb{F}_X \mid r \text{ cycliquement réduit, } |r| = n, r \text{ ayant } P\}}{\#\{r \in \mathbb{F}_X \mid r \text{ cycliquement réduit, } |r| = n\}} = 1.$$

Faisons $\#X = k$ et $\#R = n$ et notons $Pr(k, m_1, \dots, m_n)$ l'ensemble défini comme suit

$$\{\langle X, R \rangle \mid \#X = k, R = \{r_1, \dots, r_n\}, |r_i| = m_i, r_i \text{ cycliquement réduit}\}.$$

On dit qu'une propriété P des groupes de présentation finie est asymptotiquement presque sûre (ou générique) si

$$\lim_{\min\{m_i\} \rightarrow \infty} \frac{\#\{\langle X, R \rangle \in Pr(k, m_1, \dots, m_n) \mid \langle X, R \rangle \text{ ayant } P\}}{\#Pr(k, m_1, \dots, m_n)} = 1.$$

Il est à remarquer que l'on compte toutes les présentations et non pas seulement les classes d'isomorphismes de représentations ($\langle a, b|aba \rangle$ et $\langle b, a|bab \rangle$ ne sont pas identifiées).

Citons quelques exemples de propriétés génériques :

Lemme 1.7.2 *Pour les groupes à un relateur, et pour $\lambda \in]0, 1[$ fixé, la condition $C'(\lambda)$ est asymptotiquement presque sûre.*

Preuve : Voir le lemme 4.4. dans [10].

Remarquons que la preuve révèle que la convergence du rapport entre les présentations à un relateur avec $C'(\lambda)$ et toutes les présentations à un relateur est exponentiellement rapide quand $N \rightarrow \infty$.

Ol'shanskii a démontré [42] le théorème suivant :

Théorème 1.7.3 *Pour tout $\theta > 0$ fixé, la condition θ est asymptotiquement presque sûre pour les groupes de présentations finies.*

La condition θ a été employée indépendamment par Ol'shanskii dans [42] et par Champetier dans [10] pour montrer :

Théorème 1.7.4 *Les groupes de présentation finie sont asymptotiquement presque sûrement hyperboliques.*

Chapitre 2

Propriété (T) et constantes de Kazhdan

2.1 L'intérêt des constantes de Kazhdan pour des groupes finiment engendrés

constantes de Kazhdan...] En théorie des graphes, un thème récurrent est la recherche de graphes ayant une connexité forte malgré un nombre limité d'arêtes; ce type de graphes est en effet intéressant, par exemple dans la théorie de l'information [8]. Une bonne notion pour quantifier le taux de connexité est la notion d'expanseurs (voir 1.4.6). Or si l'existence de familles d'expanseurs a été démontrée par des méthodes probabilistes, les premiers exemples explicites ont été donnés par Margulis [40] en employant la propriété (T) de Kazhdan (pour une description détaillée voir [36]). C'est ce lien intéressant entre (T) et les constantes d'expansions que je vais décrire en guise de motivation aux calculs explicites des constantes de Kazhdan.

Soient Γ un groupe fini, S un système de générateurs de Γ et $G(\Gamma, S)$ le graphe de Cayley de Γ relativement à S . En employant les notations et les définitions introduites en 1.4, on a le résultat suivant (voir [19]):

Proposition 2.1.1 $Bi(G(\Gamma, S))$ est un $(|\Gamma|; |S| + 1; \kappa(\Gamma, S)^2/2)$ -expenseur.

Preuve Pour tout sous-ensemble X non vide de $E(Bi(G(\Gamma, S)))$, on doit prouver que si $d = \kappa(\Gamma, S)^2/2 > 0$, alors :

$$\frac{|N(X)|}{|X|} \geq 1 + d\left(1 - \frac{|X|}{|\Gamma|}\right).$$

Par définition de $N(X) = X \cup \bigcup_{s \in S} sX$, il suit que $|N(X)| \geq |X \cup sX|$ pour tout $s \in S$.

Il suffit donc de trouver $s \in S$ tel que

$$|X \cup sX| \geq |X|(1 + d(1 - \frac{|X|}{|\Gamma|})).$$

C'est équivalent, par passage au complémentaire, à trouver un s satisfaisant

$$|X \cap sX| \leq |X|(1 - d + d\frac{|X|}{|\Gamma|}).$$

Soit λ la représentation régulière gauche de Γ sur $l^2(\Gamma)$ et H l'orthogonal des constantes dans $l^2(\Gamma)$. On voit facilement que λ restreint à H n'a pas de vecteur fixe non nul. On sait que les groupes finis ont la propriété T , donc on déduit que pour ξ dans H^\perp , il existe $s \in S$ tel que $\|\lambda(s)\xi - \xi\| \geq \kappa(\Gamma, S)$, et donc $\operatorname{Re} \langle \xi | \lambda(s)\xi \rangle \leq (1 - \kappa(\Gamma, S)^2/2)$.

$$\text{On définit } \xi_X(s) = \begin{cases} |\Gamma| - |X| & \text{si } s \in X \\ -|X| & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi il existe $s \in S$ avec :

$$\langle \xi_X | \lambda(s)\xi_X \rangle = \operatorname{Re} \langle \xi_X | \lambda(s)\xi_X \rangle \leq (1 - d) \|\xi_X\|^2.$$

En comptant on voit que $\|\xi_X\|^2 = |\Gamma||X|(|\Gamma| - |X|)$, et pour tout $u \in \Gamma$,

$$\langle \xi_X | \lambda(u)\xi_X \rangle = |\Gamma|(|\Gamma||X \cap uX| - |X|^2).$$

On a finalement $|\Gamma|(|\Gamma||X \cap uX| - |X|^2) \leq (1 - \kappa(\Gamma, S)^2/2)|\Gamma||X|(|\Gamma| - |X|)$, donc

$$|X \cap sX| \leq |X|(1 - d + d\frac{|X|}{|\Gamma|}). \quad \square$$

2.2 Calculs de constantes de Kazhdan

On peut donc essayer de calculer dans des cas particuliers $\kappa(\Gamma, S)$.

2.2.1 Premiers exemples.

Exemple 2.2.1

1. Pour le groupe cyclique C_n engendré par un seul générateur g , on a (voir [21]) $\kappa(C_n, \{x\}) = 2 \sin \pi/n$.
2. Le groupe $Sym(n)$ des permutations de n objets avec $n \geq 2$ et S , l'ensemble des transpositions de voisins. On a

$$\kappa(Sym(n), S) = \sqrt{\frac{24}{n^3 - n}}.$$

Ce résultat est dû à R. Bacher et P. de la Harpe (voir [3]).

3. Le groupe diédral D_n avec un système de générateurs $S = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ formé de deux symétries. On a $\kappa(D_n, S) = 2 \sin \frac{\pi}{2n}$ (voir [3], [21] ou [19]).
4. Le cas des groupes compacts avec $K = G$ (voir [23]). Si G est un groupe compact infini, en prenant G comme son propre système de générateurs, on a $\kappa(G, G) = \sqrt{2}$. Si G est fini d'ordre n , $\kappa(G, G) = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$.

2.2.2 Les produits semi-directs

Commençons par redémontrer un résultat d'A. Valette [52] concernant les suites exactes courtes.

Proposition 2.2.2 *Soient G un groupe localement compact et une suite exacte courte*

$$\{1\} \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{p} G/N \rightarrow \{1\},$$

et soit K_1 (resp. K_2) un compact engendrant N (resp. G/N). Si le compact K engendrant G est tel que $K \cap N \supset K_1$ et $p(K) \supset K_2$, alors

$$\kappa(G, K) \geq \frac{\kappa(N, K_1)\kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}}.$$

Corollaire 2.2.3 *Si N et G/N ont la propriété (T), alors G l'a aussi.*

La preuve de ce corollaire est évidente en employant 1.1.4.

Preuve de 2.2.2

Pour π dans \tilde{G}^* , on pose $H^0 = \{\xi \in H_\pi \mid \pi(n)\xi = \xi \ \forall n \in N\}$, $H^1 = (H^0)^\perp$. Comme N est normal dans G et π est une représentation unitaire, il est clair que H^0 et H^1 sont invariants sous l'action de G par π .

Posons $\alpha = \frac{\kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}}$ et soit $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ n'importe quel vecteur dans H_π , $\|\xi\| = 1$.

Si $\|\xi_1\| \geq \alpha$: pour $k_1 \in K_1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\pi(k_1)\xi - \xi\| &= \|\pi(k_1)\xi_1 - \xi_1\| = \|\xi_1\| \left\| \pi(k_1) \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} - \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} \right\| \\ &\geq \alpha \|\pi(k_1) \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} - \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}\| \end{aligned}$$

Donc $\max_{k \in K} \|\pi(k)\xi - \xi\| \geq \max_{k \in K_1} \|\pi(k)\xi - \xi\|$

$$\geq \alpha \kappa(N, K_1) = \frac{\kappa(N, K_1)\kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}}$$

Si $\|\xi_1\| \leq \alpha$, alors $\|\xi_0\| = \sqrt{1 - \|\xi_1\|^2} \geq \sqrt{1 - \alpha^2}$.
 Si $k_2 \in p^{-1}(K_2) \cap K$, alors

$$\begin{aligned} \|\pi(k_2)\xi - \xi\| &= \sqrt{\|\pi(k_2)\xi_0 - \xi_0\|^2 + \|\pi(k_2)\xi_1 - \xi_1\|^2} \\ &\geq \|\pi(p(k_2))\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|} - \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\| \sqrt{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Comme la restriction de π à H^0 se factorise via G/N , on déduit :

$$\begin{aligned} \max_{k \in K} \|\pi(k)\xi - \xi\| &\geq \max_{l \in K_2} \|\pi(l)\frac{\xi_0}{\|\xi_0\|} - \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}\| \sqrt{1 - \alpha^2} \\ &\geq \sqrt{1 - \alpha^2} \kappa(G/N, K_2) \\ &= \frac{\kappa(N, K_1) \kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}} \end{aligned}$$

On obtient donc $\kappa(G, \pi, K) \geq \frac{\kappa(N, K_1) \kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}}$ pour toutes les représentations unitaires de G sans vecteur fixe non nul.

$$\text{Ainsi } \kappa(G, K) \geq \frac{\kappa(N, K_1) \kappa(G/N, K_2)}{\sqrt{\kappa(N, K_1)^2 + \kappa(G/N, K_2)^2}}. \quad \square$$

Dans certains cas cette borne est optimale.

Proposition 2.2.4 Soit G un produit semi-direct de G_1 par G_2 , où G_2 s'envoie dans $\text{Aut}(G_1)$ et soit K_1 (resp. K_2) un système de générateurs compacts de G_1 (resp. G_2).

S'il existe $\pi \in \tilde{G}^*$, et $(\xi_n)_{n \geq 0} \subset H_\pi^1$ tel que

1. les ξ_n sont $\pi(G_2)$ -invariants.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K_1} \|\pi(k)\xi_n - \xi_n\| = \kappa(G_1, K_1)$.

alors $\kappa(G, K) = \frac{\kappa(G_1, K_1) \kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}$ où $K = K_1 \cup K_2$.

Preuve La proposition 2.2.2 nous donne déjà une inégalité en général. Il suffit donc de construire une représentation satisfaisant l'autre inégalité pour avoir terminé.

Dans un produit semi-direct $G = G_1 \rtimes G_2$ la loi est donnée par :
 $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 \psi(g_2)(h_1), g_2 h_2)$, où ψ est l'homomorphisme de G_2 dans $\text{Aut}(G_1)$. On remarque qu'une représentation τ de G_2 peut être étendue à une représentation $\bar{\tau}$ de G de la façon suivante :

$$H_{\bar{\tau}} = H_\tau \text{ et } \bar{\tau}(g_1, g_2) = \tau(g_2).$$

On choisit τ sans vecteur fixe non nul et telle que $\kappa(G_2, K_2, \tau) = \kappa(G_2, K_2)$.
Donc, il existe une suite $\nu_n \in H_\tau^1$ telle que

$$\max_{k \in K_2} \|\tau(k)\nu_n - \nu_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \kappa(G_2, K_2)$$

On définit alors la représentation suivante de $G : \pi \oplus \bar{\tau} : G \rightarrow U(H_\pi \oplus H_{\bar{\tau}})$. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ fixé, on note $\mu_n = {}^t(\alpha \xi_n, \sqrt{1 - \alpha^2} \nu_n)$ et on obtient

$$\begin{aligned} \max_{k \in K_1} \|\pi \oplus \bar{\tau}[(k, 1)]\mu_n - \mu_n\|^2 &= \max_{k \in K_1} [\alpha^2 \|\pi[(k, 1)]\xi_n - \xi_n\|^2 \\ &\quad + (1 - \alpha^2) \|\bar{\tau}[(k, 1)]\nu_n - \nu_n\|^2] \\ &= \max_{k \in K_1} \alpha^2 \|\pi[(k, 1)]\xi_n - \xi_n\|^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha^2 \kappa(G_1, K_1)^2. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} \max_{k \in K_2} \|\pi \oplus \bar{\tau}[(1, k)]\mu_n - \mu_n\|^2 &= \max_{k \in K_2} [\alpha^2 \|\pi[(1, k)]\xi_n - \xi_n\|^2 \\ &\quad + (1 - \alpha^2) \|\bar{\tau}[(1, k)]\nu_n - \nu_n\|^2] \\ &= \max_{k \in K_2} (1 - \alpha^2) \|\bar{\tau}(k)\nu_n - \nu_n\|^2 \\ &\quad (\text{car les } \xi_n \text{ sont } \pi(G_2) - \text{invariants}). \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha^2) \kappa(G_2, K_2)^2. \end{aligned}$$

Avec un choix convenable de α (i.e. $\alpha^2 \kappa(G_1, K_1)^2 = (1 - \alpha^2) \kappa(G_2, K_2)^2$), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K} \|\pi \oplus \bar{\tau}(k)\mu_n - \mu_n\| = \frac{\kappa(G_1, K_1) \kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}.$$

On a donc trouvé une représentation de G sans vecteur fixe non nul telle que

$$\kappa(G, K, \pi \oplus \bar{\tau}) \leq \frac{\kappa(G_1, K_1) \kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}.$$

□

Il serait intéressant de savoir si l'inégalité de la proposition 2.2.2 est en fait toujours une égalité. Nous verrons dans l'exemple 2.3.2 que ce n'est pas le cas. Rappelons maintenant un autre résultat de Valette [52].

Corollaire 2.2.5 Soient G_1, G_2 deux groupes localement compacts et K_1 (resp. K_2) des systèmes de générateurs compacts de G_1 (resp. G_2). Si $G = G_1 \times G_2$ et $K = K_1 \times \{1\} \cup \{1\} \times K_2$ alors

$$\kappa(G, K) = \frac{\kappa(G_1, K_1) \kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}.$$

Preuve Par la proposition 2.2.2, on obtient la première inégalité :

$$\kappa(G, K) \geq \frac{\kappa(G_1, K_1)\kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}.$$

Soit (π_i, H_i) une représentation de G_i satisfaisant $\kappa(G_i, K_i, \pi_i) = \kappa(G_i, K_i)$ pour $i = 1, 2$. On définit $\pi((g_1, g_2)) = \pi_1(g_1) \oplus \pi_2(g_2)$ et on choisit $(\xi_n)_{n \geq 0}$ contenue dans $H_{\pi_1}^1$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K_1} \|\pi(k)\xi_n - \xi_n\| = \kappa(G_1, K_1).$$

Les ξ_n sont $\pi(G_2)$ -invariants, donc, en appliquant la proposition 2.2.4, on a :

$$\kappa(G, K) = \frac{\kappa(G_1, K_1)\kappa(G_2, K_2)}{\sqrt{\kappa(G_1, K_1)^2 + \kappa(G_2, K_2)^2}}.$$

□

Corollaire 2.2.6 Pour $G = \bigoplus_{i=1}^m G_i$ une somme directe finie de groupes G_i localement compacts, avec K_i des systèmes de générateurs compacts de G_i et $K = \cup_{i=1}^m K_i$, alors on a :

$$\kappa(G, K) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{\kappa(G_i, K_i)^2} \right]^{-1/2}.$$

Preuve En appliquant inductivement le résultat 2.2.5, on obtient

$$\kappa(G, K) = \frac{\prod_{i=1}^m \kappa(G_i, K_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \prod_{j \neq i} \kappa(G_j, K_j)^2}}.$$

Il ne reste plus qu'à simplifier pour obtenir le résultat. □

Soit Γ un groupe abélien fini, par le théorème de classification des groupes abéliens finis, on a

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^m (\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$$

où $n_i > 0$ pour tout $i = 1 \cdots m$.

Notons $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où 1 est en $i^{\text{ème}}$ position. Par un abus de langage, on peut dire que e_i est le générateur de $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ et donc $S = \{e_i \mid i = 1, \dots, m\}$ est un système de générateurs de Γ .

Proposition 2.2.7 *Pour Γ un groupe abélien fini, avec les notations précédentes, on a*

$$\kappa(\Gamma, S) = 2 \left[\sum_{i=1}^m \left(\sin \frac{\pi}{n_i} \right)^{-2} \right]^{-1/2}.$$

Preuve Par le corollaire précédent, et en se rappelant (voir 2.2.1) que $\kappa(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{1\}) = 2 \sin \frac{\pi}{n}$, on obtient le résultat voulu. \square

2.2.3 Les groupes diédraux

Il est intéressant de considérer à nouveau le cas des groupes diédraux pour voir combien le choix du système de générateurs est important. On a déjà vu en 2.2.1 que la constante de Kazhdan $\kappa(D_n, \{\sigma_1, \sigma_2\})$ avec $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ formé de deux symétries vaut $\kappa(D_n, \{\sigma_1, \sigma_2\}) = 2 \sin \frac{\pi}{2n}$. Mais si on veut considérer D_n comme le produit semi-direct de C_n avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il est plus naturel de considérer le système de générateurs $S = \{s, r\}$ où r est une rotation d'angle $2\pi/n$ et s est une symétrie. On va donc essayer de calculer $\kappa(D_n, \{s, r\})$; pour cela, voici un corollaire de 2.2.4.

Corollaire 2.2.8 *Si G est le produit semi-direct d'un groupe abélien N par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'injecte dans $\text{Aut}(N)$ par $\psi(-1)(n) = n^{-1} \forall n \in N$, alors pour tout compact K engendrant N , on a :*

$$\kappa(N \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (K \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \{-1\})) = \frac{2\kappa(N, K)}{\sqrt{\kappa(N, K)^2 + 4}}.$$

Preuve Soit (π, H_π) , une représentation de N sans vecteur fixe non nul telle que

$$\kappa(N, K, \pi) = \kappa(N, K).$$

Si $\rho = \text{Ind}_N^G \pi$ est la représentation induite par π de N à G , alors ρ est sans vecteur fixe non nul; si $(\xi_n)_{n \geq 0} \subset H_\pi^1$ est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K} \|\pi(k)\xi_n - \xi_n\| = \kappa(N, K),$$

alors la suite $(\nu_n)_{n \geq 0}$ dans H_ρ^1 définie par $\nu_n = ((1/\sqrt{2})\xi_n, (1/\sqrt{2})\xi_n)$ est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K} \|\rho(k)\nu_n - \nu_n\| = \kappa(N, K).$$

et les ν_n sont $\rho(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ -invariants. Comme $\kappa(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{-1\}) = 2$, on conclut par la proposition 2.2.4. \square

Ceci permet d'obtenir le résultat :

Corollaire 2.2.9 Pour D_n le groupe diédral, avec $n \geq 2$, et $S = \{r, s\}$ où r est une rotation d'angle $2\pi/n$ et r est une symétrie, on a

$$\kappa(D_n, S) = \frac{2 \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

Preuve découle du corollaire 2.2.8 et le fait que pour $n \geq 2$,

$$\kappa(C_n, \{x\}) = 2 \sin \pi/n. \quad \square$$

Bien que l'on ait calculé $\kappa(D_n, \{r, s\})$, il est intéressant de calculer aussi $\hat{\kappa}(D_n, \{r, s\})$. On connaît la liste des représentations irréductibles de D_n (voir [47]). Comme D_n a un sous-groupe abélien d'indice 2, les représentations irréductibles de D_n sont de degré 1 ou 2.

Pour n pair, la liste des représentations de degré 1 de D_n est donnée par :

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Si (π, H) est une représentation complexe de degré 1, alors $\|\pi(g)\xi - \xi\|$ est indépendant de ξ pour tout ξ dans H^1 . Donc pour toute représentation irréductible π de degré 1,

$$\kappa(D_n, S, \pi) = \max_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| \text{ pour un } \xi \text{ quelconque dans } S^1.$$

- $\psi_2 : \left. \begin{aligned} \|\psi_2(r)\xi - \xi\|^2 &= 0 \\ \|\psi_2(s)\xi - \xi\|^2 &= \|-2\xi\|^2 = 4\|\xi\|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \kappa(D_n, S, \pi_2) = 2$
- $\psi_3 : \left. \begin{aligned} \|\psi_3(r)\xi - \xi\|^2 &= \|-2\xi\|^2 = 4\|\xi\|^2 \\ \|\psi_3(s)\xi - \xi\|^2 &= \|-2\xi\|^2 = 4\|\xi\|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \kappa(D_n, S, \pi_3) = 2$
- $\psi_4 : \left. \begin{aligned} \|\psi_4(r)\xi - \xi\|^2 &= \|-2\xi\|^2 = 4\|\xi\|^2 \\ \|\psi_4(s)\xi - \xi\|^2 &= \|-2\xi\|^2 = 4\|\xi\|^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \kappa(D_n, S, \pi_4) = 2$

De même, on connaît les représentations irréductibles de degré 2 de D_n , elles sont données par les formules suivantes pour $0 < h < \frac{n}{2}$ fixé et $\omega = e^{2i\pi/n}$ (voir [47]) :

- $\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho^h(r) = \begin{pmatrix} \omega^h & 0 \\ 0 & \omega^{-h} \end{pmatrix}$
- $\rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho^h(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in C^2$ fixé, calculons $\|\rho^h(r)\xi - \xi\|$ et $\|\rho^h(s)\xi - \xi\|$

$$\begin{aligned} \|\rho^h(r)\xi - \xi\|^2 &= |(\omega^h - 1)\xi_1|^2 + |(\omega^{-h} - 1)\xi_2|^2 \\ &= |\xi_1|^2 |e^{\frac{2\pi i h}{n}} - 1|^2 + |\xi_2|^2 |e^{-\frac{2\pi i h}{n}} - 1|^2 \\ &= (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) [2 - 2\cos(\frac{2\pi h}{n})] \\ &= 2[1 - \cos(\frac{2\pi h}{n})] \quad \text{car } \|\xi\| = 1 \end{aligned}$$

Donc, comme $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, on obtient

$$\|\rho^h(r)\xi - \xi\| = \sqrt{2(1 - \cos \frac{2\pi h}{n})} = 2 \sin \frac{\pi h}{n} \quad \text{qui est indépendant de } \xi.$$

D'autre part $\|\rho^h(s)\xi - \xi\| = \left\| \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} |\xi_1 - \xi_2|$

On doit donc calculer pour h fixé,

$$\kappa(D_n, S, \rho^h(r)) = \inf_{\|\xi\|=1} \max(\|\rho^h(r)\xi - \xi\|; \|\rho^h(s)\xi - \xi\|)$$

Posons

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \max(\|\rho^h(r)\xi - \xi\|; \|\rho^h(s)\xi - \xi\|) \\ &= \max(2 \sin \frac{\pi h}{n}, \sqrt{2} |\xi_1 - \xi_2|) \quad (\text{avec } \|\xi\| = 1). \end{aligned}$$

Comme $f(\xi) \geq 2 \sin \frac{\pi h}{n}$ et que l'égalité peut être atteinte (par exemple si $\xi_1 = \xi_2$), on obtient :

$$\kappa(D_n, S, \rho^h) = 2 \sin \frac{\pi h}{n} \quad \text{avec } 0 < h < \frac{n}{2}$$

Pour n impair, on connaît aussi (voir [47]) toutes les représentations de D_n .

