UNE EPREUVE DE CALCUL EN PREMIERE PRIMAIRE

ANALYSES DÉTAILLÉES
DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

FRANÇOIS CONNE

INTERACTIONS DIDACTIQUES No 6

DÉCEMBRE 1984

Les travaux présentés au chapitre 1 ont été conduits avec le soutien du FNRS, contrat No 1.706.078 (J. Brun et A.-N. Perret-Clermont).

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0. UNE EPREUVE DE CALCUL

0.1. Introduction

Dans le travail du calcul élémentaire, on fait usage d'un type particulier d'exercice. Le calcul lacunaire présente l'écriture incomplète d'une addition et l'élève doit restituer par un calcul (comptage) approprié la donnée manquante (ex. 3 + ... = 8, on doit calculer 5). A l'école on s'arrange toujours pour que le calcul soit faisable (on ne présenterait pas ... + 8 = 7). Il y a là une façon très scolaire de considérer l'écriture équationtionnelle, avec une ambiguïté certaine puisque, si c'est toujours une addition qui est écrite, on y demande tantôt un calcul de composition tantôt de décomposition. Ce genre d'exercice est donc déjà au second degré. Evidemment, l'enseignement du calcul commence autrement. On aura tout d'abord introduit l'écriture en ligne du calcul (4 + 3 = 7) standard et de gauche à droite. Puis la demande d'une addition par l'expression (4 + 3 = ...). Voilà une forme limite du calcul lacunaire et c'est surtout par référence aux autres formes que l'item sera considéré comme tel. La "lacune", elle aussi, va prendre de la consistance puisque de "place où écrire la réponse" (dans 4 + 3 = ...) elle acquiera la signification annexe (combinée) de "place pour la donnée manquante à reconstituer" (dans 3 + ... = 8). On peut aussi entendre cela lors de la lecture des items par l'usage différent du vocable "combien" (4 plus 3 égale (combien) ? et 3 plus "combien" égale 8. Alors que le premier est facultatif, le second ne l'est pas). Dans ce dernier exemple, on met en fait un accent tout particulier à la place de la lacune par rapport aux autres signes du calcul : numériques et équationnels. Dans une optique "syntaxique", on remarquera que l'observation des règles de placement du + et du = suffisent à interpréter correctement les tâches proposées. En contraste à une interprétation "conceptuelle" qui verrait en l'écriture a+b=c celle d'une relation entre trois nombres associant les deux points de vue : composition de a et b et décomposition de c, l'interprétation "syntaxique" paraîtra d'autant plus simple que se glissera un malentendu sur le mot règle. En effet, le modèle syntaxique suppose un fonctionnement formel : une règle y est nécessaire et suffisante et on s'y refère toujours exclusivement. En ce sens, la simplicité est bien abstraite (élaborée).

Pour les élèves, il y a en effet d'autres façons de comprendre ces écritures, et d'autres indices sur lesquels ils peuvent régler leur interprétation. C'est bien de malentendu (sur le mot règle) qu'il s'agit comme le montre cet exemple : supposons qu'en expliquant à un élève l'item 3   ... = 8, j'essaye de lui faire comprendre "qu'il faut faire huit et qu'on a déjà trois", je croirai peut-être lui désigner ainsi explicitement les signes équationnels (+, =) et leur places respectives dans les données. Mais même sur ces propres mots, il se peut que mon interlocuteur infère autre chose. Ainsi par exemple "qu'il faut faire huit" parce que c'est le nombre tout à droite, celui qui "clot le calcul". On butte donc sur la sélection des informations pertinentes.

./.

Bien sûr, je suis schématique. Et l'enseignant ne manquera pas de bien expliquer aux élèves la signification de ces signes équationnels + et =. Et il y reviendra à chaque fois qu'il le faudra pour amener ses élèves à "lire" effectivement ces signes. Certains enseignants même déclarent que la notion d'égalité est une notion clé bien difficile à enseigner en classe préparatoire et élémentaire. Dans le même ordre d'idée, les manuels scolaires (qui voient plus loin que le nez des instituteurs) ont, en Suisse Romande, les équations pour perspective, (même si ici, c'est une forme dégénérée) les chiffres ne sont alors plus seulement à prendre comme des données numériques (pour une opération) mais ont une teinte un peu plus algébrique (le nombre "objet" comme pour les étiquettes de Dienes &Picard ou encore des "chiffres littéraux" si on peut dire.) Une étape intermédiaire entre ces conceptions, effectivement envisagée dans le manuel, mais sur laquelle on ne fait que passer, est de considérer avec subtilité que la forme 3+4=7 exprimerait la composition de 3 et 4, tandis que 7 = 3+4 exprimerait plutôt la décomposition de 7 en 3 et 4 (fiche OP9, lère édition méthodologie 1P. par exemple).

Une telle approche (vers les équations algébriques) suppose un dégagement par rapport à la tâche de calcul (comptage). Voilà pourquoi, dans les manuels actuels, les écritures lacunaires sont doublées de références concrètes ou symboliques annexes : petits jeux de groupe pour les leçons d'introduction et diagrammes de référence divers (eux aussi lacunaires) pour les exercices écrits. Cela ne suffit pas car la suggestion au calcul est (malheureusement ?) si forte pour les élèves qu'ils résolvent le calcul pour lui-même, indépendemment des supports, voire même qu'ils remplissent leur exercice à rebours : les diagrammes en fonction des calculs écrits.

Anciennement, les "équations lacunaires" étaient utilisées à fin d'exercer le calcul. C'était le temps des lignes de calcul répétitifs. Puis, les méthodes ont pris un peu de recul par rapport à cet objectif (sans pour autant l'abandonner bien sûr). A la répétition s'est alors substituée la variation des items. Ainsi, dès la lère année primaire (mais plus après les premiers mois de la 2e primaire !), on propose des équations avec un signe égal initial. Cette variation des exercices peut répondre à diverses considérations. 1°. Pour reprendre l'exemple de 3 + ...=8, une inversion 8 = ... + 3 créera des "dissonnances d'indices" puisque dans une telle équation le résultat n'est plus final. On pourrait espérer qu'en faisant varier les exercices, les règles (invariantes elles) de disposition du + et du = se dégagent comme les plus fiables. 2°. D'un autre point de vue, on peut déclarer que puisqu'une équation peut s'écrire dans "tous les sens", les élèves devraient être "habitués" aussi tôt que possible à traiter des formes diverses. 3°. Enfin, comme évoqué ci-dessus, on peut vouloir suggérer, par l'inversion du égal, l'association des points de vue composition et décomposition dans la relation additive. 4°. Et j'oubliais encore que, au travers de la variété des formes présentées, on peut vouloir éviter que l'élève ne "prenne une mauvaise habitude" et en reste à une conception "calcul". Il ne faudrait pas qu'il enchaîne les signes comme dans

3 + 4 = 7 + 8 = 15 - 6 = 9 etc... (qui en tant que notation d'un calcul est parfaitement admissible mais n'est pas une équation), et qu'ainsi l'apprentissage du clacul fasse ultérieurement obstacle à celui des équations. Curieusement, dès le 6e exercice en 2e primaire, les équations à égal initial disparaissent. Tout comme les écritures en ligne disparaissent dès la 3e primaire.

Le pari est donc celui-ci : une conception plus générale devrait automatiquement émerger d'une variété plus grande de formes exercées. Malheureusement, cette variété est artificielle. Elle repose sur un modèle trop exclusivement centré sur l'objet à enseigner. Par conséquent, elle ne prend pas assez en compte ce qui a trait à l'activité du sujet en train de résoudre ces exercices : ses procédures et les conceptions qu'elles sous-tendent. Ainsi, on a sousestimé le rôle que le sens usuel de l'écriture (lecture) jouait. Mais, et c'est lié, on a aussi sousestimé l'importance que les élèves attachent à l'amplification des nombres qui caractérise toute addition. Ainsi, pour reprendre l'exemple de l'item 8 = ... + 3, l'élève peut refuser de le traiter prétextant qu'on ne peut pas faire 3 avec 8. Mais, il peut aissi (astuce dont il ne se privera pas) inverser le sens de la lecture et par ce fait rétablir la forme usuelle. Ce qui supprimera les dissonances d'indices évoquées ci-dessus. Et lui permettra une adaptation imprévue. De sorte qu'il déjoue les contraintes de l'exercice et ne se trouve plus ainsi étroitement sollicité à dégager les règles abtraites de disposition du + et du =.

Avec le temps, avec les exercices variés (mais très vite aussi répétés) qui occasionneront autant de nouvelles explications magistrales, les élèves arriveront certes à une bonne réussite. Mais on ne sait pas très bien si celle-ci témoignera d'autre chose que d'une meilleures application de leur part, et jusqu'où elle accompagne l'élaboration cognitive du sujet.

L'étude qui va suivre procède une coupe dans l'enseignement en première primaire. D'une part, elle porte sur un ensemble de tâches très spécifiques (scolaires et sèches) d'autre part, elle se situe dans une période bien précise de cet enseignement (début du 3e trimestre de la première année primaire - CP français) où les élèves interrogés ne réussissaient pas encore très bien ces exercices. Elle a pour but de faire ressortir quel est l'enjeu du calcul lacunaire en le situant comme moyen didactique.

* * * * * *

0.2. Forme de ce texte

Je me propose de faire une étude aussi détaillée que possible des productions écrites des élèves. Ceci prend la forme de 3 chapitres. Dans ce 0ème chapitre, je poursuis la présentation des items. Puis, le chapite I est consacré à l'étude des tâches qu'il recouvre, ce travail est celui que j'ai mené pour le compte de la recherche FNRS No. sous la direction de Jean Brun et Anne-Nelly Perret-Clermont. La méthodologie utilisée sera la comparaison des items au travers des distributions d'une population de réponses d'élèves. Le chapitre II est pour moi ici le plus important. Il s'agit de situer les profils de réponse de chaque élève les uns par rapport aux autres. Ceci dans le but de décrire les traitements des données écrites par le sujet. C'est une étape primordiale dans mon périple en didactique puisqu'elle vise à restituer l'unité du sujet qui, auparavant, avait été démantelé pour l'analyse des réponses. Le chapitre III brosse quelques exemples d'observations en classe. Cela redonne étoffe aux faits isolés précédemment. Une étude ultérieure (prochaine) des fiches proposées aux élèves de 1P et 2P montrera comment on entend accompagner les élèves du dénombrement au calcul via le comptage. Cette étude sera l'aboutissement du présent périple et portera essentiellement sur le symbolisme et la façon dont il est contrôlé par les tâches qui y sont promues. Ceci fait lien avec ma thèse : La Transposition didactique au travers de l'enseignement des mathématiques en 1P et 2P de Suisse Romande.

Outre les données d'observation, mes principaux inspirateurs sont mon intuition, Jean Brun, Gérard Vergaud (derrière eux flotte la figure de Jean Piaget, tel le chat de Chester dans Alice au Pays des Merveilles). La démarche répond à une chiquenaude involontaire de Guy Brousseau, mais la théorie des situations et de leurs articulations n'est encore qu'un phare et pas un port d'attache. Pour le reste cette étude n'est pas une récitation et je prierais le lecteur de se référer à la bibliographie succinte pour lire ces auteurs dans le texte.

* * * * * *

0.3. Les feuilles d'items distribuées. Exemple d'une copie d'élève (p. 4bis)

Prénom : Pina

1° Complète pour faire de bons calculs.

2 + 6 = 8

6 + 3 = 9

4 = 10 + 7

7 = 5 + 2

4 = ... + 4

4 = 5 + 9

2° Trace les calculs faux

5 = ~~7~~ + 2

8 = ~~5~~ + 3

3° Complète pour faire de bons calculs (ne mets pas de 0

7 = 8 + 9

4 + 4 = 8

5 + 6 = 11

4° Complète pour faire de bons calculs.

1 + 5 = 3 + 4

2 + 7 = 7 + 8

3 + 4 = 7 + 5

3 + 6 = 9 + 9

Merci

Prénom : Tina

1° Complète pour faire de bons calculs

8 = 9 + 3

7 = 2 + 3

6 = 1 + 5

... + 8 = 7

9 + ... = 4

3 + 7 = 8

2° Traces les calculs qui sont faux.

~~5 = 1 + 6~~

3 = 7 + 10

3° Complète pour faire de bons calculs (ne mets pas de 0)

4 + 1 = 5

2 + 2 = 4

4 = 5 + 6

4° Complète pour faire de bons calculs

4+2 = 2+ 5

3+4 = 3+ 4

5+4 = 9 +3

6+2 = 8 +4

Merci

0.4. Présentation de l'épreuve

Cette étude a pour noyau une épreuve papier crayon collective présentant à des élèves de première année primaire (équivalent du CP français) des écritures de calcul pour la plupart lacunaires. Cette interrogation a eu lieu en fin d'année scolaire (mai 1979). Les items étaient conçus selon 4 "exercices".

0.4.1. Epreuve I. Ecritures complètes

Quatre écritures de calculs avec le signe égal initial sont présentées aux élèves.

8 = 5 + 3		3 = 7 + 10

5 = 7 + 2		5 = 1 + 6

Pour chacun de ces calculs, il existe une relation additive entre les 3 données, mais dans 3 cas cela est écrit dans une "syntaxe" erronée. Je demandais aux élèves de bien lire et de juger lesquels étaient de "bons calculs". L'élève devait biffer (barrer) les calculs qu'il jugeait faux.

Le but de cette épreuve était d'examiner ce qui fait qu'un sujet accepte ou refuse une écriture. Plus précisément, je cherchais réponse aux questions suivantes :
Les élèves verront-ils la relation entre les 3 données ? Si oui, se centreront-ils là-dessus ? Ou bien liront-ils ces écritures de gauche à droite en jugeant alors en fonction de "l'amplification des nombres de données" ? Ou encore liront-ils en fonction des positions des signes = ou + selon une interprétation correcte ?

0.4.2. Epreuve II. Calculs mono-lacunaires

Douze items mono-lacunaires (à une seule lacune) présentant des calculs divers avec des nombres simples (inférieurs à 10. Ex. : 3 + ... = 8). Il était demandé à l'élève "complète, pour faire de bons calculs", on rajoutait par oral "là où il y a 3 petits points, vous mettez un numéro pour que ça fasse un bon calcul". En cas de question de l'élève, on répondait : "si tu crois que le calcul est impossible, alors biffe (barre). Sinon tu mets ta réponse". Cette stratégie, qu'on pourra trouver dangereuse a été choisie à la fois pour des raisons de simplicité de la consigne et pour ne pas désorienter les élèves dès le départ. Il valait mieux leur laisser voir progressivement les choses et les encourager alors en donnant un "statut" à leur étonnement. Les résultats montrent que ceci a fort bien été envisagé par l'ensemble des élèves (cf. annexe p. 11).

Trois facteurs président à l'obtention des 12 items. La place de la lacune (3 positions) ; la place du égal (2 positions) et la "séquence" des données (2 formes) ce qui donne le tableau suivant.

LACUNE	FINALE	2 + 6 = ...	~~7 + 2 = ...~~	4 = 5 + ...	7 = 2 + ...
	MÉDIANE	3 + ... = 8	9 + ... = 4	4 = ... + 7	8 = ... + 3
	INITIALE	.... + 3 = 9	........+ 8 = 7	.... = 1 + 5	.... = 5 + 2
		SÉQ. ASCENDANTE	SÉQ. DESCENDANTE	SÉQ. ASCENDANTE	SÉQ. DESCENTANTE
		ÉGAL FINAL		ÉGAL INITIAL	

TABLEAU I : LES ITEMS DE L'ÉPREUVE II.

Je m'expliquerai plus loin (cf. p 19) sur ce plan. Je n'ai pas donné l'item (de la forme) 7 + 2 = ... J'ai préféré lui substituer un autre item spécial 4 = ... + 4, cas limite entre impossible (il n'y a rien à faire) et trivial (c'est zéro la solution). Le fait d'introduire des calculs "impossibles" (dans le cadre des nombres entiers naturels) est intéressant car :

a) C'est, pour les élèves interrogés, une situation tout à fait inhabituelle.
b) Cela augmente l'éventail des réponses à donner (en introduisant la possibilité du "refus").
c) Cela a peut-être joué le rôle de "feed-back" pour les élèves.

0.4.3. Epreuve III. Calculs bi-lacunaires

Ici, deux lacunes, ou, si vous préférez, une seule donnée numérique dans la suite des signes équationnels. L'élève aura donc plus de liberté pour reconstituer son écriture et aura ainsi peut-être moins de problèmes de calculs que dans l'épreuve prédécente. Il était demandé aux élèves de compléter l'écriture en choisissant bien leurs nombres.

Deux facteurs président à la construction de ces items : la place de la donnée (3 places) et la place du signe égal (2 places) ce qui aboutit aux items suivants :

5 + ... = ... + 4 = ... + ... = 5

7 = ... + ...   (... = 2 + ...)   ... = ... + 6

Suite à une erreur de copie dans les feuilles de données (cf. les exemples donnés précédemment p.5), j'ai posé la question ... + 2 = ... au lieu de l'item ci-dessus. Je ne tiendrai donc pas compte de cet item dans la suite.

LES ITEMS DE L'ÉPREUVE I

5 = 7 + 2	5 = 1 + 6
8 = 5 + 3	3 = 7 + 10
SÉQ. DESCENDANTE	SÉQ. ASCENDANTE

LES ITEMS DE L'ÉPREUVE II.

LACUNE	FINALE	2 + 6 = ...	~~7 + 2 =~~	4 = 5 + ...	7 = 2 + ...
	MÉDIANE	3 + ... = 8	9 + ... = 4	4 = ... + 7	8 = ... + 3
	INITIALE	.... + 3 = 9	........+ 8 = 7	.... = 1 + 5	.... = 5 + 2
		SÉQ. ASCENDANTE	SÉQ. DESCENDANTE	SÉQ. ASCENDANTE	SÉQ. DESCENTANTE
		ÉGAL FINAL		ÉGAL INITIAL	

LES ITEMS DE L'ÉPREUVE III.

DONNÉE INITIALE	5 +... =...	7 =...+...
DONNÉE MEDIANE	...+ 4 = ...	(... = 2 +...)
DONNÉE FINALE	...+...= 5	... = ...+ 6
	EGAL FINAL	ÉGAL INITIAL

LES ITEMS DE L'ÉPREUVE IV

LACUNE FINALE	3 + 4 = 3 +...	4 + 2 = 2 +...	1 + 5 = 3 +...	2 + 7 = 7+...
LACUNE MEDIANE	5 + 4 =... + 3	6 + 2 =... + 4	3 + 6 =...+ 9	3 + 4 =...+ 5

0.4.4 Epreuve IV : Calculs complexes

Ici, contrairement aux autres exercices, j'ai opté pour des calculs un peu plus complexes où c'est l'équivalence de deux additions qui est en fait exprimée (je ne prétends pas que tous les élèves vont les comprendre ainsi).

Ce type d'exercice est pratiqué en classe de première année primaire avec l'idée qu'il s'agit là de l'équivalence entre deux décompositions (cf. p 50). Il est moins "immédiat" donc plus difficile pour les élèves surtout que la conception calcul-résultat doit être mieux élaborée pour aboutir à une réponse "correcte", (la décomposition est une "opération différée"). Dès lors, dans le projet, j'ai mis cet exercice à titre exploratoire. Je ne me suis pas attaché à donner un plan de construction aussi systématique. J'ai simplement voulu vérifier si, sur telle ou telle forme, on pouvait voir quelques élèves raisonner à partir de l'équivalence stipulée par le signe = ou si la plupart en restaient à une conception "calcul". Ainsi ai-je glissé quelques items "triviaux" comme 3 + 4 = 3 + ... ou 2 + 7 = 7 + ... Pour des raisons analogues, j'ai pensé à introduire des items comme 6 + 2 = ...+ 4 ou 4 + 2 = 2 + ... dont les données peuvent elles-mêmes être mises en relation (comme à l'épreuve I) 6 = 2 + 4 et 4 = 2 + 2. Ou encore 3 + 4 = ...+ 5 où on pourrait lire la suite 3, 4, 5. Enfin, j'ai aussi eu envie de poser 3 + 6 = ... + 9, item à réponse nulle.

A voir les résultats de cette épreuve, il aurait été du plus grand intérêt de la systématiser un peu plus. Mais cela pourra faire l'objet d'une recherche en soi.

0.4.5. Récapitulation

En tout donc, 30 items. La passation s'est déroulée en 2 séances distinctes. Je n'étais pas présent lors des passations qui se sont déroulées dans le cadre "habituel" de la classe, par l'enseignante elle-même. Celle-ci avait reçu des consignes très précises de ma part (cf. annexe ci-dessous). Le choix des enseignantes a été laissé au hasard de contacts personnels lors du cours de Jean Brun. La passation a eu lieu en fin d'année, 2 jours de suite. Toutefois, elle n'aura été précédée d'aucune préparation spéciale des élèves et les enseignantes ont fait passer les épreuves immédiatement après les avoir reçues.

* * * * * *

0.5. Message transmis aux enseignants faisant passer les items dans leur classe. (annexe)

Je vous remercie d'avoir la gentillesse de faire passer ces calculs à vos élèves. Moi-même suis déjà allé dans 2 classes de 1ère année. Pour pouvoir mettre ensemble tous ces résultats, il faut que les conditions de passation aient été comparables. C'est pourquoi, je vous prie de vous conformer le plus possible aux consignes strictes qui vont suivre. Mais auparavant quelques explications quant au but que je me suis fixé.

Il ne s'agit pas de savoir si vos élèves savent calculer. Il ne s'agit pas non plus de savoir s'ils ont bien appris le symbolisme mathématique. Non, ce que je cherche, c'est ce que ce symbolisme suggère aux élèves, quelle question lit-il à travers telle ou telle équation lacunaire. Je lui demande aussi un avis. Le principe est donc que l'adulte intervienne le moins possible dans le travail de l'élève. Ainsi ne faut-il pas préparer vos élèves spécialement pour ce travail.

Comme il est impossible de ne pas intervenir, il faut bien répondre aux questions par exemple, les consignes qui vont suivre expliquent dans quel sens je conçois ces interventions.

A. Consignes générales.

Travail individuel, par écrit. S'ils le veulent, les élèves peuvent avoir recours aux jetons. Vous voudrez bien m'indiquer les cas où il y a eu un tel recours.

L'épreuve est en 2 parties, à faire 2 jours différents, si possible dans la même semaine.

Pour éviter que les élèves se copient, ou plus simplement collaborent, vous voudrez bien vous arranger pour que deux élèves voisins n'aient pas la même feuille de données.

Vous distribuez les feuilles, puis vous lisez les différentes consignes aux élèves. Si vous voulez donner un exemple, prenez toujours celui-ci : 2 + 1 = 3.

Faites attention à ne pas indiquer aux élèves comment ils doivent faire ni comment ils doivent interpréter les équations. Ainsi, par exemple, pour 2 + 1 = ..., ne pas dire "vous calculez la réponse et vous la marquer là où il y a les 3 petits points", mais dire plutôt : "là où il y a 3 petits points, vous mettez un numéro pour que ça fasse un bon calcul", de même pour tous les autres calculs.

Pour le reste, dites aux élèves qu'ils lèvent la main s'ils ont des questions à poser, et répondez-y personnellement. Répondez toujours comme ceci : "fais ce que tu penses, si tu penses que ta réponse va, tu la mets, sinon tu cherches encore", ou bien "si tu penses que ce calcul n'est pas possible, tu le traces, sinon tu mets ta réponse", ou encore, retournez-lui sa question en lui demandant qu'est-ce qu'il avait l'intention de mettre.

Si un élève bloque sur une question, lui demander de vous lire l'équation, et lui demander qu'est-ce qu'il pense pouvoir répondre. S'il bloque toujours, lui dire de passer à d'autres questions, et de revenir, après, sur celle-ci.

Quand ils ont fini, leur demander de se relire, puis récolter les feuilles.

Si vous voulez leur faire un "corrigé", faites le après que tous les élèves aient passé les 2 épreuves.

Chaque élève doit traiter toutes les équations, C'est pourquoi, il n'y a pas de temps limite. La durée moyenne est de 15 minutes. Donc, poussez les un petit peu à aller vite. Evidemment, vous saurez juger ce que vous pouvez exiger d'eux, si manifestement, ils n'ont plus envie de faire ces calculs.

B. Voici maintenant point par point quelques dernières retouches.

Point 1

L'élève doit compléter pour que ça fasse un bon calcul. Parmi ces équations, il y en a qui sont "impossibles" telle 4 = 5 + ... Les élèves nous poseront des questions quand ils aborderont ces calculs. Dans ce cas leur demander ce qu'ils pensent mettre et s'ils disent que c'est impossible, leur répondre: "si tu crois que c'est impossible, tu traces le calcul, sinon tu mets la réponse". On ne demande pas aux élèves de corriger pour que ça devienne juste, mais s'ils y tiennent vraiment...