D'une part, les représentations de degré 1 sont les suivantes :

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

On a donc $\|\psi_2(s)\xi - \xi\| = \|\xi - 2\xi\| = 2$, d'où $K(D_n, S, \psi_2) = 2$.

D'autre part, les représentations de degré 2 sont données par les mêmes formules que dans le cas pair, c'est-à-dire que pour $0 < h < \frac{n}{2}$, on a :

- $\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix}$
- $\rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$

On traite donc de manière similaire les cas impairs et pairs et on obtient

$$\kappa(D_n, S, \rho^h) = 2 \sin \frac{\pi h}{n}.$$

En conclusion, on peut donc calculer

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}(D_n, S) &= \inf\{\kappa(D_n, S, \pi); \pi \text{ irréductibles sans point fixe non nul}\} \\ &= \inf_{0 < h < \frac{n}{2}} \left\{ 2; 2 \sin \frac{\pi h}{n} \right\} \end{aligned}$$

Il est clair que $2 \sin \frac{\pi h}{n}$ est minimal si $h = 1$. Pour le groupe D_n avec le système de générateurs $S = \{r; s\}$, on a donc

$$\hat{\kappa}(D_n, S) = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

2.2.4 Le groupe $O(2)$

Pour $O(2)$, le groupe des isométries du cercle, on peut calculer, comme pour les groupes diédraux, $\hat{\kappa}(O(2), S)$, où $S = \{s; r_\alpha | \alpha \in [0, \alpha_0]\}$ où s est une symétrie quelconque du cercle et r_α une rotation d'angle α avec $0 < \alpha_0 \leq 2\pi$ fixé. (L'intérêt étant de connaître la valeur de cette constante pour un groupe compact infini.) On connaît [47] les représentations irréductibles de $O(2)$, elles sont de degré 1 ou 2. Les représentations irréductibles de degré 1 sont les suivantes :

	r_α	sr_α
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Il est clair que $\kappa(O(2), S, \psi_2) = 2$.

Pour les représentations irréductibles de degré 2, on a ($\forall h = 1, 2, \dots$)

- $\rho^h(r_\alpha) = \begin{pmatrix} e^{ih\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-ih\alpha} \end{pmatrix}$
- $\rho^h(sr_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ih\alpha} \\ e^{ih\alpha} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho^h(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ fixé, calculons $\|\rho^h(s)\xi - \xi\|$ et $\|\rho^h(r)\xi - \xi\|$.

Il est clair que $\|\rho^h(s)\xi - \xi\| \leq 2$. De plus,

$$\|\rho^h(s)\xi - \xi\| = \left\| \begin{pmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}|\xi_1 - \xi_2|.$$

Or, en prenant $\xi_1 = -\xi_2 = 1/\sqrt{2}$, on obtient $\|\rho^h(s)\xi - \xi\| = 2$.

Concernant $\|\rho^h(r_\alpha)\xi - \xi\|$, on a

$$\begin{aligned} \|\rho^h(r_\alpha)\xi - \xi\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} (e^{ih\alpha} - 1)\xi_1 \\ (e^{-ih\alpha} - 1)\xi_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)[2 - 2\cos(h\alpha)] \\ &= 2[1 - \cos(h\alpha)] \text{ car } \|\xi\| = 1 \\ &= 4\sin^2\left(\frac{h\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

on obtient donc $\|\rho^h(r_\alpha)\xi - \xi\| = 2|\sin(\frac{h\alpha}{2})|$, et comme pour α_0 , ξ et h fixé, on a

$$\max_{\alpha \in [0, \alpha_0]} [2|\sin(\frac{h\alpha}{2})|] = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{\pi}{h} \leq \alpha_0 \\ 2\sin\frac{h\alpha_0}{2} & \text{si } \frac{\pi}{h} > \alpha_0 \end{cases}$$

Comme $\|\rho^h(s)\xi - \xi\| \leq 2$, si h est tel $\frac{\pi}{h} \leq \alpha_0$ on a que :

$\max_{g \in S} \|\rho^h(g)\xi - \xi\| = 2$ et donc $\kappa(O(2), S; \rho^h) = 2$. Si $\frac{\pi}{h} > \alpha_0$ alors

$$\max_{g \in S} \|\rho^h(g)\xi - \xi\| = \begin{cases} 2|\sin\frac{h\alpha_0}{2}| & \text{si } \sqrt{2}|\xi_1 - \xi_2| \leq 2\sin\frac{h\alpha_0}{2} \\ \sqrt{2}|\xi_1 - \xi_2| & \text{si } \sqrt{2}|\xi_1 - \xi_2| > 2\sin\frac{h\alpha_0}{2} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\kappa(O(2), S; \rho^h) = \begin{cases} 2|\sin\frac{h\alpha_0}{2}| & \text{si } \frac{\pi}{h} > \alpha_0 \\ 2 & \text{si } \frac{\pi}{h} \leq \alpha_0 \end{cases}$$

Comme c'est une fonction croissante de h le minimum est atteint en $h = 1$, on obtient donc :

$$\hat{\kappa}(O(2), S) = \begin{cases} 2|\sin\frac{\alpha_0}{2}| & \text{si } \pi > \alpha_0 \\ 2 & \text{si } \pi \leq \alpha_0 \end{cases}$$

On peut aussi regarder $O(2)$ comme le produit semi-direct $SO(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et comme la conjugaison d'une rotation r_α par la symétrie s est la rotation

$r_{-\alpha}$, par le corollaire 2.2.8, en posant $S_1 = \{r_\alpha | \alpha \in [0, \alpha_0]\}$ le système de générateurs de $SO(2)$, on a

$$\kappa(O(2), S) = \frac{2\kappa(SO(2), S_1)}{\sqrt{4 + \kappa(SO(2), S_1)^2}}.$$

La fonction $\frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , puisque

$$x \leq y \Rightarrow 4x^2(4+y^2) \leq 4y^2(4+x^2) \Rightarrow \frac{4x^2}{4+x^2} \leq \frac{4y^2}{4+y^2}.$$

A. Deutsch [22] a démontré que pour $\alpha_0 \leq \pi$, $\kappa(SO(2), S) \leq 2 \sin \frac{\alpha_0}{2}$, donc

$$\kappa(O(2), S) \leq \frac{4 \sin(\alpha_0/2)}{\sqrt{4 + 4 \sin^2(\alpha_0/2)}} \leq \frac{2 \sin(\alpha_0/2)}{\sqrt{1 + \sin^2(\alpha_0/2)}}.$$

2.3 Les constantes l^2

2.3.1 Définition et premières propriétés

Commençons par une définition.

Définition 2.3.1 Soient G un groupe localement compact, X une partie finie de G et π une représentation unitaire de G : Posons

$$\kappa_2(G, X, \pi) = \inf_{\xi \in \mathcal{H}^1} \left(\sqrt{\frac{1}{\#X} \sum_{s \in X} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2} \right)$$

Dans [20], Y. Colin de Verdière définit, comme ci-dessus, la constante de Kazhdan de G associée à π .

Il est clair que pour toute représentation $\pi \in \tilde{G}^*$, on a la relation :

$$\kappa_2(G, X, \pi) \leq \kappa(G, X, \pi) \leq \sqrt{\#X} \kappa_2(G, X, \pi).$$

Il est donc possible de définir une constante de Kazhdan l^2 :

$$\kappa_2(G, X) := \inf_{\pi \in \tilde{G}^*} \kappa_2(G, X, \pi).$$

On a clairement : $\kappa_2(G, X) \leq \kappa(G, X) \leq \sqrt{\#X} \kappa_2(G, X)$.

L'utilité de cette définition est donnée par la relation :

Lemme 2.3.2 $\kappa_2(G, X, \pi_1 \oplus \pi_2) = \min(\kappa_2(G, X, \pi_1), \kappa_2(G, X, \pi_2))$

Preuve Pour prouver cela il suffit d'observer qu'il y a bijection entre

$$\{\xi \in H_1 \oplus H_2 \mid \|\xi\| = 1\} \text{ et } \{(\lambda \xi_1, \sqrt{1-\lambda^2} \xi_2) \mid 0 \leq \lambda \leq 1, \xi_i \in H_i^1\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{s \in X} \|(\pi_1 \oplus \pi_2)(s)\xi - \xi\|^2 &= \lambda^2 \sum_{s \in X} \|\pi_1(s)\xi_1 - \xi_1\|^2 \\ &+ (1 - \lambda^2) \sum_{s \in X} \|\pi_2(s)\xi_2 - \xi_2\|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\kappa_2^2(G, X, \pi_1 \oplus \pi_2) \\ &= \frac{1}{\#X} \inf_{\substack{\xi \in H_1 \oplus H_2 \\ \|\xi\|=1}} \sum_{s \in X} \|(\pi_1 \oplus \pi_2)(s)\xi - \xi\|^2 \\ &= \frac{1}{\#X} \inf_{\substack{\xi_i \in H_i^1 \\ 0 \leq \lambda \leq 1}} \left(\lambda^2 \sum_{s \in X} \|\pi_1(s)\xi_1 - \xi_1\|^2 + (1 - \lambda^2) \sum_{s \in X} \|\pi_2(s)\xi_2 - \xi_2\|^2 \right) \\ &= \inf_{0 \leq \lambda \leq 1} (\lambda^2 \kappa_2^2(G, X, \pi_1) + (1 - \lambda^2) \kappa_2^2(G, X, \pi_2)) \end{aligned}$$

□

Ceci se généralise à une somme directe infinie de représentations

Proposition 2.3.3 $\kappa_2(G, X, \bigoplus_{i \geq 1} \pi_i) = \inf_{i \geq 1} (\kappa_2(G, X, \pi_i)).$

Preuve En effet, comme il y a bijection entre $(\bigoplus_{i \geq 1} H_i)^1$ et

$$\{(\lambda_i, \xi_i)_{i \geq 1} \mid \lambda_i \in \mathbb{C}, \sum_{i \geq 1} |\lambda_i|^2 = 1 \text{ et } \xi_i \in H_i^1, \forall i \geq 1\}$$

$$\text{et que } \left\| \sum_{s \in X} \left(\bigoplus_{i \geq 1} \pi_i \right) (s)\xi - \xi \right\|^2 = \sum_{i \geq 1} \sum_{s \in X} \|\xi_i\|^2 \left\| \frac{\pi_i(s)\xi_i}{\|\xi_i\|} - \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|} \right\|^2;$$

$$\begin{aligned} \kappa_2(G, X, \bigoplus_{i \geq 1} \pi_i)^2 &= \frac{1}{\#X} \inf_{\substack{(\lambda_i)_{i \geq 1} \\ \sum |\lambda_i|^2 = 1}} \inf_{\xi_i \in H_i^1} \sum_{i \geq 1} |\lambda_i|^2 \sum_{s \in X} \|\pi_i(s)\xi_i - \xi_i\|^2 \\ &= \inf_{\substack{(\lambda_i)_{i \geq 1} \\ \sum |\lambda_i|^2 = 1}} \sum_{i \geq 1} |\lambda_i|^2 \kappa_2(G, X, \pi_i)^2 \\ &= \inf_{i \geq 1} \kappa_2(G, X, \pi_i)^2 \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.3.4 : *Pour Γ compact, on a*

$$\kappa_2(\Gamma, X) = \inf_{\pi \in \widehat{\Gamma}^*} \kappa_2(\Gamma, X, \pi).$$

Preuve Toute représentation ρ de $\widehat{\Gamma}^*$ se décompose en somme directe d'irréductibles. □

On peut généraliser la proposition 2.3.4 au cas des groupes finiment engendrés. Plus précisément, on peut montrer que :

Proposition 2.3.5 *Soient Γ un groupe finiment engendré, S un système de générateurs fini symétrique; on a :*

$$\kappa_2(\Gamma, S) = \widehat{\kappa}_2(\Gamma, S),$$

où $\widehat{\kappa}_2(\Gamma, S)$ est l'infimum des constantes $\kappa_2(\Gamma, S, \pi)$ avec π dans $\widehat{\Gamma}^*$.

Preuve Si Γ n'a pas la propriété (T), on a $\kappa_2 = \widehat{\kappa}_2 = 0$. On peut donc supposer que Γ a la propriété (T).

Notons $h = \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} s$. Regardons h comme un élément de la C^* -algèbre maximale de Γ . Notons p le projecteur spectral associé à 1 dans $Sp(h)$. On sait que pour toute représentation π de Γ , $\pi(p)$ est le projecteur orthogonal sur les vecteurs fixes de H_π . Donc si π est sans point fixe non nul, $\pi(p) = 0$.

Comme Γ a (T), 1 est isolé dans le spectre de h ; notons ϵ la longueur du trou spectral : $1 - \epsilon = \max\{\lambda \in Sp(h) \mid \lambda \neq 1\}$.

$$\underbrace{\text{Sp}(h)}_{-1 \quad 0 \quad (1-\epsilon) \quad 1} \quad \underbrace{\epsilon}$$

Par calcul spectral, $h - p \leq 1 - \epsilon$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \kappa_2(\Gamma, S)^2 &= \inf_{\pi \in \widehat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \\ &= \inf_{\pi \in \widehat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} (2 - 2\text{Re} \langle \pi(s)\xi \mid \xi \rangle) \\ &= 2 \inf_{\pi \in \widehat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \langle \pi(1-h)\xi \mid \xi \rangle \\ &= 2 \inf_{\pi \in \widehat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \langle \pi(1-(h-p))\xi \mid \xi \rangle \quad \text{car } \pi(p) = 0 \\ &\geq 2\epsilon \end{aligned}$$

On a donc :

$$\widehat{\kappa}_2(\Gamma, S)^2 \geq \kappa_2(\Gamma, S)^2 \geq 2\epsilon.$$

On veut montrer que $\hat{\kappa}_2(\Gamma, S) = \kappa_2(\Gamma, S)$.

Supposons par l'absurde qu'on ait l'inégalité stricte $\hat{\kappa}_2(\Gamma, S)^2 > 2\epsilon$. On a comme ci-dessus :

$$\hat{\kappa}_2(\Gamma, S)^2 = \inf_{\pi \in \hat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \langle \pi(1-h)\xi | \xi \rangle.$$

On peut donc trouver un $\delta > \epsilon$ avec :

$$\begin{aligned} \delta &\leq \inf_{\pi \in \hat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \langle \pi(1-h)\xi | \xi \rangle \\ &\leq \inf_{\pi \in \hat{\Gamma}^*} \inf_{\xi \in H_\pi^1} \langle \pi(1-(h-p))\xi | \xi \rangle \end{aligned}$$

On a donc pour tout π dans $\hat{\Gamma}^*$ que

$$\pi(1-(h-p)) \geq \delta.$$

Comme la représentation triviale χ_0 satisfait aussi $\chi_0(1-(h-p)) \geq \delta$ et que les représentations irréductibles séparent les points, on obtient :

$$1 - \delta - (h-p) \geq 0.$$

Comme $\delta > \epsilon$, on a $1 - \epsilon > 1 - \delta \geq h-p$.

Par calcul spectral, $1 - \epsilon \notin Sp(h-p)$, donc $1 - \epsilon \notin Sp(h)$.

Ce qui contredit le fait que $1 - \epsilon$ est une valeur spectrale de h . \square

L'intérêt de ce corollaire est que l'on peut donc majorer et minorer les constantes de Kazhdan classiques par les constantes l_2 et que celles-ci ne dépendent que des représentations irréductibles de Γ .

Lemme 2.3.6 *Pour Γ fini, si π n'a pas de vecteur fixe non nul, alors :*

$$\kappa_2(\pi, \Gamma, \Gamma) = \sqrt{2}.$$

Preuve Si π est sans point fixe non nul, on a $\sum_{g \in \Gamma} \pi(g)\xi = 0$ pour tout

ξ dans H_π . Donc $Re(\sum_{g \in \Gamma} \langle \pi(g)\xi | \xi \rangle) = \sum_{g \in \Gamma} \langle \pi(g)\xi | \xi \rangle = 0$ pour tout ξ

dans H_π et comme

$$\begin{aligned} \sum_{s \in X} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 &= \sum_{s \in X} \langle \pi(s)\xi - \xi | \pi(s)\xi - \xi \rangle \\ &= \sum_{s \in X} (\|\pi(s)\xi\|^2 + \|\xi\|^2 - 2Re \langle \pi(s)\xi | \xi \rangle) \\ &= 2 \sum_{s \in X} (1 - Re \langle \pi(s)\xi | \xi \rangle) \\ &= 2|X| \left(1 - \frac{1}{|X|} \sum_{s \in X} Re \langle \pi(s)\xi | \xi \rangle\right), \text{ on a} \end{aligned}$$

$$\sum_{g \in \Gamma} \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 = 2|\Gamma| \text{ pour tout } \xi \text{ dans } H_{\pi}. \quad \square$$

Ce résultat est à mettre en relation avec le résultat de Deutsch et Valette ((23)) qui dit que pour un groupe compact infini, $\kappa(G, G) = \sqrt{2}$.

2.3.2 Le groupe multiplicatif des quaternions

On va considérer le sous-groupe des quaternions $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Ce cas est intéressant pour plusieurs raisons : premièrement, il nous permet de calculer un exemple de constantes de Kazhdan κ_2 et deuxièmement, il permet de voir que l'inégalité donnée à la proposition 2.2.2 est stricte dans certains cas. H n'est pas un produit semi-direct, mais on a la suite exacte courte :

$$\{1\} \rightarrow N \rightarrow H \rightarrow H/N \rightarrow \{1\}$$

avec $N \cong \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G/N \cong \{\bar{1}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour cela, nous allons calculer les constantes de Kazhdan $\kappa(H, S)$ et $\kappa_2(H, S)$ pour $S = \{-1, i, j\}$. On choisit ce système de générateurs plutôt que $\{i, j\}$ ou $\{i, j, k\}$ car il satisfait aux conditions exigées sur le système de générateurs S dans les propositions 2.2.2 et 2.2.4.

Décrivons tout d'abord toutes les représentations irréductibles de H . Comme il y a 5 classes de conjugaison, il y a 5 représentations irréductibles, et comme $\sum_{\pi \in \hat{H}} \deg(\pi)^2 = \#H$, on voit qu'il y a 4 représentations de degré 1 et une de degré 2.

Décrivons la table des caractères :

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_2	1	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1
χ_4	2	-2	0	0	0

On peut décrire explicitement π la représentation irréductible de degré 2 associée à χ_4 . Elle est définie par les matrices suivantes :

$$\pi(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\pi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \pi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ sont compatibles avec ce choix de matrices. Il est clair que $Tr(\pi) = \chi_4$ et donc π est bien la représentation irréductible cherchée.

Calculons $\hat{\kappa}(H, \{-1, i, j\})$ et $\kappa_2(H, \{-1, i, j\})$.

Pour $i = 1, 2, 3$ et pour tout $\xi \in \mathbb{S}$, on a $\|\chi_i(-1)\xi - \xi\| = 0$, d'autre part,
 $\|\chi_1(j)\xi - \xi\| = \|\chi_2(i)\xi - \xi\| = \|\chi_3(i)\xi - \xi\| = \|\chi_3(j)\xi - \xi\| = 2$
 et $\|\chi_1(i)\xi - \xi\| = \|\chi_2(j)\xi - \xi\| = 0$.

De cela, on tire que

$$\begin{aligned}\kappa(H, \{-1, i, j\}, \chi_i) &= 2 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\ \kappa_2(H, \{-1, i, j\}, \chi_1) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \kappa_2(H, \{-1, i, j\}, \chi_2) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \kappa_2(H, \{-1, i, j\}, \chi_3) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Pour la représentation π et $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in H_\pi$, on a :

$$\begin{aligned}\|\pi(-1)\xi - \xi\| &= \|-2\xi\| = 2 \\ \|\pi(i)\xi - \xi\|^2 &= |(i-1)\xi_1|^2 + |(-i-1)\xi_2|^2 \\ &= |(i-1)|^2 \|\xi\|^2 = 2 \\ \|\pi(j)\xi - \xi\|^2 &= |\xi_2 - \xi_1|^2 + |-\xi_1 - \xi_2|^2 \\ &= 2(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) = 2\end{aligned}$$

$$\max_{s \in \{-1, i, j\}} \|\pi(s)\xi - \xi\| = 2.$$

Ce qui implique que $\kappa(H, \{-1, i, j\}, \pi) = 2$ et

$$\kappa_2(H, \{-1, i, j\}, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4 + 2 + 2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit donc

$$\kappa_2(H, \{-1, i, j\}) = \min\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

et aussi

$$\hat{\kappa}(H, \{-1, i, j\}) = 2.$$

Comparons ces valeurs avec celle donnée par la proposition 2.2.2 concernant les suites exactes courtes.

Comme $\kappa(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{-1\}) = 2$, en utilisant le corollaire 2.2.5, on trouve

$$\kappa((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \{(-1, 1), (1, -1)\}) = \sqrt{2}.$$

En employant 2.2.2 on obtient

$$\kappa(H, \{-1, i, j\}) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Comme cette valeur est exactement celle de $\kappa_2(H, \{-1, i, j\})$, on n'obtient aucune information supplémentaire.

Essayons de calculer directement $\kappa(H, \{-1, i, j\})$.

Soit τ une représentation unitaire sans point fixe non nul. Par complète réductibilité, τ se décompose en somme directe hilbertienne de représentations irréductibles différentes de la représentation triviale (puisque τ n'a pas de point fixe non nul). En regroupant les représentations irréductibles par classe d'équivalence, on peut écrire τ sous la forme :

$$\tau \cong \chi_1^{n_1} \oplus \chi_2^{n_2} \oplus \chi_3^{n_3} \oplus \pi^{n_4} \text{ avec les } n_i \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} \text{ non tous nuls.}$$

On peut donc décomposer $\xi \in H_\tau$ comme $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_\pi)$

Calculons $\|\tau(s)\xi - \xi\|$ pour $s \in \{-1, i, j\}$ et $\xi \in H_\pi^1$.

$$\begin{aligned} \|\tau(-1)\xi - \xi\|^2 &= \|\chi_1^{n_1}(-1)\xi_1 - \xi_1\|^2 + \|\chi_2^{n_2}(-1)\xi_2 - \xi_2\|^2 \\ &\quad + \|\chi_3^{n_3}(-1)\xi_3 - \xi_3\|^2 + \|\pi^{n_\pi}(-1)\xi_\pi - \xi_\pi\|^2 = 4 \|\xi_\pi\|^2 \end{aligned}$$

De même, $\|\tau(i)\xi - \xi\|^2 = 4(\|\xi_2\|^2 + \|\xi_3\|^2) + 2 \|\xi_\pi\|^2$

et $\|\tau(j)\xi - \xi\|^2 = 4(\|\xi_1\|^2 + \|\xi_3\|^2) + \|\pi^{n_\pi}(j)\xi_\pi - \xi_\pi\|^2$.

Comme π est de degré 2, on peut écrire ξ_π comme

$$(\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi_{3,1}, \xi_{3,2}, \dots, \xi_{n_\pi,1}, \xi_{n_\pi,2}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\pi^{n_\pi}(j)\xi_\pi - \xi_\pi\|^2 &= \sum_{l=1}^{n_\pi} (|\xi_{l,2} - \xi_{l,1}|^2 + |-\xi_{l,1} - \xi_{l,2}|^2) \\ &= 2 \sum_{l=1}^{n_\pi} (|\xi_{l,1}|^2 + |\xi_{l,2}|^2) = 2 \|\xi_\pi\|^2 \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité étant l'identité du parallélogramme.

On a donc $\|\tau(j)\xi - \xi\|^2 = 4(\|\xi_1\|^2 + \|\xi_3\|^2) + 2 \|\xi_\pi\|^2$. Posons :

$$M(\xi) = \max\{4 \|\xi_\pi\|^2, 4(\|\xi_2\|^2 + \|\xi_3\|^2) + 2 \|\xi_\pi\|^2, 4(\|\xi_1\|^2 + \|\xi_3\|^2) + 2 \|\xi_\pi\|^2\}.$$

Pour alléger la notation, posons $x = \|\xi_1\|^2$, $y = \|\xi_2\|^2$, $z = \|\xi_3\|^2$ et $t = \|\xi_\pi\|^2$.

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \max\{4t, 4(y+z) + 2t, 4(x+z) + 2t\} \\ &= 2 \max\{2t, 2(y+z) + t, 2(x+z) + t\} \end{aligned}$$

Considérons les trois conditions suivantes :

I) $2(x + z) + t \geq 2(y + z) + t$
 qui est équivalent à $x \geq y$.

II) $2(y + z) \geq t$

III) $2(x + z) \geq t$

Distinguons les 8 cas suivants :

- 1) $x \geq y, 2(y + z) \geq t, 2(x + z) \geq t$
- 2) $x \geq y, 2(y + z) \geq t, 2(x + z) \leq t$
- 3) $x \geq y, 2(y + z) \leq t, 2(x + z) \geq t$
- 4) $x \geq y, 2(y + z) \leq t, 2(x + z) \leq t$
- 5) $x \leq y, 2(y + z) \geq t, 2(x + z) \geq t$
- 6) $x \leq y, 2(y + z) \geq t, 2(x + z) \leq t$
- 7) $x \leq y, 2(y + z) \leq t, 2(x + z) \geq t$
- 8) $x \leq y, 2(y + z) \leq t, 2(x + z) \leq t$

On voit que $M(\xi) = 2 \begin{cases} 2t & \text{dans les cas 4), 8)} \\ 2(y + z) + t & \text{dans les cas 5), 6)} \\ 2(x + z) + t & \text{dans les cas 1), 3)} \end{cases}$

Le cas 2) (resp. 7)) n'étant possible que si $x = y$, il est contenu dans le cas 6) (resp. dans le cas 3)).

On obtient

$$M(\xi) = 2 \begin{cases} 2(y + z) + t & \text{si } y \geq x \text{ et } 2(y + z) \geq t \\ 2(x + z) + t & \text{si } y \leq x \text{ et } 2(x + z) \geq t \\ 2t & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc une fonction à quatre variables qu'il faut minimiser sur la région $x + y + z + t = 1$ et $0 \leq x, y, z, t \leq 1$.

On peut donc considérer $M(\xi)$ comme une fonction de trois variables x, y et z , avec t remplacé par $1 - x - y - z$.

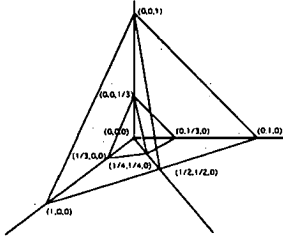
On obtient

$$M(\xi) = 2 \begin{cases} 2(y + z) + 1 - x - y - z & \text{si } y \geq x \text{ et } 2(y + z) \geq 1 - x - y - z \\ 2(x + z) + 1 - x - y - z & \text{si } y \leq x \text{ et } 2(x + z) \geq 1 - x - y - z \\ 2(1 - x - y - z) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{En sim-}$$

plifiant, on obtient

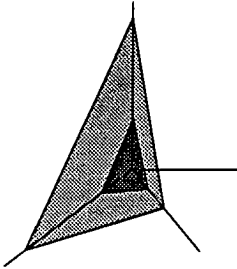
$$M(x, y, z) = 2 \begin{cases} 1 - x + y + z & \text{si } y \geq x \text{ et } x + 3y + 3z \geq 1 \\ 1 + x - y + z & \text{si } y \leq x \text{ et } 3x + y + 3z \geq 1 \\ 2(1 - x - y - z) & \text{sinon} \end{cases}$$

Le domaine de M est donné par $0 \leq x, y, z \leq 1$ et $x + y + z \leq 1$. On est ramené à chercher le minimum cette fonction sur son domaine de définition.



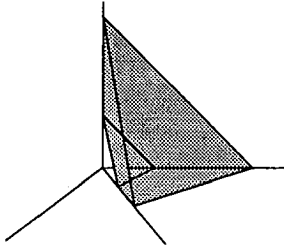
Ce domaine de découpe en trois sous-domaines

1. le premier sous-domaine



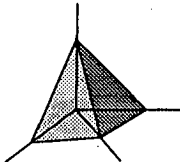
sur lequel la fonction vaut $2(1 + x - y + z)$.

2. le deuxième sous-domaine



sur lequel la fonction vaut $2(1 - x + y + z)$.

3. Et enfin le troisième sous-domaine



sur lequel la fonction vaut $4(1 - x - y - z)$.

Comme $M(x, y, z)$ est continue sur le domaine et affine sur chacun des sous-domaines polyédraux, le minimum se trouve sur un des sommets des sous-domaines. En effet, sur un domaine polyédral, une fonction affine est monotone dans la direction de chaque axe. En calculant la valeur de la fonction $M(x, y, z)$ sur chaque sommet des sous-domaines, on trouve le minimum de $M(x, y, z)$ au point $(1/4, 1/4, 0)$ et il vaut 2.

On a donc que $\kappa(H, \{-1, i, j\}, \tau) = \sqrt{2}$. Et comme τ est quelconque, on a $\kappa(H, \{-1, i, j\}) = \sqrt{2}$.

En résumé, on obtient

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}(H, \{-1, i, j\}) &= 2 \\ \kappa_2(H, \{-1, i, j\}) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \kappa(H, \{-1, i, j\}) &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

On a déjà vu que $\kappa(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{-1\}) = 2$ et que, par le corollaire 2.2.5,

$$\kappa((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2, \{(-1, 1), (1, -1)\}) = \sqrt{2}.$$

Ceci nous permet de calculer le membre de gauche de la proposition 2.2.2; celui-ci vaut : $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Or, par calcul direct, on a démontré que $\kappa(H, \{-1, i, j\})$ est égale à $\sqrt{2}$, l'inégalité est donc stricte.

Cet exemple montre bien que dans cette généralité, l'inégalité donnée par la proposition 2.2.2 ne peut pas être améliorée en une égalité, comme on a pu le faire en 2.2.4.

Si on avait considéré dans H la suite exacte courte suivante :

$$\{1\} \rightarrow N_1 \rightarrow H \rightarrow H/N_1 \rightarrow \{1\}$$

avec $N_1 \cong \{1, -1, i, -i\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $G/N_1 \cong \{\bar{1}, \bar{j}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On aurait obtenu, en remarquant que $\kappa(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \{1, 2\}) = \kappa(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \{1, 2, 3\}) = \sqrt{\frac{8}{3}}$ (voir [23]) et en employant 2.2.2 que :

$$\hat{\kappa}(H, \{-1, i, j\}) \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Chapitre 3

Constantes de Kazhdan L^2 pour les groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe de dimension finie, \mathfrak{g} son algèbre de Lie et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . On choisit $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ une base de \mathfrak{g} et on note $\Delta = - \sum_{1 \leq i \leq n} X_i^2$ le laplacien associé, qui est un élément de $U(\mathfrak{g})$.

Notre but est d'établir une nouvelle caractérisation de la propriété T pour de tels groupes en termes de propriétés spectrales de Δ , ainsi que des opérateurs $d\pi(\Delta)$ où π parcourt les représentations unitaires de G . Il s'agit d'un travail commun avec Mohammed Bekka et Paul Jolissaint qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

3.1 Définitions et premières propriétés

Soit G comme ci-dessus; on considère les éléments de \mathfrak{g} comme des champs de vecteurs invariants à gauche sur G , et on munit celui-ci d'une mesure de Haar à droite.

Toute représentation unitaire (π, H_π) de G induit une représentation $d\pi$ de \mathfrak{g} sur le sous-espace $C^\infty(H_\pi)$ de H_π formé des vecteurs ξ pour lesquels la fonction $x \mapsto \pi(x)\xi$ est C^∞ .

Cette dernière représentation se prolonge à une représentation de $U(\mathfrak{g})$ sur le même espace. Décrivons quelques propriétés de la représentation infinitésimale $d\pi$.

Pour ξ et η dans H_π , on note $\varphi_{\xi, \eta}$ la fonction de G définie par :

$$\varphi_{\xi, \eta}(g) = \langle \pi(g)\xi \mid \eta \rangle .$$

Lemme 3.1.1 *Conservons les notations ci-dessus. Si ξ appartient à $C^\infty(H_\pi)$, si η appartient à H_π et si X est un élément de \mathfrak{g} , alors le coefficient $\varphi_{\xi,\eta}$ satisfait aux égalités :*

1. $X\varphi_{\xi,\eta} = \varphi_{d\pi(X)\xi,\eta}$,
2. $h\varphi_{\xi,\eta} = \varphi_{d\pi(\Delta)\xi,\eta}$,
3. $h^n\varphi_{\xi,\eta} = \varphi_{d\pi(\Delta)^n\xi,\eta}$ pour tout $n \geq 1$.

Preuve : Par définition, on a pour tout g dans G :

$$\begin{aligned}
 (X\varphi_{\xi,\eta})(g) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\xi,\eta}(g \exp(tX)) - \varphi_{\xi,\eta}(g)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\langle \pi(\exp(tX))\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle - \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \langle \frac{\pi(\exp(tX))\xi - \xi}{t} | \pi(g^{-1})\eta \rangle \\
 &= \langle d\pi(X)\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \\
 &= \varphi_{d\pi(X)\xi,\eta}(g)
 \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité étant valable car ξ est un vecteur C^∞ relativement à π . Cela démontre la première assertion.

Remarquons que si ξ est un vecteur C^∞ relativement à π , alors il en est de même de $d\pi(X)\xi$. Cela permet de démontrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout g dans G , $(X_i^2\varphi_{\xi,\eta})(g) = \varphi_{d\pi(X_i)^2\xi,\eta}(g)$. Par linéarité, on démontre le point 2).

Le point 3) s'obtient en itérant le point 2). □

Lemme 3.1.2 *Soit X un élément de \mathfrak{g} et soit ψ une fonction C^∞ sur G telle que ψ et $X\psi$ appartiennent à $L^1(G)$. Si ξ appartient à $C^\infty(H_\pi)$ et η à H_π , on a :*

$$\int_G \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle (X\psi)(g) dg = - \int_G \langle d\pi(X)\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g) dg.$$

Preuve Soit $\epsilon > 0$ fixé; pour ξ et η non nuls, il existe un compact K de G tel que

$$\int_{G-K} (|\psi(g)| + |(X\psi)(g)|) dg < \frac{\epsilon}{2(\|\xi\| + \|d\pi(X)\xi\|) \|\eta\|}.$$

Soit $\chi \in C_c^\infty(G)$ tel que : $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(g) = 1$ pour tout g dans un voisinage de K , et $\sup_{g \in G} |(X\chi)(g)| \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors :} \quad & \left| \int_G \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle (X\psi)(g) dg + \int_G \langle d\pi(X)\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g) dg \right| \\ & \leq \left| \int_G \{ \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle (X\psi)(g) + \langle d\pi(X)\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g) \} \chi(g) dg \right| \\ & \quad + \int_{G-K} (\|\xi\| + \|d\pi(X)\xi\|) \|\eta\| (|(X\psi)(g)| + |\psi(g)|) dg \\ & < \frac{\epsilon}{2} + \left| \int_G \{ \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle (X\psi)(g)\chi(g) \right. \\ & \quad \left. + \langle d\pi(X)\xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g)\chi(g) \} dg \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or,} \quad & \int \langle \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle (X\psi)(g)\chi(g) dg \\ & = \int \varphi_{\xi,\eta}(g)(X\psi)(g)\chi(g) dg = - \int [X(\varphi_{\xi,\eta\chi})](g)\psi(g) dg \\ & = - \int (X\varphi_{\xi,\eta})(g)(\chi\psi)(g) dg - \int \varphi_{\xi,\eta}(g)(X\chi)(g)\psi(g) dg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & \left| \int_G \varphi_{\xi,\eta}(g)(X\chi)(g)\psi(g) dg \right| = \left| \int_{G-K} \varphi_{\xi,\eta}(g)(X\chi)(g)\psi(g) dg \right| \\ & \leq 2 \|\xi\| \|\eta\| \int_{G-K} |\psi(g)| dg < \epsilon \end{aligned}$$

car $(X\chi)(g) = 0$ pour tout g dans un voisinage de K . \square

L'opérateur $d\pi(\Delta)$ est essentiellement autoadjoint [32], et on note h_π sa fermeture.

Corollaire 3.1.3 *Si ψ est une fonction C^∞ sur G telle que ψ , $X_i\psi$ et $X_i^2\psi$ appartiennent à $L^1(G)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors pour tout ξ dans $D(h_\pi)$ et pour tout η dans H_π :*

$$\int \varphi_{\xi,\eta}(g)(\Delta\psi)(g) dg = \int \varphi_{h_\pi\xi,\eta}(g)\psi(g) dg.$$

Preuve En vertu des lemmes 3.1.1 et 3.1.2, l'égalité est vraie pour tout $\xi \in C^\infty(H_\pi)$. Si $\xi \in D(h_\pi)$, il existe une suite $(\xi_k)_{k \geq 1}$ dans $C^\infty(H_\pi)$ telle que

$$\|\xi_k - \xi\| + \|h_\pi\xi_k - h_\pi\xi\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors : } & \left| \int \int \varphi_{\xi, \eta}(g)(\Delta\psi)(g)dg - \int \langle h_\pi \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g)dg \right| \\
& \leq \left| \int \langle \xi - \xi_k | \pi(g^{-1})\eta \rangle (\Delta\psi)(g)dg \right| \\
& \quad + \left| \int \langle \xi_k | \pi(g^{-1})\eta \rangle (\Delta\psi)(g)dg - \int \langle h_\pi \xi_k | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g)dg \right| \\
& \quad + \left| \int \langle h_\pi \xi_k - h_\pi \xi | \pi(g^{-1})\eta \rangle \psi(g)dg \right| \\
& \leq (\|\xi - \xi_k\| + \|h_\pi \xi_k - h_\pi \xi\|) \|\eta\| \int (|\Delta\psi(g)| + |\psi(g)|)dg \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.4 *Pour une représentation unitaire de G , (π, H_π) , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. π a un vecteur fixe non nul;
2. 0 est valeur propre de $d\pi(\Delta)$;
3. 0 est valeur propre de h_π .

Preuve : 1) \Rightarrow 2) Supposons que la représentation π ait un vecteur fixe non nul ξ . Cela implique que ξ est un vecteur C^∞ et que $\pi(\exp(tX))\xi = \xi$ pour tout t réel et tout X dans \mathfrak{g} . Donc $d\pi(X)\xi = 0$.

Pour les éléments de la base $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$, ξ est dans le noyau de $d\pi(X_i)$. Donc par définition de h , on a $d\pi(\Delta)\xi = -\sum_{1 \leq i \leq n} d\pi(X_i)^2 \xi = 0$, ce qui montre que 0 est valeur propre de $d\pi(\Delta)$.

2) \Rightarrow 3) est évident puisque $d\pi(\Delta) \subset h_\pi$ implique que $\text{Ker}(d\pi(\Delta))$ est contenu dans $\text{Ker}(h_\pi)$.

3) \Rightarrow 1) Soit ξ dans $D(h_\pi) \cap \text{Ker}(h_\pi)$ non nul. Si $\eta \in H_\pi$ et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on a au sens des distributions sur G :

$$(\Delta\varphi_{\xi, \eta}, \psi) = (\varphi_{\xi, \eta}, \Delta\psi) = (\varphi_{h_\pi \xi, \eta}, \psi) = 0.$$

Ainsi, $\Delta\varphi_{\xi, \eta} = 0$, et puisque Δ est hypo-elliptique (voir [32]), $\varphi_{\xi, \eta}$ est une fonction C^∞ sur G .

Comme η est quelconque, cela revient à dire que $g \mapsto \pi(g)\xi$ est faiblement C^∞ et donc, par le lemme 1.2.3 dû à Poulsen, $g \mapsto \pi(g)\xi$ est fortement C^∞ . Ainsi, on a $h_\pi \xi = d\pi(\Delta)\xi$. Mais de plus $d\pi(\Delta)\xi = 0$, donc

$$\sum_{i=1}^n \|d\pi(X_i)\xi\|^2 = \langle d\pi(\Delta)\xi | \xi \rangle = 0.$$

Puisque $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ est une base de \mathfrak{g} , on a $d\pi(X)\xi = 0$ pour tout élément de \mathfrak{g} . L'exponentielle étant un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans \mathfrak{g} sur un voisinage V de e dans G , on a $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout g dans V . Comme G est connexe, V engendre G et ainsi ξ est fixe sous l'action de G par π . \square

3.2 Caractérisation spectrale de la présence de vecteurs presque invariants

Le but de la section est de montrer :

Théorème 3.2.1 *Pour une représentation unitaire (π, H_π) de G , les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. π a presque des vecteurs invariants;
2. 0 est valeur propre approchée de $d\pi(\Delta)$;
3. 0 est valeur spectrale de h_π .

Preuve 2) \Rightarrow 3) découle du fait qu'une valeur propre approchée de $d\pi(\Delta)$ est aussi une valeur propre approchée de h_π .

3) \Rightarrow 2)

On suppose que 0 est une valeur propre approchée de h_π , cela signifie qu'il existe une suite $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ dans $D(h_\pi)$, de norme 1 telle que $\|h_\pi \xi_n\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. De plus, comme h_π est la fermeture de $d\pi(\Delta)$, il existe pour tout n un vecteur η_n dans C^∞ et de norme 1 tel que $\|h_\pi \xi_n - d\pi(\Delta)\eta_n\| + \|\xi_n - \eta_n\| < 1/n$. On en déduit que 0 est une valeur propre approchée de $d\pi(\Delta)$.

2) \Rightarrow 1)

Si 0 est une valeur propre approchée de $d\pi(\Delta)$, il existe une suite $\{\xi_m\}_{m \geq 0}$ de vecteurs de norme 1 dans $C^\infty(H_\pi)$ telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d\pi(\Delta)\xi_m\| = 0$. Ainsi, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|d\pi(X_i)\xi_m\| = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

$$\text{Posons } V = \left\{ \prod_{1 \leq i \leq n} \exp(t_i X_i) \mid -1 \leq t_i \leq 1 \right\}.$$

V est un voisinage compact de e dans le groupe de Lie G (voir la proposition 4.1 du chapitre VII de [31]).

De plus, on a pour tout X dans \mathfrak{g} et tout t :

$$\pi(\exp(tX))\xi_m - \xi_m = \int_0^t \pi(\exp(sX))d\pi(X)\xi_m ds.$$

Si $\epsilon > 0$ et si $0 \leq t \leq 1$, on en déduit que :

$$\|\pi(\exp(tX_i))\xi_m - \xi_m\| \leq t \|\mathrm{d}\pi(X_i)\xi_m\| \leq \epsilon/n$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout m assez grand.

Ce qui implique que $\|\pi(g)\xi_m - \xi_m\| \leq \epsilon$ pour tout g dans V dès que m est assez grand.

On a donc démontré que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des vecteurs (ϵ, V) -invariants. Comme V est un voisinage de e dans G qui est connexe, V engendre G . Pour K un compact de G , il existe un recouvrement fini de K par des translatés de V , c.à d. un nombre fini d'éléments g_i de G tels que $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq r} g_i V$. De plus chaque g_i est un produit fini d'éléments de V . On peut déduire de cela qu'il existe un vecteur (ϵ, K) -invariant.

Pour démontrer 1) \Rightarrow 3), on a besoin des compléments suivants :

Notons h la fermeture de Δ agissant sur $L^2(G)$. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe sur $L^2(G)$ de générateur infinitésimal $-h$ (voir 1.2.8).

Par [41], pour tout $t > 0$ il existe une fonction p_t appartenant à $C^\infty \cap L^1(G)$, à valeurs positives, d'intégrale 1 telle que $T(t) = \rho(p_t)$ où ρ désigne la représentation régulière droite sur $L^2(G)$.

Comme $T(t) = T(t)^*$, on a $p_t = p_t^*$, et p_t est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = -\Delta p_t.$$

Lemme 3.2.2 Δp_t appartient à $L^1(G)$ et

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\| \frac{p_{t+s} - p_t}{s} + \Delta p_t \right\|_1 = 0, \text{ pour tout } t > 0.$$

Preuve Notons ρ_1 la représentation régulière droite de G sur $L^1(G)$. Suivant le théorème 4, p. 599 de [41], notons pour tout $t > 0$ et $f \in L^1(G)$:

$$P^t f = \int_G p_t(y) \rho_1(y) f dy.$$

D'après le lemme 7.1 et le théorème 4 de [41], $P^t f$ est un vecteur analytique au sens suivant : il existe $s > 0$ tel que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} \|d\rho_1(X_{i_1}) \dots d\rho_1(X_{i_m}) P^t f\|_1 s^m < \infty.$$

En particulier, $p_t = P^{t/2} p_{t/2}$ est analytique au sens ci-dessus, et $h p_t \in L^1(G)$.

La dernière affirmation est une conséquence du théorème des accroissements finis et du théorème de la convergence dominée. \square

Définissons maintenant pour tout $t \geq 0$:

$$S(t) = \pi(p_t), \text{ si } t > 0 \text{ et } S(0) = \mathbb{I}_{H_\pi}.$$

$(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur H_π de générateur infinitésimal A . De plus, $S(t)^* = S(t)$ pour tout t car $p_t = p_t^*$.

Par le corollaire 1.,6, p.41 de [43], A est autoadjoint. En fait :

Lemme 3.2.3 Avec les notations ci-dessus, on a : $A = -h_\pi$.

Preuve Soit $\xi \in D(h_\pi)$. Montrons :

(*) Pour tout $t > 0$, $S(t)\xi$ appartient à $D(A)$ et $AS(t)\xi = -S(t)h_\pi\xi$.

Pour cela fixons η dans H_π . On a pour $0 < s \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{S(s)S(t)\xi - S(t)\xi}{s} \middle| \eta \right\rangle &= \frac{1}{s} \langle \pi(p_{t+s})\xi - \pi(p_t)\xi \middle| \eta \rangle \\ &= \frac{1}{s} \int (p_{t+s}(g) - p_t(g)) \langle \xi \middle| \pi(g^{-1})\eta \rangle dg \\ &= \int \frac{p_{t+s}(g) - p_t(g)}{s} \varphi_{\xi, \eta}(g) dg. \end{aligned}$$

En vertu du lemme 3.2.2 et du corollaire 3.1.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{S(s)S(t)\xi - S(t)\xi}{s} \middle| \eta \right\rangle &= \int (-\Delta p_t)(g) \varphi_{\xi, \eta}(g) dg \\ &= - \langle S(t)h_\pi\xi \middle| \eta \rangle. \end{aligned}$$

Par le théorème 1.3, p.43 de [43], $S(t)\xi$ appartient à $D(A)$ et $A\xi = -S(t)h_\pi\xi$. Cela démontre (*). Or, $\|S(t)\xi - \xi\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et

$$\|AS(t)\xi - (-h_\pi\xi)\| = \|-S(t)h_\pi\xi + h_\pi\xi\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Puisque A est un opérateur fermé, ξ appartient à $D(A)$ et $A\xi = -h_\pi\xi$.