Dans les classes que j'ai visitées, il n'y a pas eu beaucoup de problèmes à propos de ces questions, Il se pourrait qu'un élève ou deux trouvent plus pratique de tracer un calcul que d'y chercher une réponse. Il faudrait alors lui demander s'il a bien répondu comme il pense vraiment ou encore lui demander pourquoi il a tracé. Ces cas ne se sont pas présentés encore.

Point 2

L'élève doit juger si des équations sont justes ou fausses. Il doit tracer l'équation si il l'estime fausse. Dans la consigne bien dire les 2 choses : "si elle est juste, tu laisses comme tel, si elle est fausse tu la traces".

Beaucoup d'élèves avaient tout simplement oublié de traiter ces questions. Vous voudrez bien vous assurer qu'ils n'ont pas oublié de les traiter, quitte à leur retourner leur feuille si jamais. Si beaucoup d'élèves oublient d'y répondre, vous voudrez bien m'en informer.

Point 3

Equations bilacunaires, l'élève doit mettre 2 chiffres qui fassent en tout un calcul juste. Insister sur le fait qu'ils ne doivent pas mettre le zéro.

Des élèves ont décidé ces calculs impossibles. Dans ce cas leur demander : pourquoi ?

Point 4

Il s'agit de compléter les équations pour qu'elles deviennent justes. Beaucoup d'élèves trouvaient ces calculs difficiles voire impossibles. En fait, c'est qu'ils ne savaient pas trop bien que faire. Il y aura certainement des questions à ce propos. Dire aux élèves de barrer s'ils pensent que ces calculs ne vont pas, mais leur demander aussi de bien réfléchir.

* * * * * *

CHAPITRE I . ANALYSE DES RESULTATS SELON LES ITEMS.

Le début de toute analyse à une épreuve comme celle qui m'occupe commence par la constitution des tableaux de réponses des élèves aux items proposés (tableaux XXIV,pg 66 à 74). L'analyse peut alors être faite selon les deux dimensions de ces tableaux. On considère les réponses d'un sujet à tous les items et on envisage de voir si on peut analyser cela globalement. Ici, on postule "l'unité du sujet" que l'on essaye de décrire. On peut cependant s'intéresser aux items eux-mêmes et analyser les réponses que chaque item a "reçu". C'est ce que je vais faire ici. Pour passer ensuite à l'analyse des sujets au chapitre II.

I.1. Résultats généraux aux épreuves II, III et IV

On peut examiner quelques résultats généraux, à commencer par le taux de réussite aux épreuves. Ce qui donne le tableau II.

TABLEAU II : Taux de réussite aux épreuves

I	II	III	IV
	54%	58%	20%

Comme prévu l'épreuve IV s'avère la plus difficile. Mais à part cela on remarque que les épreuves II et III ont été assez bien "réussies" mais pas trop bien non plus. Il vaut donc la peine d'analyser les résultats.

La seconde caractéristique générale intéressante à dégager est donnée par les tableaux III, IV et V qui comparent les erreurs provenant d'une erreur de calcul à celle provenant d'une erreur d'interprétation de la donnée. Je m'explique sur un exemple : Prenons la réponse 11 à l'item 3 + ... = 8. Pour moi une telle erreur ne provient en aucun cas d' une erreur de "calcul" mais sans aucun doute d' une erreur d'interprétation de la donnée. L'élève aura additionné 3 et 8 croyant que c'est cela qu'on lui demande. Je fais donc l'analyse des réponses selon cette catégorisation. J'aboutis alors à des réponses exactes, des réponses correctement interprétées mais avec une erreur de calcul (de 1 ou 2 unités en général) de réponses incorrectement interprétées mais dont le calcul est correct (exemple de 11 p.14) des réponses incorrectement interprétées et incorrectes du point de vue calcul (mais dont je puis identifier le calcul qui y préside) et des réponses autres (dont je ne puis pas donner d'interprétation assez certaine). Une première caractéristique des résultats recueillis et que cette classification aura été possible. La seconde bien plus intéressante est donnée par les tableaux ci-dessous.

TABLEAU III : Comparaison des types d'erreur à l'épreuve II.

<table>
<tr><td colspan="7">EPREUVE II 1023 réponses</td></tr>
<tr><td colspan="3">Traitements corrects</td><td colspan="4">Traitements incorrects</td></tr>
<tr><td colspan="3">586</td><td colspan="4">437</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcul</td><td>Refus</td><td colspan="2">Calcul</td><td>Refus</td><td>Autres</td></tr>
<tr><td colspan="2">413</td><td>173</td><td colspan="2">286</td><td>66</td><td>85</td></tr>
<tr><td>juste</td><td>faux</td><td></td><td>juste</td><td>faux</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>367</td><td>46</td><td></td><td>228</td><td>58</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Note : Pour la raison que j'expliquerai plus loin, l'item 4 = ... + 4 n'a pas été considéré dans cette comptabilité.

On voit donc que la part due aux erreurs de calculs est plus faible que celle due à un mauvais décodage de l'item. On remarque aussi qu'il y a plus d'erreurs de calcul pour les traitements incorrects. (Par traitement, comprenez ici : interprétation).

TABLEAU IV : Comparaison des types d'erreurs à l'épreuve III.

<table>
<tr><td colspan="7">EPREUVE III 465 réponses</td></tr>
<tr><td colspan="3">Traitements corrects</td><td colspan="4">Traitements incorrects</td></tr>
<tr><td colspan="3">270</td><td colspan="4">195</td></tr>
<tr><td colspan="2">Calcul juste</td><td>Calcul faux</td><td colspan="2">Calcul</td><td>Refus</td><td>Autres</td></tr>
<tr><td colspan="2">259</td><td>11</td><td colspan="2">72</td><td>60</td><td>63</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>juste</td><td>faux</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>68</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Le même phénomène que ci-dessus encore plus net. Ce qui tient sans doute au fait que l'élève choisit lui-même les données de calcul.

TABLEAU V : Comparaison des types d'erreurs à l'épreuve IV.

<table>
<tr><td colspan="6">EPREUVE IV 744 réponses</td></tr>
<tr><td colspan="2">Traitements corrects</td><td colspan="4">Traitements incorrects</td></tr>
<tr><td colspan="2">179</td><td colspan="4">565</td></tr>
<tr><td>Calcul juste</td><td>Calcul faux</td><td colspan="2">Calcul</td><td>Refus</td><td>Autres</td></tr>
<tr><td>148</td><td>31</td><td colspan="2">374</td><td>150</td><td>41</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>juste</td><td>faux</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>296</td><td>78</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Malgré la réussite moins grande, même phénomène. Ainsi les élèves ont bien pigé qu'on leur demandait du calcul.

Commentaire conclusif

Les calculs donnés sont numériquement simples, tout à fait à la portée des élèves de 1ère primaire. Cela n'empêche pas qu'ils font des erreurs. Dans une épreuve de calcul comme celle-ci la plupart des erreurs ne sont cependant pas à proprement parler des erreurs de calcul. Une distinction est à faire. Il serait cependant inacceptable de dissocier les choses totalement. Il est clair en effet que l'interprétation des données écrites est étroitement liée aux procédés dont dispose le sujet pour effectuer sa tâche. Les erreurs d'interprétation restent de ce fait liées aux calculs mais plus aux procédés eux-mêmes qu'à leur effectuation. C'est donc vers l'étude de ces procédés et surtout des liens qu'ils entretiennent -relativement au support symbolique écrit- que va s'orienter mon analyse.

De plus, ce fait, car c'en est un, a une grande importance en didactique. Si on peut qualifier ces exercices d'exercices de calculs, c'est dans un sens relativement large. La tâche est du calcul (comptage si on veut être très précis). Cependant, il n'y a pas la possibilité de préciser et ainsi de qualifier tels ou tels items d'exercice de composition, de décomposition etc... puisque fait partie de la tâche elle-même la détermination du calcul en tant que procédé convenable d'obtention de la réponse (ou procédé d'obtention de la réponse convenable, ceci est encore à préciser). Dire que tel item est un item de composition (et pas exercice) de décomposition, etc... n'est alors qu'une description de l'item et non pas de la tâche. C'est un point de repère sous-jacent à une classification des items équivalents du point de vue d'une signification conventionnelle des symboles et de leurs positions respectives.

Ainsi 2 + 6 = ... = 1 + 5 ou encore ... = 5 + 2 sont tous des items de composition mais cela ne devrait en rien préjuger de la tâche des élèves.

Note : Il est fréquent en pédagogie et dans la pratique de rencontrer une positivation de la réponse correcte (contre laquelle je mets le lecteur en garde dans le paragraphe ci-dessus).

De là une façon très grossière d'analyser la tâche en fonction de celle-ci seulement. En fonction de ce qu'il <u>faudrait</u> faire plus qu'en fonction de ce qu'on <u>pourrait</u> faire. Il reste aux chercheurs en didactique à examiner l'impact réel que cette positivation a sur l'enseignement et l'apprentissage lui-même. Celui-ci ne peut être nul puisque l'imitation existe.

* * * * * *

1.2. Analyse des résultats de l'épreuve II

I.2.1. Prolongement de l'analyse

J'ai déjà commencé à jeter les jalons de l'analyse telle que je la conçois. Je vais ici, pour l'exemple, préciser ces principes qui seront repris et prolongés pour les autres épreuves.

La question posée est celle de comprendre ce qui préside pour l'élève au choix de l'opération à effectuer, et par là on aura des renseignements sur la manière dont ceux-ci investissent l'écriture lacunaire (au moment de l'apprentissage où on l'aura pris).

Comme je le disais plus haut, habituellement on caractérise les items par le calcul (l'opération) qu'il faudrait faire pour trouver ("sans deviner") la réponse correcte. Il y a derrière cette positivation une confusion. Pour ma part je distingue entre description de la tâche et description des items. Et c'est à titre de repère seulement que je reprendrai cette dernière ici. Je distinguerai donc les items de composition (abréviation C) qui sont : 2 + 6 = ... = 1 + 5 et ... = 5 + 2 . Parmi les 8 items de décomposition restants, ceux qui sont possibles (abréviation D pour décomposition) c'est-à-dire : 3 + ... = 8 8 = ... + 3 ... + 3 = 9 et 7 = 2 + ..., et ceux qui sont impossibles (abréviation I) qui sont : 9 + ... = 4, 4 = ... + 7, ... + 8 = 7, 4 = 5 + ... Je ne puis faire totalement abstraction de ce "vocabulaire" puisqu'il exprime la finalité même de l'apprentissage du calcul (et de son écriture en ligne).

En même temps qu'il est appelé à apprendre le calcul, l'élève doit apprendre à reconnaître les formes que celui-ci peut prendre. Cette reconnaissance s'appuyera sans doute sur des "dispositions relatives de symboles". L'objet de mon étude n'est pas de faire un recensement exhaustif de ces indices ni de leurs relations (c'est d'ailleurs mouvant au cours de l'apprentissage et des intégrations qui se succèdent). Je me suis attaché à explorer cette hypothèse sur "3 indicateurs" qui m'ont paru particulièrement pertinents du double point de vue des représentations cognitives des élèves que celui de l'enseignement pratiqué en Suisse Romande actuellement (conception de toute une génération de manuels scolaires). Je vais donc utiliser dans mon analyse ces "indicateurs" comme des révélateurs de la manière dont les élèves investissent l'écriture d'une signification particulière. C'est-à-dire de la façon dont ils y font correspondre certaines procédures de calcul,et des relations que celles-ci entretiennent entre elles (cf. G. Vergnaud et son schéma sur l'isomorphisme dans :L'enfant, la Mathématique et la Réalité, que le lecteur est prié de bien méditer).

Mes comparaisons devront alors être axées sur l'examen des diverses catégories de réponses obtenues. Je ne dispose de renseignements directs sur les procédures effectivement mises en oeuvre par les élèves pour aucune de leurs réponses. Cependant à partir du nombre donné (ou de la forme de la réponse, ainsi que de recoupements que l'on peut faire) je puis inférer dans bien des cas le calcul qui a permis d'obtenir cette réponse (cf. chap II pour une description détaillée de l'inférence et de son contrôle p.77). Ainsi il est possible de faire un premier regroupement en 4 types de réponses.

Calculs additifs (abréviation +)
Calculs soustractifs (abréviation -)
Refus (abréviation R)
Autre (abréviation A)

Note 1 : 1) Je ne connais pas la procédure utilisée. Donc sera dite soustractive une réponse qui donne un nombre qui pourrait être obtenu par une soustraction. Que ce soit par "complémentation" ou par "comptage à rebours" ou encore par une autre procédure. Ici, et selon des renseignements complémentaires sur l'enseignement du calcul écrit en 1ère primaire, je puis cependant faire l'hypothèse que, dans la majeure partie des cas, ce sont des procédures de complémentation qui ont été mises en oeuvre. A titre d'exemple je citerai la formulation utilisée par un bon nombre d'élèves : "pour faire tant et j'ai tant" (ex. "Pour faire 8 et j'ai 3 alors 5 sur l'item 3 + ... = 8) formulation qui ressortait souvent comme "justifications" d'une réponse de refus (ex. refus de traiter 8 = ... + 3 car pour faire 3 et j'ai 8, ça ne va pas).

2. Je dis refus car on doit envisager pour ce type de réponses diverses significations : le refus d'entrer en matière, ou la déclaration d'impossibilité qui elle se rapporte soit à l'item soit à l'élève (impossible pour moi de calculer cette réponse).

3. Réponses autres, c'est-à-dire qui sont difficiles à apprécier ou encore qui sont résultantes de procédures archaïques, et erronées de comptage. Dans ce chapitre je ne ferai pas la distinction (cf. chap. II).

Ceci m'amène à m'intéresser de plus près aux traitements des élèves. Ici, je vais examiner pour chaque item les distributions des réponses selon les 4 types définis ci-dessus. Je procéderai du général au particulier en commençant par regarder les distributions des réponses selon les catégories d'items : composition, décomposition et impossible, Puis je différencierai selon les indices retenus. Je clorai l'analyse par la donnée des résultats item par item comparés par paires ou groupes de paires, et en décomposant la population en 4 groupes définis selon leur réussite à l'épreuve.

* * * * * *

1.2.2. Distribution des réponses selon les types d'items

TABLEAU VI : Distribution des réponses selon les types d'items

tâche / traitement	C	D	I.	Tot	t.err.
+	296	96	105	497	40%
-	25	199	57	281	29%
R	30	43	175	248	29%
A	21	34	35	90	
t.rec*	80%	54%	47%		

* Taux de reconnaissance

Note : Pour pouvoir comparer, j'ai doublé les résultats de l'item 2 + 6 = ... faisant l'hypothèse que les résultats de l'item 7 + 2 = ... auraient été voisins.

a) En examinant ce tableau verticalement on remarque que les items de composition sont mieux "réussis" tandis que les items de décomposition ou impossibles sont réussis de façon comparable.

b) En examinant la distribution des réponses sur les catégories d'items (horizontalement) on fera les remarques suivantes :

1. 49% de traitements additifs, donc forcément pas mal de traitements additifs erronés : 40%

2. Légèrement plus de traitements soustractifs que de refus. Mais le même taux de réponses erronées : 29%, (donc moindre que celui des réponses additives erronées : 40%).

3. Faible taux de réponses autres : 10%

Synthèse : Pour moi, et en me plaçant surtout d'un point de vue procédural, l'addition est une opération "souche" (en prolongement direct de la comptine) constitutive du nombre et sur laquelle vont se greffer les diverses procédures soustractives. Et cela en ce qui concerne les apprentissages de l'enfant que l'organisation de l'enseignement dipensé à l'élève. Suivant cette idée, je fais l'hypothèse, que dès le moment où le sujet est capable d'envisager la décomposition, il le fait en des termes qui lui permettent de différencier les cas où la décomposition est possible de ceux où elle ne l'est pas (du moins selon ce support symbolique et sa façon de le comprendre car on ne "manie" pas des chiffres écrits comme des jetons).

Ceci est confirmé par ce TABLEAU VI. On trouve en effet la "préférence" à traiter additivement, ce qui relativise la "réussite" aux items de composition. De plus la distribution des réponses aux items impossibles est semblable à celle des items soustractifs (même si ces derniers sont un peu mieux réussis). Concomitamment, le recours à des réponses de refus n'est que légèrement inférieur aux réponses soustractives et pas plus erronné.

Or jamais auparavant les élèves interrogés n'avaient été mis en présence de telles éventualités (c'est-à-dire avoir affaire à des items impossibles qu'il faudrait "refuser" donc non seulement une nouvelle forme de questions mais encore une nouvelle forme de réponse). On aurait pu s'attendre à un décalage bien plus net.

Note : Ce sont des considérations relatives au contrat didactique et non pas au développement cognitif qui font que, dans la pratique, de telles situations (et éventualités) ne soient pas présentées aux élèves dès le début de leur apprentissage. Un argument"mathématique" du type : il n'y a pas d'équation impossible puisque $\mathbb{Z}$ existe,ne fait que masquer cela puisque, bien sûr il n'est pas à la portée des enfants de 7 ans (du point de vue du programme s'entend). Il est un bon exemple de ce qui lie le contrat didactique avec la transposition didactique (mais là je renvoie le lecteur à des textes spécifiques sur ces thèmes, Brousseau, Chevallard, Conne).

* * * * * *

I.2.3. Discussion sur les "indices"

Les termes selon lesquels le sujet envisage la décomposition sont bien sûr ceux du comptage. A cela sont liés divers aspects qui "interfèrent" avec les caractéristiques de l'écriture (support symbolique privilégié dans cette étude).

Tout d'abord le comptage, en tant qu'opération, à une vection. Le résultat ne peut être que final succédant aux données numériques. Dans le prononcé (oral), l'annonce du résultat (le égal) succède au prononcé de l'opération (plus). Parallèlement, il y a une vection ordinale entre les nombres en présence. L'addition amplifie les données pour aboutir à un résultat plus grand, la soustraction si elle s'effectue par comptage à rebours (et plus encore si elle se relie à une action d'ôter) diminue les données ou descend dans la suite numérique, enfin la soustraction par "complémentation" part d'une comparaison ordinale entre les données elles-mêmes (à ce propos il n'est pas du tout certain que des enfants de cet âge "pensent" au fait que le résultat d'une compréhension est, lui aussi, forcément plus petit que le grand facteur). Dans chacun des trois cas il y a une relation privilégiée (entre 2 et 3 nombres en présence).

Ceci interfère avec les systèmes symboliques. La comptine a déjà sa vection. Mais je m'intéresse ici à l'écriture qui elle aussi a un sens privilégié. Ce sens nous apparaît comme spatial mais, du point de vue de l'action, il est aussi temporel Ainsi le égal en tant qu'annonce du résultat succède au + en tant que symbole de l'opération (on voit beaucoup d'élèves qui pour reprendre à ... = 5 + 2 procèdent à une lecture "inversée" de droite à gauche ce qui rétablit la succession "naturelle". Ils préfèrent résoudre cet item dans les termes : "Combien font 5 plus 2 ?" que "Quel est le nombre qui se décompose en 5 et 2 ?" Essayez d'ailleurs de poser la question ainsi à de si jeunes élèves !)

Enfin, l'écriture lacunaire, comme moyen d'exercer l'élève au calcul, ne simplifie pas les choses. La lacune désigne le nombre à trouver, et par là, indirectement, le calcul à faire pour le trouver. Or par un jeu de dispositions des lacunes, cette tâche ne va pas forcément coïncider avec l'opération désignée par les signes écrits sur le papier. Il ne faut pas additionner les données de 8 = ... + 3 pour trouver les réponses, même si c'est noté +.

L'abstraction ira dans le sens d'une distinction (par le sujet) entre ce qui est écrit et les opérations qu'il effectue. Ceci se fera à la faveur de la construction par le sujet de tout un tissu de relations (réversibles au sens piagétien) permettant de travailler sur une même forme écrite, sur différents aspects sans qu'il en résulte des résultats divergents.

C'est à une phase de cette construction que je pense avoir accès dans mon étude. Les termes de l'analyse ayant été posés, j'ai utilisé comme moyen trois indices de ces relations ordinales.

a) L'ordre numérique : facteur de la séquence de données
b) L'ordre des signes opératoires :facteur de la position du =
c) La place de la lacune enfin.

Une chose complique passablement l'analyse. C'est que ces facteurs ne sont pas indépendants relativement à la tâche, et de ce fait ne sont pas totalement isolables. En effet, du croisement des facteurs "place du =" et "place de la lacune" vient la distinction entre composition et décomposition et qu'ensuite, du croisement "place du =" et "séquence numérique" découle la distinction entre possible et impossible.

* * * * * *

I.2.4. Etude autour des 3 facteurs retenus

a) La place de la lacune a une influence sur la détermination de la tâche. Je vais tenter ici une première analyse qui sera approfondie sur l'étude des items (p.34).

TABLEAU VII : Distribution des réponses selon la place de la lacune.

	Finale	Médiane	Initiale
+	166	74	173
-	48	144	87
R	45	114	87
A	20	40	25

TABLEAU VIII : Distribution des réponses selon la place de la lacune si tous les élèves avaient repondu juste.

	Finale	Médiane	Initiale
+	93	0	186
-	93	186	93
R	93	186	93
A	0	0	0

(Note : ici on a considéré 11 items soit : 3 avec lacune finale, 4 avec lacune médiane et 4 avec lacune initiale).

Prenons la colonne "lacune finale". On remarque alors qu'une lacune finale favorise nettement les traitements additifs. De plus, on verra (p.36 tableau XV) que les 48 réponses soustractives et 45 réponses par refus sont presque toutes correctes. Une lacune finale est donc un indice prédominant qui joue un rôle de leurre pour les items 7 = 2 + ... et 4 = 5 + ... "masquant" à l'élève la place du signe.

Pour les deux autres colonnes, les choses ne sont pas aussi nettes. Les lacunes médianes et initiales n'ont pas autant de signification pour les élèves et ne jouent pas indépendemment des autres indices. Ainsi une lacune médiane ne joue pas, relativement à la soustraciton (complémentation) un rôle analogue à celui de la lacune finale. D'autre part, sur les 173 réponses additives recensées aux items à lacune initiale, 128 proviennent des items ... = 5 + 2 et ... = 1 + 5, c'est donc que, dans ces cas, les élèves se sont centrés sur d'autres indices pour interpréter leurs données.

La lacune désigne à l'élève le nombre que celui-ci doit trouver. La concordance entre cette désignation et la place usuelle (c'est-à-dire tout à droite) du résultat du calcul écrit a une grande "signification" pour lui.

b) Quel est le rôle du signe = ? Je vais étudier séparément les 3 items additifs et les 8 autres.

TABLEAU IX Distribution des réponses aux items additifs

	2+6 = ...	... = 1+5	... = 5+2
+	84	63	65
-	2	13	8
R	2	14	12
A	5	3	8

Les items avec un = initial sont moins bien réussis. Ils ont le même taux de réponses additives. Pour le reste difficile à comparer.

TABLEAUX X et XI Distribution des réponses aux items de décomposition et impossibles selon la la place du signe =

=final	D	I	Tot	%erreurs
+	42	46	88	(100)
-	108	24	132	18%
R	18	98	116	16%
A	18	18	36	(100)
t.rec.*	58%	53%		

=initial	D	I	Tot	%erreurs
+	54	59	113	(100)
-	91	33	124	27%
R	25	77	102	25%
A	16	17	33	(100)
t.rec.*	49%	41%		

* Taux de reconnaissance

On voit donc que la réussite baisse quand le = est initial. Il faut remarquer le parallélisme entre les colonnes D et I. L'effet de ce facteur est donc non spécifique à une tâche donnée.

Le nombre de traitements erronés augmente aussi : plus de traitements additifs et plus de traitements soustractifs et de refus erronés. On peut déduire de ces tableaux que le signe égal et sa position ne sont pas pris en compte par certains élèves. Ce qui les mène à se tromper lorsque le = est initial. D'autres indices ont pour les élèves plus de prégnance que le = et sa position. Ceci est important à relever. Surtout quand on sait avec quel soin, dans l'enseignement, on tente de rendre les élèves sensibles au égal, à sa "signification" et on essaye d'éviter qu'ils prennent l'habitude des écritures avec signe = final.

c)Séquence des nombres donnés. Tout d'abord, dans mon modèle, cet indice est spécifique à la situation de "décomposition". C'est-à-dire que dans ce cas-là (ou lorsque l'élève a interprété l'item de cette façon) il permet de déterminer si la soustraction (complémentation) est possible. Alors que dans une situation "additive" (ou interprétée comme telle) il devient non pertinent.