Ainsi, $-h_\pi \subset A$, et comme ils sont autoadjoints, on a : $-h_\pi = A$. \square

Lemme 3.2.4 Si (π, H_π) est une représentation unitaire de G admettant presque des vecteurs invariants et si μ est une mesure de probabilité sur G , le spectre de l'opérateur $\pi(\mu) = \int \pi(g)d\mu(g)$ contient 1.

Preuve Soit $(\xi_k)_{k \geq 1}$ une suite de vecteurs unités de H_π telle que φ_{ξ_k, ξ_k} converge vers 1 uniformément sur tout compact de G .

Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi(\mu)\xi_k - \xi_k\| = 0$.

Soit $\epsilon > 0$; il existe un compact K dans G tel que $\mu(G - K) \leq \epsilon$. On a donc

$$\|\pi(\mu)\xi_k - \xi_k\| \leq \int_K \|\pi(g)\xi_k - \xi_k\| d\mu(g) + 2\epsilon < 3\epsilon$$

dès que k est assez grand. \square

On est alors en mesure de terminer la preuve du théorème 3.2.1 :

1) \Rightarrow 3) : Par le lemme 3.2.4 $\pi(p_t)$ admet 1 dans son spectre, pour tout $t > 0$.

Puisque, par le lemme 3.2.3, $-h_\pi$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(\pi(p_t))_{t \geq 0}$, 0 est dans le spectre de h_π par calcul fonctionnel. \square

Il peut paraître étonnant d'avoir dû passer par le noyau de l'équation de la chaleur, pour démontrer 1) \Rightarrow 3). On aurait pu penser que si pour un voisinage V compact de e dans G , il existait une famille ξ_n de vecteurs $(1/n, V)$ -invariants et C^∞ , alors les ξ_n étaient des vecteurs propres approchés de $d\pi(\Delta)$ associés à la valeur propre approchée 0. En d'autres termes, que si les ξ_n étaient des vecteurs $(1/n, V)$ -invariants, alors $\|d\pi(\Delta)\xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

L'exemple suivant montre que ce n'est pas toujours le cas.

Exemple 3.2.5

Soit $G = \mathbb{R}$. Définissons tout d'abord, la famille de représentations unitaires de degré 2 suivantes :

$$s \mapsto \pi_n(s) = \begin{pmatrix} \exp(is/n) & 0 \\ 0 & \exp(isn) \end{pmatrix}.$$

On va s'intéresser à la représentation unitaire π définie par $s \mapsto \bigoplus_{n \geq 0} \pi_n(s)$.

Définissons $\xi_n = (0, \dots, 0, \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \sqrt{\frac{1}{n}}, 0, \dots)$ où les composantes non nulles de ξ_n sont en $2n$ et $(2n+1)^{\text{ième}}$ positions.

Par construction les ξ_n sont de norme 1. Si on se fixe I un compact de \mathbb{R} , pour tout s dans I , on a :

$$\begin{aligned} \|\pi(s)\xi_n - \xi_n\|^2 &= |(\exp(is/n) - 1)\sqrt{\frac{n-1}{n}}|^2 + |(\exp(isn) - 1)\sqrt{\frac{1}{n}}|^2 \\ &= |(\exp(is/n) - 1)|^2 \frac{n-1}{n} + |\exp(isn) - 1|^2 \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Comme $|\exp(is/n) - 1|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ uniformément pour s dans I et que $|\exp(isn) - 1|^2 \leq 4$, les ξ_n forment bien une famille de vecteurs de plus en plus fixes sous l'action de I par π .

Pourtant cette famille de ξ_n ne satisfait pas $\|d\pi(\Delta)\xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En effet, on remarque que :

$$d\pi(\Delta)\xi_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}, n^2\sqrt{\frac{1}{n}}, 0, \dots).$$

La norme de $d\pi(\Delta)\xi_n$ se comporte comme $n^{3/2}$; elle ne tend donc pas vers 0. Ces vecteurs ξ_n ne sont donc pas analytiques au sens de Nelson.

Lemme 3.2.6 *Soit h un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H , de domaine $D(h)$, et dont le spectre est borné inférieurement. Alors*

$$\min(Sp h) = \inf_{\xi \in D(h)^1} \langle h\xi | \xi \rangle .$$

Preuve Comme h est auto-adjoint, son spectre résiduel est vide. Ce qui permet de dire que toute valeur spectrale est une valeur propre approchée. Pour toute valeur spectrale λ , il existe donc une suite $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ de vecteurs dans $D(h)$ et de norme 1 tels que $\langle h\xi_n | \xi_n \rangle \rightarrow \lambda$.

Ceci implique que :

$$\inf_{\xi \in D(h)^1} \langle h\xi | \xi \rangle \leq \lambda .$$

Notons λ_0 le minimum du spectre de h (qui existe puisque le spectre de h est réel, fermé et borné inférieurement). L'inégalité précédente appliquée à λ_0 donne :

$$\inf_{\xi \in D(h)^1} \langle h\xi | \xi \rangle \leq \lambda_0 .$$

Prouvons l'autre inégalité. Soit $h = \int \lambda dE(\lambda)$ la décomposition spectrale de h ; on obtient $\langle h\xi | \xi \rangle = \int \lambda \langle dE(\lambda)\xi | \xi \rangle$ et $\langle \xi | \xi \rangle = \int \langle dE(\lambda)\xi | \xi \rangle$ pour tout ξ fixé dans $D(h)$.

Par conséquent, pour ξ dans $D(h)^1$:

$$\langle h\xi | \xi \rangle = \int_{\text{spec}(h)} \lambda \langle dE(\lambda)\xi | \xi \rangle \geq \lambda_0 \int_{\text{spec}(h)} \langle dE(\lambda)\xi | \xi \rangle = \lambda_0 .$$

Ceci termine la preuve. □

Définition 3.2.7 *Pour π une représentation unitaire de G et $\{X_i\}_{i=1 \dots n}$ une base de \mathfrak{g} , on définit la constante $k(h_\pi, G)$ par*

$$k(h_\pi, G) = \inf_{\xi \in D(h_\pi)^1} \langle h_\pi \xi | \xi \rangle .$$

Corollaire 3.2.8

$$k(h_\pi, G) = \min Sp(h_\pi) = \inf_{\xi \in C^\infty(H_\pi)^1} \sum_{i=1}^n \|d\pi(X_i)\xi\|^2$$

Preuve La première égalité découle du lemme précédent. D'autre part, il est clair que

$$k(h_\pi, G) \leq \inf_{\xi \in \{C^\infty(H_\pi)\}^1} \langle h_\pi \xi | \xi \rangle = \inf_{\xi \in \{C^\infty(H_\pi)\}^1} \sum_{i=1}^n \|d\pi(X_i)\xi\|^2.$$

Pour obtenir l'autre inégalité, il suffit de montrer l'existence, pour tout ϵ positif, d'un vecteur C^∞ η de norme 1 satisfaisant

$$|k(h_\pi, G) - \langle d\pi(\Delta)\eta | \eta \rangle| < \epsilon.$$

Par définition, il existe ξ dans $D(h_\pi)$ de norme 1 satisfaisant

$$0 \leq \langle h_\pi \xi | \xi \rangle - k(h_\pi, G) < \epsilon/3.$$

Comme h_π est la clôture de $d\pi(\Delta)$, il existe η un vecteur C^∞ de norme 1 arbitrairement proche de ξ pour la norme de graphe. On a donc :

$$\begin{aligned} |k(h_\pi, G) - \langle d\pi(\Delta)\eta | \eta \rangle| &\leq |k(h_\pi, G) - \langle d\pi(\Delta)\xi | \xi \rangle| + \\ &|\langle h_\pi \xi | \xi \rangle - \langle h_\pi \xi | \eta \rangle| + \\ &|\langle h_\pi \xi | \eta \rangle - \langle d\pi(\Delta)\eta | \eta \rangle| \end{aligned}$$

Comme le premier terme est arbitrairement petit et que les deux autres termes peuvent être arbitrairement proches de 0 (en choisissant η convenablement), on conclut. \square

Proposition 3.2.9 *G a la propriété T si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que $k(h_\pi, G) \geq \epsilon$ pour toute représentation unitaire π de G sans point fixe non nul.*

Preuve \Leftarrow : Si π a presque des vecteurs invariants, par le théorème 3.2.1, $k(h_\pi, G) = \min Sp(h_\pi) = 0$. Comme $k(h_\sigma, G) \geq \epsilon$ pour toute représentation unitaire σ sans point fixe non nul, π a un vecteur fixe non nul.

\Rightarrow : Si G a T , alors pour toute représentation unitaire sans point fixe non nul, $k(h_\pi, G) > 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite de représentations unitaires $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ sans point fixe non nul telle que $k(h_{\pi_n}, G) \rightarrow 0$. La représentation $\sigma = \bigoplus_{n \geq 0} \pi_n$ est telle que $k(h_\sigma, G) = 0$. En effet, par l'absurde, il existe, pour chaque n , un vecteur ξ_n dans $C^\infty(H_{\pi_n})$, de norme 1 tel que $\langle d\pi_n(h)\xi_n | \xi_n \rangle < 1/n$.

Le vecteur η_n défini par $\eta_n = (0, \dots, 0, \underset{n^{\text{e pos}}}{\xi_n}, 0, \dots)$ est un vecteur C^∞ dans H_σ^1 et $\langle h_\sigma \eta_n | \eta_n \rangle = \langle h_{\pi_n} \xi_n | \xi_n \rangle < 1/n$.

On en déduit que $k(h_\sigma, G) = 0$ et donc que 0 est dans le spectre de h_σ . Par la proposition 3.2.1, cela implique que σ a presque des vecteurs invariants. Comme G a T , σ a un vecteur fixe non nul. Une composante non nulle de ce vecteur est donc fixe dans un certain H_{π_n} , ce qui est contradictoire avec le fait que les représentations π_n sont sans point fixe non nul. \square

On peut définir $K(h, G) = \inf_{\pi \in \hat{G}^*} k(h_\pi, G)$ la constante de Kazhdan L^2 .

Corollaire 3.2.10 G a la propriété T si et seulement si $K(h, G) > 0$.

Ce corollaire est une conséquence directe de la proposition précédente.

3.3 Comparaison avec les constantes classiques

Proposition 3.3.1 Soient G un groupe de Lie connexe, $\{X_i\}_{i=1 \dots n}$ une base de \mathfrak{g} et $\epsilon > 0$. Pour S défini par $\{e^{tX_i} \mid t \in [0, \epsilon], i \in \{1 \dots n\}\}$, on a :

$$\kappa(G, S) \leq \epsilon \sqrt{K(h, G)}.$$

Preuve Fixons une représentation unitaire π sans point fixe non nul et ξ un vecteur C^∞ de norme 1.

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| &= \sup_{t \in [0, \epsilon]} \max_{i \in \{1 \dots n\}} \|\pi(e^{tX_i})\xi - \xi\| \\ &= \sup_{t \in [0, \epsilon]} \max_{i \in \{1 \dots n\}} \left\| \int_0^t \pi(e^{sX_i}) d\pi(X_i)\xi ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in [0, \epsilon]} \max_{i \in \{1 \dots n\}} \int_0^t \|\pi(e^{sX_i}) d\pi(X_i)\xi\| ds \\ &\leq \epsilon \max_{i \in \{1 \dots n\}} \|d\pi(X_i)\xi\| \\ &\leq \epsilon \sqrt{\sum_{i=1}^n \|d\pi(X_i)\xi\|^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \kappa(G, S, \pi) &= \inf_{\xi \in H_\pi^1} \sup_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| \\ &\leq \inf_{\xi \in (C^\infty H_\pi)^1} \sup_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| \\ &\leq \epsilon \inf_{\xi \in (C^\infty H_\pi)^1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|d\pi(X_i)\xi\|^2} \\ &\leq \epsilon \sqrt{k(h_\pi, G)} \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure en prenant l'infimum sur les représentations unitaires sans point fixe non nul. \square

Notons que 3.3.1 donne une autre preuve de l'implication (\Rightarrow) de 3.2.9.

Chapitre 4

Cohomologie des groupes et propriété (T)

4.1 Le problème de Gromov

Commençons par donner les deux définitions suivantes :

Définition 4.1.1 *Un groupe dénombrable Γ a la propriété d'approximation de Haagerup si la C^* -algèbre abélienne $C_0(\Gamma)$ a une unité approchée constituée de fonctions définies positives sur Γ .*

Définition 4.1.2 *Un groupe Γ est a - T -menable s'il admet une action affine α sur un espace de Hilbert H telle que pour tous sous-ensembles B, C bornés de H , l'ensemble des éléments g dans Γ pour lesquels $\alpha(g)B$ rencontre C est fini (i.e. $\#\{g \in \Gamma \mid \alpha(g)B \cap C \neq \emptyset\} < \infty$).*

Gromov appelle une telle action, *une action propre*, car il s'agit de la généralisation naturelle d'une action propre sur un espace métrique localement compact.

Définition 4.1.3 *Soient X un espace topologique, et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que f est propre, si pour tout $M > 0$, il existe un compact $K \subset X$ tel que $|f(x)| > M$ pour tout $x \in X - K$.*

Ce qui permet de dire que $\{x \in X \mid |f(x)| \leq M\}$ est compact. Dans le cas où X est discret, cela revient à dire que cet ensemble est fini.

Au cours de la conférence d'Oberwolfach du 5 au 11 septembre 1993, Gromov posa la question suivante :

Est-ce que tout groupe dénombrable moyennable est a - T -menable ? Cette question est reprise au paragraphe 7.E de [29].

Nous allons montrer que la réponse à cette question est affirmative. Ce résultat est un travail commun entre Mohamed Bekka, Alain Valette et moi-même (voir [6]).

Pour cela nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant

Lemme 4.1.4 *Pour un groupe dénombrable Γ , les énoncés suivants sont équivalents :*

1. Γ a la propriété d'approximation de Haagerup.
2. Γ admet une fonction propre et conditionnellement de type négatif.
3. Γ est a - T -menable.

Preuve de 4.1.4 1) \Leftrightarrow 2) est démontrée par Akemann et Walter (théorème 10 dans [2]).

2) \Rightarrow 3). Soit ψ une fonction propre et conditionnellement de type négatif sur Γ . Par la proposition 14 du chapitre 5 de [19], il existe une action isométrique affine α de Γ sur un espace de Hilbert H telle que pour tout g dans Γ , $\psi(g) = \|\alpha(g)(0)\|^2$.

Montrons que α est une action propre. Pour cela, vérifions que pour tout $r > 0$, l'ensemble $F_r = \{g \in \Gamma \mid \alpha(g)B_r \cap B_r \neq \emptyset\}$ est fini (B_r est la boule fermée de rayon r).

Si g est dans F_r , on trouve $\xi \in B_r$ tel que $\|\alpha(g)\xi\| \leq r$. Comme $\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$, on a $\|b(g)\| = \|\alpha(g)(0)\| \leq \|\alpha(g)\xi\| + \|\pi(g)\xi\| \leq 2r$. Ce qui revient à dire que $\psi(g) \leq 4r^2$. Donc F_r est contenu dans $\{g \in \Gamma \mid \psi(g) \leq 4r^2\}$. Cet ensemble est fini, car on a supposé que ψ est une fonction propre.

3) \Rightarrow 2). Si α est une action affine isométrique propre de Γ sur H , alors la fonction $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(g) = \|\alpha(g)(0)\|^2$ est conditionnellement de type négatif (voir paragraphe 13 du chapitre 5 de [19]). De plus comme l'action α est propre, on en déduit que ψ est propre. \square

Fixons les notations suivantes : si (π, H_π) une représentation de Γ sur $l^2(\Gamma)$, notons $\infty\pi$ la somme directe d'un nombre dénombrable de copies de π , agissant sur $\infty H_\pi := H_\pi \oplus H_\pi \oplus \dots$ la somme directe hilbertienne d'un nombre dénombrable de copies de H_π .

Proposition 4.1.5 *Un groupe Γ dénombrable infini moyennable admet une action isométrique affine α propre sur $\infty l^2(\Gamma)$ telle que la partie linéaire de α est $\infty\lambda_\Gamma$.*

Preuve Soit $(F_k)_{k \geq 1}$ une famille croissante de sous-ensembles finis de Γ telle que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \Gamma.$$

Par la propriété de Følner, on trouve pour tout $k \geq 1$, un sous-ensemble U_k de Γ tel que, pour tout $g \in F_k$, on a :

$$\frac{\#\{gU_k\Delta U_k\}}{\#U_k} < 2^{-k}.$$

Soit ξ_k la fonction caractéristique normalisée de U_k ,

$$\xi_k(x) = \begin{cases} (\#U_k)^{-1/2} & \text{si } x \in U_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $\|\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k\|^2 = \frac{\#\{gU_k\Delta U_k\}}{\#U_k}$ pour tout $g \in \Gamma$. Posons, pour $g \in \Gamma$ fixé, $b(g) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} k(\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k)$. Pour g fixé, cette série converge dans $\infty l^2(\Gamma)$; en effet, pour $g \in F_n$, on a

$$\|\bigoplus_{k=n}^{\infty} k(\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k)\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \|\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k\|^2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} k^2 2^{-k} < \infty.$$

Comme

$$\begin{aligned} b(gh) &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} k(\lambda_\Gamma(gh)\xi_k - \lambda_\Gamma(g)\xi_k + \lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k) \\ &= \bigoplus_{k=0}^{\infty} \{k[\lambda_\Gamma(g)(\lambda_\Gamma(h)\xi_k - \xi_k)] + k(\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k)\} \\ &= \infty \lambda_\Gamma(g) \bigoplus_{k=0}^{\infty} k(\lambda_\Gamma(h)\xi_k - \xi_k) + \bigoplus_{k=0}^{\infty} k(\lambda_\Gamma(g)\xi_k - \xi_k) \\ &= \infty \lambda_\Gamma(g)b(h) + b(g), \end{aligned}$$

$b(\cdot)$ est un cocycle relativement à $\infty \lambda_\Gamma$. Donc en définissant $\alpha(g)\xi$ par : $\alpha(g)\xi = \infty \lambda_\Gamma(g)\xi + b(g)$, on obtient une action isométrique affine sur $\infty l^2(\Gamma)$ dont la partie linéaire est $\infty \lambda_\Gamma$.

Il suffit de définir ψ par $\psi(g) = \|b(g)\|^2$ pour obtenir une fonction conditionnellement de type négatif. Cette fonction est propre puisque pour tout $r > 0$, l'ensemble $C_r = \{g \in \Gamma \mid \|b(g)\| \leq r\}$ est fini.

En effet, pour r fixé, prenons N naturel $\geq r$; alors pour $g \in C_r$, on a

$$N^2 \|\lambda_\Gamma(g)\xi_N - \xi_N\|^2 \leq \|b(g)\|^2 \leq r^2.$$

Donc $\#(gU_N\Delta U_N) \leq \#U_N$ ou $\#U_N/2 \leq \#(gU_N \cap U_N)$. Mais l'ensemble des h dans Γ tels que $\#U_N/2 \leq \#(hU_N \cap U_N)$ est clairement fini. Comme ψ est une fonction propre et conditionnellement de type négatif, on déduit, comme dans la preuve de l'implication 2) \Rightarrow 3) du lemme 4.1.4 que α est une action propre. \square

Remarque 4.1.6 Il est connu (voir le chapitre 4 de [19]) qu'un groupe dénombrable n'a pas la propriété T si et seulement si Γ admet une action

affine isométrique avec des orbites non bornées sur un certain espace de Hilbert. Pour un groupe dénombrable moyennable, l'action α décrite dans la preuve de la proposition 4.1.5 a des orbites non bornées, on en déduit donc que $H^1(\Gamma, \infty\lambda_\Gamma) \neq \{0\}$.

Guichardet (dans [30] corollaire 2.4 du chapitre III) a aussi prouvé que de tels groupes admettent une action isométrique affine possédant des orbites non bornées sur $l^2(\Gamma)$ et dont la partie linéaire est λ_Γ . La preuve étant non constructive, on ne sait pas si une telle action est propre ou non.

4.2 Quelques propriétés de $H^1(\Gamma, \pi)$

On a vu (1.3.4) que la propriété (T) se caractérise pour un groupe G par l'annulation du premier groupe de cohomologie relativement à toutes les représentations unitaires (ou orthogonales) de G . Comme la représentation de G la plus naturelle est la représentation régulière gauche λ_G , il est intéressant de voir ce qu'implique l'annulation de $H^1(G, \lambda_G)$. Dans un article commun [7], Bekka et Valette ont étudiés pour Γ un groupe infini, finiment engendré, le premier groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \lambda_\Gamma)$ relativement à la représentation régulière sur $l^2(\Gamma)$.

Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant :

Proposition 4.2.1 (Bekka-Valette) *Pour un groupe infini Γ , finiment engendré et non moyennable, il existe des isomorphismes naturels entre*

$$H^1(\Gamma, \lambda_G), HD(G(\Gamma, X))/\mathbb{C}, \text{ et } H^1EL_2(G(\Gamma, X)).$$

Précisons ce que sont les espaces $HD(G(\Gamma, X))/\mathbb{C}$ et $H^1EL_2(G(\Gamma, X))$.

Si X est un système de générateurs de Γ , non nécessairement symétrique, on définit comme en 1.5.3, le graphe de Cayley $G(\Gamma, X)$ de Γ , ainsi que $G(\Gamma, X)^0$ et $G(\Gamma, X)^1$. Pour alléger la notation, on identifie $G(\Gamma, X)^0$ à Γ et on note E l'ensemble des arêtes de $G(\Gamma, X)$. Avec les notations employées en 1.4.4 pour définir le Laplacien combinatoire Δ , $HD(G(\Gamma, X))$ est défini ainsi :

$$HD(G(\Gamma, X)) = \{f \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid \Delta f = 0 \text{ et } df \in l^2(E)\}.$$

Il est clair que les constantes sont contenues dans $HD(G(\Gamma, X))$. D'où le fait que $HD(G(\Gamma, X))/\mathbb{C}$ est bien défini. On définit aussi

$$H^1EL_2(G(\Gamma, X)) = \{\xi \in l^2(E) \mid d^*\xi = 0 \text{ et } \xi \in d(\mathcal{F}(\Gamma))\}.$$

$H^1EL_2(G(\Gamma, X))$ est appelé le premier groupe de cohomologie L^2 de $G(\Gamma, X)$. Il est clair que d induit un isomorphisme entre $HD(G(\Gamma, X))/\mathbb{C}$ et

$H^1EL_2(G(\Gamma, X))$. $H^1EL_2(G(\Gamma, X))$ est un module sur l'algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma)$ de Γ ; sa dimension de von Neumann se note $b_{(2)}^1(\Gamma)$ et s'appelle le *premier nombre de Betti L^2* de Γ ; notons que $b_{(2)}^1(\Gamma) = 0$ si et seulement si $H^1EL_2(G(\Gamma, X)) = \{0\}$.

Lemme 4.2.2 $H^1(G, \pi)$ s'injecte dans $H^1(G, \infty\pi)$.

Preuve Notons $i : H_\pi \rightarrow \infty H_\pi$ l'injection qui envoie identiquement H_π sur la première composante de ∞H_π ($i(\xi) = (\xi, 0, \dots)$).

Soit b un cocycle de G relativement à π ; $i \circ b$ est un cocycle de G par rapport à $\infty\pi$, car i entrelace π et $\infty\pi$.

De plus l'image par i du cobord relativement à π définie par l'élément ξ est le cobord relativement à $\infty\pi$ défini par l'élément $i(\xi)$.

Il est clair que $i : Z^1(G, \pi) \rightarrow Z^1(G, \infty\pi)$ est une application linéaire. L'application i passe donc au quotient (i.e. $\bar{i} : H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(G, \infty\pi)$) en posant $\bar{i}(\bar{b}) = \overline{i \circ b}$.

Montrons que cette application est injective. Supposons que $\bar{i}(\bar{b}) = \bar{0}$. Cela revient à dire que $i \circ b$ appartient à $B^1(G, \infty\pi)$.

Donc il existe $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ dans ∞H_π tel que pour tout $g \in G$, $i \circ b(g) = \infty\pi(g)\xi - \xi$. Comme $i \circ b(g) = (b(g), 0, \dots)$ on a $\pi(g)\xi_j = \xi_j$ pour tout $j \geq 2$ et $\pi(g)\xi_1 - \xi_1 = b(g)$ pour tout $g \in G$. Donc $b \in B^1(G, \pi)$. \square

Lemme 4.2.3 Si π est une représentation de G qui ne possède pas presque des vecteurs invariants, alors l'application linéaire $\alpha : H_\pi \rightarrow B^1(G, \pi)$ définie par $\xi \mapsto (g \mapsto \pi(g)\xi - \xi)$ est un isomorphisme topologique où la topologie sur $B^1(G, \pi)$ est la topologie induite par celle définie sur $Z^1(G, \pi)$ au paragraphe 1.3.

Preuve : α est clairement surjective.

Montrons que α est injective. Supposons que $\alpha(\xi) \equiv 0$. Ceci veut dire que $\|\alpha(\xi)(g)\| = \|\pi(g)\xi - \xi\| = 0$ pour tout $g \in G$ et donc $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$. Comme π est sans point fixe non nul, on a $\xi = 0$.

Montrons que α est continue. Comme π est unitaire, pour tout $g \in G$, $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq 2 \|\xi\|$. Donc, en particulier, $\nu_K(\alpha(\xi)) \leq 2 \|\xi\|$.

Il reste encore à montrer que α^{-1} l'est aussi. Comme π n'a pas de vecteurs presque invariants, il existe $\epsilon > 0$ et un compact K_0 dans G tels que pour tout $\xi \in H_\pi^1$,

$$\max_{g \in K_0} \|\pi(g)\xi - \xi\| > \epsilon = \epsilon \|\xi\| = \epsilon \|\alpha^{-1} \circ \alpha(\xi)\|.$$

Mais $\max_{g \in K_0} \|\pi(g)\xi - \xi\| = \max_{g \in K_0} \|\alpha(\xi)(g)\| = \nu_{K_0}(\alpha(\xi))$. Comme α est surjective, en posant $b = \alpha(\xi)$, on a que $\sup_K (\nu_K(b)) \geq \nu_{K_0}(b) \geq \epsilon \|\alpha^{-1}(b)\|$ pour tout b dans $B^1(G, \pi)$. Donc α^{-1} est continue. \square

Lemme 4.2.4 Soient G un groupe et π une représentation unitaire de G sans point fixe non nul. Sont équivalents :

1. π ne possède pas presque des vecteurs invariants.
2. $B^1(G, \pi)$ est fermé dans $Z^1(G, \pi)$.
3. $H^1(G, \pi)$ est séparé.

Ce résultat se trouve sous une forme un peu différente dans [19], p.48.

Preuve :

L'équivalence entre 2) et 3) est claire.

Démontrons 1) \Rightarrow 2). Cette implication vient du lemme 4.2.3. En effet $B^1(G, \pi)$ est une partie complète, donc fermée, de $Z^1(G, \pi)$.

Démontrons 2) \Rightarrow 1) : Supposons que $B^1(G, \pi)$ soit fermé dans $Z^1(G, \pi)$. Comme $Z^1(G, \pi)$ est un espace de Fréchet, $B^1(G, \pi)$ en est un également. L'application $\alpha : H_\pi \rightarrow B^1(G, \pi)$ est une bijection continue (l'injectivité vient de l'hypothèse : π sans point fixe non nul). Par le théorème de Banach (cf 12.16.8 de [24]), α^{-1} est continu.

On trouve donc une partie compacte K de G et une constante $C > 0$ telle que

$$\|\xi\| \leq C \nu_K(\alpha(\xi)) = C \max_{g \in K} \|\pi(g)\xi - \xi\|$$

pour tout $\xi \in H_\pi$. En particulier, pour tout $\xi \in H_\pi^1$:

$$\frac{1}{C} \leq \max_{g \in K} \|\pi(g)\xi - \xi\| .$$

Donc π ne possède pas presque des vecteurs invariants. □

Proposition 4.2.5 Soit π une représentation unitaire de G sans vecteur fixe non nul. Sont équivalentes :

1. $H^1(G, \pi) = \{0\}$.
2. $H^1(G, \infty\pi) = \{0\}$.

Preuve : 2. \Rightarrow 1. découle immédiatement du lemme 4.2.2.

Pour 1. \Rightarrow 2., Démontrons tout d'abord les deux assertions suivantes :

1. π a un vecteur fixe non nul $\Leftrightarrow \infty\pi$ a un vecteur fixe non nul.
2. π a presque des vecteurs invariants $\Leftrightarrow \infty\pi$ a presque des vecteurs invariants

Si $\xi \in H_\pi$ est fixe sous l'action de G par π , alors $(\xi, 0, \dots) \in \infty H_\pi$ est fixe sous l'action de G par $\infty\pi$. Réciproquement, si $(\xi_1, \xi_2, \dots) \in \infty H_\pi$ est fixe sous l'action de G par $\infty\pi$ et non nul alors toute composante ξ_i non nulle est fixe sous l'action de G par π . Ceci démontre la première assertion.

Pour la seconde, démontrons l'équivalence suivante : pour $\epsilon > 0$ et pour K compact de G , π a un vecteur (ϵ, K) -invariant si et seulement si $\infty\pi$ a un vecteur (ϵ, K) -invariant.

Si π a un vecteur (ϵ, K) -invariant, alors il existe $\xi \in H_\pi^1$ satisfaisant $\|\pi(g)\xi - \xi\| < \epsilon$ pour tout $g \in K$. Donc le vecteur $\eta = (\xi, 0, \dots)$ appartient à ∞H_π , est de norme 1 et est (ϵ, K) -invariant, puisque

$$\|\infty\pi(g)\eta - \eta\|^2 = \sum_{i \geq 1} \|\pi(g)\eta_i - \eta_i\|^2 = \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 < \epsilon^2.$$

Donc ν est un vecteur (ϵ, K) -invariant de $\infty\pi$.

Pour $\xi \in H_\pi^1$, posons $\varphi_\xi(g) = \langle \pi(g)\xi | \xi \rangle$ le coefficient de π associé à ξ . Soit $A = \{\varphi_\xi | \xi \in H_\pi^1\}$; A est contenu dans la boule unité de $L^\infty(G)$. Comme $\infty\pi$ possède presque des vecteurs invariants, on trouve une suite $(\eta_n)_{n \geq 1} \subset (\infty H_\pi)^1$ telle que $\langle \infty\pi(g)\eta_n | \eta_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ uniformément sur tout compact de G . Posons $\eta_n = (\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \dots)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \infty\pi(g)\eta_n | \eta_n \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle \pi(g)\eta_{n,k} | \eta_{n,k} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_{n,k}\|^2 \varphi_{\frac{\eta_{n,k}}{\|\eta_{n,k}\|}}(g) \end{aligned}$$

Notons \bar{A} la fermeture de A pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Comme $\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_{n,k}\|^2 = 1$, on voit que 1 est dans l'enveloppe convexe fermée de \bar{A} , notée $\text{conv}\bar{A}$. D'autre part, 1 est clairement un point extrême de $\text{conv}\bar{A}$. Par le théorème de Krein-Milman, les points extrémaux de $\text{conv}\bar{A}$ sont dans \bar{A} , et donc 1 appartient à \bar{A} . Cela veut dire que π possède presque des vecteurs invariants (cette preuve est inspirée de la page 144 de [45]).

De cette équivalence, on déduit directement la deuxième assertion. Il reste donc à montrer 1) \Rightarrow 2) proprement dit. $H^1(G, \pi)$ étant nul, il est séparé; et comme π est sans point fixe non nul, par le lemme 4.2.4, π ne possède pas presque des vecteurs invariants. Par les deux assertions, cela implique que $\infty\pi$ ne possède pas presque des vecteurs invariants et est sans vecteur fixe non nul. Ce qui permet de dire que $B^1(G, \infty\pi)$ est fermé dans $Z^1(G, \infty\pi)$.

Par le lemme 1.3.5, $B^1(G, \infty\pi)$ est dense dans $Z^1(G, \infty\pi)$. Ce qui montre que $B^1(G, \infty\pi) = Z^1(G, \infty\pi)$ et donc $H^1(G, \infty\pi) = \{0\}$. \square

Corollaire 4.2.6 $H^1(G, \lambda) = \{0\} \Leftrightarrow H^1(G, \infty\lambda) = \{0\}$.

Preuve : Si G est non compact, ce corollaire est une conséquence évidente de la proposition 4.2.5. D'autre part, si G est compact, alors G a la propriété (T) et, par 1.3.4, $H^1(G, \pi) = \{0\}$ pour toute représentation unitaire de G . \square

Ce corollaire répond à une question que pose A. Valette dans "Some open problems around Kazhdan's property (T)", appendice non publié de [52].

Proposition 4.2.7 Soit Γ un réseau dans G . Si π est une représentation de G , $H^1(G, \pi)$ s'injecte dans $H^1(\Gamma, \pi|_{\Gamma})$.

Preuve Comme $\Gamma \subset G$, l'application T de $Z^1(G, \pi)$ dans $Z^1(\Gamma, \pi|_{\Gamma})$ qui consiste à restreindre un cocycle de G à Γ (i.e. $T(b) = b|_{\Gamma}$ pour tout b dans $Z^1(G, \pi)$) est une application linéaire continue de $Z^1(G, \pi)$ dans $Z^1(\Gamma, \pi|_{\Gamma})$.

De plus, pour tout $\xi \in H_{\pi}$, la restriction du cobord de G associé à ξ relativement à π est le cobord de Γ associé à ξ relativement à $\pi|_{\Gamma}$.

Ceci nous permet de dire que l'application T passe au quotient; on a donc

$$T : H^1(G, \pi) \rightarrow H^1(\Gamma, \pi|_{\Gamma}).$$

Montrons encore que l'application T est injective.

Comme Γ est un réseau, il existe une mesure de probabilité μ sur l'espace homogène G/Γ invariante à gauche sous l'action de G . Supposons que $b \in H^1(G, \pi)$ est tel qu'il existe $\xi \in H_{\pi}$ avec $b(\gamma) = \pi(\gamma)\xi - \xi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Montrons qu'il existe $\zeta \in H_{\pi}$ tel que $b(g) = \pi(g)\zeta - \zeta$ pour tout $g \in G$.

Définissons l'action isométrique affine $\alpha : G \rightarrow \text{Isom}(H_{\pi})$ par

$$\alpha(g)\nu = \pi(g)\nu - b(g) \text{ pour tout } \nu \in H_{\pi} \text{ et pour tout } g \in G.$$

On remarque que pour $\gamma \in \Gamma$: $\alpha(\gamma)\xi = \pi(\gamma)\xi - b(\gamma) = \xi$. Ceci permet de définir l'application continue $\beta : G/\Gamma \rightarrow H_{\pi}$ par $\beta(\bar{g}) = \alpha(g)\xi$ pour tout $\bar{g} \in G/\Gamma$. Comme $\alpha(g\gamma)\xi = \alpha(g)\alpha(\gamma)\xi = \alpha(g)\xi$, β est bien définie.

Posons $\zeta = \int_{G/\Gamma} \beta(\bar{g}) d\mu(\bar{g})$. Par l'invariance à gauche de la mesure μ , ζ est invariant par G sous l'action de α :

$$\alpha(g)\zeta = \pi(g)\zeta - b(g) = \zeta \text{ pour tout } g \in G.$$

Ce qui est équivalent à

$$b(g) = \pi(g)\zeta - \zeta \text{ pour tout } g \in G.$$

\square

Corollaire 4.2.8 (*Wang, [53]*) *Si Γ a la propriété (T), G l'a aussi.*

Preuve Soit π une représentation unitaire (ou orthogonale) de G . Il est clair que $\pi|_{\Gamma}$ une représentation unitaire (ou orthogonale) de Γ . Mais comme Γ a (T), $H^1(\Gamma, \pi|_{\Gamma}) = \{0\}$ (1.3.4). Par la proposition 4.2.7, cela implique que $H^1(G, \pi) = \{0\}$. On conclut en employant encore une fois 1.3.4. \square

Corollaire 4.2.9 (*Cheeger-Gromov-Paschke, [12]*) *Si Γ est un réseau dans $G = PSL_2(\mathbb{R})$, alors $b_{(2)}^1(\Gamma) > 0$.*

Preuve

On se souvient que $\lambda_G|_{\Gamma} = \infty\lambda_{\Gamma}$. D'autre part, on a $H^1(G, \lambda_G) \neq \{0\}$ par la proposition 4 du chapitre 8 de [30]; par 4.2.7 et 4.2.6, on a successivement $H^1(\Gamma, \infty\lambda_{\Gamma}) \neq \{0\}$ et $H^1(\Gamma, \lambda_{\Gamma}) \neq \{0\}$. Comme d'autre part Γ est non moyennable, on a $H^1(\Gamma, \lambda_{\Gamma}) \cong H^1EL_2(G(\Gamma, X))$ par 4.2.1, et donc $b_{(2)}^1(\Gamma) > 0$. \square

Corollaire 4.2.10 (*Guichardet [30]*) *Soit G un groupe de Lie simple non localement isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors $H^1(G, \lambda_G) = \{0\}$.*

Preuve Soit Γ un réseau dans G . On a $H^1(\Gamma, \lambda) = \{0\}$ par le théorème D de [7], donc $H^1(\Gamma, \infty\lambda_{\Gamma}) = \{0\}$ par 4.2.6, donc $H^1(G, \lambda_G) = \{0\}$ par 4.2.7 (en se rappelant que $\lambda_G|_{\Gamma} \cong \infty\lambda_{\Gamma}$). \square

Chapitre 5

Les opérateurs d'adjacence sur des graphes de Cayley pour des groupes à un relateur.

Dans un article en commun avec Alain Valette [15], nous nous sommes intéressés à certaines propriétés des groupes à un relateur. Nous avons donné des estimations du rayon spectral et de la norme des opérateurs d'adjacence h_S et h_X et nous avons démontré un résultat générique concernant le rayon spectral de h_X . Soit $\Gamma = \langle X, r \rangle$ un groupe à un relateur. Rappelons que l'on suppose toujours $\#X \geq 2$ et $|r| > 2$ (voir 1.5.1).

5.1 Estimations de rayons spectraux

Commençons par quelques définitions personnelles.

Définition 5.1.1 *Un mot $\omega \in \mathbb{F}_X$ est positif s'il est non vide et s'il ne contient que des générateurs (c.à.d. des éléments de X) avec l'exposant $+1$.*

De plus tout mot ω dans \mathbb{F}_X peut s'écrire de manière unique comme produit alterné de mots positifs, (i.e. $\omega = \omega_1^{\pm 1} \omega_2^{\mp 1} \cdots \omega_n^{\pm 1}$ où ω_i sont des mots positifs).

On dit que ω alterne suffisamment si $n \geq 4$, i.e. il y a au moins trois changements de signes dans ω .

Définissons aussi

Définition 5.1.2 *Pour $\epsilon > 0$ fixé, on dit que $\omega \in \mathbb{F}_X$ est ϵ -équilibré si la décomposition de ω en produit alterné de mots positifs, $\omega = \omega_1^{\pm 1} \omega_2^{\mp 1} \cdots \omega_n^{\pm 1}$, est telle que $|\omega_i| \leq \epsilon |\omega|$ pour tout i allant de 1 à n .*

Il est clair que si ω est ϵ -équilibré, le nombre de changements de signes est supérieur ou égal à $1/\epsilon$. Donc si ω est ϵ -équilibré avec $\epsilon \leq 1/4$, alors ω alterne suffisamment. Avec ces deux notions, on peut donner un premier résultat concernant le rayon spectral de h_X .

Proposition 5.1.3 *Soit Γ un groupe à un relateur; supposons que la présentation $\Gamma = \langle X, r \rangle$ soit 1/4-équilibrée et satisfasse un algorithme de Dehn (cette dernière hypothèse étant vérifiée si la présentation satisfait une condition de petite simplification $C'(1/6)$). Alors X engendre un semi-groupe libre dans Γ et donc $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$.*

Preuve : Soit N le sous-groupe normal engendré par r dans \mathbb{F}_X . Fixons un mot réduit $\omega \in N$. Grâce à l'algorithme de Dehn, on trouve un sous-mot u de ω qui est aussi un préfixe d'un certain $r' \in \{r\}^*$ (r' est un conjugué cyclique de r ou de r^{-1}) avec $|u| > \frac{|r|}{2}$. Comme la présentation est 1/4-équilibrée, on voit que u , et à fortiori ω contient au moins deux changements de signes dans sa décomposition en produit alterné de mots positifs. Maintenant soient v_1, v_2 deux mots positifs distincts dans \mathbb{F}_X . Comme $v_1 v_2^{-1}$ a exactement un changement de signe dans ses exposants, cela implique que $v_1 v_2^{-1}$ n'appartient pas à N , et donc v_1 est distinct de v_2 dans Γ . Ceci démontre que le semi-groupe engendré par X dans Γ est libre. Comme la condition $C'(1/6)$ implique que Γ est hyperbolique (1.6.4), par le théorème 1.5.6 on a $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$. \square

Remarque 5.1.4

1. L'intérêt de la proposition 5.1.3 réside dans la facilité d'en vérifier les hypothèses. Il est donc facile de déterminer si X engendre un semi-groupe libre dans Γ . Ce résultat est à mettre en parallèle avec le très célèbre Freiheitssatz de Magnus 1.5.8, qui donne des conditions pour l'existence de sous-groupes libres de Γ engendrés par des parties de X .
2. A la page 100 de [18], les auteurs affirment sans preuve que, dans le groupe de surface Γ_g de genre $g \geq 2$ avec sa présentation standard

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle,$$

$X = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ engendre un semi-groupe libre. La proposition 5.1.3 donne une preuve de cette affirmation.

On a vu dans la proposition une condition suffisante pour avoir $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$; réciproquement, voyons ce que l'on peut déduire de cette égalité.

Lemme 5.1.5 *Chacun des énoncés implique le suivant :*

- i) $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$;
- ii) X engendre un semi-groupe libre;
- iii) la relation r alterne suffisamment.

Preuve : i) \Rightarrow ii) découle immédiatement du point b) du théorème 1.5.6.

Pour montrer l'implication ii) \Rightarrow iii), on suppose, par contraposée, que r n'alterne pas assez et l'on montre que X n'engendre pas un semi-groupe libre. Il y a trois cas à considérer :

- a) r n'a pas de changement de signe dans ses exposants, i.e. r ou r^{-1} est un mot positif; on a donc un mot positif qui représente le neutre dans Γ ;
- b) r a exactement un changement de signe; supposons donc que r s'écrit $r = \omega_1 \omega_2^{-1}$, avec ω_1, ω_2 des mots positifs distincts; alors ω_1 et ω_2 représentent le même élément dans le semi-groupe engendré par X dans Γ ;
- c) r a exactement deux changements de signe, i.e. r ou r^{-1} est de la forme $\omega_1 \omega_2^{-1} \omega_3$, où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont des mots positifs; alors en permutant cycliquement on obtient $\omega_3 \omega_1 \omega_2^{-1}$ et on est ramené au cas précédent.

□

Les implications de 5.1.5 ne sont pas des équivalences : pour cela, regardons deux exemples.

Exemple 5.1.6 :

Le premier de ces exemples montre que l'implication ii) \Rightarrow i) n'a pas lieu en général (il semble que cet exemple ait été connu de Y. Guivarc'h). Considérons le groupe à un relateur $\Gamma = \langle y, z : yzy^{-1}z^{-1}yz^{-1} \rangle$. On affirme que, pour $X = \{y, z\}$, on a $r(h_X) = 1$ et que X engendre un semi-groupe libre. Pour voir cela, choisissons un autre système de générateurs. Posons $x = zy^{-1}$; avec les générateurs x, y , le groupe Γ a la présentation célèbre

$$\Gamma = \langle x, y : yxy^{-1}x^{-2} \rangle$$

(Γ est le premier groupe de Baumslag-Solitar). Γ est résoluble, et donc moyennable, d'où $r(h_X) = 1$. Soit H le sous-groupe de Γ engendré par x . La relation

$$(*) \quad yxy^{-1} = x^2$$

permet de voir Γ comme une extension HNN de H relativement au monomorphisme $\Theta : H \rightarrow H$ défini par $x^k \rightarrow x^{2k}$. Γ agit donc sur un arbre T , dont

nous rappelons la définition ici (voir [48], 1.1.4, 1.5.1). L'espace homogène Γ/H est l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes de T : on définit l'extrémité d'une arête γH comme le sommet γH , et l'origine de γH comme le sommet $\gamma y^{-1}H$; il suit de la relation (*) que ceci est bien défini.

L'arbre T qui en résulte est l'arbre homogène de degré 3 avec, à chaque sommet, une arête qui y arrive et deux qui en partent. On appelle descendants d'ordre n du sommet H les 2^n sommets qui sont à distance n de H et atteints en suivant des arêtes orientées. Pour prouver que y et z engendrent un semi-groupe libre dans Γ , il suffit de prouver l'affirmation suivante : tout descendant d'ordre n de H peut être écrit comme ωH , où ω est un mot positif de longueur n en y et z .

Remarquons que cette écriture est nécessairement unique, puisqu'il y a 2^n mots positifs de longueur n dans y et z . On prouve l'affirmation par induction sur n , le cas $n = 0$ étant évident. Ainsi, posons γH un descendant d'ordre $n + 1$ de H ; alors $\gamma y^{-1}H$ est un descendant d'ordre n de H , ainsi par hypothèse d'induction, on a $\gamma y^{-1}H = \omega H$ pour un certain mot positif ω de longueur n en y et z . Donc $\omega = \gamma y^{-1}x^k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Si k est pair, on a $\omega = \gamma x^{k/2}y^{-1}$, i.e. $\gamma H = \omega y H$; si k est impair, on a $\omega = \gamma x^{(k+1)/2}y^{-1}x^{-1}$, i.e. $\gamma H = \omega z H$. Autant ωy que ωz sont des mots positifs de longueur $n + 1$ en y et z .

Exemple 5.1.7 :

Dans le lemme 5.1.5, l'implication *iii*) \Rightarrow *ii*) n'est pas vraie non plus en général. Pour voir cela, soit $n \geq 1$ un entier fixé, et considérons le groupe $\Gamma = \langle a, b : a(ab^{-1})^{n+1} \rangle$. La relation r alterne suffisamment. Posons $r' = (ab^{-1})^n a^2 b^{-1}$, qui est une permutation cyclique de r ; alors $r^{-1}ar'a^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$, ce qui montre bien que X n'engendre pas un semi-groupe libre, puisque $ab = ba$.