D'une manière ou d'une autre, le sujet doit faire une comparaison ordinale entre ses données lorsqu'il entreprend une complémentation (et que par là il en détermine la possibilité ou l'impossibilité). Mais en soi, comme de deux nombres il y en a toujours un plus petit, il est toujours possible de repérer le plus petit des 2 nombres puis de passer à l'autre. Cette comparaison devient donc critère de possibilité ou de l'impossibilité, à la condition qu'elle soit couplée à un ordre donné par l'écriture et comme telle attribuée à l'ordre du calcul lui-même.

Ma définition d'une séquence ascendante ou descendante est relative à l'ordre de l'écriture gauche → droite (dissociation donc de la séquence avec la position du =). Examinons les effets de ce facteur.

1. Item de composition (cf. Tableau IX p. 27). Comme nous l'avons vu à la page précédente, on ne peut pas dire s'il y a un effet de ce facteur qui différencierait (pour l'ensemble des

élèves) les items ... 5 + 2 et ... = 1 + 5.

2. Items de décomposition (possibles et impossibles).

TABLEAUX XII et XIII Distribution des réponses aux items de décomposition (possible/impossible) selon la séquence

séq. asc.	D	I	Tot	Taux d'erreurs
+	42	59	101	(100)
-	108	33	141	23%
R	18	77	95	19%
A	18	17	35	(100)
Taux réussite	58%	41%		

nombre d'erreurs total : 187

séq. des.	D	I	Tot	Taux d'erreurs
+	54	46	100	(100)
-	91	24	115	21%
R	25	98	123	20%
A	16	18	34	(100)
Taux réussite	49%	53%		

nombre d'erreurs total : 181

On a une influence sur le taux de réussite ainsi que sur le nombre total de réponses soustractives et de refus. La séquence ascendante favorise le nombre de réponses soustractives et la séquence descendante favorise le nombre de réponses refus. Alors que les nombres de réponses additives et autres restent constants. Cependant je m'attendais à un effet plus net (que les taux d'erreurs restent constants cela est normal vu la symétrie des items). Ceci veut dire que cet indice n'est pas toujours prépondérant. Ce qu'on peut voir par l'analyse plus fine qui va suivre.

TABLEAUX XII' ET XIII' : Analyse des tableaux XII et XIII

ASC	3+...=8	...+3=9	4=...+7	4=5+...
+	19	23	16	43
-	55	53	28	5
R	7	11	41	36
A	12	6	8	9
	D		I	

DES	8=...+3	7=2+...	9+...=4	...+8=7
+	15	39	24	22
-	50	41	11	13
R	18	7	48	50
A	10	6	10	8
	D		I	

On remarque alors que les colonnes (asc. D) et (desc. I) sont homogènes tandis que les colonnes (asc I) et (desc. D) ne le sont pas du tout. Ces dernières contiennent les items 4 = 5 + ... et 7 = 2 + ... qui nous l'avons vu et nous le reverrons sont particuliers du fait de la lacune finale. Une autre façon de considérer les choses et de dire que les items ayant un = final (les colonnes (asc. D) et (desc. I)) sont traités de façon analogue et ici le facteur de la séquence numérique joue. Lorsque le égal est initial, il y a "éclatement" comme si les indices sur lesquels les élèves se basaient devenaient discordants. D'une part il y a les items à lacune finale. De l'autre il y a les items 4 = ... + 7 et 8 = ... + 3 qui se distinguent par le fait que pour eux et contrairement à tous les autres items les réponses additives ne sont pas la majorité des réponses erronées (cf. tableau XV). 4 = ... 7 est pris majoritairement comme soustractif tandis que 8 = ... + 3 est souvent pris comme impossible. Une séquence joue donc dans ces cas le rôle de leurre.

Dans le cas des items avec = initial, les indices jouent donc spécifiquement, et de façon dissociée. Ceci sera précisé plus loin.

d) Conclusion de cette analyse

Plus que de facteur ou indice, il faudrait parler d'indicateur pour désigner ces 3 propriétés des items que j'ai retenu pour mon analyse. Il ressort de celle-ci que c'est avant tout leur interdépendance qui est signifiante. Ou plutôt que c'est leur concordance qui est prise en compte sans doute parce qu'elle ne fait que traduire la concordance (qui pourrait être vécue comme une convergence) des différentes relations d'ordre : numérique, spatiale, temporelle.

Pour l'enseignement, il est important de noter que le seul de ces indicateurs qui fasse l'objet d'un enseignement : le = et sa position, soit justement celui qui est le moins "perçu" par les élèves (il ne correspond d'ailleurs à aucune action tant que l'élève n'a pas compris qu'il peut être le signe d'une lecture inversée -droite → gauche- ; mais ceci ne fait pas l'objet d'un enseignement). Alors que des indices plus prégnants président à leur résolution : position de la lacune, comparaison des données numériques. Et là-dessus, l'école est muette. (Peut-être tant mieux ?). Et puis comment "parler" aux élèves de cette interdépendance des signes ?

* * * * * *

I.2.5. Distribution des réponses selon quatre catégories d'élèves à partir de leur taux de réussite à l'épreuve II.

Un autre indicateur qui n'est pas à négliger est le taux de réussite des élèves. Encore faut-il se demander de quoi il est un indicateur. Pour moi il va me permettre -dans un premier temps car au chap. II je vais développer cette analyse- d'examiner chez les différents individus l'intégration des différentes procédures et de leurs supports symboliques (en me centrant ici sur l'écrit), donc un indicateur de l'élaboration des procédures chez les élèves. Peut-on voir une relation entre ce taux de réussite et la prise en compte des différents indices ?

Note d'avertissement : Si le taux de réussite est un indicateur, il est bien trop grossier et insuffisant pour que l'on puisse l'utiliser à la définition de stades de l'apprentissage. Il y a dans la notion de stade une dimension évolutive (génétique) qui ne peut en aucun cas être attribuée aux taux de réussite. La maturation cognitive et les progrès dans l'apprentissage ne se manifestent pas nécessairement par une échelle de réussite (ni forcément parallélisme, ni forcément continuité).

Commençons par les catégories extrêmes.

a) Catégorie 4 : réussite

On ne peut pas dire grand-chose des réponses correctes et de leur distribution pour les items. Je vais donc considérer à part les élèves qui ont manifesté une réussite, à 9 au moins des 11 items (laissant toujours 4 = ... + 4 de côté).J'ai repéré 27 de ces élèves. Ce qui fait à peu près le tiers de la population. Ceci est un résultat intéressant.

b) Catégorie 1 : réponses additives

Si un élève résoud tous les items additivement, il aura donc au plus 3 réussites (puisqu'il y a 3 items additifs). J'ai donc regroupé les élèves qui répondent à ce critère en une catégorie. Ils sont 21. Le TABLEAU XIV montre qu'effectivement c'est la catégorie des traitements additifs puisque 63% des réponses sont additives, 8% sont soustractives et 11% sont de refus.

c) Catégories intermédiaires 2 et 3. Sans signification intrinsèque

Restent 45 élèves que j'ai répartis en 2 catégories de taille comparable selon les taux de réussite suivants. Catégorie 2 des élèves qui ont au moins 4 réussites et au plus 6 réussites: 25 élèves. Catégorie 3 des élèves qui ont au moins 7 réussites et au plus 8 réussites : 20 élèves.

Je donne alors le TABLEAU XIV des distributions des réponses pour chacune des sous-populations 1, 2 et 3. Tous les chiffres sont ramenés à 100 ceci afin de faciliter les comparaisons.

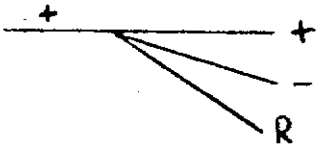
1	C	D	I	Tot	Taux err.
+	70	58	60	188	63%
-	5	6	12	23	50%
R	7	14	12	33	58%
A	18	22	16	56	
Tot	100	100	100	300	

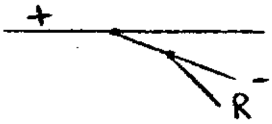
2	C	D	I	Tot	Taux err.
+	68	31	35	134	50%
-	11	42	22	75	44%
R	15	17	28	60	53%
A	6	10	15	31	
	100	100	100	300	

3	C	D	I	Tot	Taux err.
+	80	15	20	115	30%
-	12	64	23	99	35%
R	8	13	49	70	33%
A	0	8	8	16	
Tot	100	100	100	300	

TABLEAUX XIV Distribution des réponses aux différents types d'items selon les catégories de réussite 1,2,3.

Je laisse au lecteur le soin de comparer les tableaux et, par exemple, d'examiner les traitements additifs ainsi que les réussites aux items de composition.Ainsi que l'écart modeste entre traitements soustractifs et de refus. Enfin le changement qui semble y avoir pour les traitements de refus entre les catégories 1 d'une part et 2 et 3 de l'autre.

Je veux examiner ici une chose moins directement accessible mais qui a une importance relative à mon hypothèse de départ. Je disais que l'addition était une opération "souche" sur laquelle venait se greffer les soustractions, et qu'ainsi la détermination du traitement soustractif par refus se posait aux élèves dans les mêmes termes. Ce qui peut être illustré par le schéma : 

et non pas par un schéma du type : 

qui ferait jouer à la soustraction, à son tour, un rôle de "souche".

Or, pour aucune catégorie d'élèves, il y a plus de 33% de réponses soustractives. Il n'y a donc pas, comme avec l'addition, recours abusif à la soustraction, au détriment du refus (une sorte de calcul à tout prix) (cf. p.115).

Remarquons en outre que ceci est tout à fait compatible (conforme) avec ce qui a été dit auparavant sur le rôle des indices dans l'interprétation des items : lacune finale et lacune médiane (p. 25) ainsi que séquence numérique des données (p.28).

* * * * * *

I.2.6. Analyse des distributions des réponses pour chaque item et selon les 4 catégories d'élèves.

L'épreuve II est caractérisée par une variété très grande des items. Pas d'item indentique mais chaque fois une écriture différente de toutes les autres, construite par le croisement de 3 "facteurs". Ceci donne des résultats assez équilibrés où les erreurs se compensent au fil des confusions des élèves Il convient alors de comparer les items un par un. En fait c'est là pour moi la partie la plus intéressante de l'analyse. Les approches précédentes avaient une fonction toute didactique de préparer le lecteur à l'examen minitieux du TABLEAU XV (voir p. 36)qui reprend la forme du tableau I (de la page 9) en donnant pour chaque catégorie d'élèves la distribution de réponses aux différents items.

L'analyse procède alors à partir du tableau et en comparant les distributions des réponses constituera 5 paires d'items qui ensuite seront comparées entre elles. Ces paires seront constituées d'items qui ont une distribution de réponse "identique" (si on peut comparer verticalement case par case) ou "analogue" (si pour comparer il faut procéder préalablement à une rocade entre les places des réponses + et - + et R ou R et -). Cette analyse complète celle faite aux pages 25 à 30. D'une part elle prend en compte les 11 items de l'épreuve II et de l'autre elle répond à l'exigence d'une comparaison fine des distributions de réponses par catégorie de réussite.

Analyse

0. La comparaison permet le regroupement des items en item plus 5 paires. Le tableau suivant montre quelles cases sont à considérer ensemble

2+6 = ···		paire	④
paire	paire	paire	⑤
②	③	paire	①

1. Item 2 + 6 = ... On remarquera que cet item est bien réussi par tous les élèves.

2. Paire ① Elle comporte deux items qui du point de vue de la distribution des réponses sont "identiques". Plusieurs choses caractérisent cette paire d'items. D'une part ils sont

2 + 6 = ...		4 = 5 + ...	7 = 2 + ...
3 + ... = 8	9 + ... = 4	4 = ... + 7	8 = ... + 3
... + 3 = 9	... + 8 = 7	... = 1 + 5	... = 5 + 2

	+	-	R	A	+	-	R	A	+	-	R	A	+	-	R	A
1	17	0	0	4					17	0	1	3	15	1	3	2
	11	1	2	7	13	2	2	4	10	6	2	3	11	0	4	6
	12	3	3	3	11	2	5	3	12	2	3	3	12	2	3	4
2	23	0	1	1					16	1	3	5	15	7	1	2
	6	12	3	4	8	5	9	3	3	11	8	3	3	11	8	3
	7	12	5	1	8	5	8	4	12	7	6	0	10	4	7	4
3	18	2	0	0					9	3	7	1	7	9	2	2
	2	16	1	1	3	3	11	3	2	9	8	1	1	12	6	1
	2	14	2	2	2	4	13	1	13	3	4	0	16	2	2	0
4	26	0	1	0					1	1	25	0	2	24	1	0
	0	26	1	0	0	1	26	0	1	2	23	1	0	27	0	0
	2	24	1	0	1	2	24	0	25	1	1	0	27	0	0	0
2+3+4	67	2	2	1					26	5	35	6	24	40	4	4
	8	54	5	5	11	9	46	6	6	22	39	5	4	50	14	4
	11	50	8	3	11	11	45	5	50	11	11	0	53	6	9	4
Tot	84	2	2	2					43	5	36	9	39	41	7	6
	19	55	7	12	24	11	48	10	16	28	41	8	15	50	18	10
	23	53	11	6	22	13	50	8	63	13	14	3	65	8	12	8

TABLEAU XV

Distribution des réponses selon les catégories de réussite 1,2,3,4 ; 2+3+4, et Totales et les items organisés selon le TABLEAU I.

moins souvent traités additivement que 2 + 6 = ... (on s'y attendait), mais que pour les catégories 1 et 2 d'élèves (soit pour la moitié des élèves) ils sont moins souvent traités additivement que les items de la paire 4 (lacune finale). Deuxièmement, ce sont les seuls items pour lesquels la réussite des élèves de la catégorie 2 soit moindre que celle des élèves de la catégorie 1. Enfin, pour ces items, il y a un équilibre parmi les réponses incorrectes entre soustraction et refus.

3. Paire ② Ici encore deux items ayant une distribution des réponses "identique". Cette paire se caractérise par les faits suivants. D'une part la réussite à ces items est comparable à celle des items de la paire ① Sauf pour la catégorie 1 bien évidemment (et qui fait toute la différence en ce qui concerne les résultats globaux). D'autre part, les confusions dans l'interprétation de la tâche ne sont pas exclusivement entre soustraction et refus (contrairement à la paire ⑤, nous allons le voir ci-dessous). Il y a un équilibre parmi les réponses incorrectes entre addition et refus.

4. Paire ③ Ici toujours, deux items ayant une distribution de réponses "identique" caractérisée par une réussite moindre que celle des paires ①et ② A part cela ces items sont tout à fait comparables (analogues) à ceux de la paire ②. De nouveau il n'y a pas d'hésitation plus grande entre refus et soustraction qu'entre refus et addition.

2 + 3 + 4. On peut dire que les distributions de réponses sont "analogues" pour les 3 paires d'items ①② et ③ ces 6 items étant donc d'une complexité comparable pour les élèves interrogés. A noter deux petites différences : la réussite légèrement moindre aux items "impossibles" de la paire ③ et le fait que pour les items de la paire ① les élèves répondent à peu près autant par soustraction que par refus.

5. Paire ④ Ici deux items dont on a déjà parlé à maintes reprises ayant des distributions de réponses "analogues"

(rocade entre - et R). Cette distribution se caractérise par deux choses. D'une part les réponses additives sont nombreuses et ce jusque pour la catégorie <u>3</u> de réussite. D'autre part, les réponses additives sont les seules réponses erronées et ce, dès les catégories <u>1</u> et <u>2</u> de réussite. Voici pourquoi je disais à la page 26 qu'une lacune finale jouait dans ce cas un rôle de <u>leurre</u>. Les items de la paire ④ ne sont donc pour cette raison comparables à aucun autre item.

6. <u>Paire ⑤</u>. J'ai déjà parlé de ces items à la page 30 Ils ont une distribution de réponses "<u>analogues</u>" même si l'on voit un décalage de la réussite en faveur de 8 = ... + 3. Ce qui les caractérise c'est que la proportion des réponses additives y est moindre que pour tous les autres items (on met de côté la catégorie <u>1</u> d'élèves bien sûr). Les élèves ne réussissent pas pour autant et ici, il y a passablement de confusions entre soustraction et refus. Pour ces deux raisons les items de la paire ⑤ sont eux aussi particuliers.

<u>Remarque</u> : On n'aurait pas pu constituer de paire avec les items 4 = 5 + ... et 4 = ... + 7 ni 7 = 2 + ... avec 8 = ... + 3 contrairement à ce qu'on a justement fait avec les paires ② et ③ (ceci a déjà été relevé à la page 30).

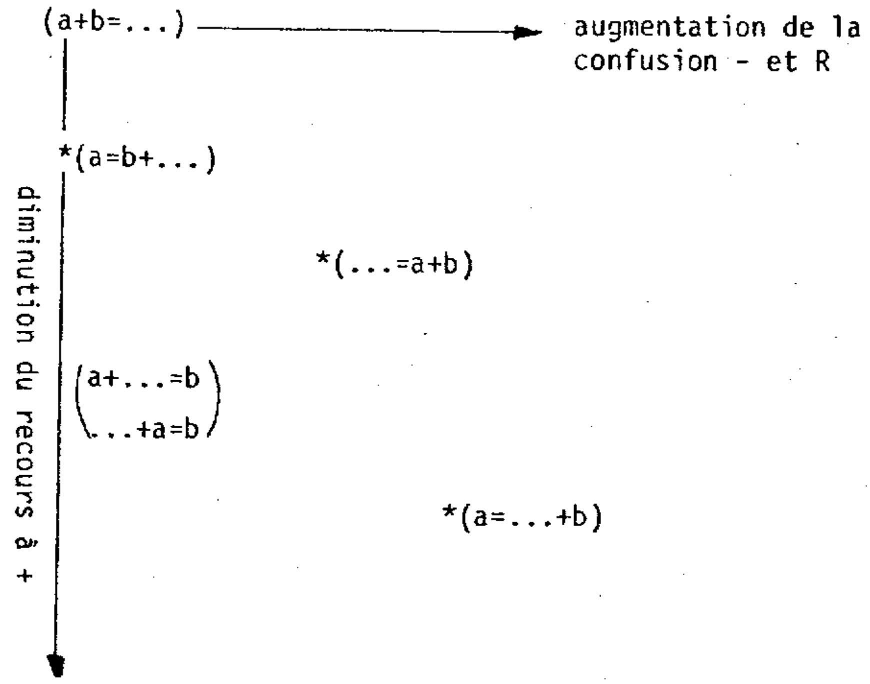
<u>Conclusion</u> :

1. On pourrait tenter d'échelonner les items. Selon le taux de réussite cela donnerait 3 classes :

1) a + b = ...	2) a + ... = b	3) a = ... + b
	... + a = b	a = b + ...
	... = a + b	

mais cela n'est à mon avis pas digne d'un grand intérêt.

Une seconde façon de les classer me paraît plus intéressante, c'est de considérer 2 graduations : le recours à l'addition d'une part et la confusion entre soustraction et refus de l'autre. Ceci correspondrait à ce que j'illustrais à la page 34 sur un schéma de différenciation des opérations (en tant que procédures).



<u>Note</u> : Ce schéma n'a évidemment qu'un caractère ordinal.

2) Une seconde conclusion à propos de la façon dont les élèves interprètent leur tâche. Ici l'analyse esquissée page est reprise de façon complète. On aboutit toujours à ces résultats que lorsque le égal est initial "les indices" sur lesquels les élèves se basent ne correspondent plus, et leur compliquent ainsi la tâche. Est revue aussi l'interdépendance des "indices retenus".

Il a y un autre point qui mérite l'attention et qui est lié à la réussite aux items ... = 1 + 5 et ... = 5 + 2 paire ① Comme on l'a vu sur le tableau, ce sont les seuls items dont la réussite n'augmente pas entre les catégories <u>1</u> et <u>2</u> de notre population. Or par rapport aux élèves de la catégorie <u>1</u>, ceux de la catégorie <u>2</u> se définissent comme donnant des réponses soustractives (cf. TABLEAU XIV page 33). Il en résulte donc que la prise en considération de la soustraction influe globalement sur l'interprétation des données et sur le système d'indices sur lequel le sujet se base. Ceci montre bien le lien qui se construit entre les plans procéduraux, représentatifs et symboliques (cf. une fois encore au schéma de G. Vergnaud).

* * * * * *

I.2.7. Analyse des réponses à l'item 4 = ... + 4

Venons-en à cet item un peu spécial, limite dirais-je, puisque interprétable comme item de décomposition triviale (il n'y a rien à décomposer) ou comme item impossible. Voici les distributions de réponses à cet item en fonction des réussites.

TABLEAU XVI : Distribution de réponses à l'item 4 = ... + 4

	+	-	R	A
cat.1	12	0	2	7
cat.2	7	3	9	6
cat.3	6	3	9	2
cat.4	1	14	12	0
Tot.	26	20	32	15

On remarque donc que pour la catégorie 4 d'élèves il y a autant de réponses soustractives et de refus. Cependant, ce recours à des réponses soustractives n'est le fait d'aucune catégorie d'élèves ! La catégorie 1 répond additivement (et par des réponses autres), tandis que les catégories 2 et 3 répondent additivement ou par refus (et réponses autres pour la catégorie 2). Ce second résultat est tout de même étonnant. Il se peut que dans ce cas, devant une certaine incertitude, le dédoublement de la donnée 4, ait poussé nombre d'élèves à donner la réponse 8 (soit addition, soit doublage de 4). Une telle hypothèse serait confirmée par l'épreuve III où devant l'incertitude crée par le "manque de donnée", le doublage a été une procédure de réponse à part entière. Ceci n'est cependant pas confirmé dans l'épreuve IV où les élèves ont plutôt "sauté" le 2^{e} 7 de 2 + 7 = 7 +... (il y a eu plus de 9 que de 14 comme réponse). Mais pour cette épreuve, les élèves ont aussi réagi autrement à 3 + 6 = ... + 9 qu'à 4 = ... + 4 (pas d'hésitation entre 0 et refus). Donc tout ceci reste hypothétique.

I.3. Analyse des résultats de l'épreuve III

I.3.1. Quelques considérations préliminaires

Dans cette épreuve, les items ne comportent qu'une seule donnée numérique. Pour compléter l'écriture, le sujet doit trouver deux nombres. Pour l'analyse qui va suivre, je vais me contenter d'une description assez grossière des réponses des élèves sans prendre en compte les procédés de résolution mis en oeuvre. Je considère alors le triplet de nombresconstitué par la donnée numérique et par les réponses de l'élève.

1. Je dirai que la réponse est décomposition de la donnée, si ce triplet vérifie une relation additive dont le résultat est la donnée.
Exemples : $7 = \underset{\dots}{3} + \underset{\dots}{4}$ $2 + 4 = \underset{\dots}{2}$ $5 + \underset{\dots}{3} = \underset{\dots}{2}$. Ce type de réponse reçoit l'abréviation D.

2. Je dirai par contre que la réponse est une composition de la donnée si ce triplet vérifie une relation additive dont le résultat est un facteur.
Exemples : $7 = \underset{\dots}{15} + \underset{\dots}{8}$ $\underset{\dots}{10} + 4 = \underset{\dots}{6}$ $\underset{\dots}{5} + \underset{\dots}{3} = 8$.(On remarquera que pour le deuxième exemple $\underset{\dots}{10} + 4 = \underset{\dots}{6}$ ce n'est pas le choix de la composition qui est erronée et que l'écriture : $\underset{\dots}{6} + \underset{\dots}{4} = \underset{\dots}{10}$ aurait été correcte).Ce type de réponse reçoit l'abréviation C.

3. Dans le cas où le triplet ne vérifie pas de relation additive, on aura affaire à une réponse autre. Abréviation : A.

4. Il y a en aussi un certain nombre de refus. Abréviation R.

Remarques : 1) Ici, contrairement à la description de l'épreuve II, les mots composition et décomposition ne se rapportent pas aux items mais aux réponses des élèves.

2) La consigne spécifiait : "ne mets pas de zéro". Cette consigne a été suivie par tous les élèves.

3) Les réponses de composition incorrectes aux items : 5 + ... = ... + 4 = ... et ... = ... + 6 sont très rares

(10 sur 594) elles ont ici été comptabilisées comme correctes. Ce ne sera pas la cas au chapitre II.

4) En ce qui concerne la nouveauté de ce type de donnée, il faut noter deux choses. Tout d'abord il n'y a pas d'item impossible à compléter. Ensuite, les élèves ont rencontré dans leurs fiches d'exercices deux types seulement de calculs bilacunaires : ... + ... = n et n = ... + ... Implicitement, pour les auteurs des manuels, ce type d'écriture <u>renvoie à une tâche de décomposition</u>. La suite montrera que les élèves n'ont pas été déroutés par la nouveauté des items comme 5 + ... = ... + 4 = ... et ... = ... + 6. De plus, l'item 5 + ... = ... a été mieux réussi que l'item 7 = ... + ...

Et pourtant : a) l'habitude scolaire était de traiter 7 = ... + ...

b) Dans l'épreuve, l'élève commençait par traiter les items : 7 = ... + ... et ... + ... = 5.

Pour ce qui est du plan d'expérience, je renvoie le lecteur à la page 8 . Je me bornerai à rappeler que j'ai fait varier la place de la donnée : initiale, médiane, finale ; ainsi que la place du égal : initial, final. Je rappelle aussi que, suite à une erreur de copie, seules 5 formes d'items ont été présentés aux élèves.

* * * * * *

I.3.2. Tableau de distribution des réponses, première analyse

TABLEAU XVII : Distribution des réponses aux items de l'épreuve III

	C	D	R	A
... + ... = 5	3	70	8	12
5 + ... = ...	65	4	13	11
... + 4 = ...	61	3	14	15
7 = ... + ...	20	44	13	16
..., = ... + 6	35	30	13	15

1. Les catégories C et D regroupent 72% des réponses. La consigne aura donc été en général comprise. D'autre part, une analyse des feuilles d'élèves montre qu'il n'y a pas eu de combinaison de 2 items en un (pour palier au manque de données), les items ont donc bien été identifiés.

Ceci signifie que l'écriture équationnelle en ligne a suffisamment de signification pour les élèves. Un point à ne pas négliger vu leur jeune âge.

2. La réussite à l'épreuve III est du même ordre, et varie (selon les items) dans la même fourchette que celle de l'épreuve II. Néanmoins, il y a eu plus de réussites totales à l'épreuve III qu'à l'épreuve II.

J'avais prévu que l'épreuve III serait plus facile que l'épreuve II. Il est rassurant de voir que la tâche de l'épreuve III aura été comprise comme très voisine de celle de l'épreuve II. Le travail d'interprétation répond cependant à des contraintes un peu différentes : à l'épreuve II il s'agit de répondre à la diversité des items, tandis qu'à l'épreuve III, il s'agit de palier à un manque de donnée pour pouvoir opérer un calcul (ou comptage). Dans chacun de ces cas, les élèves auront eu recours aux mêmes représentations (pour complément cf. p.127).

3. A comparer ces résultats, on voit que les items à signe égal final sont nettement mieux réussis que les items à égal initial. On retrouve donc ce qui avait été observé pour l'épreuve II : certains élèves ne tiennent pas compte du égal.

Sur quoi se basent-ils alors ? Il semble que la position de la donnée joue un grand rôle. Une donnée finale (... + ... = 5 ou ... = ... + 6) favorise les traitements par décomposition, une donnée non finale favorise les traitements par composition.

Ce facteur positionnel est analogue à celui de la lacune finale de l'épreuve II. Mais il comporte aussi des aspects du facteur "séquence des données" de cette même épreuve II (les deux aspects sont indissociés dans ce type de tâche). Il est imputable au traitement par comptage et découle comme déjà dit d'une représentation de l'addition comme une amplification, l'ordre temporel de succession étant signifié de manière prioritaire par la lecture gauche-droite.

Note : Le rôle de l'ordre dans lequel les items ont été proposés est examiné au chap. II (p.137) ; il tend à confirmer cette interprétation.

* * * * * *

I.3.3. Analyse selon les catégories de réussite de l'épreuve II.

Le dernier fait relevé ci-dessus me paraît justifier une analyse plus fine. Je vais donc procéder comme pour l'épreuve II, en regroupant les élèves selon leur réussite, Il y a un très bon parallélisme dans les réussites aux épreuves II et III, c'est ce que montre le tableau XVIII.

TABLEAU XVIII : Comparaison des catégories de réussite aux épreuves II et III

épreuve II / épreuve III	1	2	3	4
1 réussite au plus	14	6	3	0
2 ou 3 réussites	7	14	9	1
4 réussites au moins	0	5	8	26

catégories définies à la p. 32

Je vais donc garder les catégories 1, 2, 3, 4 de réussite définies pour l'épreuve II.

TABLEAU XIX

	C	D	R	A	C	D	R	A	C	D	R	A	C	D	R	A
...+...=5	1	9	5	6	1	18	2	5	1	17	2	0	0	26	1	0
5 +...=...	7	0	9	5	16	3	4	2	16	0	0	4	26	0	1	0
...+4=...	7	1	7	6	14	2	5	4	15	0	0	5	25	0	2	0
7-...+...	7	1	6	7	7	9	4	5	6	8	2	4	0	26	1	0
...=...+6	1	7	5	8	5	12	5	3	8	6	2	5	21	5	1	0
Classe de réussite	Classe 1				Classe 2				Classe 3				Classe 4			

Le TABLEAU XIX donne la distribution des réponses selon les types C, D, R, A et selon les catégories de réussites définies page .

1. Une première remarque très importante à propos de la catégorie 1 de réussite, remarque qui complète le point 2 de la page 43 . La catégorie 1 de réussite se distinguait par son faible taux de réussite à l'épreuve II. Les élèves de ce groupe avaient fortement tendance à traiter tous les items de façon additive, sans s'occuper de la place de la lacune. On pourrait s'attendre à ce que pour cette épreuve aussi, ils recourent exclusivement à des réponses par composition. Or il n'en n'est rien, et ils recourent tout autant à la composition qu'à la décomposition, se référant principalement dans leur "choix" sur la place de la donnée. Ceci indique que le traitement additif de l'épreuve II n'est pas dû à une incapacité de concevoir la décomposition (et par là la complémentation), mais provenait bien d'une interprétation des symboles et de la tâche demandée. Le simple fait de disposer (à l'épreuve II) de 2 données numériques rend aussitôt possible la production d'un calcul, tandis qu'ici (épreuve III) la donnée incomplète oblige à une analyse plus grande de la part de l'élève. J'invoquais à la page 44 que les élèves avaient à faire face à la diversité des items pour l'épreuve II. Cette diversité n'est pas aussi contraignante que le manque de donnée de l'épreuve III.

2. Pour la suite de l'analyse, je vais me centrer sur les distributions de réponses aux différents items selon les catégories d'élèves. Je rappellerai que je considère deux distributions comme <u>analogues</u> si elles sont identiques à une inversion des scores obtenus aux réponses C et D.
Par exemple 7 = ... + ... et .. = ...+ 6 ont obtenu <u>pour chaque catégorie d'élèves</u> des distributions analogues (tandis que 5 + ... = ... et ... + 4 = ... ont obtenu pour chaque catégorie d'élèves des distributions identiques).

Commençons alors l'analyse par les catégories extrêmes de réussite.

A. Catégorie 4

Ces élèves, rappelons-le réussissaient parfaitement l'épreuve II. On voit que leur réussite à l'épreuve III est aussi bonne (on peut aussi comparer avec le TABLEAU XV p. 35).

B. Catégorie 1

Ici, il y a 2 types de distribution des réponses. Les items 5 + ... = ... + 4 = ... et 7 = ... + ... ont tous la même distribution de réponse. Les items ... + ... = 5 et ... = ... + 6 sont eux aussi identiques. Entre ces deux classes d'items, il y a un rapport très net d'analogie : les deux types de distribution sont en effet analogues. Seule importe la position de la donnée :

	C	D	R	A	
donnée finale	1	7	5	8	... = ... + 6
donnée initiale	7	0	9	5	5 +... = ...

On remarquera en passant le fort taux de réponses de Refus et de réponses Autres (pour une analyse poussée cf. chap. II.3. p. 88).

C. Catégories 2 et 3

Les items sont mieux réussis, et il y a diminution des réponses Refus et Autres.

Les distributions sont alors de 4 types :

1. distribution de l'item ... + ... = 5

2. distribution des items 5 + ... = ... et ... + 4 = ...

Ces deux types de distributions sont analogues. Les réponses erronées ne proviennent pas d'une confusion entre composition et décomposition.

3. distribution de l'item 7 = + ...

4. distribution de l'item ... = ... + 6

Ces deux distributions sont elles aussi analogues. La position de la donnée numérique trompe des élèves et les amène à confondre composition et décomposition.

Il n'y a pas de rapport entre la distribution 1 et 2 d'une part, et 3, 4 de l'autre. La place du égal discrimine donc nettement les items (ce qui n'était pas le cas pour la catégorie 1 d'élèves).

* * * * *

I.3.4. Conclusion

La caractéristique des réponses en composition et décomposition est assez grossière. Elle se borne à examiner la relation additive qui lie la donnée numérique aux réponses. Le fait marquant est qu'une telle caractérisation ait suffi à dégager le rôle de la position de la donnée dans l'interprétation des élèves, et de retrouver par là les représentations séquentielles de ceux-ci. Ceci est imputable autant aux sujets qu'à la tâche elle-même.

Pour ce qui concerne les élèves, ceci indique combien sont ancrées chez eux ces représentations séquentielles . Je retiendrai en outre l'indication suivante : les sujets procèdent préalablement à la détermination de ce qu'ils doivent réaliser : composer la donnée avec une donnée auxiliaire et trouver le résultat, décomposer la donnée. Ensuite ils recourent à des procédés plus spécifiques.

Quant à la tâche, elle revêt deux particularités :

1) Il n'y a qu'une donnée numérique, mais il faut produire un calcul. Il y a donc plus d'éléments à reconstituer que dans l'épreuve II, ou, dit autrement, "la prise en charge" de l'opé-

ration par le sujet sera plus complète. Ceci va se traduire tant au niveau de la lecture que de l'écriture de la réponse. Par ailleurs, à un moment donné, l'élève va réaliser qu'il a choix du calcul, et qu'il peut dès lors, soit se permettre d'éviter toute difficulté de comptage soit, au contraire, vouloir montrer son habileté à calculer (mais trouver un bon truc de résolution qui évite les embûches du maître, c'est aussi faire preuve d'habileté).

2) Ceci s'accompagne d'une plus grande simplicité des données : un seul chiffre polarise la lecture, un seul chiffre par rapport auquel organiser son écriture.

Ces deux particularités que je désignerai volontiers par : "engagement" plus grand du sujet dans la tâche et "contrainte" moins forte des données concourent à renforcer le recours à des représentations séquentielles spontanées. On verra ceci en détail au chap. II. 5 (p. 127).

* * * * * *

I.4. Analyse des résultats de l'épreuve IV

I.4.1. Remarques préliminaires

Les items de l'épreuve IV sont construits à partir de la forme a + b = c + d qui "généralise" la forme a + b = c. Mais pas de la façon la plus intuitive, dans ce sens que l'écriture n'est plus du tout séquentielle (alors que a + b = c + d = e + f = g etc... écriture condensée de a + b = c c + d = e e + f = g etc... serait elle intuitive. Les élèves d'ailleurs ne se font pas prier pour l'inventer). Je renvoie le lecteur au chap. II. 6 (p.140) pour une analyse détaillée de cette tâche.

Il s'agit donc de calculs lacunaires du type a + b = ... + c ou a + b = c + ... Le jeu est essentiellement celui des lacunes, bien que j'ai surajouté quelques relations entre les données. La difficulté d'une résolution correcte provient de ce qu'on doit procéder moins directement que dans une relation ternaire monolacunaire (de même que pour l'épreuve III) mais qu'on a beaucoup plus de contraintes qu'aux épreuves II et III (3 données numériques). Soit on procède en deux temps (deux relations ternaires, combinaison de deux formes monolacunaires) et l'on calcule le résultat de a + b auquel on va ensuite complémenter c, soit on procède par comparaison des données a, b, c (et on procède par compensation). L'élève est peut-être loin d'une telle résolution. Mais de toutes façons, la lacune l'appelle à une action, il s'agit donc de voir comment il va ajuster son modèle d'action (comptage mais éventuellement aussi ce que j'ai appelé "substitution") aux données. Dans certains cas, il pourra être embarrassé par le fait d'avoir trop de données (3 données pour un calcul). Alors la situation contrastera avec celle de l'épreuve III. Dans d'autres, il pourra être gêné par la lecture partielle impossible a + b = c dans a + b = c + ... (exemple 1 + 5 = 3 + ... mais 1 + 5 ça fait 6, par 3). Comment l'élève va-t-il donc aborder ces calculs qui je le répète sont complexes ?

I.4.2. Typologie des réponses

Il y a plusieurs types de traitements, que je réexaminerai en détail au chapitre II. Je vais me contenter de considérer 5 classes de réponses.

Il y a les procédés "corrects" qui supposent une composition de données du membre de gauche et une complémentation à celle-ci de la donnée de droite. Ces traitements seront codés CD (composition puis décomposition).

Il y a ensuite des procédés par somme. Pratiquement il ne se présente que deux types de somme.

Les Sommes totales, où l'élève a sommé les trois données numériques. Ex. : $1 + 5 = 3 + \overset{9}{\ldots}$ car $1 + 5 + 3 = 9$. Je désignerai ces réponses par St (somme totale).

Les sommes partielles, où l'élève a sommé 2 données, et c'est alors presque toujours les données de gauche.
Ex. : $1 + 5 = 3 + \overset{6}{\ldots}$, car $1 + 5$ fait 6. Je distinguerai ces réponses par Sp (somme partielle).

J'ai noté D les réponses qui sont interprétables comme des différences : l'élève a soustrait l'une des données à l'autre. Mais je ne fais que mentionner ces réponses dans le TABLEAU XX, je ne porterai pas mon analyse là-dessus (dans les tableaux suivants elles seront comptées avec les réponses autres).

J'ai noté comme auparavant R et A les réponses Refus et Autre.

La Seule variation systématique dans les items tient à la place de la lacune. Soit médiane $a + b = \ldots + c$ soit finale $a + b = c + \ldots$. Je vais donc m'occuper prioritairement de cela dans mon analyse.

* * * * * *

I.4.3. Résultats globaux item par item

TABLEAU XX : distribution des réponses selon les items

	CD	Sp	St	D	R	A
3+4=3+...	28	6	28	3	19	9
4+2=2+...	28	5	29	5	16	10
1+5=3+...	24	4	34	5	19	7
2+7=7+...	23	17	17	0	24	12
6+2=...+4	20	30	15	7	16	5
5+4=...+3	20	29	16	5	16	7
3+6=...+9	18	27	14	7	21	6
3+4=...+5	17	29	18	4	16	9

1. On notera donc une chute dans la réussite à ces items (l'item le mieux réussi de cette épreuve 3 + 4 = 3 + ... est encore moins bien réussi que l'item 4 = 5 +... (qui est le moins bien réussi de l'épreuve II).

2. On notera aussi le grand nombre de refus (jamais moins que 16).

3. Les réponses se distribuent globalement ainsi : 70% de réponses témoignent d'un calcul (CD+Sp+St+D) dont 25% de justes.20% de réponses autres.
Donc les élèves ont traité ces équations comme des tâches de calcul, mais, en général se sont ramenés à un traitement de somme (45%).

4. On remarquera alors que les distributions de réponses sont identiques aux items 3 + 4 = 3 + ... 4 + 2 = 2 + ... et 1 + 5 = 3 + ... c'est-à-dire à tous les items à lacune finale,

2 + 7 = 7 + ... excepté.

De même, les distributions de réponses sont identiques aux items à lacune médiane 6 + 2 = ... + 4 5 + 4 = ... + 3 3 + 6 = ... + 9 et 3 + 4 = ... + 5.

On peut dire que ces derniers items sont un peu moins bien réussis que les autres, et que la distribution des réponses est différente du fait que les réponses Sp et St sont fortement représentées. Je reviendrai là-dessus plus loin.

5. J'avais mis quelques équations particulières, sans pour autant systématiser mon plan d'épreuve là-dessus. Ainsi les items :
3 + 4 = 3 + ... (identité de 2 nombres de l'équation)
4 + 2 = 2 + ... (jeu sur la commutativité d'une part) et jeu sur la relation entre 4, 2 et 2 d'autre part, 2 + 7 = 7 + ... (jeu sur la commutativité)
6 + 2 = ... + 4 (jeu sur la relation 6,2 et 4) 3 + 6 = ... + 9 (réponse 0)
mais aussi (involontairement à ce que je m'en souvienne) 5 + 4 = ... + 3
et 3 + 4 = ... + 5 (jeu sur 3,4,5 et 5,4,3).

Rien n'indique clairement, dans les réponses obtenues, que les élèves se soient aperçus de ces "facilités". On peut comparer à ce propos les items 3 + 4 = 3 + ... 4+ 2 = 2 + ... et 1 + 5 = 3 + ... qui ont à peu de chose près été traités de la même façon.

D'autre part, l'item 2 + 7 = 7 + ... a été traité différemment de tous les autres et de 4 + 2 = 2 + ... en particulier ! Ce résultat reste d'ailleurs mystérieux pour moi. Je ne m'attendais pas à trouver si peu de sommes totales. Il semble que les élèves n'ont pas tenu compte du second 7 de l'équation (en effet lorsqu'il y a réponse Sp c'est surtout le résultat de 2 + 7 qui a donné : 15/17).

Enfin rien n'indique que l'item 3 + 6 = ... + 9 ait été traité autrement que les autres. Et ceci contraste avec ce que l'on a vu à propos de l'item 4 = ... + 4 de l'épreuve II (cf. p.40).

Résumé de ces premières analyses :

1. Les élèves ont bien pris cette épreuve comme une épreuve de calcul, mais une bonne part d'entre eux (45%) a assimilé celle-ci à une épreuve d'addition soit a + b = ... soit a + b + c = ... Il ne semble pas que beaucoup d'élèves aient remarqué les relations que j'avais introduites dans les données : identité, commutativité ou autres...

2. Les élèves se sont, semble-t-il appuyés essentiellement sur la place de la lacune pour interpréter la donnée. Plus de Sp aux items de type a + b = ... + c et plus de St aux items de type a + b = c + ...

Je vais analyser un peu plus finement ce second point en regardant les distributions de réponses selon les catégories de réussite.

* * * * * * *

I.4.4. Analyse des réponses selon les catégories de réussites définies pour l'épreuve II.

L'épreuve IV a été moins réussie que les autres. Et la concordance entre les catégories de réussites telles que définies pour l'épreuve II (cf. p31) et celle qu'on peut définir pour l'épreuve IV n'est plus aussi nette qu'entre les épreuve II et III. Cependant, pour des raisons de commodité, et dans l'analyse limitée que je vais faire ici, je recourerai encore aux 4 catégories de l'épreuve II.

TABLEAU XXI Comparaison des catégories de réussites aux épreuves II et IV

IV II	1	2	3	4
au plus 2 réussites	20	19	12	15
de 3 à 5 réussites	1	6	5	4
6 réussites au plus	0	0	3	8

Il n'y a pas grande concordance, mais il n'y a pas contradiction non plus. En fait, la différence de réussite aux épreuves II et IV est trop élevée.

Je donne maintenant les distributions de réponses pour chaque item et selon chaque catégorie. TABLEAU XXII. Mais c'est uniquement à titre indicatif. Mon analyse portera elle sur le TABLEAU XXIII où j'ai regroupé les distributions de réponses aux items de la forme $a + b = ... + c$ et $a + b = c + ...$

On remarque alors ceci :

1. Sur la ligne "Total" tout d'abord.

Les items $a + b = c + ...$ sont en général mieux réussis que les items de la forme $a + b = ... + c$

Ceci est à lier avec le second fait suivant.

2. Pour les items de la forme $a + b = c + ...$ il y a plutôt recours aux réponses St qu'aux réponses Sp et inversément pour les items de la forme $a + b = ... + c$.

Ainsi, la présence d'une lacune finale (dans $a + b + c + ...$) joue un rôle de leurre et amène des traitements St (comme si l'équation écrite était $a + b + c = ...$). Mais, la présence dans les items de la forme $a + b = ... + c$ joue un rôle de leurre encore plus fortement et amène des traitements Sp (comme si l'équation écrite se réduisait à $a + b = ...$)

3 + 4 = 3 + ...					4 + 2 = 2 + ...					1 + 5 = 3 + ...					2 + 7 = 7 + ...				
CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A
1	2	8	3	7	2	2	9	1	7	1	3	12	1	4	1	9	6	1	4
5	1	12	4	3	7	2	8	5	3	3	1	16	2	3	8	1	7	6	3
9	3	5	3	0	8	1	7	3	1	9	0	5	3	3	5	4	4	5	2
13	0	3	9	2	11	0	5	7	4	11	0	1	13	2	9	3	0	12	3

CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A
5 + 4 = ... + 3					6 + 2 = ... + 4					3 + 6 = ... + 9					3 + 4 = ... + 5				
0	6	8	1	6	1	4	9	1	6	2	7	9	0	3	1	5	9	3	3
5	8	4	6	2	5	9	3	6	2	4	8	3	7	3	1	9	6	5	4
4	8	3	3	2	4	9	3	1	3	5	3	1	9	2	6	4	2	4	4
11	7	1	6	2	10	8	0	8	1	7	9	1	5	5	9	11	1	4	2

TABLEAU XXII

Distribution des réponses aux items de l'épreuve IV, selon les catégories de réussite de l'épreuve II

	● + ● = ● + ...					● + ● = ... + ●				
	CD	Sp	S_t	R	A	CD	Sp	S_t	R	A
classe 1	5	16	35	6	22	4	22	35	5	18
classe 2	23	5	43	17	12	15	34	16	24	11
classe 3	31	8	21	14	6	19	24	9	17	11
classe 4	44	3	9	41	11	37	35	3	23	10
Total	103	32	108	78	51	75	115	63	69	50

TABLEAU XXIII

Distribution des réponses selon les formes d'items de l'épreuve IV et les catégories de réussite de l'épreuve II

Si on se réfère maintenant aux catégories de réussites, on observe :

Catégorie 1.

On se souvient que ces élèves donnaient des traitements additifs à chaque équation de l'épreuve II, sans se soucier de la position de lacunes.

On retrouve ces deux faits ici. D'une part, il y a identité des distributions de réponses aux items à lacune finale ou à lacune médiane. D'autre part, plus de 60% des réponses sont St ou Sp. On remarquera en plus, qu'il y a plus de réponses St, ce qui indique bien que ces élèves savent additionner.

Catégorie 2.

Pour cette catégorie d'élèves, les traitements sont différents selon la place de la lacune. Sans m'arrêter sur la petite différence, ni les réponses refus ou autres, je noterai que les réponses Sp disparaissent pour les items a + b = c + ... alors qu'à ces mêmes items, les réponses St sont très nombreuses. Pour les items a + b = ... + c , les réponses Sp sont très nombreuses alors que les réponses St sont moins fréquentes.

Par rapport à ces traitements additifs, c'est comme si les élèves prenaient comme facteur tous les nombres se situant avant la lacune.

Catégorie 3

Pour cette catégorie d'élèves, les mêmes remarques que ci-dessus peuvent être faites. Je noterai simplement que les items a + b + c = ... sont mieux réussis que les items a + b = ... + c.

Le rapport réponse correcte/réponse somme est plus favorable aux items a + b = c + ... qu'aux items a + b = ... + c.

Catégorie 4

On remarque tout d'abord la disparition complète des réponses somme aux items de la forme a + b = c + ...

Alors que pour les items de la forme a + b = ... + c il y a encore un fort taux de réponses Sp (autant que de réponses correctes).

Un second point frappant, est celui du fort taux de réponses de refus aux items a + b = c + ... Ceci reste assez mystérieux. Serait-il dû à la prise en compte de l'égalité partielle et forcément fausse a + b = c ?

* * * * *

I.4.5. Conclusion

Pour cette épreuve, une analyse plus fine serait sans doute nécessaire. Mais peut-être faudrait-il aussi affiner les items ? D'autre part, ce type d'exercice semble plus s'adresser à des élèves de 2^{e} année primaire.

Cependant, et c'est cela qui m'importe le plus, on retrouve une interprétation des élèves où la position de la lacune joue un rôle. On retrouve un traitement indifférencié par somme (catégorie 1). L'élève prend les données et les additionne. Il n'a aucune raison de se limiter à une addition de deux termes. On retrouve aussi les réponses St préférentielles pour les items à lacune finale et les réponses Sp préférentielles pour les items à lacune médiane. Avec une lacune médiane, l'élève trouve une raison à ne pas additionner les 3 données. Avec une lacune finale, il trouve une raison de les additionner. Ici l'élève se base sur le fait que le résultat succède aux facteurs (tant temporellement dans l'opération que scripturalement). Enfin, la forme a + b = c + St pour les élèves qui tiennent compte des signes équationnels (cat. 2,3,4). Encore ici, l'aspect séquentiel joue un grand rôle.