On peut même déduire plus de cette information. Par la propriété universelle de \mathbb{Z}^2 , on sait que Γ est un quotient de \mathbb{Z}^2 ; comme le vecteur $(n + 2, -n - 1)$ est primitif dans \mathbb{Z}^2 , on vérifie facilement que Γ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Cet exemple montre typiquement l'absence de petite simplification (1.6.1).

Voyons d'autres groupes à un relateur où l'on peut montrer que X engendre un semi-groupe libre. Commençons par définir deux sous-groupes particuliers de \mathbb{F}_X .

Définition 5.1.8 Soit \mathbb{F}_X le groupe libre sur X . On note H_r (resp. H_l) le sous-groupe de \mathbb{F}_X engendré par tous les éléments xy^{-1} avec $x, y \in X$ (resp. le sous-groupe de \mathbb{F}_X engendré par $y^{-1}x$).

Proposition 5.1.9 *Soit $\Gamma = \langle X : r \rangle$ un groupe à un relateur, avec $r \in H_r$. Alors X engendre un semi-groupe libre dans Γ et $r(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$. De plus $Sp(h_X)$ est une réunion de cercles concentriques centrés en 0.*

Pour prouver cette proposition ainsi qu'un autre résultat (5.2.1 dans la section 5.2) nous allons avoir besoin de deux lemmes, ainsi que de la définition de certaines transformations de Nielsen.

Commençons par fixer les notations. Pour $\Gamma = \langle X : r \rangle$ un groupe à un relateur; fixons $y \in X$. On définit un nouveau système de générateurs X_y comme

$$X_y = \{xy^{-1} : x \in X, x \neq y\} \cup \{y\};$$

on a clairement $\#X_y = \#X$. Posons de plus r_y comme étant le mot r écrit dans l'alphabet X_y ; plus précisément, si on définit $x' = xy^{-1}$ pour $x \in X, x \neq y$, le mot r_y est obtenu de r par le changement de variable (ou transformation de Nielsen) $T_y : \begin{cases} x \rightarrow x'y & (x \neq y) \\ y \rightarrow y. \end{cases}$

Dans le cas des groupes libres \mathbb{F}_X , les transformations de Nielsen (donc en particulier T_y) changent un système libre de générateurs X en un autre système libre de générateurs. Pour plus de détails concernant les transformations de Nielsen, voir [39].

On peut encore définir r'_y comme la réduction cyclique de r_y . Avec ces notations, on a :

Lemme 5.1.10 *Si r est un mot cycliquement réduit dans \mathbb{F}_X , alors y est le seul élément qui peut disparaître dans r quand T_y est appliqué. Plus précisément, si on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ l'ensemble ordonné des éléments dans $X \cup X^{-1} - \{y, y^{-1}\}$ apparaissant dans r (i.e. $r = y^{\nu_1} \alpha_1 y^{\nu_2} \alpha_2 y^{\nu_3} \dots y^{\nu_l} \alpha_l y^{\nu_{l+1}}$ où $\nu_i \in \mathbb{Z}$), alors l'ensemble ordonné dans r_y et donc dans r'_y est $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$.*

Preuve : T_y est un isomorphisme de \mathbb{F}_X sur \mathbb{F}_{X_y} . Remarquons que T_y^{-1} est défini sur les générateurs de \mathbb{F}_{X_y} par $T_y^{-1}(x') = xy^{-1}$ pour $x' \in X_y - \{y\}$ et $T_y^{-1}(y) = y$. Alors pour $r = y^{\nu_1} \alpha_1 y^{\nu_2} \alpha_2 y^{\nu_3} \dots y^{\nu_l} \alpha_l y^{\nu_{l+1}}$, on a :

$$\begin{aligned} r_y &= T_y(r) = T_y(y^{\nu_1} \alpha_1 y^{\nu_2} \alpha_2 y^{\nu_3} \dots y^{\nu_l} \alpha_l y^{\nu_{l+1}}) \\ &= T_y(y^{\nu_1}) T_y(\alpha_1) T_y(y^{\nu_2}) T_y(\alpha_2) \dots T_y(y^{\nu_l}) T_y(\alpha_l) T_y(y^{\nu_{l+1}}) \\ &= y^{\nu_1} \alpha'_1 y^{\nu_2} \alpha'_2 y^{\nu_3} \dots y^{\nu_l} \alpha'_l y^{\nu_{l+1}} \end{aligned}$$

Supposons que α'_i et α'_{i+1} se simplifient dans r_y . Alors en appliquant T_y^{-1} , on voit que r ne peut pas contenir α_i et α_{i+1} , ce qui est contradictoire. Ainsi l'ensemble ordonné de r_y est exactement $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$.

Comme r est cycliquement réduit, par un argument similaire, on conclut que l'on ne peut pas simplifier α'_1 et α'_l par une permutation cyclique de r_y . Ainsi $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_l)$ est aussi l'ensemble ordonné de r'_y . Ce qui conclut la preuve de 5.1.10. \square

Lemme 5.1.11 *Pour r cycliquement réduit dans \mathbb{F}_X , les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) $r \in H_r \cup H_l$;
- (ii) Pour tout $y \in X$, la lettre y n'apparaît pas dans r'_y ;
- (iii) Il existe $y \in X$ tel que y n'apparaît pas dans r'_y .

Preuve : (i) \Rightarrow (ii) Supposons que r soit dans H_r ; on peut donc écrire $r = \prod_{i=1}^n a_i b_i^{-1}$ avec $a_i, b_i \in X$.

Il existe trois type de facteurs $a_i b_i^{-1}$:

1. $a, b \in X - \{y\}$: alors $T_y(ab^{-1}) = a'y y^{-1}(b')^{-1} = a'(b')^{-1}$
2. $T_y(ay^{-1}) = a'y y^{-1} = a'$
3. $T_y(ya^{-1}) = y(a'y)^{-1} = (a')^{-1}$.

Donc r_y ne contient pas y ce qui implique que r'_y ne le contient pas non plus.

Si r est dans H_l alors l'élément $s = yry^{-1}$ appartient à H_l . Ainsi y n'apparaît pas dans s_y et s_y est cycliquement réduit (en effet r est cycliquement réduit, d'où, en employant le lemme 5.1.10, $s_y = r'_y$).

(ii) \Rightarrow (iii) est évident.

(iii) \Rightarrow (i) On suppose que y n'apparaît pas dans r'_y et on analyse r en plusieurs pas. On sait que $r = a_1 \cdots a_n$ est un mot dans l'alphabet $X \cup X^{-1}$. Regardons l'ensemble ordonné $(a_{i_1}, \dots, a_{i_l})$ de toutes les lettres dans r différentes de $\{y, y^{-1}\}$. Par le lemme 5.1.10, l'ensemble ordonné correspondant dans r'_y est $(a'_{i_1}, \dots, a'_{i_l})$. On va employer systématiquement l'argument suivant : supposons qu'après avoir appliqué T_y à chaque lettre de r , on trouve un mot r_y dans lequel y apparaît et qu'il n'y ait pas de simplification évidente pour l'enlever, alors il est réellement impossible d'enlever y , parce qu'on devrait tout d'abord enlever un a'_{i_j} , ce qui contredirait le lemme 5.1.10.

Premier pas : r n'a pas de sous-mot de la forme ab ou $a^{-1}b^{-1}$, avec $a, b \in X - \{y\}$. En effet, si c'était le cas, en appliquant T_y , on devrait obtenir soit $a'yb'$ soit $(a')^{-1}y^{-1}(b')^{-1}$ et y apparaîtrait dans r'_y .

Deuxième pas : r ne contient pas y^2 ou y^{-2} . Pour montrer cela, on suppose par l'absurde que r contient un tel sous-mot et on montre que r'_y contient y ou y^{-1} . Il y a trois cas à considérer.

1. r contient $a^{\pm 1}y^n b^{\pm 1}$ avec $n \geq 2$, ($a \neq y \neq b$). Si les exposants de a et de b sont positifs, alors $ay^n b$ devient $a'y^{n+1}b'$ après T_y . Si les exposants de a et de b sont différents, $ay^n b^{-1}$ devient $a'yy^n y^{-1}(b')^{-1} = a'y^n (b')^{-1}$ et $a^{-1}y^n b$ devient $(a')^{-1}y^n b'$. Finalement, si les exposants de a and b sont négatifs, $a^{-1}y^n b^{-1}$ devient $(a')^{-1}y^{n-1}(b')^{-1}$. Le même raisonnement fonctionne pour n négatif avec $|n| \geq 2$.
2. r commence par $y^n b^{\pm 1}$ ($b \in X - \{y\}$). Supposons tout d'abord $n \geq 2$. Comme r est cycliquement réduit, r se termine par une certaine lettre $a \in X \cup X^{-1} - \{y^{-1}\}$. Alors $r_y = T_y(r)$ ne peut pas se terminer par y^{-1} , ainsi, il n'y aura pas de simplification possible en réduisant cycliquement r_y pour obtenir r'_y . D'autre part, si r commence par $y^n b$, alors r_y commence par $y^n b'$, et si r commence par $y^n b^{-1}$, r_y commence par $y^{n-1}(b')^{-1}$. Puisque $n \geq 2$, y apparaît dans r'_y . Le même raisonnement peut être fait pour $n \leq -2$.
3. Par des arguments similaires, on résoud le cas où r se termine par $b^{\pm 1}y^n$ ($b \in X - \{y\}$, $|n| \geq 2$).

Remarquons que les cas 2. et 3. montrent aussi que r ne peut pas commencer par yb ou $y^{-1}b^{-1}$, ni se terminer par by ou $b^{-1}y^{-1}$ ($b \in X - \{y\}$).

Troisième pas : Tous les exposants dans r sont égaux à ± 1 , et ils alternent en signe, i.e. $r = a_1^{-1}a_2a_3^{-1} \dots a_n^{\pm 1}$ ou $r = a_1a_2^{-1}a_3 \dots a_n^{\pm 1}$. En fait, nous devons montrer que r ne contient aucun sous-mot de la forme ab ou $a^{-1}b^{-1}$, pour $a, b \in X$. Nous savons déjà que c'est le cas si $a, b \in X - \{y\}$ (premier pas) ou si $a = b = y$ (deuxième pas). Il reste à montrer que r ne contient aucun sous-mot de la forme ay ou yb ($a, b \in X - \{y\}$), ou un inverse d'un tel sous-mot. La remarque se trouvant à la fin du deuxième pas montre déjà que r ne peut pas commencer ou se terminer par un tel sous-mot. Si $ayb^{\pm 1}$ apparaît alors on voit qu'après avoir appliqué T_y , $ayb^{\pm 1}$ devient soit $a'yyb'y$ soit $a'yyy^{-1}(b')^{-1} = a'y(b')^{-1}$. On conclut les cas $yb, a^{-1}y^{-1}, y^{-1}b^{-1}$ par des arguments similaires.

Finalement, pour voir que r est dans $H_r \cup H_l$, Il suffit de voir que l'exposant de a_n est l'opposé de l'exposant de a_1 . Si on suppose que a_1 et a_n ont le même exposant $+1$ (resp. -1), $r = a_1a_2^{-1}a_3 \dots a_n$ devient, après avoir appliqué T_y , $a'_1(a'_2)^{-1}a'_3 \dots a'_n y$ ainsi y apparaît dans r'_y (car $a_1 \neq y^{-1}$). L'argument pour $r = a_1^{-1}a_2a_3^{-1} \dots a_n^{-1}$ est identique. Ceci termine la preuve. □

Remarque 5.1.12

Pour tout y dans X , un groupe $\Gamma = \langle X : r \rangle$ admet la présentation $\Gamma = \langle X_y : r'_y \rangle$. Si $r \in H_r \cup H_l$, le lemme 5.1.11 révèle que Γ est le produit

libre de $\mathbb{Z} = \langle y \rangle$ avec le groupe à un relateur $\Gamma_y = \langle X_y - \{y\} : r'_y \rangle$. Shenzter [49] a caractérisé parmi les présentations $\Gamma = \langle X : r \rangle$ celles qui sont isomorphes à un produit libre de \mathbb{Z} avec un autre groupe; le critère est le suivant : au moins un générateur de X doit disparaître de r en appliquant des transformations de Nielsen. Le lemme 5.1.11 ne semble pourtant pas être une conséquence de ce résultat [49] car nous ne considérons que des transformations de Nielsen très spéciales, les T_y .

On peut maintenant prouver la proposition 5.1.9.

Preuve : Fixons $y \in X$; comme mentionné dans la remarque 5.1.12, Γ est le produit libre de $\mathbb{Z} = \langle y \rangle$ avec le groupe à un relateur $\Gamma_y = \langle X_y - y : r_y \rangle$. Prouvons que X engendre un semi-groupe libre. Soient ω_1, ω_2 deux mots positifs distincts dans \mathbb{F}_X ; en employant le changement de variables T_y ainsi que la forme normale pour les éléments dans un produit libre, on voit que ω_1 et ω_2 définissent des éléments distincts de Γ . Il suit par le théorème 1.5.6 que $\sigma(X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}} \leq r(h_X)$. Pour prouver l'inégalité inverse $r(h_X) \leq \sigma(X)$, on a besoin d'un résultat de Jolissaint (voir [15]) qui dit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\|h_X^k\| \leq C(1+k)^3 \|h_X^k\|_2.$$

En reprenant la définition de $\sigma(X) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|h_X^k\|_2^{1/k}$, on voit directement que $r(h_X) \leq \sigma(X)$, puisque $r(h_X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|h_X^k\|^{1/k}$.

La dernière assertion provient de la Proposition 1.5.9 en remarquant que la somme de tous les exposants de r est nulle.

5.2 Estimations de normes opérateurs

Nous avons obtenu une valeur explicite du rayon spectral de h_X dans le cas où $r \in H_r \cup H_l$, mais on a aussi des estimations dans le cas où $r \notin H_r \cup H_l$. Le résultat est le suivant.

Théorème 5.2.1 *Soit $\Gamma = \langle X : r \rangle$ un groupe à un relateur, avec $\#X \geq 2$, $|r| > 2$, r cycliquement réduit et $r \notin H_r \cup H_l$. Alors :*

$$\max\{r(h_X), r(h_S)\} \leq \|h_X\| = \frac{2\sqrt{\#X-1}}{\#X}.$$

La preuve de 5.2.1 sera donnée plus loin. Alors que jusqu'à présent on avait une valeur exacte de $r(h_X)$ en exhibant des semi-groupes libres et en

employant le théorème 1.5.6, on va maintenant calculer plutôt la norme $\|h_X\|$. Pour ce faire, on rappelle (1.5.4) que

$$h_X = \frac{1}{\#X} \sum_{s \in X} \rho(s);$$

$$h_S = \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} \rho(s).$$

où ρ est la représentation régulière droite de Γ .

On aura besoin du résultat suivant d'Akemann-Ostrand [1] (voir aussi [54]).

Lemme 5.2.2 *Soient x_1, x_2, \dots, x_n des éléments de Γ qui engendrent un sous-groupe libre sur n générateurs dans Γ . Alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \rho(x_i) \right\| = 2\sqrt{n-1};$$

$$\left\| 1 + \sum_{i=1}^n \rho(x_i) \right\| = 2\sqrt{n}.$$

Ceci nous permettra d'estimer la norme de h_X .

Proposition 5.2.3 *Soit $\Gamma = \langle X : r \rangle$ un groupe à un relateur, avec $\#X \geq 4$, $|r| > 2$ et r cycliquement réduit. Alors*

$$\max\{r(h_X), r(h_S)\} \leq \|h_X\| \leq \frac{2\sqrt{\#X-2} + 1}{\#X} < 1.$$

Preuve : L'inégalité $r(h_X) \leq \|h_X\|$ est satisfaite pour tout opérateur borné. Puisque $|r| > 2$ et r est cycliquement réduit, l'intersection $X \cap X^{-1}$ est vide et on peut ainsi écrire $h_S = \frac{h_X + h_X^*}{2}$ ce qui implique que

$$r(h_S) = \|h_S\| = \left\| \frac{h_X + h_X^*}{2} \right\| \leq \|h_X\|.$$

Il nous reste à prouver que $\|h_X\| \leq \frac{2\sqrt{\#X-2}+1}{\#X} < 1$. Soit $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que x_k apparaît dans la relation r . Alors

$$\|h_X\| \leq \frac{1}{k} \left(\left\| \sum_{i=1}^{k-1} \rho(x_i) \right\| + 1 \right).$$

Maintenant, par le Freiheitssatz de Magnus (voir 1.5.8), le sous-groupe de Γ engendré par x_1, \dots, x_{k-1} est libre sur $k-1$ générateurs, ainsi le lemme 5.2.2 s'applique et on obtient bien l'expression $1/k(2\sqrt{k-2}+1)$ qui est plus petite que 1 grâce à l'hypothèse $k \geq 4$. \square

Passons à la preuve de 5.2.1.

Preuve : L'inégalité est prouvée comme dans la Proposition 5.2.3. Fixons $y \in X$; alors

$$\begin{aligned} \|h_X\| &= \frac{1}{\#X} \left\| \left(1 + \sum_{x \in X - \{y\}} \rho(xy^{-1}) \right) \rho(y) \right\| \\ &= \frac{1}{\#X} \left\| 1 + \sum_{x \in X - \{y\}} \rho(xy^{-1}) \right\| \\ &= \frac{1}{\#X} \left\| 1 + \sum_{x' \in X_y - \{y\}} \rho(x') \right\|. \end{aligned}$$

Comme r n'est pas dans $H_r \cup H_l$, on déduit du lemme 5.1.11 que y apparaît dans r'_y et de nouveau par le Freiheitssatz de Magnus, que $X_y - \{y\}$ engendre librement un groupe libre sur $(\#X) - 1$ générateurs; le lemme 5.2.2 s'applique donc et nous donne le résultat. \square

Exemple 5.2.4

Dans la Proposition 4 (iv) de [18] il est dit que, pour $\#X = 2$, on a toujours $\|h_X\| = 1$ et pour $\#X = 3$, la proposition 5.2.3 nous donne juste une borne évidente $\|h_X\| \leq 1$. L'exemple suivant montre que l'on ne peut pas espérer mieux. En effet, considérons le groupe $\Gamma = \langle a, b, c : [ac^{-1}, bc^{-1}] \rangle$. En factorisant $\rho(c)$ à droite, on obtient :

$$\|h_X\| = \frac{1}{3} \left\| \rho(ac^{-1}) + \rho(bc^{-1}) + 1 \right\|.$$

Mais ac^{-1} et bc^{-1} commutent : ils engendrent un sous-groupe H isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Par transformée de Fourier, la C^* -algèbre réduite $C_r^*(H)$ est isométriquement isomorphe à $C(\mathbb{T}^2)$, l'algèbre des fonctions continues sur le tore $\mathbb{T}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$, la norme sur $C(\mathbb{T}^2)$ étant la norme sup. Donc

$$\left\| \rho(ac^{-1}) + \rho(bc^{-1}) + 1 \right\| = \sup_{(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2} |z_1 + z_2 + 1| = 3.$$

Remarque 5.2.5 : P. de la Harpe nous a fait remarquer que, si on s'intéresse uniquement à $\|h_S\| = r(h_S)$, on peut raisonner comme suit; pour

$\Gamma = \langle X, r \rangle$ un groupe à un relateur cycliquement réduit avec $|r| > 2$, et $y \in X$ apparaissant dans r , on a :

$$\begin{aligned} \|h_S\| &= \frac{1}{2\#X} \|\rho(y) + \rho(y^{-1}) + \sum_{x \in X - \{y\}} (\rho(x) + \rho(x^{-1}))\| \\ &\leq \frac{1}{2\#X} \left(2 + \left\| \sum_{x \in X - \{y\}} \rho(x) + \rho(x^{-1}) \right\| \right) \end{aligned}$$

Mais par le Freiheitssatz, $X - \{y\}$ engendre librement un sous-groupe libre. On peut donc calculer la dernière norme grâce au résultat de Kesten (voir 1.5.5) :

$$\left\| \sum_{x \in X - \{y\}} (\rho(x) + \rho(x^{-1})) \right\| = 2\sqrt{2(\#X - 1) - 1}.$$

Ce qui donne finalement

$$\|h_S\| \leq \frac{1}{\#X} (\sqrt{2\#X - 3} + 1)$$

et qui permet de gagner essentiellement un facteur $\sqrt{2}$ par rapport à la proposition 5.2.3. Ce gain est intéressant : en effet, Kesten démontre dans [35] l'inégalité suivante :

$$\frac{\sqrt{2\#X - 1}}{\#X} \leq \|h_S\|.$$

On en tire $\|h_S\| = \sqrt{\frac{2}{\#X}} + O\left(\frac{1}{\#X}\right)$.

5.3 Les groupes de surfaces

On rappelle que le groupe de surface Γ_g est le groupe fondamental d'une surface compacte sans bord de genre $g \geq 2$. Ces groupes ont une présentation standard $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$ qui en fait des groupes à un relateur. Peter Sarnak avait posé la question de déterminer la valeur exacte de $r(h_S)$ pour ces groupes. Pour l'instant la réponse est inconnue, mais on a le résultat suivant :

Corollaire 5.3.1 *Soit Γ_g le groupe de surface de genre g et sa présentation standard avec $X = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$, $S = X \cup X^{-1}$ et $g \geq 2$; alors $Sp(h_S) = [-r, r]$ avec $r \leq \frac{\sqrt{2g-1}}{g}$.*

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de la C^* -algèbre réduite d'un groupe Γ . Rappelons que la C^* -algèbre réduite d'un groupe Γ , que l'on note $C_r^*(\Gamma)$, est la C^* -algèbre engendrée par $\rho(\Gamma)$. Si Γ est sans torsion, la conjecture des idempotents (due à Kaplansky et Kadison) affirme que $C_r^*(\Gamma)$ n'a pas d'idempotent différent de 0 et 1 (voir [51] pour un survol). Pour un groupe à un relateur sans torsion, cette conjecture vient d'être démontrée par C. Béguin, H. Bettaieb et A. Valette (voir [5]). On en tire la proposition :

Proposition 5.3.2 *Soit $\Gamma = \langle X : r \rangle$ un groupe à un relateur sans torsion. Notons Σ la somme de tous les exposants dans r . Alors :*

- i) *Si $\Sigma = 0$, alors $Sp(h_X)$ est soit un disque soit un anneau centré en 0;*
- ii) *Si Σ est pair, alors $Sp(h_S)$ est un intervalle symétrique relativement à 0.*

Preuve : Tout élément dans $C_r^*(\Gamma)$ a un spectre connexe (sinon, par calcul fonctionnel holomorphe, on pourrait construire des idempotents non triviaux dans $C_r^*(\Gamma)$). Si $\Sigma = 0$, la proposition 1.5.9 nous dit que $Sp(h_X)$ est une réunion de cercles concentriques centrés en 0; par connexité, c'est soit un disque soit un anneau.

De même, par connexité $Sp(h_S)$ doit être un intervalle, symétrique par rapport à 0 si Σ est pair. \square

Preuve de 5.3.1: le fait que Γ_g satisfasse la conjecture de Kaplansky-Kadison a été prouvé originellement par Kasparov [33]. Le résultat découle alors directement en combinant la proposition 5.3.2 avec le théorème 5.2.1. \square

Remarque 5.3.3 1. En tenant compte de 5.2.5, la borne supérieure du corollaire 5.3.1 s'améliore en $\frac{1}{2g}(1 + \sqrt{4g - 3})$.