I.5. Analyse des résultats de l'épreuve I

I.5.1. Considérations générales

J'ai gardé cette analyse pour la fin, pour deux raisons principalement. Tout d'abord, les résultats de cette épreuve sont moins intéressants. Ceci est dû à ce qu'il est bien difficile de savoir à quoi est tenu un refus ou une acceptation de le part de l'élève. Rien n'indique qu'il ait vu la relation numérique entre les données. Ensuite, c'est pour une raison didactique. En effet, l'enseignement du calcul lacunaire vise, outre l'apprentissage du calcul, à l'apprentissage de l'écriture équationnelle et de sa syntaxe. Or il est un obstacle (technique) à surmonter qui est le suivant : si une épreuve lacunaire de type II, III ou IV a une signification relativement claire pour l'élève, étant donné qu'il y a "quelque chose à faire", il n'en est pas de même pour l'épreuve I (y a-t-il un calcul à faire puisque toutes les données sont écrites ?) Ceci pourrait aussi avoir son importance quant au calcul lacunaire lui-même. Je pense ici à la vérification des calculs.

Je ne vais pas entrer ici dans de plus amples détails et me contenterai d'analyser les résultats bruts à cette épreuve.

* * * * * *

I.5.2. Analyse des réponses à l'épreuve I

L'hypothèse que je voulais vérifier avec cette épreuve était la suivante : un mombre non négligeable d'élèves se baseraient sur l'ordre de grandeur du dernier nombre donné pour juger de l'équation. De tels élèves seraient alors amenés à refuser l'item 5 = 7 + 2 (mais pas à juste titre,seulement parce que 5 e 7 font 12 et pas 2),à accepter l'équation 5 = 1 + 6 et 3 = 7 + 10 et à refuser l'équation 8 = 5 + 3 (et se tromper).

Il convient peut-être de ne pas tenir compte des élèves qui

auraient accepté les 4 items. Il y a eu 24 quadruples refus et 7 quadruples acceptations.
Voici alors les résultats (entre parenthèses si on ne tient pas compte du correctif évoqué ci-dessus)

5 = 7 + 2	51 (75)	refus	11 (18)	acceptations
5 = 1 + 6	38 (62)	"	24 (31)	"
3 = 7 + 10	34 (58)	"	28 (35)	"
8 = 5 + 3	23 (47)	"	39 (46)	"

Mon hypothèse semble confirmée par le contraste qu'il y a entre le traitement de l'item 5 = 7 + 2 et celui de l'item 8 = 5 + 3.

Remarque : La seule équation juste, 8 = 5 + 3, celle où la relation entre les données était calculable (faire 5 + 3 donne 8), n'a pas pour autant été mieux reconnue.

* * * * * *

I.6. Conclusion du Chapitre I

Les analyses précédentes montrent bien comment les élèves de 1P investissent les écritures équationnelles dans le cadre du calcul lacunaire. Entre autre il a été chaque fois relevé qu'ils se réfèrent à des représentations propres, en relation directe avec la tâche à effectuer. Ces références ont été bien plus fortes pour eux queles définitions enseignées : les élèves ont interprété leurs données selon des critères (indices) assez inattendus (aspect séquentiel). On peut dire que pour eux l'écriture lacunaire est bien l'écriture d'un calcul, déroulement compris. C'est cela sans doute qui leur aura permis de faire face à des exercices tout à fait nouveaux et particulièrement en rupture avec le contrat didactique habituel des équations impossibles ou des équations à juger (1).

Méthodologiquementles analyses un peu originales selon les catégories de réussites, ont un peu alourdi l'exposé. Mais une telle finesse d'analyse m'apparaît nécessaire. Une analyse des réponses conjointes (distributions conjointes aux items) aurait sans doute rempli la même fonction. Cependant, je préfère alors recourir à l'examen des traitements de chaque élève à tous les items d'une même épreuve. C'est ce que je vais tenter au chapitre II de cette étude.

* * * *

Note(1):Pour souligner encore l'importance de cet aspect séquentiel, on remarquera que bon nombre d'élèves tournent la difficulté des écritures avec égal initial en inversant le sens de leur lecture.

Cette "stratégie" hélas ne s'applique pas aux calculs de soustraction,(a = b - c ne peut se lire c - b = a !)
Or les méthodologies romandes, dans leur première édition, présentaient de tels exercices. Ceux-ci n'ont pas été repris dans la seconde édition. Gageons que les maîtres avaient justement buté sur cette difficulté (cf. Ma thèse op. cit. Chap. V p. 412 à 423).

REPONSES DES ELEVES DES 5 CLASSES INTERROGEES : TABLEAUX XX IV

1° Ces tableaux donnent d'une part les réponses de chaque élève aux 30 items.

Les items sont portés en colonnes et les élèves en ligne. Dans chaque case la réponse de l'élève à l'item. Un nombre quand cette réponse est usuelle : ex. 11 sera reporté à la case de l'élève Julien A. à l'item 8=...+3 car il a répondu 11 écrit dans la lacune: 8=$\overset{11}{\ldots}$ +3. Un R signifie que l'élève a refusé l'item. Une réponse entre parenthèses est une première réponse de l'élève effacée ou barrée. Pour l'épreuve III où il fallait donner un couple de nombres, sera reporté ce couple dans l'ordre gauche ⟶ droite.

Dans certains cas l'écriture de l'élève est particulière. L'ensemble de l'égalité ainsi produite a été reproduite soit en ligne, soit en biais. Des considérations de place ont fait que ces équations sont quelquefois écrites sur plusieurs lignes. Ne pas y voir de césure faite ou marquée par l'élève. Ex.: Julien A à l'item : ... =5+2 a noté: $\overset{3}{..}.\overset{4}{..}$ = 5+2. La reproduction de l'écriture est la plus fidèle possible.

Par la suite, je désignerai chaque élève par son prénom, un numéro (1°, 2°) si dans sa classe un autre élève a le même prénom et une majuscule (A,B,C,D,E) pour désigner la classe à laquelle il appartient. Il y a eu 2 passations (deux jours de suite). J'ai conservé cette information dans les tableaux XXIV des réponses soit en écrivant le nom à gauche (si il a commencé par les items de gauche) soit à droite. Tandis que dans les tableaux XXIV des caractérisations, j'ai noté une petite croix pour dire quel groupe d'items l'élève avait résolu en premier. Cette information est malheureusement perdue pour la classe A.

Dans toute la suite (tableaux et texte) les groupes d'items seront numérotés.

① pour les items

2+6 = ... 4 = ... + 7 etc... partie gauche du tableau des réponses

② pour les autres.

Ainsi : <u>Alexandra</u> 1° E ① désignera les réponses d'Alexandra 1° de la classe E (la première dans la liste des élèves de la classe E) aux items groupés sur la même passation (feuille de données) que 2+6 = ... 4= ... + 7 etc...

2° En face de chaque tableau de réponse des élèves, j'ai reproduit une table de caractérisation des traitements des items par les élèves. Cette analyse se réfère aux listes de catégories de traitements des tableaux XXIX pour l'épreuve II (p.112) , XXXII pour l'épreuve III (p. 134) , XXXIII pour l'épreuve IV (p. 145).

Pour chaque élève, deux lignes qui correspondent aux deux groupes d'items résolus lors des deux passations.
Si l'élève a été cohérent sur les deux passations, la caractérisation de son traitement sera centrale.

2+6=…	4=…+7	4=…+4	…+3=9	…=5+2	4=5+…	5=7+2	8=5+3	7=…+…	…+4=…	5+…=…	1+5=3+…	3+4=…+…	2+7=7+…	3+6=…+9	**Classe: A** 20 élèves.	8=…+3	…=1+5	9+…=4	7=2+…	…+8=7	3+…=8	5=1+6	3=7+1	…+…=5	…+2=…	…=…+6	4+2=2+…	5+4=…+…	3+4=3+…	6+2=…+…
7	R	0	6	7	R	R	A	2,5	R	5,10	R	7	R	9	Anne 1°	5	6	R	5	R	5	R	R	3,2	3,5	(5,1) 7,1	4	6	4	4
8	R	R	6	7	R	A	A	3,4	3,7	3,8	2	5	8	7	Alec	5	6	R	5	R	5	R	R	4,1	2,4	7,1	11	R	10	R
8	R	R	6	7	0	R	R	5,4	8,12	2,7	R	7	R	9	Ariena	5	6	R	5	R	5	R	R	2,3	5,7	8,2	8	8	R	8
8	R	R	6	7	R	R	A	R	3,7	6,11	(R) 3	(R) 2	(R) 2	(R) 0	Niloufar	5	6	R	5	R	5	R	R	3,2	4,6	7,1	4	6	4	4
R	R	R	6	7	R	A	A	4,3	6,10	6,11	R	7	R	9	Alexandra	5	6	R	5	R	5	A	A	3,2	5,7	8,2	(9) 4	6	R	R
8	11	8	6	7	R	R	A	5,2	R	4,9	R	R	R	R	Yuko	5	6	R	5	R	5	A	A	2,3	5,7	3,3	(5) 3	1	3	4
9	R	R	12	7	9	R	R	3,4	2,6	7,12	9	12	14	18	Géraldine	5	6	R	5	R	5	R	R	(9,4) 1,4	5,3	7,1	8	R	10	R
(R) 8	11	4…48	(R) 12	7	(R) 9	R	R	4,3	8,2	3,8	R	R	R	R	Sabine	5	6	R	9	R	R	R	A	4,1	1,3	7,1	6	R	3	R
5	6	7	11	8	9	5=4+2	8=5+3	8,11	5,6	(8,7) 7,4	4	8	9	12	Giao	5	(R) 6	R	8	R	9	R	R	7,6	3,4	7,8	3	8	5	9
8	R	5	2	4	6	A	A	8,9	3,5	6,7	11	12	15	R	Frédéric	(2) 9	R	R	3	>	4	R	R	3,4	1,3	4,5	8	11	11	13
8	11	R	12	7	9	R	A	4,3	2+24 =…	3,8	9	R	15	(3+6= 1+19) R	Stéphane	5	6	R	9	17	11	R	R	4,1	1,3	7,1	4+2= 6 4+7=3	5+4= …+3 12	10	6+2= …+4 12
R	R	R	6	1	9	A	A	3,4	3,6	1,6	8	6	12	1	Grégoire	5	6	R	9	17	R	R	R	4,1	R	7,1	R	R	R	R
6 4	(11) R	(8) R	R	3+4=5+2	R	R	R	2,9	R	5,10	R	R	2	R	Julien	11	6	(4) 13	9	(7) 15	R	R	R	(10,5) 2,3	(1,1) 1,3	3,3	4	6	R	4
8	R	R	R	R	9	A	A	9,16	(6) 10,14	3,8	R	R	R	R	Anne 2°	R	R	R	9	R	5	A	A	2,3	2,2	3,3	R	R	R	(8) R
7	5	=	10	(4) 7	6	A	A	6,4	2,5	R	10	7	9	9	Christine	8	6	11	9	10	10	A	A	2,4	1,3	1,3	R	9	11	R
7	(7) 5	8	11	7	(6) 9	A	A	(7) R	(7,6) R	(8) R	10	12	6	14	Fabrice	11	6	12	7≠ 2+3	(7) R	9	R	R	7,6	4,3	8,7	4	6	4	10
8	11	8	12	7	9	R	R	8,15	2,6	4,9	9	12	16	18	Sophia	11	6	13	9	15	11	R	R	(6,1) 4,4	4,1	2,1	8	12	R	12
8	11	8	12	7	9	R	R	R	R	R	8	12	(16) 14	18	Rachel	11	6	13	9	15	11	R	R	R	R	R	8	12	10	12
11	12	8	12	7	9	R	R	R	R	R	9	12	17	18	Philomena	11	6	13	9	15	13	R	R	R	R	R	7	13	15	12
8	R	R	(R) 12	7	9	R	R	R	R	R	R	R	R	R	Laurence	>	R	>	R	R	<	5=1+6	R	R	R	R	R	R	R	R

A

NOM	EPREUVE II		EPREUVE III		EPREUVE IV	
Anne 1°	correct	14	correct refus ...+4=...	7	van / Sp correct	11 14
Alec	correct	14	correct	7	autre ?	2
Ariena	correct	14	correct	7	van / Sp correct	11 14
Niloufar	correct	14	correct refus 7=...+...	7	correct	14
Alexandra	correct	14	correct	7	van / Sp correct	11 14
Yuko	additions correct	2 14	correct position donnée	7 6	refus correct	1 14
Géraldine	+ R lacune extrême + correct	5a 14	correct 5+2=3	7	St St / van	7 10
Sabine	additions +-R/R refuse = final	2 13b	correct 8+4=2	7	refus varié	1 6
Giao	traitement autre : comptine	10a	procédé (comptine)	5	Sp (1e + 3e donnée)	8
Frederic	Système (comptine)	11	position de la donnée (comptine)	6	St	7
Stéphane	additions + - R varié ⊕	2 12b	correct	7	St / van St	10 7
Grégoire	+ - R A ?	9a	correct ...+2=... ref	7	Sp ou A Refus	8 1
Julien	+ R forme -+· traité additions	5b 2	position donnée ...+2=... ref.	6	un seul item traité correct	5 14
Anne 2°	+ R lacune finale +	5a	position de la donnée	6	Refus	1
Christine	traitement autre : comptine additions	10a 2	?	2	Sp un seul item traité	8 5
Fabrice	traitement autre : comptine	10a	refus procédé (comptine)	1 5	varié correct	6 14
Sophia	additions	2	position de la donnée ?	6 2	St	7
Rachel	additions	2	Refus	1	St	7
Philomena	additions	2	Refus	1	St	7
Laurence	+R selon lacune extrême médiane	5a	Refus	1	Refus	1

2+6=...	4=...+7	4=...+4	...+3=9	...=5+2	4=5+...	5=7+2	8=5+3	7=...+...	...+4=...	5+...=...	1+5=3+...	3+4=...+...	2+7=7+...	3+6=...+...	Classe: B 18 élèves	8=...+3	...=1+5	9+...=4	7=2+...	...+8=7	3+...=8	5=1+6	3=7+10	...+...=5	...+2=...	...=...+6	4+2=2+...	5+4=...+...	3+4=3+...	6+2=...+...
8	3	R	6	7	R	R	A	4.3	2,6	5,10	R	R	R	R	Patrick	5	6	R	5	R	5	R	R	R	8,6	7,1	R	R	R	R
8	R	0	R	(1) 7	R	A	A	1,5	1,5	4,9	R	7	R	9	Giancarlo	(2) 5	6	R	R	R	5	A	A	3,2	4,6	9,3	8	9	R	R
8	R	R	6	7	R	R	R	2,5	1,4	2,7	1+5= 6 3+1=4	7	2+1= 10 10=7+3	3+6= 10 119=6	Boris	R	R	R	9	R	(R) 5	R	R	4,1	1,3	7,1	4+2=6 2+1=3	10	7	8
4	R	8	6	7	1	R	A	1,6	1,5	1,6	R	2	2	R	Alexandre	10	6	R	(9) 5	R	5	A	A	4.1	3,5	3.3	4	6	4	2
8	R	R	(7) R	7	R	R	A	R	R	R	4	5	(4) R	R	Olivia	(>/<) R	6	14	9	1	(7) 5	A	A	1,4	1,3	(4,6) R	(8) R	10	R	4
8	R	R	1	R	R	R	R	R	4,8	5,10	1+5=6 3+5=6	7	7	3+6= 9+9	Adrien	R	R	R	R	R	5	R	R	1,4	2,4	(3,3) R	4	9	4	5
8	R	8	R	7	9	R	R	5,12	4,8	5,10	1+5 6 3+9	R	R	R	Fanny	6	6	13	9	R	11	R	A	10,5	4,2	7,1	8	12	7	11
8	3	8	6	7	10	R	R	1,8	4,8	1,6	9	R	R	R	Claudio	R	4	R	5	R	11	A	A	4,1	2,4	5,1	7	R	10	12
8	3	R	5	R	9	R	R	2,9	4,8	2,7	9	R	R	R	Nadia	R	4	>	9	R	5	R	R	3,2	2,4	5,1	9	R	10	R
8	11	8	12	7	9	A	A	1,6	2,2	2,7	9	12	16	18	Neda	5	6	13	4	15	11	A	A	2,3	2,4	12,6	4	6	3	3
8	11	R	13	7	8	A	R	2,5	4,3	3,2	7	3	2	7	Monica	12	7	R	10	13	9	A	A	6,9	2,2	7,10	10	13	10	3
8	2	3	4	2	9	R	R	8,4	2,7	9,14	2	7	1	8	Marie Louisa	R	6	14	9	3	4	A	R	4,7	1,3	R	6	9	7	8
8	(3) R	8	5	R	1	A	A	1,3	R	1,6	2	R	2	R	Graziella	R	R	9+10 3 =4	7=2+ 162	R	3+8 11 =8	A	A	R	1,1	R	4+2= 2+24 2	5+4= 731+ 3	3+4= 3+721	6+2= 462+ 4
(8) 2	R	R	R	R	R	R	A	R	R	R	R	3+4= 7+5	R	3+6= 9+9	Daniel	8	6	5	9	15	7	R	R	1,4	2,4	7,5	4	R	R	R
7	8	8	R	7	8	R	R	R	R	R	7	7	10	9	Marco	R	R	11	9	R	R	R	R	5,1	1,1	3,3	11	9	1	1
8	R	(=) 4	1	3	9	R	R	2,1	1,4	R	2	R	R	=	Robertha	1	6	1	2	1	1	R	R	1,2	1,1	5,5	2	1	1	1
8	11	8	12	7	9	A	A	R	R	R	9	12	15	19	Maja	11	6	13	9	10	11	A	A	R	R	R	8	12	10	12
6	3	4	(2) 5	5	4	R	R	(8) 7,6	3,1	5,10	3	2	8	9	Mardana	R	1	1	7	R	1	R	A	R	R	R	2	3	3	4

B

NOM		EPREUVE II		EPREUVE III		EPREUVE IV	
Patrick	X	correct	14	correct ···+···=5 refus.	7	Refus	1
Giancarlo	X	+ − R/R forme ·=· refusé	13b	correct	7	R/Sp St/Sp non terminé	11 9
Boris	X	correct	14	correct	7	transforme donnée	12
Alexandre	X	+ − R organisé ?	12a	correct position donnée	7 6	correct	14
Olivia	X	+ R forme ·+· traité + − ?	5b 6	refus correct ···=···+6:R	1 7	autre syst. personnel varié	3 6
Adrien	X	+ − R/R = initial refusé	13b	forme = initial refusé	3	Var/Sp CD/Sp	11 13
Fanny	X	+ R accepte lac. finale et ·+·	5c	procédé	5	un seul item traité St	5 7
Claudio	X	+ − R organisé ?	12a	position donnée	6	un seul item traité St	5 7
Nadia	X	+ − R lacune x séquence	13c	position donnée	6	un seul item traité St/Var	5 10
Neda	X	addition + − ?	2 6	2+4=2 correct	7	St correct	7 14
Monica	X	additions	2	?	2	?	2
Marie Louisa	X	système personnel	11	position donnée ?	6 2	var/Sp Sp	11 8
Graziella	X	+ − R varié + R ? (rotation)	12b 4	?	2	CD/R autre personnel	13 3
Daniel	X	Refus + − répète ⊕ ?	1 9a	refus position donnée	1 6	R/Sp un seul item traité	11 5
Marco	X	+ R ?	4	refus procédé	1 5	Sp varié	8 6
Robertha	X	+ − R 3 positions de lacune système personnel	13a 11	?	2	?	2
Maja	X	additions	2	Refus	1	St	7
Mandana	X	Système personnel	11	? Refus	2 1	varié systématique : répète 3e	6 4

Classe B.

2+6=…	4=…+7	4=…+4	…+3=9	…=5+2	4=5+…	5=7+2	8=5+3	7=…+…	…+4=…	5+…=…	1+5=3+…	3+4=…+5	2+7=7+…	3+6=…+9	Classe : C 20 élèves	8=…+3	…=1+5	9+…=4	7=2+…	…+8=7	3+…=8	5=1+6	3=7+10	…+…=5	…+2=…	…=…+6	4+2=2+…	5+4=…+3	3+4=3+…	6+2=…+4
8	R	R	6	7	R	R	A	6,1	4,8	2,7	1+5= 6 3+2= 5	3+4=7 5+5= 10	2+7= 9 7+1=	3+6= 9 9+1= 10	Sandrine	5	6	R	5	R	5	R	R	4,1	3,4	7,1	4+2= 6 2+5= 7	5+4=9 3+3=6	3+4=7 3+1=4	[illegible]
8	3	(0) R	(6) R	7	(0) R	R	A	5,2	3,7	1,6	4	7	8	9	Natacha	5	6	(0) R	4	(0) R	5	R	R	1,4	2,4	4,5	8	4	5	1
8	3	(1) R	6	(7) R	9	R	R	1,8	1,5	2,1	9	1	15	1	Cedric	4	6	5	5	R	4	A	A	2,3	3,5	3,3	8	9	10	8
8	10	R	6	7	9	R	R	8,9	4,8	6,11	4	7	8	9	Pina	9	6	R	3	R	7	R	A	4,1	2,4	4,5	5	9	4	8
8	3	8	6	7	9	R	R	3,10	5,9	2,7	9	12	16	18	Nicolas	4	4	5	5	1	4	A	A	3,2	6,8	5,1	(R) 8	(R) 12	(R) 8	(R) 12
8	3	R	7	2	9	R	R	1,8	2,6	2,7	9	7	16	9	Nathalie	6	4	(1) R	(9) 10	1	5	A	A	2,3	2,4	3,3	8	8	9	(2) R
6	R	R	6	(1) R	0	R	A	R	R	R	9	7	17	18	Antonio	5	R	5	5	(1) R	0	A	A	10,7	R	5,1	4	6	4	4
8	3	0	6	7	9	R	R	4,3	3,7	3,8	9	7	17	9	Johana	5	3	3	9	(10) 15	5	R	R	2,3	4,6	4,2	8	9	10	8
8	3	3	6	1	5	R	R	2,4	1,5	2,7	2	7	2	0	Luc	4	4	5	5	1	4	R	R	1,4	1,3	5,11	3	9	4	8
8	3	4=5+4 9	R	R	9	R	R	1,8	2,6	3,8	9	12	16	18	Henriette	(11/6) R	(6) R	(3) R	9	(9/ 1+8=9) R	(6) 5	A	A	2,7	1,3	1,6	8	R	9	8
8	3	4	6	4	9	R	A	2,9	5,9	3,8	9	7	16.	8	Corinne	5	4	5	9	1	5	A	A	1,3	5,5	5,1	8	9	10	8
9	3	8	(12) R	1	9	R	R	2,10	3,8	(5,5) R	9	(7) R	16	(0) R	Isabelle	(10) R	(5) R	(8) R	(8) R	(13) R	(14) R	(12) R	(10) R	2,3	4,6	2,4	8	9	10	7
8	11	8	12	R	9	R	R	1,6	1,3	1,5	9	12	16	18	Christophe	11	6	13	R	R	11	R	A	(1,4) R	(1,1) R	(1,5) R	6	12	10	12
8	13	8	12	7	9	R	R	R	R	R	9	12	9	9	Nathalia	11	6	13	9	17	11	A	A	10,7	6,5	1,2	8	12	10	12
8	11	8	12	7	9	R	R	2,9	6,10	1,6	9	12	10	18	Esperanza	11	6	13	9	16	11	A	A	4,1	1,3	3,3	8	12	10	13
8	11	9	12	7	9	R	R	7,14	4,8	5,10	9	12	9	17	Alain	11	6	13	9	15	11	A	A	10,5	2,4	12,6	8	12	10	12
8	11	8	12	7	9	R	R	7=7+…	…+4=4	5+5=…	8	7	13	18	Sylvie	11	6	13	9	15	11	R	R	R	R	…=6+6	2	3	3	4
8	4=3 6+7	4=3 3+4	12	7	9	5=4 7+2	8=9 5+3	7=5 6 +11	5,5	5,10	1+5=6 3+5	3+4=7 4+5	2+7=6 3+6	9	Stephano	8=7+1	2	(3) 8	R	R	R	5=4 1+6	A	3,4	3,1	5,5	2,2	(1) 4	2	1
7	4	4	6	R	9	R	R	7,14	4,8	5,10	1	3	2	(R) 3	Elena	(8) 2	4	14	9	8	3	A	A	1,4	2,4	5,1	4	5	3	6
11	(11) 3	(7) R	(12) 3	(7) 2	(9) 4	A	R	1,8	2,4	(1) R	6	7	8	8	Beatrice	8	(1) R	(3) R	10	15	11	A	3=3	2,3	2,4	3,3	8	9	8	12

C

NOM		EPREUVE II		EPREUVE III		EPREUVE IV	
Sandrine	x	correct	14	correct	7	transf. donnée	12
Natacha	x	correct	14	correct 4=5+6	7	Sp varié	8 6
Cedric	x	+−R lacune x seq. correct	13c 14	position donnée	6	St/A St/Sp	10 9
Pina	x	+−R/A comptine altern.	10c	position donnée	6	Sp CD/Sp	8 13
Nicolas	x	+− selon séquence soustractions	8a 3	position donnée	6	St	7
Nathalie	x	+−, lacune finale +	7a	position donnée	6	St/Sp St/var	9 10
Antonio	x	+−R/R refus = initial Système personnel : décomp.	13b 11	Refus ?	1 2	St correct	7 14
Johana	x	+− lacune/séquence alternatif	8c	correct position donnée	7 6	St/Sp	9
Luc	x	comptine et − soustraction	10b 3	correct 5=11+6	7	correct CD/Sp	14 13
Henriette	x	+−R lacune/séquence	13c	procédé	5	St St/var	7 10
Corinne	x	+−, lacune finale +	7a	position donnée	6	St/Sp	9
Isabelle	x	système (stratégie refus)	11	position donnée	6	St/A St/Sp	10 9
Christophe	x	+R ? +R forme ·=·	4 5b	procédé décomp. avec 1	5	St	7
Nathalia	x	additions	2	refus ?	1 2	varié St	6 7
Esperanza	x	additions	2	position donnée	6	St	7
Alain	x	additions	2	procédé (doubles)	5	St	7
Sylvie	x	additions	2	répète et refuse	4	varié répète 3e donnée	6 4
Stephano	x	système (comptine) Système (comptine)	11 10a	Système personnel	4	transforme donnée Système personnel	12 3
Elena	x	varié +−RA	9b	position donnée	6	répète 1er donnée	4
Béatrice	x	+−RA ?	9a	? position donnée	2 6	Sp varié	8 6

Classe C.

2+6=...	4=...+7	4=...+4	...+3=9	...=5+2	4=5+...	5=7+2	8=5+3	7=...+...	...+4=...	5+...=...	1+5=3+...	3+4=...+5	2+7=7+...	3+6=...+9	Classe D 18 élèves	8=...+3	...=1+5	9+...=4	7=2+...	...+8=7	3+...=8	5=1+6	3=7+10	...+...=5	...+2=...	...=...+6	4+2=2+...	5+4=...+...	3+4=3+...	6+2=...+4
8	R	0	6	7	R	R	R	6,1	1,5	1,6	3	2	0	0	Delphine	5	6	R	5	R	5	R	R	4,1	2,4	9,3	4	6	4	4
8	R	R	5	(3) 7	R	R	A	1,6	3,7	2,7	3	2	2	R	Alexandra 1°	5	(4) 6	R	5	R	5	R	A	2,3	7,9	7,1	4	6	4	4
8	R	0	6	7	R	R	A	4,3	2,6	2,7	3	2	2	0	Samia	5	6	R	5	R	5	A	A	2,3	2,4	3,3	4	6	4	4
8	4=3+1	0	6	7	4=0+4	R	A	5,2	4,8	(6,7) 2,7	3	3	2	3	Patricia	5	6	2+2=4	5	15	5	R	R	1,4	2,4	(7,1) 5,1	4	6	4	4
8	(3) R	R	6	7	R	R	A	4,3	2,6	3,8	R	7	R	9	Nathalie	5	6	R	5	R	R	R	R	1,4	3,5	7,1	(7)	9	0	8
8	R	(0) R	12	7	R	R	A	1,6	1,5	1,6	3	7	(9) 2	R	Karen	8=5+3+ 8	6	R	5	2	5	A	R	4,1	1,3	7,1	4+2=2 +4=6	9	4	8
8	3	R	6	7	9	R	A	3,4	4,8	3,8	10	(3+4= 4+5=13) 2	16	0	Yves	4	6	R	4	15	4	R	R	4,1	3,5	7,1	8	9	10	8
8	3	(0) fause	6	7	(9) fause	R	A	2,5	3+4= 2 3	5+2= 3+4	3	2	2	0	Sara	5	6	0	5	1	5	R	R	3,2	2,4	7,1	4	6	4	3
8	(11) R	(8) R	6	4	R	R	R	7,1	4,3	1,6	3	2	2	0	Sébastien	5	6	5	5	2	5	R	R	1,4	2,2	7,1	4	6	4	4
7	3	0	6	7	R	R	A	1,8	5,1	1,6	3	3	2	0	Marion	R	6	9	5	0	5	R	A	4,1	3,3	6,1	4	6	4	4
(8) 9	(7) 3	0	(7) 5	4	9	(14) R	(17) R	3,10	4,8	5,10	9	6	(=) 3	10	Olivia	(0/7) R	(1) 6	(3) 5	5	2	5	R	R	2,3	3,5	R	8	12	10	0
2+6=26=8	4=12+7=10	4=13+4 8	5 4+3=9	12=5+2=8	4=5+31=4	5=7+2=12	R	7=12+1=4	13+4=8	3,8	1+5=3+5 8	1	2+7=7+7 10	R	Patrick	8=3+3=6	R	R	7=2+2=4	R	5	R	R	3,2	1,3	4,4	4	6	3	R
8	3	4	6	R	R	R	R	(7=23 2+...) 4,2	R	R	8	12	R	8	Stephanie	R	(7) R	(8) 1	8	R	5	R	R	3,2	3,5	(4,2) R	R	R	R	4
8	3	2	6	1	2	R	R	3,1	2,3	4,10	3	1	1	2	Olivier	6	3	1	2	3	5	R	R	1,4	2,4	3,3	1	1	11	2
8	7	8	12	7	9	R	R	R	R	R	9	14	R	R	Alexandra 2°	4	6	13	5	15	11	R	R	R	R	R	8	12	10	14
8	(8/R) 5	(R) 6	4	1	10	R	R	8,9	1,9	4,8	1+5 8 = 3+5	9	11	9	Yanis	(6) 9	4	6	5	1	2	R	R	3,2	1,4	2,1	5	8	6	9
8	3	1	12	7	4=5+1 10	14	16	7=1+7 9	R	5+1=1 7	1+5=3+1 10	3+4=1+5 13	16	3+6=7+9 10	Dela	R	6	9+1=4=15	(9) 7=2+1=10	(15) 16=1+8=7	3+1=8 12	R	R	2,3	2,4	R	R	5+4=9+3 12	R	8
8	1	2	6	0	4	A	R	1,1	1,5	7,7	8	1	3	2	Nicole	8=1+3 =13	(1=1+5 =7) R	0	7=2+ =9	0	5	R	R	1,1	2,4	1=2+ 6=9	1	2	4	1

D NOM		EPREUVE II		EPREUVE III		EPREUVE IV	
Delphine	x	correct	14	correct	7	correct	14
Alexandra 1°	x	correct	14	correct	7	correct	14
Samia	x	correct	14	correct position donnée	7 6	correct	14
Patricia	x	correct (corrige impossible)	14	correct position donnée	7 6	correct	14
Nathalie	x	correct	14	correct	7	var /Sp	11
Karen	x	correct	14	correct	7	CD / Sp	13
Yves	x	+– altern. lac. x ség.	8c	correct	7	St / CD St/Sp	13 9
Sara	x	+– altern. correct	8d	correct	7	correct	14
Sébastien	x	varié +– forme ⊕	12b. 7b	comptage (système corr.)	4	correct	14
Marion	x	+– altern. correct	8d	position donnée	6	correct	14
Olivia	x	+– lacune finale + varié ⊖	7a 12b.	position donnée correct 1 refus	6 7	var /Sp St	11 7
Patrick	x	composition/décomposition doublons selon pos. lac	11	système pers. position donnée	4 6	transf. donnée correct	12 14
Stéphanie	x	refus = initial	13b.	? forme	2 4	varié 1 item traité seul.	6 5
Olivier	x	varié – A pas de R	5b.	? position donnée	2 6	autre ?	2
Alexandre 2°	x	additions ?	2 6	refus	1	St non fermé	7
Yo[illegible]	x	+– lacune finale comptine ⊖ pas de R	7a 10a	?	2	var /Sp Sp	11 8
Dela	x	Syst. notation ⊕ résultat externe	11	système personnel correct 1 refus	4 7	St avec son système var / Sp	7 11
[illegible]	x	? pas de R système notation résult. externe	9a 11	?	2	varié	6

Classe D.

2+6=...	4=...+7	4=...+4	...+3=9	...=5+2	4=5+...	5=7+2	8=5+3	7=...+...	...+4=...	5+...=...	1+5=3+...	3+4=...+5	2+7=7+...	3+6=...+9	Classe E 18 élèves	8=...+3	...=1+5	9+...=4	7=2+...	...+8=7	3+...=8	5=1+6	3=7+10	...+...=5	...=2+... (sic)	...=...+6	4+2=2+...	5+4=...+3	3+4=3+...	0+2=...+4
8	R	0	6	7	R	R	A	5,1	1,5	3,8	3	2	2	0	Patrick 1°	5	6	R	5	R	5	R	R	4,1	3,1	9,3	4	6	4	4
8	R	R	6	7	R	R	R	1,6	4,8	5,10	R	R	R	R	José Luis	5	6	R	5	R	5	R	R	4,1	4,2	7,1	R	R	R	R
8	R	(8) R	6	7	R	R	A	2,5	4,8	5,10	(3) R	7	R	9	Laurent	5	6	R	6	R	5	R	R	4,1	4,2	7,1	R	9	R	8
8	R	0	6	7	R	R	A	6,1	4,8	1,6	3	2	R	0	Nicolas	4	6	R	5	R	4	A	R	3,2	4,2	3,3	0	6	4	4
8	R	0	6	7	R	R	A	4,3	4,8	2,3	R	7	R	9	Alexandre	5	6	R	9	R	5	R	R	3,2	R	7,1	R	9	R	8
8	R	0	6	7	R	R	A	4,3	6,10	4,9	R	R	R	R	Gerando	5	R	R	5	R	5	R	R	2,3	R	R	R	R	R	R
8	R	0	6	7	R	R	A	2,5	2,6	5,10	3	2	2	0	Aline	5	4	R	5	R	5	R	R	4,1	4,2	9,3	R	R	R	R
8	R	0	6	7	R	R	A	2,5	1,5	2,7	R	7	2	3	Corinne	5	6	R	5	1	5	R	R	4,1	4,2	8,2	0	9	4	8
8	1	0	6	7	1	R	A	1,6	4,8	5,10	(10) 3	(8) 2	(9) 2	(3) 0	Sonia	5	6	R	5	R	5	R	R	2,3	4,2	7,1	4	6	4	4
8	R	0	6	7	1	R	A	6,1	4,8	1,6	R	7	9	9	Carolle 1°	5	6	5	9	R	5	A	A	1,4	4,2	9,3	8	12	10	10
8	3	4	7	7	1	R	R	2,5	4,8	1,6	R	R	9	R	Alain	5	6	R	8	R	5	R	R	4,1	4,2	12,6	R	R	(1) R	2
8	(11) 3	R	7	7	1	R	A	6,1	1,5	5,10	4	(7) 2	9	R	Sylvie	5	6	13	5	(16) 14	5	R	A	4,1	2,4	7,1	7	(9) 2	10	8
8	4+3 =7	(4) 0	(4) R	7	(2) R	R	R	5,1	3,7	1,6	(1) R	5	(1) R	1	Patrick 2°	(2) R	(1) R	(11) R	(1) R	(1) R	5	R	R	1,4	3,1	1,5	(1) R	9	(3) R	8
8	3	0	6	7	9	R	A	1,8	4,8	5,10	3	5	1	1	Anthony	5	4	0	9	R	6	R	R	4,1	2,4	3,3	3	1	4	7
8	R	8	R	7	R	R	A	3,4	4,8	4,1	6	7	(2) R	R	Alexandra 1°	3	4	13	5	6	2	A	R	4,1	4,2	3,3	4	9	2	8
8	3	8	12	7	9	R	A	2,5	8,4	3,2	9	12	2	(10) R	Carolle 2°	5	6	5	5	15	11	R	R	2,3	2,4	3,3	(4) R	R	10	12
8	R	R	R	R	8	R	A	R	4,1	R	8	R	R	R	Nicolette	R	6	R	9	2	R	R	A	1,4	4,2	3,3	8	9	10	8
8	11	8	12	7	9	A	R	7,8	24	5,6	9	7	9	4	Alexandra 2°	11	6	13	9	(2) 15	8	A	A	2,3	2,2	7,7	8	8	10	8

E

NOM	EPREUVE II		EPREUVE III		EPREUVE IV	
Patrick 1° x	correct	14	correct	7	correct	14
José Luis x	correct	14	correct	7	refus	1
Laurent x	correct	14	correct	7	var/Sp	11
Nicolas x	correct	14	correct position donnée	7 6	correct	14
Alexandre x	correct	14	? correct (refus)	2 7	var/Sp	11
Gerardo x	correct	14	correct (refus)	7	refus	1
Aline x	correct	14	correct	7	correct refus	14 1
Corinne x	correct	14	correct	7	varié D, CD/Sp	6 11
Sonia x	+ − altern. correct correct	8d 14	correct	7	correct	14
Carolle 1° x	correct	14	correct	7	St Sp	7 8
Alain x	+ − altern. correct	8d	correct	7	un seul item Sp D	5
Sylvie x	+ − altern. pos.=/ség.	8b	correct	7	St/var correct	10 14
Patrick 2° x	+ − R/R accepte = final ou − + −	13b	correct position donnée	7 6	autre A/Sp	3 11
Anthony x	+ − altern. pos. lac/ség.	8c	position donnée 2 = 2 + 4	6	varié CD/Sp	6 13
Alexandra 1° x	+ R ? + − répétition varié	4 9b	procédé	5	var/Sp	11
Carolle 2° x	+ − ? ⊕	6	procédé	5	varié St	6 7
Nicolette x	+ R lacune + − R selon pos. lacune	5a 13a	? procédé	2 5	un seul item traité St/Sp	5 9
Alexandra 2° x	additions	2	système personnel	4	varié St/Sp	6 9

Classe E.

CHAPITRE II : ANALYSE DES RESULTATS SOUS L'ANGLE DES PROFILS DE REPONSES

II.1. Pour atteindre les traitements des données par les sujets, une nouvelle unité d'étude : les profils de réponses.

Grâce aux analyses comparatives (item par item puis épreuve par épreuve) j'ai obtenu une caractérisation des tâches que recouvrent les exercices lacunaires. Il est ressorti que les erreurs étaient plus des erreurs d'interprétation que d'effectuation des calculs. L'étude de la façon dont les élèves comprennent les symboles utilisés dans les données a pu être amorcée. Elle va être poursuivie ici.

Jusqu'ici, c'est une population de réponses d'élèves qui a été étudiée. En rester à ce type d'analyse fait courir le danger d'une lecture trop normative de ces résultats. On en déduirait alors peut-être un principe dictant la présentation d'exercices impossibles (ou au contraire les bannissant) ; on pourrait aussi vouloir en déduire des échelles de difficultés sur lesquelles il serait alors tentant de calquer la progression des apprentissages. De telles interprétations sont d'autant plus hâtivement faites qu'il manque quelques chaînons entre la réalité où s'inscrivent les analyses des réponses et celle à laquelle on a affaire dans la leçon de mathématique. En effet, si on veut toucher un tant soi peu le traitement par un élève de données qui lui sont proposées,

il ne suffit pas d'examiner une à une séparément ses réponses, mais il faut tenter de rendre compte du profil de ses réponses aux items différents et selon des tâches différentes.

Dans tout ce qui suivra le mot profil de réponses désignera l'ensemble structuré des réponses d'un même sujet à tous les items d'une épreuve donnée. D'autre part, le mot procédé désignera une entité un peu plus globale et imprécise que procédure. C'est ce qu'on peut légitimement inférer des réponses écrites en les mettan en relation avec les données et selon les recoupements observables Je n'ai pas observé ces élèves au travail, une certaine limite s'impose à mes inférences.

Le regard sur les profils de réponses est en quelque sorte le dual de celui qui a été porté au chapitre I. La première prise de contact est la lecture attentive et les comparaisons horizontales des tableaux des pages 66 à 75 . Le premier résultat est le constat d'une diversité de profils assez grande. On remarque les points suivants :

1. Il y plus que 3 procédés mis en oeuvre par les sujets.

2. La diversité des procédés mis en oeuvre n'est cependant pas disparate. Tous les procédés se rattachent au calcul et plus précisément aux comptages additifs et de complémentation (ou encore soustraction). Ceci sera montré en détail dans l'analyse des réponses autres (Chap. II.3. p. 88).

3. Il y a multiplicité des profils, c'est-à-dire des combinaisons de procédures. On constate alors que, mis à part les traitements purement additifs et les traitements corrects, on ne peut pas regrouper les profils autour de pattern de réponses que l'observation de telle ou telle règle partielle ou erronnée d'interprétation ou de calcul aurait produite (il n'y a pas identité entre profil de réponse et un seul traitement de donnée).

C'est donc de cette diversité qu'il faut traiter. On peut alors en proposer une première description selon deux axes : le nombre de procédés mis en oeuvre, la structuration apparente de ceux-ci dans le profil des réponses. On aboutit alors au schéma suivant :

- Profils
  - Monotones (un seul type de procédé)
  - Multiples
    - fluctuants (sans structuration apparente)
    - organisés
      - de façon incomplète ou ori
      - corrects

Il s'agit donc d'examiner comment différentes interprétations et procédures s'intègrent chez le même sujet. Pour ceci, je m'appuyerai essentiellement sur la structure de chaque épreuve et sur quelques productions individuelles qui témoignent d'un traitement rigoureux et de ce fait simples à identifier et à décrire. Je chercherai alors à situer les traitements les uns par rapport aux autres et à dégager au-delà de leur complexité apparente leur degré d'élaboration.

Je considère les traitements comme produits par la rencontre de l'élève avec les tâches proposées au travers des écritures lacunaires. D'un côté, il y a un ensemble d'items construits et dont on peut décrire la structure au travers de signes et de leurs dispositions. C'est ce qui a été fait dans la présentation des exercices (p.7 à 11). Il va de soi que cette réalité n'est pas directement accessible au sujet dont la lecture est soumise aux opérations de résolution mobilisées. Une partie des détails de ces formes écrites seront dans ce sens irrelevants et donc non pris en compte (éventuellement même pas observés). Exemple : la séquence des données dans une procédure d'addition (tout au plus le sujet y fera attention implicitement si pour résoudre l'item 2 + 7 = ... il substitue le comptage 7 + 2 à celui proposé et ce pour les raisons de commodité déjà décrites).

De même qu'il serait exagéré de s'attendre à ce que les sujets voient dans les items leur organisation, il serait tout aussi faux de sous-estimer la variété des procédures à disposition du sujet et la structure interne de cet ensemble. Je postule donc chez le sujet une variété procédurale, englobant de façon diverse le recours à des éléments figuratifs et symboliques, eux aussi variés. Cet ensemble n'est pas un amalgame. Les procédures qui sont des combinaisons séquentielles d'actionset d'opérations, émergent par différenciation de procédures à la fois plus générales et élémentaires.Ainsi en est-il des comptages qui font recours à un ou plusieurs dénombrements (réalisés de façon parallèle, sur des supports spécifiques). Je suppose que cette multiciplicité de procédures se développe par assimilation et "exploration numérique" du sujet. Cela produit entre autres une relative redondance, plusieurs d'entre elles étant globalement ou partiellement équivalentes. Elles sont donc susceptibles d'être substituées les unes aux autres dans les résolutions du sujet. Ainsi donc à une écriture qui signifierait telle ou telle procédure, peuvent être associées d'autres procédures équivalentes (et peut-être plus fiables et simples). Ceci est le début d'un calcul (Reprenez l'exemple élémentaire de l'écriture 2 + 7 = ... à qui va être rapidement associé le comptage sur les doigts : "7, 8, 9"). Je postule donc deux mouvements (inverses) opérant dans la constitution de ce système de procédures. D'une part un mouvement amplifiant de différenciation, et de l'autre un mouvement réducteur d'intégration. On peut étudier ceci au travers de la stabilité et de l'organisation (intégration des procédés) des réponses des élèves à un ensemble d'items.

Etudier les traitements, c'est étudier, au travers des variations de données, ce qui pourrait lier les procédés mis en oeuvre par le sujet. On peut alors en rendre compte de multiples façons. Cela se situera alors entre deux pôles d'analyse. Le premier est la description de l'organisation apparente du traitement par le biais de la mise en relation des procédés et des marques symboliques discriminantes (pôle objet). Le second est la recherche d'une procédure générale de résolution réglant les conditions de recours aux procédés (pôle sujet). Ni l'une ni l'autre de ces descriptions n'est certes attribuable à l'élève (il y a le regard du chercheur). Néanmoins chacune donne une caractérisation du traitement (et par là du système procédural dont il est produit). Cette hypothèse est renforcée par le fait que les traitements observés sont variés. D'une part les traitements sont organisés à des degrés divers, la comparaison entre ceux-ci étant donc possible ; d'autre part, les sujets n'ont pas été sensibles de la même façon à la variété des écritures. Ainsi les sujets qui répondent correctement à tous les items disposent sans aucun doute d'une stratégie élaborée de résolution et se montrent rigoureux dans son application (les deux choses sont, c'est sûr, liées).

Il n'en est pas de même pour tous. On observe soit des stratégies moins élaborées mais appliquées tout aussi rigoureusement (l'exemple extrême étant fourni par les traitements additifs purs) soit de stratégies fluctuantes dans le recours à une variété de procéder.

L'analyse du chapitre précédent consistait à regarder comment, pour un même item, les réponses se distribuaient selon les catégories de procédés. Ici le regard change et je vais examiner sur quels items l'élève distribue le même procédé de résolution, dans l'espoir de dégager certains critères d'interprétation. Etant donné l'unité supérieure étudiée (profils et non plus réponses) je puis auparavant affiner la catégorisation des réponses. Je ne reviendrai pas ici sur les procédés additifs ou soustractifs (complémentation), mais je vais examiner un peu mieux les réponses refus et les réponses autres.

* * * * * *

II.2. L'interprétation des refus

La question cruciale est celle de l'interprétabilité des refus. Les conditions de passation ont été décrites (p. 7) ainsi que les consignes données à propos de ce type de réponses. J'ai pu remarquer que peu d'items ont été laissés en blanc par les élèves, ce qui témoigne un réel souci de leur part de marquer un refus (ou jugement d'impossibilité). Dans bien des cas, les élèves ont barré plutôt 2 fois qu'une les items (jusqu'à les couvrir complètement). Il y a eu aussi des marquages bien précis : emploi d'une couleur différente -rouge comme le maître peut-être- ou barrage d'une partie très psécifique (cf. Giancarlo et Boris classe B. dans tableau p.68).

Je vais alors examiner successivement les points suivants : les refus systématiques, les traitements sans refus, et enfin quelques productions (non correctes) où les refus ont une signification évidente.

* * * * *

II.2.1. Refus systématiques

Tout d'abord, je n'ai pas tenu compte des copies d'élèves qui auraient massivement refusé les items de chaque épreuve. Ces refus sont plus rapportés à la forme du travail qu'au contenu (6 copies d'élèves ont été écartées pour cela, 7 élèves étaient absents à l'une des passations).

Examinons alors les refus à l'une ou l'autre des épreuves.

a) Epreuve II

A l'une des passations, Daniel B a refusé de répondre aux items, sauf pour 2 + 6 = ... Mais à la passation suivante, il a répondu à tous les items. La maîtresse m'a indiqué que cet élève n'avait pas voulu travailler lors de la 1ère passation.
Ce cas excepté, il n'y a aucun refus systématique pour l'épreuve II.

b) Epreuve III

4 refus systématiques aux 6 items de l'épreuve III. Dans chacun de ces cas, l'élève a invariablement additionné les données pour répondre aux autres items. Il y a un refus par "manque de donnée" (on ne peut pas compter avec un seul facteur).

6 cas de refus systématiques à l'une des passations.

c) Epreuve IV

Il y a 3 cas de refus systématiques à l'épreuve IV, et 5 cas de refus à l'une seule des passations.

On remarque qu'il n'y a jamais eu de refus systématiques simultanément aux épreuves II et IV. Et ce même si on se restreint à une passation.

* * * * * *

II.2.2. Absence de refus

Une vingtaine d'élèves n'ont jamais recouru au refus et parmi eux 8 appartiennent à la classe C (effet de l'enseignement ou des consignes).

Pour l'épreuve II, il y a eu environ 1/3 d'élèves qui n'ont donné aucun refus à l'une ou l'autre des passations.

Pour l'épreuve III la proportion est bien supérieure 4/5 tandis puisqu'elle se situe à 2/3 pour l'épreuve IV.