- 2. Une preuve complètement différente de la borne supérieure en 5.3.1 a été donnée récemment par L. Bartholdi, S. Cantat, T. Ceccherini Silberstein et P. de la Harpe (voir [4]). Cet article donne aussi une amélioration très intéressante de la borne supérieure pour le genre 2.
- 3. Lors d'une conversation à Zürich en juillet 1995, P. Sarnak a supputé que, pour un groupe de surface de genre $g \geq 2$, le nombre $r(h_S)$ était transcendant...

Chapitre 6

Les résultats génériques

On va montrer que dans le cas des présentations finies, le fait que X engendre un semi-groupe libre est générique au sens de Gromov (voir la définition en 1.7.1).

6.1 Le cas des groupes à un relateur

Il est tout de même intéressant de présenter la preuve pour des groupes à un relateur car elle permet de dire facilement si une présentation donnée a cette propriété, ce qui n'est pas le cas dans la preuve générale.

Lemme 6.1.1 *Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, la propriété d'être ϵ -équilibrée est asymptotiquement presque sûre.*

Preuve : Soit $\#X = k$ pour simplifier. Notons $C(N)$ le nombre de mots cycliquement réduits de longueur N dans \mathbb{F}_X . Remarquons tout d'abord que $C(N)$ est plus grand ou égal au nombre de mots réduits de longueur N dans \mathbb{F}_X dont la dernière lettre n'est pas l'inverse de la première, i.e.

$$(1) \quad C(N) \geq 2k(2k-1)^{N-2}(2k-2).$$

Estimons maintenant le nombre $B(N)$ de "mauvaises" présentations, i.e de présentations $\langle X : r \rangle$ telles qu'il existe $r' \in R^*$ un conjugué cyclique de r ou r^{-1} , commençant par un mot positif dont la longueur est plus grande que ϵN . Comme il y a au plus $2N$ éléments dans $R^* = \{\text{conjugués cycliques de } r^{\pm 1}\}$, on a

$$B(N) \leq 2N \sum_{l=\lceil \epsilon N \rceil}^N C(N, l)$$

où $C(N, l)$ est le nombre de mots cycliquement réduits de longueur N commençant par un mot positif de longueur l exactement. On a donc :

$$(2) \quad B(N) \leq 2N \sum_{l=1}^N k^l (2k-1)^{N-l}.$$

En divisant (2) par (1), on estime le nombre de présentations non ϵ -équilibrées :

$$\begin{aligned} \frac{B(N)}{C(N)} &\leq \frac{N(2k-1)^2}{2k(k-1)} \sum_{l=1}^N k^l (2k-1)^{-l} \\ &= \frac{N(2k-1)^2}{2k(k-1)} \frac{k^{1+N+1}(2k-1)^{-1+N+1} - k^{N+1}(2k-1)^{-N-1}}{1 - k(2k-1)^{-1}} \end{aligned}$$

Comme $k \geq 2$, cette expression tend exponentiellement vite vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. \square

On déduit donc :

Théorème 6.1.2 Soit $\#X \geq 2$ fixé. Une présentation $\Gamma = \langle X : r \rangle$ a asymptotiquement presque sûrement $r(h_X) = \frac{1}{\#X}$.

Preuve : Remarquons que la conjonction de deux propriétés génériques est encore générique. Donc, par les lemmes 1.7.2 (avec $\lambda = 1/6$) et 6.1.1, il est asymptotiquement presque sûr qu'une présentation à un relateur soit ϵ -équilibrée et satisfasse $C'(1/6)$, donc que $r(h_X) = \frac{1}{\#X}$ par 5.1.3.

Remarque 6.1.3

Fixons un entier $k \geq 1$. Soit $\Gamma_n = \langle X_n : r_n \rangle$ une suite de groupes à un relateur sur k générateurs, avec $|r_n|$ tendant vers l'infini pour $n \rightarrow \infty$. Posons $S_n = X_n \cup X_n^{-1}$. Il a été prouvé par Grigorchuk [27] (et redémontré récemment par Champetier [11]) que, si tous les Γ_n satisfont la condition de petite simplification $C'(\lambda)$, avec $\lambda < 1/6$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(h_{S_n}) = \frac{\sqrt{2k-1}}{k}.$$

Ceci correspond à l'idée intuitive que quand $|r_n|$ devient de plus en plus grand, le graphe de Cayley de Γ_n ressemble "localement" de plus en plus à un arbre.

6.2 Le cas des groupes de présentation finie

Dans le cas des groupes à un relateur, c'est l'existence générique d'un algorithme de Dehn qui permet d'obtenir le résultat, malheureusement la condition $C'(\lambda)$ avec $\lambda \geq 1/6$ n'est pas générique dans le cas des groupes de présentation finie. D'autre part, il n'est pas clair que le fait d'avoir un algorithme de Dehn soit une condition générique, même s'il est connu que tout groupe hyperbolique possède une présentation satisfaisant un algorithme de Dehn. Pour obtenir un résultat analogue à 6.1.2, il faut donc trouver une condition générique remplaçant l'algorithme de Dehn.

Introduisons encore la notation suivante. Pour r dans \mathbb{F}_X on notera $n_+(r)$ (resp. $n_-(r)$) le nombre d'apparitions dans r de générateurs à exposants $+1$. (resp. nombre d'apparitions dans r de générateurs à exposants -1).

Supposons pour simplifier que $r = \omega_1^{+1}\omega_2^{-1} \cdots \omega_n^{\pm 1}$ avec ω_i des mots positifs. On a donc les relations suivantes :

- $n_+(r) = \sum_{i \text{ impairs}} |\omega_i|$
- $n_-(r) = \sum_{i \text{ pairs}} |\omega_i|$
- $n_+(r) + n_-(r) = |r|$

Définition 6.2.1 On dit que $r \in \mathbb{F}_X$ a la propriété E_δ pour $\delta > 0$, si pour tout sous-mot u de r de longueur $|u| \geq |r|/4$ on a,

$$\frac{1}{1 + \delta} \leq \frac{n_+(u)}{n_-(u)} \leq 1 + \delta.$$

Énonçons le résultat principal de cette section.

Théorème 6.2.2 Pour les présentations finies $\langle X, R \rangle$, la propriété $\rho(h_X) = \frac{1}{\sqrt{\#X}}$ est asymptotiquement presque sûre.

Pour le démontrer nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 6.2.3 Pour m_0 dans \mathbb{N} fixé, $m_0 \geq 3$, notons

$$\alpha(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\lfloor n/m_0 \rfloor} \binom{n}{i}$$

alors il existe une constantes $A > 0$ dépendant de m_0 telle que

$$\alpha(n) \leq AC^n \text{ avec } C = \frac{m_0}{2(m_0 - 1)^{(m_0 - 1)/m_0}} < 1.$$

Preuve

Démontrons tout d'abord l'assertion : $C = \frac{m_0}{2(m_0-1)^{\frac{m_0}{m_0-1}}/m_0} < 1$ pour tout $m_0 \geq 3$.

Pour $f(x) = \frac{x}{(x-1)^{\frac{x}{x-1}}}$, on a $f(3) < 1$. Il suffit donc de voir que la fonction $f(x)$ est décroissante en x . Ce qui est le cas puisque $f'(x) = \frac{-\log(x-1)}{x(x-1)^{\frac{x}{x-1}}} < 0$ pour tout $x > 1$.

Définissons la suite auxiliaire :

$$\beta(n) = \frac{1}{2^{nm_0}} \sum_{i=0}^n \binom{nm_0}{i}.$$

On va montrer que les points suivants :

1) pour tout $n_0 \equiv 0 \pmod{m_0}$ et pour tout $i = 0, \dots, m_0 - 2$,

$$\beta(n_0/m_0) = \alpha(n_0) \text{ et } \alpha(n_0 + i) > \alpha(n_0 + i + 1);$$

2) $\beta(n) \leq AC^{m_0n}$ pour tout n dans \mathbb{N} ;

Le fait que $\beta(n_0/m_0) = \alpha(n_0)$ est clair par définition. Estimons pour i compris entre 0 et $m_0 - 2$ fixé,

$$\begin{aligned} & \alpha(n_0 + i) - \alpha(n_0 + i + 1) \\ &= \frac{1}{2^{n_0+i}} \sum_{j=0}^{l(n_0+i)/m_0} \binom{n_0+i}{j} - \frac{1}{2^{n_0+i+1}} \sum_{j=0}^{l(n_0+i+1)/m_0} \binom{n_0+i+1}{j} \\ &= \frac{1}{2^{n_0+i}} \left[\sum_{j=0}^{n_0/m_0} \binom{n_0+i}{j} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n_0/m_0} \binom{n_0+i}{j} + \sum_{j=0}^{n_0/m_0} \binom{n_0+i}{j-1} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n_0+i+1}} \binom{n_0+i}{n_0/m_0} > 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve le point 1).

Pour démontrer 2), estimons $\beta(n+1) - \beta(n)$:

$$\begin{aligned} \beta(n+1) - \beta(n) &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{2^{(n+1)m_0}} \binom{(n+1)m_0}{i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^{nm_0}} \binom{nm_0}{i} \\ &= \frac{1}{2^{nm_0}} \left[- \sum_{i=0}^n \binom{nm_0}{i} + \frac{1}{2^{m_0}} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m_0} \binom{nm_0}{i-j} \binom{m_0}{j} \right] \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m_0} \binom{m_0 n}{i-j} \binom{m_0}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{m_0} \binom{m_0}{j} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{m_0 n}{i-j} \\
&= \sum_{j=0}^{m_0} \binom{m_0}{j} \sum_{l=0}^{n+1-j} \binom{m_0 n}{l} \text{ en posant } l = i - j \\
&= \binom{m_0}{0} \sum_{l=0}^{n+1} \binom{m_0 n}{l} + \binom{m_0}{1} \sum_{l=0}^n \binom{m_0 n}{l} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \sum_{l=0}^{n+1-j} \binom{m_0 n}{l} \\
&= \binom{m_0 n}{n+1} + \left[\binom{m_0}{0} + \binom{m_0}{1} \right] \sum_{l=0}^n \binom{m_0 n}{l} \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \left\{ \sum_{l=0}^n \binom{m_0 n}{l} - \sum_{l=0}^{j-2} \binom{m_0 n}{n-l} \right\} \\
&= 2^{m_0} \sum_{i=0}^n \binom{m_0 n}{i} + \binom{m_0 n}{n+1} - \sum_{j=2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \sum_{l=0}^{j-2} \binom{m_0 n}{n-l} \\
&= 2^{m_0} \sum_{i=0}^n \binom{m_0 n}{i} + \binom{m_0 n}{n+1} - \sum_{l=0}^{m_0-2} \binom{m_0 n}{n-l} \left[\sum_{j=l+2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \right]
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \beta(n+1) - \beta(n) \\
&= \frac{1}{2^{n(m_0+1)}} \left[\binom{m_0 n}{n+1} - \sum_{l=0}^{m_0-2} \binom{m_0 n}{n-l} \left[\sum_{j=l+2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \right] \right] \\
&= \frac{(m_0 n)!}{2^{n(m_0+1)}} \left[\frac{1}{(n+1)![(m_0-1)n-1]!} - \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=0}^{m_0-2} \frac{1}{(n-l)![(m_0-1)n+l]!} \left[\sum_{j=l+2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(m_0 n)!}{2^{n(m_0+1)}(n+1)!((m_0-1)n+m_0-2)!} \left\{ \prod_{\mu=0}^{m_0-2} ((m_0-1)n+\mu) - \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=0}^{m_0-2} \left(\left[\sum_{j=l+2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \right] \prod_{\xi_l=0}^l (n-\xi_l+1) \prod_{\nu_l=l+1}^{m_0-2} ((m_0-1)n+\nu_l) \right) \right\} \\
&= \frac{(m_0 n)!}{2^{n(m_0+1)} n! ((m_0-1)n)!} \left\{ \prod_{\mu=0}^{m_0-2} ((m_0-1)n+\mu) - \right. \\
&\quad \left. \sum_{l=0}^{m_0-2} \left(\left[\sum_{j=l+2}^{m_0} \binom{m_0}{j} \right] \prod_{\xi_l=0}^l (n-\xi_l+1) \prod_{\nu_l=l+1}^{m_0-2} ((m_0-1)n+\nu_l) \right) \right\} / \\
&\quad \left\{ (n+1) \prod_{\alpha=1}^{m_0-2} [(m_0-1)n+\alpha] \right\}
\end{aligned}$$

Les termes dominants de la fraction sont de même degré égal à $m_0 - 1$. Cette fraction tend pour $n \rightarrow \infty$ vers une constante négative. Cela peut s'observer en regardant le coefficient du terme dominant du numérateur (le dénominateur étant positif) pour $m_0 > 2$.

Il ne nous reste qu'à évaluer $\frac{(m_0 n)!}{2^{n(m_0+1)} n! ((m_0-1)n)!}$. Pour cela, employons la formule de Stirling : $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/12n}$.

On obtient donc que

$$\begin{aligned}
&\frac{(m_0 n)!}{2^{n(m_0+1)} n! ((m_0-1)n)!} \\
&\leq \frac{m_0 n^{m_0 n} e^{-m_0 n} \sqrt{2\pi m_0 n} e^{1/12m_0 n}}{2^{n(m_0+1)} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} [n(m_0-1)]^{n(m_0-1)} e^{-n(m_0-1)} \sqrt{2\pi n(m_0+1)}} \\
&\leq \frac{m_0^{m_0 n} \sqrt{m_0} e^{1/12m_0 n}}{2^{n(m_0+1)} (m_0-1)^{(m_0-1)n} \sqrt{2\pi(m_0+1)n}} \\
&\leq \left(\frac{m_0}{2(m_0-1)^{(m_0-1)/m_0}} \right)^{m_0 n} \frac{\sqrt{m_0} e^{1/12m_0 n}}{2^n \sqrt{2\pi(m_0+1)n}}
\end{aligned}$$

Ceci permet de dire que

$$|\beta(n+1) - \beta(n)| \leq \tilde{A} C^{m_0 n}, \text{ avec } C = \frac{m_0}{2(m_0-1)^{(m_0-1)/m_0}} < 1.$$

D'autre part, on peut voir, par le théorème central limite, que $\beta(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ceci permet de dire qu'il existe $A > 0$ tel que $|\beta(n)| \leq A C^{m_0 n}$.

Les points 1) et 2) permettent de conclure. \square

Lemme 6.2.4 Pour $|X| \geq 2$ et pour $\delta \geq 8$ fixés, la propriété E_δ est asymptotiquement presque sûre.

Preuve du lemme 6.2.4

Notons $B(n) = \#\{r \in \mathbb{F}_X \mid |r| = n, r \text{ réduit, cycliquement réduit}\}$,
 $A(n) = \#\{r \in B(n) \mid |r| = n, r \text{ ayant } E_\delta\}$ et $C(n) = B(n) - A(n)$. $C(n)$ se décrit donc comme

$$\#\{r \in B(n) \mid \exists u \text{ sous-mot de } r, |u| \geq |r|/4, \frac{n_+(u)}{n_-(u)} \notin [\frac{1}{1+\delta}, 1+\delta]\}$$

- 1) Estimons le nombre de mots u de longueur l tels que $\frac{n_+(u)}{n_-(u)} > 1 + \delta$. Si $h = n_+(u)$, alors $n_-(u) = l - h$ et avec ces notations, on obtient que $\frac{h}{l-h} > 1 + \delta$ est équivalent à $h > \frac{1+\delta}{2+\delta}l$.

On peut former exactement $\binom{l}{h} k^h k^{l-h}$ mots non réduits de longueur égale à l avec l'alphabet $X \cup X^{-1}$ ayant exactement h lettres avec un exposant positif. Donc

$$\#\{u \in \mathbb{F}_X \mid |u| \leq l, u \text{ réduit, } \frac{n_+(u)}{n_-(u)} > 1 + \delta\} \leq \sum_{j=\gamma(l)}^l \binom{l}{j} k^l$$

$$\text{où } \gamma(l) = \begin{cases} \lfloor \frac{l(1+\delta)}{2+\delta} \rfloor + 1 & \text{si } \frac{l(1+\delta)}{2+\delta} \in \mathbb{N} \\ \lfloor \frac{l(1+\delta)}{2+\delta} \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

On estime de la même manière le nombre de mots u de longueur l tels que $\frac{n_-(u)}{n_+(u)} > 1 + \delta$. Notons

$$\beta(l) = \#\{u \in \mathbb{F}_X \mid u \text{ réduit, } |u| = l, \frac{n_+(u)}{n_-(u)} > 1 + \delta \text{ ou } \frac{n_-(u)}{n_+(u)} > 1 + \delta\},$$

on a :

$$\begin{aligned} \beta(l) &\leq 2 \sum_{j=\gamma(l)}^l \binom{l}{j} k^l \\ &= 2 \sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j} k^l \end{aligned}$$

- 2) Estimons le nombre de mots r de longueur n dans $B(n)$ tels que r contienne un sous-mot de longueur l ne satisfaisant pas $\frac{n_+(u)}{n_-(u)} \leq 1 + \delta$

ou $\frac{n-(u)}{n+(u)} \leq 1 + \delta$. Il y a $(n-l+1)$ places dans r où le sous-mot u peut commencer. Donc r s'écrit $r = r_1ur_2$ et comme r est réduit, r_1 et r_2 le sont aussi. On a de plus que $|r_1| + |r_2| = n-l$. Ce qui implique $\#\{r_i\} \leq 2k(2k-1)^{|r_i|-1}$. Ceci nous permet de dire que

$$\begin{aligned} C(n) &\leq \sum_{l=|n/4|}^n \beta(l)(n-l+1)(2k)^2(2k-1)^{n-l-2} \\ &\leq \sum_{l=|n/4|}^n (k-1/2)^{n-l-2} k^2 2^{n-l} (n-l+1) 2 \sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j} k^l \\ &\leq \sum_{l=|n/4|}^n (k-1/2)^{n-l-2} k^{2+l} 2^{n-l} (n-l+1) 2 \sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j} \end{aligned}$$

Estimons $C(n)/B(n)$,

$$\begin{aligned} \frac{C(n)}{B(n)} &\leq \frac{\sum_{l=|n/4|}^n (k-1/2)^{n-l-2} k^{2+l} 2^{n-l} (n-l+1) 2 \sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j}}{2^n k (k-1/2)^{n-2} (k-1)} \\ &= \frac{2k}{k-1} \sum_{l=|n/4|}^n \left(\frac{k}{k-1/2} \right)^l (n-l+1) \sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j} \frac{1}{2^l}. \end{aligned}$$

Comme $\gamma(l)$ est environ égal à $\lfloor \frac{l(1+\delta)}{2+\delta} \rfloor$, $l - \gamma(l) \cong \lfloor \frac{l}{2+\delta} \rfloor$. Par le lemme 6.2.3 en prenant $m_0 = 2 + \delta$, on a

$$\sum_{j=0}^{l-\gamma(l)} \binom{l}{j} \frac{1}{2^l} = \sum_{j=0}^{\lfloor l/m_0 \rfloor} \binom{l}{j} \frac{1}{2^l} \leq AC^l$$

où $C = \left(\frac{m_0}{2(m_0-1)^{(m_0-1)/m_0}} \right)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{C(n)}{B(n)} &\leq \frac{2kA}{k-1} \sum_{l=|n/4|}^n \left(\frac{Ck}{k-1/2} \right)^l (n-l+1) \\ &= \frac{2kA}{k-1} \left(\frac{Ck}{k-1/2} \right)^{\lfloor n/4 \rfloor} \sum_{l=|n/4|}^n \left(\frac{Ck}{k-1/2} \right)^{l-\lfloor n/4 \rfloor} (n-l+1) \\ &\leq \frac{2kA}{k-1} \left(\frac{Ck}{k-1/2} \right)^{\lfloor n/4 \rfloor} \sum_{l=|n/4|}^n (n-l+1) \text{ si } \frac{Ck}{k-1/2} < 1. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{l=|n/4|}^n (n-l+1)$ croît polynômialement en n et que $\left(\frac{Ck}{k-1/2}\right)^{\lfloor n/4m_0 \rfloor m_0}$ décroît exponentiellement, $\frac{C(n)}{B(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ , pour autant que $\frac{Ck}{k-1/2} < 1$. Pour $k \geq 2$, $C < 3/4$, il faut donc choisir m_0 tel que

$$\frac{m_0}{2(m_0-1)^{(m_0-1)/m_0}} < 0,75.$$

Par calcul, on voit que pour $\delta = 8$, $\lfloor \frac{1}{2+\delta} \rfloor \cong \frac{1}{10}$ et que $\frac{10}{2(9)^{9/10}} \cong 0,69$.

□

Lemme 6.2.5 *Soit $\langle X, R \rangle$ une présentation finie satisfaisant une condition θ (avec $\theta \leq 1/199$) alors pour tout diagramme Δ , il existe au moins un r_i dans R^* bordant une cellule et ayant au moins $\frac{99}{100}$ de ses éléments sur le bord du diagramme Δ .*

Par conséquent pour tout un mot non trivial ω de \mathbb{F}_X représentant le neutre dans $\Gamma = \langle X, R \rangle$, il existe au moins un r dans R^ qui a au moins $\frac{99}{100}$ de ses éléments sur ω .*

Preuve La condition θ implique $\Delta, I(\Delta) \leq \theta \# \Delta$ pour tout diagramme réduit. Par définition, $\# \Delta = E(\Delta) + I(\Delta)$; on en déduit $I(\Delta) \leq \frac{\theta}{1-\theta} E(\Delta)$. On peut se restreindre aux diagrammes dont l'intérieur est connexe, puisque chacune des parties d'un diagramme quelconque permet de définir un autre diagramme et que les arêtes les reliant ne font qu'augmenter le nombre d'arêtes extérieures.

Définissons la notation suivante : pour une face du diagramme f_i , on note $Int(f_i)$ (resp. $Ext(f_i)$) le nombre d'arêtes de f_i qui sont à l'intérieur du diagramme (resp. qui sont sur le bord du diagramme). On notera aussi $\#(f_i)$ le nombre total d'arêtes de la face f_i .

Supposons par l'absurde que toutes les faces d'un diagramme Δ aient plus de 1% de leurs arêtes à l'intérieur (pour toute face f_i du diagramme, on a $100Int(f_i) > \#(f_i)$). Il est clair que $E(\Delta) = \sum_i Ext(f_i)$ et que $I(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_i Int(f_i)$. En effet chaque arête intérieure appartient à deux faces du diagramme, alors que les arêtes extérieures n'appartiennent qu'à une face. On obtient donc la relation :

$$\#(\Delta) = \frac{1}{2} \sum_i Int(f_i) + \sum_i Ext(f_i) = \sum_i \#(f_i) - \frac{1}{2} \sum_i Int(f_i).$$

Si pour tout f_i , on a

$$\begin{aligned} 100 \text{Int}(f_i) &> \#(f_i) \\ \text{alors } 100 \sum_i \text{Int}(f_i) &> \sum_i \#(f_i) = \#(\Delta) + \frac{1}{2} \sum_i \text{Int}(f_i) \\ \frac{199}{2} \sum_i \text{Int}(f_i) &> \#(\Delta) \\ 199 I(\Delta) &> \#(\Delta). \end{aligned}$$

Pour ce diagramme, $I(\Delta) > \frac{1}{199} \#(\Delta)$. Ce qui contredit la condition θ pour $\theta = 1/199$. \square

Lemme 6.2.6 Soit $r = s_{i_1} \cdots s_{i_{|r|}}$ avec $s_{i_j} \in S = X \cup X^{-1}$. Si r a la propriété E_δ avec $\delta = 8$, alors toute sous-suite ordonnée (y_1, \dots, y_l) de la suite ordonnée $(s_{i_1}, \dots, s_{i_{|r|}})$ telle que $l \geq \frac{99}{100} |r|$ alterne au moins 3 fois.