Cette variation s'explique pour les épreuves III et IV, puisque , ils ne comportent aucun item impossible.

Note : Il y a plusieurs cas d'élèves ne donnant aucun refus à une épreuve et qui pour une autre refusent systématiquement. Ex. Rachel A. Ep. III refus systématiques, Ep. II et IV addition systématique. Ou José-Luis aucun refus à l'épreuve III, refus systématique à l'épreuve IV.

II.2.3. Conclusions : dans beaucoup de cas les refus sont interprétables.

1. Ces résultats montrent que les élèves ont recouru de manière assez naturelle à ce type de réponse. Même si pour eux la chose était tout à fait inhabituelle. D'autre part, les élèves ont utilisé le refus pour les épreuves III et IV ce qui n'était pas envisagé dans les consignes. Il y a donc eu report d'une épreuve à l'autre. Ceci montre que leurs critères ne sont pas les mêmes que les nôtres. Pour les épreuves III et IV il est aisé d'interpréter les refus : soit dû à un manque de donnée (Ep. III) soit, au contraire dû à un excès de données ou de complexité,(Ep. IV). D'autre part l'absence de refus conjoints aux épreuves II et IV est très révélatrice. De même que l'absence de refus systématique à l'épreuve II (pourtant la seule épreuve où ce type de réponse est indiqué !)

2.Je vais maintenant citer à propos de l'épreuve II quelques-uns des nombreux cas où l'usage du refus a une signification nette. Je ne m'occuperai bien sûr pas des réponses correctes où le refus a aussi une signification évidente.

a) les élèves peuvent être amenés à refuser les items selon la place de la lacune. Comme Anne A. b) qui refuse de traiter tous les items qui n'ont pas une lacune finale (excepté 3 + $\overset{5}{\ldots}$ = 8) (indice séquentiel évident). Nicolette E. fait de même à la première passation. A la seconde elle ne refuse que les items à lacune médiane. Henriette C refuse de répondre aux items à lacune initiale.

Un très joli exemple de refus selon la place de la lacune est donné par Laurence A.

A la première passation, elle refuse les items 4 = ... + 7 et 4 = ... + 4, tandis qu'elle répond additivement aux autres :

2 + 6 = $\overset{8}{\ldots}$ $\overset{12}{\ldots}$ + 3 = 9 $\overset{7}{\ldots}$ = 5 + 2 et 4 = 5 + $\overset{9}{\ldots}$

à la seconde passation, elle procède au contraire à un refus des items à lacune extrême : ... = 1 + 5, 7 = 2 +... et ... + 8 = 7 tandis qu'elle complète, correctement, les items à lacune médiane par les signes < et > : 8.>. + 3, 9 +.>. = 4 et 3 + .<. = 8.

Il y a là une surprenante complémentarité des interprétations aux deux passations.

b) Mais les refus peuvent être motivés par d'autres indices. Par exemple, des formes usuelles que le sujet ne trouverait pas. Ainsi Sabine A. ne traite que les items à égal initial de la 2ème passation. Adrien B., aux deux passations, refuse tous les items à égal initial et semble traiter correctement les items à égal final : 2 + 6 = $\overset{8}{\dots}$ $\overset{1}{\dots}$ + 3 = 9 (oubli d'une main, cf. chap. II.3. p. 93) 9 + $\overset{R}{\dots}$ = 4, $\overset{R}{\dots}$ + 8 = 7 et 3 + $\overset{5}{\dots}$ = 8. Il semble qu'il en est de même avec Stéphanie D. qui refuse tous les items à égal initial sauf 4 = $\overset{3}{\dots}$ + 7 et 7 = 2 + $\overset{8}{\dots}$ traités comme s'ils avaient un égal final.

Un très joli exemple est donné par Antonio C. A la première passation, Antonio répond :

8 = $\overset{5}{\dots}$ + 3 ; $\overset{R}{\dots}$ = 1 + 5 ; 9 + $\overset{5}{\dots}$ = 4 ; 7 = 2 + $\overset{5}{\dots}$;
$\overset{R}{\dots}$ + 8 = 7 ; 3 + $\overset{0}{\dots}$ = 8 (refus ?)

Le procédé d'Antonio est de décomposer le nombre tout à gauche selon la seconde donnée :

$\underline{8}$ = 5 + 3 ; $\underline{9}$ = 5 + 4 ; $\underline{7}$ = 2 + 5. Les autres cas sont refusés (impossible de faire ainsi une décomposition). L'hésitation d'Antonio à l'item ... + 8 = 7 est révélatrice, car avant de refuser, il avait répondu $\overset{1}{\dots}$ + 8 = 7 puis il a barré.

Mais Antonio change de traitement à la seconde passation. Là, en effet, il répond : 2 + 6 = $\overset{6}{\dots}$ (erreur de calcul) (cf.p92 et $\overset{6}{\dots}$ + 3 = 9 et 4 = 5 = $\overset{0}{\dots}$ (sans doute refus), le reste est refusé. C'est-à-dire qu'il refuse tous les items avec égal initi Là, en effet, (sans doute refus), le reste est refusé. C'est-à-dire qu'il refuse tous les items avec égal initial.

c) On retrouve des refus dûs à des formes plus précises. Ainsi Olivia B. qui à la seconde passation ne traite que les items 2 + 6 = ... et ... = 5 + 2 (items où on reconnaît le triplet n+m). De même Julien A. (cf. description p.96)

Autre forme qui peut être discriminante, la présence d'un triplet $\boxed{n = m}$. Ainsi en est-il sans doute de Christophe C.qui traite tous les items additivement sauf : 7 = 2 + ... et

... + 8 = 7 et dans un premier temps 4 = 5 + ... (puis il se reprend et répond $4 = 5 + \overset{9}{\ldots}$).
Un exemple très joli est celui de Giancarlo B.
Giancarlo a traité correctement tous les items, sauf qu'il a refusé ... + 3 = 9, 4 = 5 + ... (correct), 7 = 2 + ... et ... + 8 = 7 (correct). La notation de Giancarlo nous aide à comprendre son refus. En effet, celui-ci a barré très distinctement :

$\ldots + \cancel{3} = 9 \quad 7 = \cancel{2} + \ldots \quad 4 \cancel{=} 5 + \ldots \quad \ldots + \cancel{8} = 7$ alors

qu'il a barré : $9 + \cancel{\ldots} = 4$ et $4 = \cancel{\ldots} + 7$. D'autre part, toutes les autres réponses sont correctes, tant à l'épreuve II qu'à l'épreuve III. Enfin, pour l'épreuve IV, Giancarlo a été systématique puisqu'il a répondu : $3 + 4 = \overset{7}{\ldots} + 5$, $3 + 6 = \overset{9}{\ldots} + 9$ $5 + 4 = \overset{9}{\ldots} + 3$ tous les autres items étant refusés (sauf $4 + 2 = 2 + \overset{8}{\ldots}$). Je fais donc l'hypothèse que, dans son traitement, Giancarlo refuse la relation partielle n = m (par exemple on pourrait lire 3 = 9 dans ... + 3 = 9)

d) On trouve certains refus "stratégiques", l'élève remplit la lacune d'une façon qu'il sait fausse, puis trace ou efface le tout (manière de rendre sûrement faux un item où il pourrait hésiter). A malin, malin et demi (cf. p.109 pour les descriptions).

e) Enfin notons encore tous les refus dus à des critères de séquence numérique. Dont le plus net est celui de Nadia B. (mais nous y reviendrons à la page 101).

Note : 1. De même que certaines formes ont pu motiver le refus, de même elles ont pu motiver des traitements spécifiques de calcul. Ainsi par exemple l'addition pour les items à lacune finale, l'addition pour les items ayant le triplet n + m mais la soustraction pour les autres items, etc... Il y donc recoupement de ces divers résultats.

2. Il apparaît alors que même pour une écriture aussi simple que celle d'une équation à trois termes dont une lacune, les lec-

tures partielles peuvent être très multiples (et théoriquement je n'en ai pas donné toutes les lectures envisageables). C'est ici que se situe une marge (un jeu) entre les marques symboliques : d'une part et les procédures qui les contrôlent de l'autre. Cette marge devient manifeste dès le moment où il n'est pas seulement demandé de calculer mai où il s'agit en outre d'émettre un jugement. Cela est accentué par la pauvreté des feed-back de cette situation.

* * * * * *

II.3. Réponses autres

Note : Pour l'élaboration de ce paragraphe, je me suis aussi basé sur les réponses recueillies lors d'observations cliniques à propos des comptages avec d'autres élèves de 1P et de 2P. En particulier sur le comptage sur les doigts.

II.3.1. Taux de réponses autres selon les épreuves.

On peut d'abord dire qu'on retrouve une réponse autre chez 2/3 des sujets. On a respectivement dans la catégorie 1 de réussite 18 élèves qui y recourent sur 21, dans la catégorie 2 21 sur 25 et dans la catégorie 3 15 sur 20. On peut donc dire que des réponses autres côtoient presque toujours des réponses usuelles.

Si on examine maintenant les traitements systématiquement autres, on trouve 3 élèves qui répondent "autrement" à tous les items. Dans ce cas, ils recourent chacun à des surnotations des données écrites. Si on examine maintenant les choses épreuve par épreuve, on a : 4 cas de réponses autres systématiques à l'épreuve II, 10 cas à l'épreuve III et 8 cas à l'épreuve IV.

D'après les tableaux suivants, on remarque qu'effectivement, il y a en plus des traitements autres à l'épreuve III (15%). Ceci est un effet des données moins contraignantes, fort instructif. Enfin, ces taux varient bien sûr avec les catégories de réussites ou avec les classes interrogées.

TABLEAUX XXV et XXVI

	II	III	IV
1	19	30	18
2	12	14	5
3	10	19	7
4	0	0	6
Tot	9	15	9

Taux de réponses autres selon les épreuves et les catégories de réussite

	II	III	IV
A	5	20	7
B	11	14	8
C	10	16	16
D	15	18	8
E	3	7	4

Taux de réponses autres selon les épreuves et les classes interrogées

Catégorie de réussite : 1.	EPREUVE I				EPREUVE II												EPREUVE III						EPREUVE IV							
	5=7+2	8=5+3	5=1+6	3=7+10	2+6=…	4=…+7	4=…+4	…+3=9	…=5+2	4=5+…	8=…+3	…=1+5	9+…=4	7=2+…	…+8=7	3+…=8	7=…+…	…+4=…	5+…=…	…+…=5	…+2=…	…=…+6	1+5=3+…	3+4=…+5	2+7=7+…	3+6=…+9	4+2=2+…	5+4=…+3	3+4=3+…	6+2=…+4
Sophia A																				4,4	4,1	2,1								
Philomena A					11																								15	
Daniel B					2						8					7								3+4= 7~~+5~~		3+6= 9~~+9~~				
Marco B						8														5,1							11			
Robertha B							4	1			1		1	2	1	1	2,1	1,4		1,2	1,1	5,5	2.			=	2	1	1	1
Maja B															10															
Mandana B					6	[R]	4	2	5	5	[R]	1	1	7	[R]	1	7,6										2	3	3	4
Isabelle C			(12)	(10)					1		(10)	(5)	(8)	(8)	(13)	(14)			(5,5)											
Christophe C																			1,5											
Nathalie C																				10,7	6,5	1,2								
Sylvie C																	7=7+	…+4	5+5=			…6+6					2	3	3	4
Stephano C	5=4 7+2	8=9 5+3	5=4 1+6	[R]	[8]	4=36 +7	4=33 +4	12~~+3~~ =9	7=5 +2	4=5- +9	8=71 +3	2	8	R	R	R	7=65 +11	5+4 =5	[5+5= 10]	3,4	3,1	5,5	1+5= 63+ 5	3+4= 74+5	2+7= 67+ 6	9	4+2= 2+22	4	2	1
Elena C							4					(8) 2			8	3							1	3	2	3	4	5	3	6
Béatrice C					11			3		4	8	(1)						2,4												
Yanis D						5	6	4	1		9					2	8,9	1,9				2,1	1+5= 3+5		11					
Dola D	14	16	R	R	8	3	1	12	7	4=5+ 1 10	R	6	9+1= 4=15	7=2+ 1=13	16=1 +8=7	3+1 =8 12	7=1+1 9	R	5+1 =17	2,3	2,4	R	1+5= 3+1 10	3+4= 1+5 13	16	3+6= 1+9 18	R	5+4= 9+3 12	R	8
Nicolò D						1	2		0	4	8=1+ 3=13	1=1+ 5=7		7=2+ =9			1,1	2,4	7,7	1,1	2,4	1=2+ 6=9					1	2	4	1
2° Alexandra E																8	7,8	2,4	5,6	[2,3]	2,2	7,7								
Laurence A	R	R	5>1 +6	R	8	R	R	12	7	9	>	R	>	R	R	<	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R

Catégorie de réussite : 2	EPREUVE I				EPREUVE II												EPREUVE III						EPREUVE IV							
	5=7+2	8=5+3	5=1+6	3=7+10	2+6=...	4=...+7	4=...+4	...+3=9	...=5+2	4=5+...	8=...+3	...=1+5	9+...=4	7=2+...	...+8=7	3+...=8	7=...+...	...+4=...	5+...=...	...+...=5	...+2=...	...=...+6	1+5=3+...	3+4=...+5	2+7=7+...	3+6=...+9	4+2=2+...	5+4=...+3	3+4=3+...	6+2=...+4
Stéphane A																					2+2 4 =...					3+6= 1+1 9	4+2= 6 7+1=3	5+4= ...+3 12		6+2 ...+
Grégoire A									1															6	12	1				
Julien A					2+6= 44				3 4= 5+2																					
Christine A						5	=	10		6	8				10		6,4					1,3								
Fabrice A						5										9	(7)	(7,6)	(8)	7,6	4,3	8,7			6					
Monica B																9		4,3		6,9	7,2	7,10	7	[3]		7				3
Marie Louisa B							3	4							3		8,4			4,7										
Graziella B													9+10 3 =4	7=2+ 16 2		3+8 11=8	1,3										4+2= 2+2 4 2	5+4= 7 3+ 3	3+4= 3+7 2 1	6+2 4 6 4
Nathalie C													(1)																	
Antonio C					6				1	0						0														
Johana C													3																	
Luc C							3		1	5																				
Henriette C										4=5+ 4 9			3		9															
Corinne C										4																				
Cécile D	(14)	(17)				(7)					0				2															
Patrick D	5=7+ 2=12	[R	R	R]	6+2= 26=8	4= 12 +7=10	4=13 +4 8	5 4+ 3=9	12=5 +2=8	4=5+ 3 1=4	8=3+ 3=6	R	R	7=2+ 2=4	R	5	7=1 2 +1=4	13+4 =8	3,8	3,2	1,3	4,4	1+5= 3+5 9	1	2+7= 7+7 10	R	4	6	3	R
Stéphanie D							4						1																	
Olivier D							2		1	2			1	2	3		3,1	2,3						1	1	2	1	1		2
Alexandra D 2°						7																								
Alexandra E 1°											3				6	2													2	
Nicolette E															2			4.1												

Catégorie de réussite : 3 et 4.	EPREUVE I				EPREUVE II												EPREUVE III						EPREUVE IV							
	5=7+2	8=5+3	5=1+6	3=7+10	2+6=...	4=...+7	4=...+4	...+3=9	...=5+2	4=5+...	8=...+3	...=1+5	9+...=4	7=2+...	...+8=7	3+...=8	7=...+...	...+4=...	5+...=...	...+...=5	...+2=...	...=...+6	1+5=3+...	3+4=...+5	2+7=7+...	3+6=...+9	4+2=2+...	5+4=...+3	3+4=3+...	6+2=...+4
Sabine A							4=... +4 8											8,2												
Giao A						6											8,11	5,6	7,4	7,6	3,4	7 8								
Frédéric A					8	R	5	2	4	6	9	R	R	3	>	4	8,9	3,5	6,7	3,4	1,3	4,5								
Fanny B																							1+5 6 3+9							
Boris B																							1+5= 6 3+1=4	7	2+7= 10 7+3	3+6= 10 1+9 10	4+2=6 2+1=3	10	3+4= 7 3+...	8
Olivia B																								5						
Adrien B								1															1+5= 3+3= 6			3+6= 9+9 ≠				
Cedric C																			5,7					1		1				
Pino C											9			3		7	8,9					4,5								
Sana D						farse				farse			0		[1]			3+4= 23	5+2= 3+4											
Sébastien D																	7,1	4,3			2,2									
Marion D													9		0						3,3	6,1								
Alain E							4																							
Sylvie E																												2		
Patrick E						4+3 =7	·	(4)			(2)	(1)	(11)	(1)	(1)								(1)		(1)	(1)	(1)		(3)	
Anthony E													0											5	1	1	.	1		
Alec A																							2	5	8	7	11	R	10·	R
Sandrine C																							1+5=6 3+2=5	3+4=7 5+5= 10	2+7= 9 7+1=8	3+6=9 9+1=10	4+2=6 2+5=7	5+4=9 3+3=6	3+4=7 3+1=4	6+2 4+4
Delphine D																									0					
Nathalie D																													0	
Patricia D						4=3+ 1				4=0 +4			2+2 =4																	
Sonia E							1			1																				

II.3.3. Eventail des réponses autres

Je vais essayer de faire un éventail descriptif de ces réponses autres. Le lecteur pourra se référer aux tableuax des pages précédentes où je restitue ces réponses autres (entre parenthèse les réponses autres effacées dans un second temps . Entre crochets les réponses usuelles données aux autres items dans certains cas intéressants).

Il y a quelques réponses que je ne saisis pas. Exemple : Daniel B. $2 + 6 = \overset{2}{\ldots}$ (après avoir répondu 8). D'autres sont si particulières que j'ai de la peine à y voir un procédé de comptage. Exemple : Olivier D. qui répond souvent par 1 ou par 2.

Il y a ensuite les réponses par répétition d'une des données. Elena C. à l'épreuve IV, par exemple, reproduit toujours la première donnée dans la lacune : exemple $1 + 5 = 3 + \overset{1}{\ldots}$ etc... Sylvie C. , à l'épreuve III, reproduit la donnée sans tenir compte des signes équationnels, exemple : $\ldots = \overset{6}{\ldots} + 6$. Dans certains cas il se peut que la répétition corresponde à une lecture partielle de l'item, exemple : Daniel B. $8 = \overset{8}{\ldots} + 3$. J'ai déjà mentionné de telles lectures partielles pour l'épreuve IV (chap. I. p.50). Enfin ce type de réponse "par répétition" peut provenir aussi d'erreurs de comptages (cf. plus loin) ou de mémoire (par exemple répondre $\overset{4}{\ldots} = \overset{4}{\ldots} + 6$ au lieu de $\overset{3}{\ldots} = \overset{3}{\ldots} + 6$).

Il y a ensuite les réponses attribuables à des erreurs de comptages particuliers (je ne vais pas examiner ici les erreurs d'une unité provenant souvent de la confusion ordinale entre bornes et intervalles). On trouve assez fréquemment des calculs qui donnent $a + b = b$ où $b > a$. Ex. Antonio C. $2 + 6 = \overset{6}{\ldots}$, le sujet compte 2 (ou part à partir de 2) puis continue la comptine jusqu'à 6. Il s'arrête alors soit parce qu'il ne sait plus très bien quoi faire au-delà, soit qu'il estime avoir compté avec les 2 données (Rem. ce type d'erreur n'est pas possible si on part du nombre supérieur). En fait, comme cela arrive souvent, l'élève compte sans très bien savoir ce qu'il compte (c'est au demeurant une question fort abstraite et délicate à analyser). Dit autrement, l'élève compte 6 au lieu de compter 6 au-delà de 2.

Avec le comptage sur les doigts,on observe certaines erreurs très surprenantes. Ainsi j'ai pu observer un élève produire la réponse $3 + \overset{2}{\ldots} = 8$ (comme Yanis D.).Cela s'est passé ainsi. L'élève a commencé par représenter 8 avec la main gauche ouverte et 3 doigts de la main droite levés. Il a alors voulu représenter 3. Pour ce faire il s'est centré sur sa main gauche et a abaissé deux doigts (l'annulaire et l'auriculaire) "oubliant" (négligeant) les 3 doigts levés de la main droite. Ainsi, en abaissant 2 doigts, il a pu passer de 8 à 3. L'opération inverse consistait à relever les 2 doigts. Il était alors tentant de répondre $3 + \overset{2}{\ldots} = 8$. Ce que l'élève observé n'a pas manqué de faire. La logique de cette erreur tient à ce que l'élève commence par représenter le plus grand nombre. Mais elle tient aussi à un mauvais usage du support figuratif (doigts). L'élève se laisse guider par le fait que 3 et 8 ont une image bien précise (groupes de 3 doigts levés). Tout comme il ne reconnaît pas le 5 lorsqu'il chevauche deux mains (annulaire + auriculaire gauche + 3 doigts de la main droite ; 5 n'est alors pas une main).

A propos de main, rappelons les erreurs de comptage de 5 ou de multiples de 5, car quelques mains ont été oubliées. Exemple sans doute, Maja B. $\overset{10}{\ldots} + 8 = 7$ au lieu de $\overset{15}{\ldots} + 8 = 7$. Ce type d'oubli peut aussi se combiner avec d'autres erreurs. Par exemple, dans ce cas mixte où sont présents "l'oubli des mains" et une erreur du type décrit ci-dessus : $\overset{2}{\ldots} + 8 = 7$. 7 est représenté par 2 doigts de la main droite, et implicitement par la main gauche les précédents , 8 est représenté par 3 doigts de la main gauche. Alors, tout comme ci-dessus, on passe de 8 à 7 en levant 2 doigts de la main gauche (on retrouve d'autres réponses du genre, à la faveur des comptages à rebours. Par exemple 12 - 5 = 5).

Toutes ces erreurs proviennent de confusions chez les élèves à propos de ce qu'ils comptent (et ce n'est pas si facile de ne pas s'y perdre). On pourrait dire que le sujet n'est pas toujours au fait qu'il compte des itérations et non pas les nombres de la comptine, et qualifier ceci grossièrement de confusion entre ordinal et cardinal. Mais ce qui importe le plus de dire, c'est les rôles essentiels du recours à des systèmes variés (et bien distincts) de systèmes figuratifs. Ainsi ces erreurs sont en grande partie des erreurs techniques. Pour les comptages, il faut voir la variété des systèmes figuratifs : auditifs (noms des nombres), visuels (doigts, groupes de doigts, etc...) tactiles (toucher les doigts, les lèvres) kinestésiques. Le recours à cette diversité provient de contraintes de mémorisation et de libération de l'esprit pour se centrer sur telle ou telle opération précise. La multitude des formes observées tient aussi à ce que le sujet transforme les particularités de l'un à l'autre des systèmes. Ainsi, pour en rester à la complémentation, passer de 3 à 8, c'est compter tous les nombres compris entre 3 et 8 (3 non compris mais 8 oui) et devient : compter les doigts entre le doigt 3 et le doigt 8 (si ce n'est pas, comme ci-dessus, entre le doigt 3 et le premier doigt des trois doigts de la main droite figurant 8). Mais les traces écrites peuvent jouer un même rôle, ainsi entre doigts et bâtonnets. Revenons à notre recherche, on observe aussi un tel transfert entre la comptine et les chiffres écrits dans les équations. Ainsi Sophie écrivait $4 + 4 = 5 + 6 = 7 + \underline{8}$ en prenant soin de souligner le résultat 8 (et de regrouper les chiffres en paires) Céline fera de même, et réalisera cela aussi avec les doigts (cf. chap. III p.165). Nous pouvons observer quelques réponses de ce type aux items proposés. Et le cas le plus net est celui de Frédéric A. (cf. p. 95).

Ainsi, prendre un nombre adjacent (dans la comptine) à une des données, doit être considéré comme une procédure d'obtention de la réponse. Le fait important est alors que cette réponse paraisse convenir à l'élève. Car cette procédure peut être en concurrence avec elle-même (dans le cas où il y aurait deux données par exemple : $4 = \ldots + 7$) ou avec d'autres procédés (pour le cas $4 = \ldots + 7$ on peut avoir $4 = \overset{3}{\ldots} + 7$ $4 = \overset{5}{\ldots} + 7$ $4 = \overset{6}{\ldots} + 7$ et enfin $4 = \overset{11}{\ldots} + 7$ addition). Mais cela dépend fortement de la donnée. Ainsi il n'est sera pas de même avec $4 = \ldots + 7$ et $4 = 5 + \ldots$ ni à fortiori avec $1 + 2 = \ldots$. Enfin, les items de l'épreuve III se prêtent mieux à ce type de traitement.