Preuve Notons $|r| = n$, $n_+(r) = l$, donc $n_-(r) = n - l$ et supposons que $l \geq n - l$, on a que $l \geq n/2$. Comme r a la propriété E_δ , on a que

$$\frac{n}{2} \leq l \leq \frac{1 + \delta}{2 + \delta} n.$$

Ceci nous permet de dire qu'il y a au moins $\frac{1}{2+\delta} n$ termes négatifs dans r .

Regardons r comme produit de 3 mots $r = r_1 r_2 r_3$ avec $|r_i| > |r|/4$. Comme r a la propriété E_δ , tout sous-mot u de longueur plus grande que $|r|/4$ est tel que soit $1 \leq \frac{n_-(u)}{n_+(u)} \leq 1 + \delta$, soit $1 \leq \frac{n_+(u)}{n_-(u)} \leq 1 + \delta$.

Ceci nous permet de supposer que pour chaque $i = 1, 2, 3$, on a soit $1 \leq \frac{n_+(r_i)}{n_-(r_i)} \leq 1 + \delta$, soit $1 \leq \frac{n_-(r_i)}{n_+(r_i)} \leq 1 + \delta$.

Comme $\delta = 8$, on peut donc supposer que r_1 est tel que

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &\leq n_+(r_1) \leq \frac{9n}{10} \\ \frac{n}{10} &\leq n_-(r_1) \leq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Ceci permet de dire que $n_+(r_1) \geq \frac{1}{10}$ et $n_-(r_1) \geq \frac{1}{10}$. Par un raisonnement analogue on a $n_+(r_i) \geq \frac{1}{10}$ et $n_-(r_i) \geq \frac{1}{10}$ pour $i = 2, 3$.

Notons (y_1, \dots, y_{m_1}) la sous-suite de (y_1, \dots, y_l) qui correspond aux éléments de r_1 , $(y_{m_1+1}, \dots, y_{m_2})$ la sous-suite de (y_1, \dots, y_l) qui correspond aux éléments de r_2 , (y_{m_2+1}, \dots, y_l) la sous-suite de (y_1, \dots, y_l) qui correspond aux éléments de r_3 . Comme au pire 1% des éléments de r disparaissent dans (y_1, \dots, y_l) , on a que (y_1, \dots, y_{m_1}) (resp. $(y_{m_1+1}, \dots, y_{m_2})$; (y_{m_2+1}, \dots, y_l)) a au plus 4% d'éléments de moins que dans r_1 (resp. r_2 ; r_3). Et comme chaque r_i contient au moins 10% de termes de chaque signe,

on a que $n_-((y_1, \dots, y_{m_1})) > 0$ et $n_+((y_1, \dots, y_{m_1})) > 0$. Et de même pour $(y_{m_1+1}, \dots, y_{m_2})$ et (y_{m_2+1}, \dots, y_l) . Ceci permet de dire que les trois sous-suites ordonnées (y_1, \dots, y_{m_1}) , $(y_{m_1+1}, \dots, y_{m_2})$ et (y_{m_2+1}, \dots, y_l) de (y_1, \dots, y_l) contiennent chacune au moins un changement de signe.

Ce qui permet de dire que (y_1, \dots, y_l) en contient au moins trois. \square

Proposition 6.2.7 *Soit $\Gamma \cong \langle X, R \rangle$ une présentation finie telle que Γ satisfasse une condition θ , avec $\theta \leq 1/199$ fixé, et que pour tout $r \in R$ ait la propriété E_δ avec $\delta \geq 8$; alors X engendre dans Γ un semi-groupe libre.*

Preuve : Notons N le sous-groupe normal engendré par R dans \mathbb{F}_X et soit ω un élément non trivial de N . Notons Δ un diagramme réduit de bord $\partial\Delta = \omega$. Comme la présentation $\langle X, R \rangle$ satisfait une condition θ avec θ petit, par le lemme 6.2.5, le diagramme Δ contient une cellule dont le bord est un $r \in R^*$ et tel que r ait 99% de ses générateurs sur le bord de Δ . Comme r a la propriété E_δ , par le lemme 6.2.6, la suite ordonnée (y_1, \dots, y_l) définie comme $r \cap \omega$ contient au moins 3 changements de signe. Donc ω en contient au moins 3 aussi. Pour deux mots positifs ω_1, ω_2 dans \mathbb{F}_X , $\omega_1\omega_2^{-1}$ est un mot ayant un seul changement de signe, donc il n'appartient pas à N . Ceci implique que l'image de $\omega_1\omega_2^{-1}$ dans Γ n'est pas triviale, et donc ω_1 est différent de ω_2 dans Γ . Ceci implique que le semi-groupe engendré par X dans Γ est libre. \square

Preuve du théorème 6.2.2 : Il suffit, pour prouver le théorème, de remarquer que l'intersection d'un nombre fini de propriétés asymptotiquement presque sûres est encore asymptotiquement presque sûre et d'invoquer les lemmes 6.2.4, 6.1.1 ainsi que le résultat d'Ol'shanskii qui dit que pour tout $\theta > 0$ fixé, la condition θ est asymptotiquement presque sûre. On conclut en invoquant la proposition 6.2.7 et le théorème 1.5.6, puisque l'hyperbolicité, est aussi une propriété asymptotiquement presque sûre : en effet, Ol'shanskii [42] et Champetier [11] ont montré indépendamment que l'hyperbolicité découle de la condition θ . \square

Perspectives

Un tel travail laisse un goût d'inachevé, car plusieurs questions qui ont été à la base de certains développements n'ont pas obtenus de réponses complètement satisfaisantes. C'est le cas, par exemple, de la valeur exacte de $\|h_S\|$ pour les groupes de surfaces Γ_g .

D'autre part, le fait que des questions restent en suspens, permet d'envisager des ouvertures possibles pour l'avenir.

Voilà quelques points sur lesquels je désire prolonger cette réflexion. Je vais les citer par ordre d'apparitions dans les chapitres.

Concernant le chapitre 2, il me semblerait intéressant de considérer la famille de groupes $SL_2(\mathbb{F}_p)$. On pourrait essayer de donner des bornes inférieures et supérieures aux constantes de Kazhdan de ces groupes et d'un système de générateurs fixé en employant les constantes l^2 puisque celles-ci ne dépendent que des représentations irréductibles de $SL_2(\mathbb{F}_p)$ et que ces représentations sont toutes connues.

Ceci pourrait permettre de répondre aux questions que pose A. Lubotzky dans [37] :

a) "Peut-on trouver des systèmes de générateurs S_p de $SL_2(\mathbb{F}_p)$ pour lesquels les graphes $G(SL_2(\mathbb{F}_p), S_p)$ ne seraient pas *expanseurs*?"

b) "Existe-t-il des systèmes de générateurs S_p bornés de $SL_n(\mathbb{F}_p)$ pour lesquels les graphes $G(SL_n(\mathbb{F}_p), S_p)$ seraient *expanseurs*?"

c) Même question que b) pour les groupes symétrique S_n .

Dans la même direction, il pourrait être intéressant de calculer les constantes de Kazhdan $\kappa(SU(2), SU(2), \pi_n)$ où π_n est la seule représentation irréductible de degré n de $SU(2)$, ainsi que la constante de Kazhdan de $SO(2)$ relativement à un système de générateurs $[0, \epsilon]$ associée à la représentation régulière gauche sur l'orthogonal des constantes dans $L^2(SO(2))$.

Concernant la définition spectrale de la propriété (T) , Alain Connes a posé la question : pour G un groupe de Lie semi-simple, a-t-on l'équivalence suivante?

G a la propriété (T) si et seulement s'il existe un élément auto-adjoint Ω dans $Z(U(\mathfrak{g}))$, le centre de l'algèbre enveloppante, et $\epsilon > 0$ tels que pour

toute représentation π dans $\widehat{G}^* : \epsilon \leq \pi(\Omega)$ (si G est compact, il suffit de prendre pour Ω l'opérateur de Casimir de G).

Une autre direction concernant le chapitre 3 serait de faire pour des groupes de Lie, un raisonnement analogue à celui-ci :

Soient Γ un groupe de type fini et π une représentation unitaire de Γ sur un espace de Hilbert H_π . On va définir un modèle non standard de π comme suit. Soit U un ultrafiltre sur \mathbb{N} contenant le filtre des parties cofinies, on définit \widehat{H} comme $l^\infty(\mathbb{N}, H_\pi)/N$, où

$$N = \{(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N}, H_\pi) \mid \lim_U \|\xi_n\| = 0\}.$$

\widehat{H} est un espace de Hilbert relativement au produit scalaire induit par le produit scalaire semi-défini positif :

$$\langle (\xi_n) \mid (\eta_n) \rangle = \lim_U \langle \xi_n \mid \eta_n \rangle \text{ sur } l^\infty(\mathbb{N}, H_\pi).$$

La représentation isométrique de G sur $l^\infty(\mathbb{N}, H_\pi)$ par action diagonale passe au quotient et induit la représentation unitaire $\widehat{\pi}$ de G sur \widehat{H} : $\widehat{\pi}$ est le modèle non standard de \widehat{H} .

Proposition 6.2.8 π a presque des vecteurs invariants si et seulement si $\widehat{\pi}$ a des vecteurs fixes non nuls.

Preuve \Rightarrow Si $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de vecteurs de norme 1 dans H_π telle que $\|\pi(s)\xi_n - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout $s \in S$, on voit que $(\pi(s)\xi_n - \xi_n)_{n \geq 1} \in N$ et donc $\widehat{\pi}(s)\widehat{\xi} = \widehat{\xi}$ où $\widehat{\xi}$ est l'image de $(\xi_n)_{n \geq 1}$ dans \widehat{H} .

\Leftarrow Si $\widehat{\xi}$ est un vecteur de norme 1 dans \widehat{H} qui est fixe par $\widehat{\pi}$, on a $\widehat{\pi}(s)\widehat{\xi} = \widehat{\xi}$ pour tout s dans S . Donc $\lim_U \|\pi(s)\xi_n - \xi_n\| \rightarrow 0$ et $\lim_U \|(\xi_n)\| \rightarrow 1$ (où (ξ_n) représente $\widehat{\xi}$).

Cela veut dire que pour tout $k \geq 1$, pour tout $s \in S$:

$$F_{s,k} = \{n \in \mathbb{N} \mid \|\pi(s)\xi_n - \xi_n\| < \frac{1}{k}\} \in U.$$

Posons $F_k := \bigcap_{s \in S} F_{s,k} : F_k \subset U$ (car U est un ultrafiltre).

On prend alors n_k dans F_k : on a alors pour tout $s \in S$:

$$\|\pi(s)\xi_{n_k} - \xi_{n_k}\| < \frac{1}{k} \text{ et } \|\xi_{n_k}\| > 1 - \frac{1}{k}.$$

La suite $(\eta_k)_{k \geq 1}$ définie par $\eta_k = \frac{\xi_{n_k}}{\|\xi_{n_k}\|}$ est donc presque invariante pour $\pi(S)$. □

On peut alors redémontrer le résultat de [17].

Corollaire 6.2.9 Soit $h_S = \frac{1}{\#S} \sum_{s \in S} s$; la représentation π a presque des vecteurs invariants si et seulement si $1 \in Sp(\pi(h_S))$.

Preuve : π a presque des vecteurs invariants non nuls,

$\Leftrightarrow \hat{\pi}$ a des vecteurs fixes non nuls,

$\Leftrightarrow \hat{\pi}(h_S)$ a 1 comme valeur propre,

$\Leftrightarrow \widehat{\pi(h_S)}$ a 1 comme valeur propre, approchée.

La dernière équivalence résulte du théorème 1.4.(ii) de [46]. \square

Il serait intéressant de voir si on peut faire marcher le même genre d'idées pour les groupes de Lie. Cela nécessite de définir un modèle non standard pour les groupes de Lie.

En dernier lieu, concernant les propriétés génériques, il est certainement possible d'employer le même genre d'arguments qu'au chapitre 6 pour démontrer l'existence asymptotique de sous-groupes libres à $\#X - 1$ générateurs dans le cas des groupes de présentations finies $\langle X, R \rangle$ ("Freiheitssatz asymptotique").

Une autre direction intéressante serait d'essayer de lire sur la présentation, l'existence d'une condition θ . Cela permettrait d'obtenir non plus seulement des résultats asymptotiques, mais des résultats sur des présentations précises.

Bibliographie

- [1] C. AKEMANN AND P. OSTRAND, *Computing norms in group C^* -algebras*, Amer. J. Math., 98 (1976), pp. 1015–1047.
- [2] C. AKEMANN AND M. WALTER, *Unbounded negative definite functions*, Canadian Journal of Math., 33 (1981), pp. 862–871.
- [3] R. BACHER AND P. LA HARPE, *Exact values of Kazhdan constants for some finite groups*, Journal of Algebra, 413 (1994), pp. 495–515.
- [4] L. BARTHOLDI, S. CANTAT, T. CECCHERINI-SILBERSTEIN, AND P. DE LA HARPE, *Estimates for simple random walks on surface groups*. preprint 1995.
- [5] C. BÉGUIN, H. BETTAIEB, AND A. VALETTE, *K -theory for C^* -algebras of one-relator groups*. preprint 1995.
- [6] M. BEKKA, P.-A. CHERIX, AND A. VALETTE, *Proper affine isometric action of amenable groups*, in Novikov Conjecture, Index Theorems and Rigidity, no. 227 in London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, 1995.
- [7] M. BEKKA AND A. VALETTE, *Group cohomology, harmonic functions and the first L^2 -Betti numbers*, à paraître dans Potential Analysis.
- [8] F. BIEN, *Construction of telephone networks by group representation*, Notices of AMS, 36 (1989), pp. 5–22.
- [9] C. CHAMPETIER, *Introduction à la petite simplification.*, à paraître dans proceedings of congrès 'Cayley graphs', Ecole Normale Supérieure de Lyon, France, 13-15 décembre 1993.
- [10] —, *Propriétés statistiques des groupes de présentation finie*, à paraître dans Adv. in Maths.

- [11] —, *Cocroissance des groupes à petite simplification*, Bull. London Math. Soc., 25 (1993), pp. 438–444.
- [12] CHEEGER AND M. GROMOV, *L_2 -cohomology and group cohomology*, Topology, 25 (1986), pp. 189–215.
- [13] P.-A. CHERIX, *Generic result for the existence of free semi-group*, in Séminaire de Théorie Spectrale et géométrie, H. Pesce, ed., no. 13, Université de Grenoble I, INSTITUT FOURIER, 1994–1995.
- [14] —, *Property (T) and expanding constants for semidirect products*, Linear and Multilinear Algebra, 39 (1995), pp. 153–160.
- [15] P.-A. CHERIX AND A. VALETTE, *On spectra of simple random walks on one-relator groups*, à paraître dans Pacific J. of math. with an appendix of P. Jolissaint.
- [16] M. DAY, *Convolutions, means and spectra*, Illinois J. Math., 8 (1964), pp. 100–111.
- [17] P. DE LA HARPE, A. ROBERTSON, AND A. VALETTE, *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group*, Israel J. of Maths., 81 (1993), pp. 65–96.
- [18] —, *On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group ii*, Colloquium Math., LXV (1993), pp. 87–102.
- [19] P. DE LA HARPE AND A. VALETTE, *La propriété (T) pour les groupes localement compacts.*, no. 175 in Astérisque, Société mathématique de France, 1989.
- [20] Y. C. DE VERDIÈRE, *Le trou spectral des graphes et leurs propriétés d'expansion*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, (1993–1994), pp. 51–68.
- [21] A. DEUTSCH, *Some calculations of Kazhdan constants and properties related to property (T)*, PhD thesis, Univ. of Edinburgh, 1992.
- [22] —, *Kazhdan constants for the circle*, Bull. London Math. Soc., 26 (1994), pp. 459–464.
- [23] A. DEUTSCH AND A. VALETTE, *On diameters of orbits of compact groups in unitary representations*, à paraître dans J. Austrial Math. Soc. (Serie A).

- [24] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, vol. 2, Gauthier-Villard, 1968.
- [25] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, no. 37 in Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, 1974.
- [26] J. DIXMIER AND P. MALIAVIN, *Factorisations de fonctions et de vecteurs inféfiniment différentiables*, Bull. Sci. Math., 2e série 102 (1978), pp. 305–330.
- [27] R. GRIGORCHUK, *Symmetrical random walks on discrete groups*, Multicomponent random systems, Nauk, Moscow, 1978.
- [28] M. GROMOV, *Hyperbolic groups*, Essays in Group Theory, ed. S.M. Gersten, M.S.R.I. Publ., 8 (1987), pp. 75–263.
- [29] —, *Asymptotique invariants of infinite groups*, no. 182 in London Math. Soc. Lect. Notes Ser., London Math. Society, 1993.
- [30] A. GUICHARDET, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie.*, Nathan, 1980.
- [31] G. HOCHSCHILD, *La structure des groupes de Lie*, vol. 27 of Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, 1968.
- [32] P. JORGENSEN, *Operators and Representation Theory*, no. 147 in Mathematics Studies, North-Holland, 1988.
- [33] G. KASPAROV, *Lorentz groups: K-theory of unitary representations and crossed products*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 275 (1984), pp. 541–545. in Russian.
- [34] H. KESTEN, *Full banach mean values on countable groups*, Math. Scand., 7 (1959), pp. 146–156.
- [35] —, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959), pp. 336–354.
- [36] A. LUBOTZKY, *Discrete groups, Expanding graphs and Invariant measures*, no. 125 in Progress in mathematics, Birkhäuser, 1994.
- [37] —, *Cayley graphs, eigenvalues, expanders and random walks*, in Surveys in Combinatorics, P. Rowlinson, ed., no. 218 in London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1995, pp. 155–189.

- [38] R. LYNDON AND P. SCHUPP, *Combinatorial group theory*, no. 89 in *Ergebnisse der Math.*, Springer, 1977.
- [39] W. MAGNUS, A. KARRAS, AND D. SOLITAR, *Combinatorial group theory*, John Wiley and Sons, 1965.
- [40] G. MARGULIS, *Explicit constructions of concentrator*, *Problems Inform. Transmission*, 9-4 (1973), pp. 325-332.
- [41] E. NELSON, *Analytic vectors*, *Annals of Mathematics*, 70 (1959), pp. 572-615.
- [42] A. OL'SHANSKII, *Almost every group is hyperbolic*, *International j. of Algebra and Computation*, 2 (1992), pp. 1-17.
- [43] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, no. 44 in *Applied Mathematical Sciences*, Springer, 1983.
- [44] N. POULSEN, *On C^∞ -vectors and intertwining bilinear forms for representations of lie groups*, *J. of Functional Analysis*, 9 (1972), pp. 87-120.
- [45] R.J. ZIMMER, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, no. 81 in *Monographs in Mathematics*, Birkhäuser, 1984.
- [46] H. SCHAEFER, *Banach Lattices and Positive Operators*, no. 215 in *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1974.
- [47] J.-P. SERRE, *Représentations de groupes finis*, *Méthodes*, Hermann, 1967.
- [48] ———, *Arbres, amalgames, SL_2* , no. 46 in *Astérisque*, Soc. Math. France, 1977.
- [49] A. SHENITZER, *Decomposition of a group with a single defining relation into a free product*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), pp. 273-279.
- [50] R. STREBEL, *Small cancellation groups*, no. 83 in *Progress in Maths.*, Birkhäuser, 1990, pp. 227-273.
- [51] A. VALETTE, *The conjecture of idempotents: a survey of the C^* -algebraic approach*, *ull. Soc. Math. Belgique*, XLI (1989), pp. 485-521.
- [52] ———, *Old and new about property (T)*, in *Representations of Lie groups and quantum groups*, M. P. V. Baldoni, ed., no. 311 in *Pitman Research Notes in Math. Ser.*, Longman, 1994, pp. 271-333.

- [53] L. WANG, *On isolated points in the dual spaces of locally compact groups*, Math. Ann., 218 (1975), pp. 19–34.
- [54] W. WOESS, *A short computation of the norms of free convolution operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), pp. 167–170.

Index

- E_δ , *see* mot ayant E_δ
 ϵ -équilibré, *see* mot ϵ -équilibré
- a- T -menable, *see* groupe a- T -menable
- action
 isométrique affine, 11
 propre, 57
- aire combinatoire, 21
- algèbre
 de Lie, 9
 enveloppante, 9
- arête, 13
- asymptotiquement presque sûre, 21
- Cayley (graphe de), 16
- cobord, 11
- cocycle, 11
- coefficient de π , 9
- condition θ , 21
- connecteur uniforme, 14
- constante
 d'expansion, 15
 de Kazhdan, 8
 de Kazhdan l^2 , 34
 de Kazhdan L^2 , 54
- degré
 d'un sommet, 13
- Dehn (algorithme de), 19
- diagramme, 20
 réduit, 20
- espace de Gårding, 10
- expandeur, 14
- fonction
 propre, 57
- Freiheitssatz, 18
- graphe, 13
 régulier, 13
 spectre, 14
- groupe
 à petite simplification, 19
 à un relateur, 18
 a- T -menable, 57
 de cohomologie, 12
 de Lie, 9
 de surface, 77
 finiment engendré, 16
 libre, 15
- générateur infinitésimal, 10
- générique, *see* propriété générique
- Haagerup (propriété d'approximation de), 57
- isométrie affine, 11
- laplacien
 sur un graphe, 14
- libre, *see* groupe libre
- mot
 ϵ -équilibré, 67
 à la propriété E_δ , 81
 alterne suffisamment, 67
 cycliquement réduit, 18
 positif, 67
- nombre de Betti L^2 , 61

- opérateur d'adjacence, 13
- orientation, 14
- pièce, 19
- propriété
 - générique, 21
- propriété (T) , 7
- présentation
 - d'un groupe, 16
 - finie, 16
- représentation, 7
 - unitaire, 7
- revêtement double, 15
- semi-groupe, 10
- sommet, 13
 - adjacent, 13
- système de générateurs, 16
- vecteur
 - (ϵ, K) -invariant, 7
 - C^∞ , 9
 - presque invariants, 7

Glossaire

$B^1(G, \pi)$	11	$\tilde{\kappa}(G, K)$	8
$Bi(G)$	15	\tilde{G}	8
$C'(\lambda)$	19	\tilde{G}^*	8
$E(\Delta)$	20	$b_{(2)}^1(\Gamma)$	61
E_δ	81	h_S	16
$G(\Gamma, S)$	16	h_X	16
G^0	13	$k(h_\pi, G)$	53
G^1	13	$l^2(\Gamma)$	16
$HD(G(\Gamma, X))$	60	$l^2(G)$	13
$H^1(G, \pi)$	12	$l^2(G^0)$	13
$H^1EL_2(G(\Gamma, X))$	60	$r(h_X)$	17
H_π^1	7		
$I(\Delta)$	20		
$K(h, G)$	54		
R^*	19		
$Sp(h_X)$	17		
$Z^1(G, \pi)$	11		
$\#(\Delta)$	20		
\mathbb{F}_X	15		
Γ_g	77		
$\kappa(G, K, \pi)$	8		
$\kappa(G, K)$	8		
$\kappa_2(G, X, \pi)$	34		
$\kappa_2(\pi, G)$	34		
(X, R)	16		
$C^\infty(H_\pi)$	9		
$\mathcal{F}(G)$	13		
$\mathcal{F}(G^0)$	13		
$\mathcal{F}_0(G)$	13		
$\mathcal{F}_0(G^0)$	13		
$\varphi_{\xi, \eta}$	9		
\hat{G}	8		
\hat{G}^*	8		