Tout ceci correspond à ce que j'ai pu observer. Prenez par

par exemple Stéphano C. qui répond à $4 = \ldots + 7$: $4 = \overset{3\ \ 6}{\ldots\ldots} + 7$ résolvant de ce fait le conflit des deux données. Ou encore $7 = \overset{6\ \ 5}{\ldots\ldots} + 11$ où il combine procédé comptine et addition. D'autre part, il y a effectivement plus de réponses comptine à l'épreuve III qu'aux épreuves II et IV. Mais l'observation dépasse ces prévisions. Revenons en effet à Frédéric A. pour noter que ses réponses à l'épreuve III répondent en outre à une règle séquentielle ! Frédéric se basant sur la position de la donnée pour chercher ses réponses : $7 = \overset{8}{\ldots} + 9$ $\overset{3}{\ldots} + 4 = \overset{5}{\ldots}$ $5 + \overset{6}{\ldots} = \overset{7}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots} + \overset{4}{\ldots} = 5$ $\overset{1}{\ldots} + 2 = \overset{3}{\ldots}$ et $\overset{4}{\ldots} = \overset{5}{\ldots} + 6$. Ceci nous permet de comprendre aussi ses réponses à l'épreuve II.

$4 = \overset{5}{\ldots} + 4$; $\overset{2}{\ldots} + 3 = 9$; $\overset{4}{\ldots} = 5 + 2$; $4 = 5 + \overset{6}{\ldots}$.
$8 = \overset{9}{\ldots} + 3$; $7 = 2 + \overset{3}{\ldots}$; $\overset{7}{\ldots} = 8 + 7$ et $3 + \overset{4}{\ldots} = 8$. Et même peut-être les raisons de refuser : $\ldots = 1 + 5$ (car ça aurait dû être $0 = 1 + 5$) et $9 + \ldots = 4$ (ça aurait dû être $9 + \overset{10}{\ldots} = 4$).

Notons cependant que Frédéric change de traitement à l'épreuve IV ! (sans doute à cause du fait qu'il y a 3 données) pour répondre par la somme des 3 données (quelle que soit la place de la lacune).

Revenons aux réponses de Frédéric à l'épreuve III. Toutes ses écritures sont ascendantes de gauche à droite ! Que l'on trouve ici un souci séquentiel découle de la proximité de ce type de traitement avec le comptage. Il serait faux de croire que ce procédé de résolution est élémentaire et ne se rapporte qu'à une espèce de préaddition. Il peut justement réapparaître comme une forme de complémentation, l'élève restituant les éléments de l'intervalle de comptine entre deux numéros. On comprendra alors qu'il puisse réemerger à la faveur d'écritures et de tâches particulières (Frédéric sait additionnner comme le témoignent ses réponses à l'épreuve IV. Ses réponses à l'épreuve III sont, du point de vue de l'écriture plus élaborées !!)

La dernière catégorie de réponse de mon éventail prolonge justement ce propos, et illustre une autre forme d'intégration de l'écriture aux procédés de l'élève. Dans un certain nombre de cas, le sujet ne s'est pas contenté d'écrire sa réponse dans la lacune, mais a procédé à des adjonctions graphiques qui transforment plus ou moins la forme finale de l'équation. Par exemple Sabine A. : $4 = \dots + 4^{\,8}$. Stéphano C. $4 = \overset{3\ 6}{\dots} + 7$. Dela D.$= \overline{9 + \overset{1}{\dots} = 4}^{\,=15}$ ou encore Sandrine C. $1 + 5 = {}^{6}\,3 + \overset{2}{\dots}{}^{= 5}$. Ces réponses sont le fait d'élèves et non pas d'items. Ainsi, les cas où l'élève corrigerait un item jugé impossible sinon, sont rarrisimes. Aucun traitement de la sorte à l'épreuve I (équations complètes), un seul cas net de l'épreuve II : Patrick E. 2^e^ qui corrige $4 = \dots + 7$ en $4 \underline{+} 3 \underline{=} 7$. Deux autres réponses seulement seraient aussi imputables à ce type d'intention : Sabine A. $4 = \dots + 4^{\,8}$ et Henriette C. $4 = 5 + \overset{4\ 9}{\dots}$(1) A l'épreuve III, aucune correction. A l'épreuve IV des corrections sur lesquelles je vais revenir à la fin de ce chapitre (cf. p151).

Les réponses qui nous intéressent sont donc dues au fait que l'élève superpose à la donnée l'écriture des calculs qu'il effectue. Ainsi n'est-il pas étonnant de voir que la plupart rétablissent un résultat final. Voyons quelques exemples :

Julien A. Au cours d'une des passations, Julien refuse de répondre à tous les items de l'épreuve II. Sauf à $2 + 6 = \dots$ et à $\dots = 5 + 2$. Alors il répond de façon suivante : $2 + 6 = \overset{4\ +\ 4}{\dots\dots}$(8 effacé)et $\overset{3\ +\ 4}{\dots\dots} = 5 + 2$. Fait surprenant, il refuse au cours de la même passation, à traiter les items de l'épreuve IV (sauf $2 + 7 = 7 + \overset{2}{\dots}$). Or la tâche demandée à l'épreuve IV est bien celle que Julien remplit à l'épreuve II. C'est la position de l'acteur face au code (comme lecteur ou comme producteur) qui change entre l'épreuve II et l'épreuve IV. Cette remarque est primordiale. Graziella B. semble aussi recourir à des décompositions. Au cours d'une passation, elle refuse 3 items de l'épreuve II et répond aux autres : $9 + \overset{10\,\varepsilon}{\dots\dots} = 4$ $7 = 2 + \overset{1\partial\ 2}{\dots\dots}$. $3 + \overset{11}{\dots} = 8$. Pour les items de l'épreuve IV elle donne des écritures analogues :

$5 + 4 = \overset{7\ 3\ 1}{\dots\dots} + 3$ $3 + 4 = 3 + \overset{7\ 2\ 1}{\dots\dots}$ $6 + 2 = \overset{+\ \partial\ 2}{\dots\dots} + 4$.

On ne peut pas savoir ce que cela signifie, mais on ne fera pas faute de noter qu'il y a toujours des relations numériques entre les données et les adjonctions : $10 + 3 = 9 + 4$ $7 + 2 = 1 + 6 + 2$

Note (1) Avec aussi Patricia D $4 = \overset{3}{\dots}\overset{1}{\cancel{+}}$ $4 = \overset{0}{\cancel{5}} + \overset{4}{\dots}$ etc $\overset{2}{\cancel{9}} + \overset{2}{\dots} = 4$. Elle corrige le nombre de données mais pas les signes algébriques.

ainsi que, dans les autres cas, des rapprochements possibles : $5 + 4 = 7 + 3$ ou $7 = 3 + 1 + 3$, ou encore des répétitions : 2 4 6 en donnée, 2 4 6 en réponse, $3 + 4 = 7$ et $3 = 2 + 1$ etc...

Les réponses de Patrick D. sont du même type mais encore un peu plus sophistiquées. En outre, il change de système de résolution à la seconde passation. Je renvoie le lecteur à la p. 108 où je décris entièrement son système.

Je vais reprendre la description de Stéphano C. puis, pour terminer, celle de Dela D. (Nicole D. et Yves D. répondent un peu comme Dela).

Stéphano C.

J'ai déjà fait remarquer que Stéphano C. recourt à la comptine pour déterminer sa réponse. Cela l'amène à un conflit pour l'épreuve II où il y a déjà 2 données numériques : alors par rapport à laquelle se situer ?. Ce conflit est réglé de façon diverse par Stéphano. Soit ne tenir compte que d'une donnée, soit faire deux réponses. Ceci s'adapte d'ailleurs à la position de la lacune. En effet, lorsque celle-ci est extrême il y a une réponse, tandis que lorsqu'elle est médiane il y a 2 réponses. Ainsi : $2 + 6 = \overset{8}{\ldots}$, $4 = 5 + \overset{9}{\ldots}$, $\overset{7}{\ldots} = 5 + 2$ et $\overset{12}{\ldots} + 3 = 9$ à la première passation sont toutes additives (lacune extrême ⟶ addition). Tandis que $4 = \overset{3\ 6}{\ldots.} + 7$ et $4 = \overset{3\,\mathcal{E}}{\ldots} + 4$ on a la comptine 4,3/6,7 et 4,3/3,4. De même à la seconde passation, Stéphano répond : $9 + \overset{8\,\mathcal{E}}{\ldots.} = 4$ puis il efface le 3.

Cependant, on a : $\overset{2}{\ldots} = 1 + 5$ (comptine 1,2) et $8 = \overset{7}{\ldots} + \overset{1}{\cancel{3}}$ (correction de l'item mais toujours la comptine 8,7).

On retrouve ceci pour l'épreuve I (jugement d'équation) où Stéphano glisse un nombre entre le égal et la donnée :

$5 = 7 + 2$ est transformé en $5 = {}^{4}\,7 + 2$ $8 = 5 + 3$ en $8 = {}^{9}\,5 + 3$ et à la seconde passation : $5 = 1 + 6$ en $5 = {}^{4}\,1 + 6$.

On retrouve des réponses comptine à l'épreuve III (bilacunaire). Ainsi = $7 = \overset{6\ 5}{\ldots.} + \overset{11}{\ldots}$ (7,6,5, 6 + 5 = 11) $\overset{5}{\ldots} + 4 = \overset{5}{\ldots}$ et $\overset{3}{\ldots} + \overset{4}{\ldots} = 5$ ou encore $\overset{5}{\ldots} = \overset{5}{\ldots} + 6$.

Enfin pour l'épreuve IV aussi :
$1 + 5 = {}^{6}\,3 + \overset{5}{\ldots}$ $3 + 4 = \overset{7\ 4}{\ldots.} + 5$ $2 + 7 = {}^{6}\,7 + \overset{6}{\ldots}$ (Stéphano glisse toujours un nombre à la place qu'il veut).

A noter donc : comptine ou répétition de donnée comme moyen de déterminer la réponse. Et placement à un endroit précis de la réponse (par rapport à la donnée à laquelle elle se rapporte. Enfin, plusieurs opérations sur une écriture ($7 = \overset{6\ 5}{\ldots} + \overset{11}{\ldots}$ par exemple).

Dela D.

Ep. II. $4 = 5 + \overset{1}{\ldots}\ ^{10}$ $9 + \overset{1}{\ldots} = 4\ ^{=15}$ $7 = 2 + \overset{1}{\ldots}\ ^{= 10}$

$16 - \overset{1}{\ldots} + 8 = 7$ $3 + \overset{1}{\ldots} = 8\ ^{12}$

Ep. III : $7 = \overset{1}{\ldots} + \overset{1}{\ldots}\ ^{9}$ $5 + \overset{1}{\ldots} = \overset{1}{\ldots}\ ^{7}$

Ep. IV : $1 + 5 = 3 + \overset{1}{\ldots}\ ^{10}$ $3 + 4 = \overset{1}{\ldots} + 5\ ^{13}$

$3 + 6 = \overset{1}{\ldots} + 9^{18}$ $5 + 4 = \overset{9}{\ldots} + 3\ ^{12}$

$6 + 2 = \overset{8}{\ldots} + 4$ tandis que $3 + 4 = 3 + \ldots$ et $4 + 2 = 2 + \ldots$ sont refusés.

Ep. I : $5 = 7 + 2\ ^{14}$ $8 = 5 + 3\ ^{16}$

Dela utilise toujours le même procédé : additivement. Mais il place 1 dans la lacune et additionne tous les nombres. En général le résultat est inscrit tout à droite. Pour l'épreuve IV, il change progressivement de traitement se contentant de mettre la somme des 3 données dans la lacune, et pour $5 + 4 = \ldots + 3$ faisant un enchaînement (cf.p.99).

Pour terminer, je vais montrer qu'à l'épreuve IV une gamme complète de réponses ont été produites. Dela D. est le seul exemple, avec Fanny B : $1+5\overset{6}{=} 3+\overset{9}{\ldots}$, de réponse avec enchaînement de 2 formes ternaires. Il y en aurait sans doute plus avec des élèves plus âgés. Voici ce que cela donne :

1er type d'interprétation : forme ternaire.

Stéphano C.	$3 + 4 = \overset{7\;4}{\ldots\ldots} + 5$	Somme de 3 et 4, résultat. 4 déterminé par comptine à partir de 5. Somme non effectuée.
Daniel B.	$3 + 4 = \overset{7}{\ldots} + \cancel{5}$	Suppression de la dernière donnée, rétablissement d'une forme ternaire.
Natacha B. (et autres)	$3 + 4 = \overset{7}{\ldots} + 5$	Somme partielle.
Sandrine C.	$3 + 4 = \overset{7}{\ldots}\ \overset{5+5}{\ldots} = {}^{10}$	Ecriture de 2 calculs ternaires
Boris B.	$2 + 7 = {}^{10}\ 7 + \overset{3}{\ldots}$	Ecriture de 2 calculs ternaires ayant même résultat (correspondrait à $3 + 4 = 7 = 2 + 5$).
Adrien B.	$1 + 5 = 3 + \overset{3}{\ldots} = \overset{6}{\cdot}$	(correspondrait à $3 + 4 = \overset{2}{\ldots} + 5 = 7$).

2ème type : addition de 3 ou 4 termes

Patrick D.	$3 + 4 = \overset{1}{\ldots} + 5$	(pour 4 = 1 + 5 semble-t-il selon les autres réponses de Patrick)
Dela D.	$3 + 4 = \overset{1}{\ldots} + 5\ {}^{13}$	Pour 3 + 4 + 1 + 5 = 13
Stéphane D. (et autres)	$3 + 4 = \overset{12}{\ldots} + 5$	Réponse somme totale.

3ème type : enchaînement de 2 additions.

Dela D.	$5 + 4 = \overset{9}{\ldots} + 3\ {}^{12}$	Pour 5 + 4 = 9 9 + 3 = 12 (correspondrait à : $3 + 4 = \overset{7}{\ldots} + 5\ 12$
Fanny B.	$1+5 \overset{6}{=}\ 3+\overset{9}{\ldots}$	

II.3.4. Conclusion

Ces derniers exemples montrent qu'il y a diversité de réponses mais pas disparité. Les réponses autres participent au même champ procédural que les comptages. On observe même pour de tels traitements le respect des règles séquentielles. L'élève en outre peut avoir écrit ses propres calculs en surimpression de la donnée (sans qu'il s'agisse d'une "correction" de la donnée). On y trouve aussi l'aspect séquentiel. De plus, sur une même écriture peuvent s'inscrire plus d'une opération.

* * * * * * *

II.4. Analyse de l'épreuve II

II.4.1. 10 Exemples de traitements (on pourra se référer aux tableaux XXIV pg 63-75).

1. Commençons par le plus joli d'entre eux. Je veux parler de celui de Nadia B.(Nadia classe B). Voici ses réponses :

1ère passation :

$8 = \overset{R}{\dots} + 3$ $\quad \overset{4}{\dots} = 1 + 5$ $\quad 9 + .?. = 4$ $\quad 7 = 2 + \overset{9}{\dots}$

$\overset{R}{\dots} + 8 = 7$ $\quad 3 + \overset{5}{\dots} = 8$

2ème passation :

$2 + 6 = \overset{8}{\dots}$ $\quad 4 = \overset{3}{\dots} + 7$ $\quad 4 = \overset{R}{\dots} + 4$ $\quad \overset{R}{\dots} = 5 + 2$

$4 = 5 + \overset{9}{\dots}$

On peut "rendre" ces réponses correctes, il suffit pour cela de réecrire tous les items de sorte qu'ils aient un égal final (exemple : $4 = 5+\overset{9}{\dots}$ serait réecrit $4 + 5 = \overset{9}{\dots}$, tandis qu'on ne toucherait pas à ... + 8 = 7). Nadia a donc interprété toutes ses données en fonction d'une règle selon laquelle le nombre de droite est le résultat du calcul à reconstituer. A partir de là toutes ses déductions sont exactes.

Pour Nadia, le signe + et = n'ont que des rôles de liaison. Bien sûr, + indique de quelle opération il s'agit, mais pour le reste + et = sont au plus des marques de séparation entre les données numériques. Cependant, les procédés de résolution, +, - et R sont très bien intégrés aux données, ce traitement est parfaitement structuré, tout se tient. Seulement, la règle qui contrôle ce traitement n'est pas la règle conventionnelle, c'est une règle séquentielle : le résultat s'écrit tout à droite. De là les additions aux items à lacune finale, de là aussi la détermination de la possibilité ou de l'impossibilité des items. A ce propos, Nadia laisse une réponse très explicite pour l'item : 9 + ... = 4, elle note 9 + .?. = 4 montrant bien qu'elle compare explicitement les données, et dans l'ordre de gauche droite où ils sont écrits. On peut prendre cela comme une explication de son non-calcul (une sorte de refus motivé).

Un tel traitement est très intéressant, quoique rare. Ici pour cette population d'élèves, un seul exemple (mais il y a aussi très peu de réponses contrôlées aussi étroitement par une règle, les réponses correctes additives mises à part). J'ai pu en observer quelques autres exemples avec d'autres classes. Répétons-le, ce traitement témoigne d'une grande élaboration chez l'élève, et de plus un certain "individualisme", ce traitement résiste à tout ce qui a été enseigné en classe (jamais une telle règle n'a été même évoquée ! Au contraire, tout l'enseignement vise à accoutumer les élèves aux équations avec = initial !). On verra plus loin que Nadia va jusqu'au bout et suit une même règle pour les épreuves III et IV (p. 135 et 150).

2. Henriette C. Voici sous forme de tableau, les réponses d'Henriette (tableau utilisé pour décrire l'ensemble de l'épreuve selon la posiiton de lacune, du égal et la séquence numérique).

$2 + 6 = \overset{8}{\ldots}$		$4 = 5 + \overset{9}{\ldots}$	$7 = 2 + \overset{9}{\ldots}$	
$3 + \overset{5}{\ldots} = 8$	$9 + \overset{R}{\ldots} = 4$	$4 = \overset{3}{\ldots} + 7$	$8 = \overset{R}{\ldots} + 3$	$4 = \overset{4}{\ldots} + 4^{9}$
$\overset{R}{\ldots} + 3 = 9$	$\overset{R}{\ldots} + 8 = 7$	$\overset{R}{\ldots} = 1 + 5$	$\overset{R}{\ldots} = 5 + 2$	

On peut décrire les réponses d'Henriette de la façon suivante :

lacune finale ⟶ addition
lacune initiale ⟶ refus
lacune médiane ⟶ complémentation $\begin{cases} \text{séq.ascendante résultat} \\ \text{séq.descendante refus} \end{cases}$

On a là un traitement organisé, où les trois procédés de réponse sont bien intégrés, et règlent des groupes de plusieurs items. Henriette, pour en arriver là, se base sur des considérations séquentielles : sans doute qu'elle pense au résultat final (nombres de droite). Ce qui l'amène aux items à lacune médiane.

C'est peut-être cela, ou d'autres considérations de forme qui l'amènent à refuser les items à lacune initiale.

Mais, Henriette a beaucoup hésité, surtout pour les items à lacune médiane, et, fort heureusement, il est possible de lire les réponses qu'elle a effacées. L'analyse de ces hésitations confirme l'interprétation ci-dessus. Henriette a surtout hésité lors de la seconde passation, et je puis dire qu'Henriette a vérifié ses réponses ce qui l'a amené à ces corrections.

Item :

$8 = \overset{R}{\ldots} + 3$	:	Elle envisage les réponses 11 et 5 (+ et -) qu'elle efface. Elle barre alors cet item (refus).
$\overset{R}{\ldots} = 1 + 5$	:	Elle envisage la réponse 6 (+) qu'elle efface, elle barre alors l'item (refus).
$9 + \overset{R}{\ldots} = 4$	:	Elle envisage la réponse 3 (+ avec erreur de 2 mains ou - ?) elle efface et barre l'item (refus)
$7 = 2 + \overset{9}{\ldots}$		non corrigé
$3 + \overset{5}{\ldots} = 8$		Elle a envisagé la réponse 6 (+ erreur de calcul) qu'elle a effacé pour mettre 5.

Ceci montre qu'Henriette envisage différentes solutions, elle se décide finalement. Sans doute après vérification. Par exemple : en additionnant de gauche à droite, alors ni 8 + 5 ni 8 + 11 ne donnent 3, 6 + 1 ne donne pas 5, 9 + 3 ne donne pas 4 (même avec erreur d'une ou deux mains) 7 + 2 donne bien 9 et comme 3 + 6 donne 9 alors c'est 3 + 5 (pour faire 8). J'ai gardé pour la fin les deux réponses les plus intéressantes et qui vont tout à fait dans le sens de ces corrections. Lors de la seconde passation, le seul item sur lequel Henriette avait alors hésité est : 4 = ... + 4. Elle répond $4 = \overset{8}{\ldots} + 4$ puis efface et écrit : $4 = \overset{5}{\ldots} + 6$ où 6 est écrit en surimpression du 4 de la donnée, puis enfin efface et écrit : $4 = \overset{5}{\ldots} + 4^{9}$. Voyons maintenant les réponses de l'item : ... + 8 = 7. Elle commence par répondre $\overset{9}{\ldots} + 8 = 7$ (comptine comme ci-dessus 4=5+6) puis efface et essaie de de rétablir une amplification de gauche à droite, elle écrit alors : $\overset{1}{\ldots}$ + 8 = 9 (9 en surimpression du 7). Puis finalement, elle efface le tout et barre l'item.

3. Corine C. on peut y rattacher Nathalie C. Cedric C. ①. Olivia D. et Yanis D.

2 + 6 = $\overset{8}{\ldots}$		4 = 5 + $\overset{9}{\ldots}$	7 = 2 + $\overset{9}{\ldots}$	
3 + $\overset{5}{\ldots}$ = 8	9 + $\overset{5}{\ldots}$ = 4	4 = $\overset{3}{\ldots}$ + 7	8 = $\overset{6}{\ldots}$ + 3	4 = $\overset{4}{\ldots}$ + 4
$\overset{7}{\ldots}$ + 3 = 9	$\overset{1}{\ldots}$ + 8 = 7	$\overset{4}{\ldots}$ = 1 + 5	$\overset{2}{\ldots}$ = 5 + 2	

Voici un traitement bien plus simple, On le décrit ainsi :

lacune finale ⟶ addition
lacune non finale ⟶ complémentation

A noter que cette règle ne souffre d'aucune exception (sauf peut-être 4 = $\overset{4}{\ldots}$ + 4).

4. Johana C. Voici aussi Yves D. et Anthony E.

Avec Johana, on a un traitement sans refus, où certains procédés de réponses sont utilisés à des fins alternatives. On examinera plus loin deux autres cas de traitements "alternatifs" sans refus, Sara D. et Sylvie E.

Mais voici les réponses de Johana :

2 + 6 = $\overset{8}{\ldots}$		4 = 5 + $\overset{9}{\ldots}$	7 = 2 + $\overset{9}{\ldots}$	
3 + $\overset{5}{\ldots}$ = 8	9 + $\overset{3}{\ldots}$ = 4	4 = $\overset{3}{\ldots}$ + 7	8 = $\overset{5}{\ldots}$ + 3	4 = $\overset{0}{\ldots}$ + 4
$\overset{6}{\ldots}$ + 3 = 9	$\overset{15}{\ldots}$ + 8 = 7	$\overset{3}{\ldots}$ = 1 + 5	$\overset{7}{\ldots}$ = 5 + 2	

En supposant que la réponse $9 + \overset{3}{\ldots} = 4$ est une soustraction, je donnerai la caractérisation suivante des réponses de Johana :

lacune finale → addition
lacune médiane → complémentation
lacune initiale ┬ séquence ascendante complémentation
                └ séquence descendante addition

Ce qui caractérise ce traitement est la différenciation claire selon la place de la lacune :

finale	médiane
addition	complémentation

de sorte que dans tous les cas c'est un des nombres extrêmes (initial/ final) qui est le maximum des 3 données. Le traitement des items à lacune initiale se conforme à cette règle (qu'on peut exprimer négativement par : "le nombre médian n'est jamais le plus grand"). On peut faire l'hypothèse que le traitement additif aux items ... = 5 + 2 et ... + 8 = 7 est un traitement "alternatif", et relier cela aux réponses des items à lacune médiane. Devant une "impossibilité" à complémenter, Johana inverserait le sens de sa lecture, ainsi pour l'item 8 = ... + 3 impossible à résoudre "de gauche à droite", la lecture inversée permet de complémenter et de répondre 5. Tandis que pour l'item ... + 8 = 7, la lecture inversée le rendrait 7 = 8 + ... soit "additif".

Cette explication est audacieuse. Mais je ne vais en retenir qu'un chose : la position du nombre maximum initiale ou finale mais jamais médiane. Cette règle est aussi suivie à l'épreuve III, tandis qu'à l'épreuve IV, Johana met dans la lacune la somme des nombres qui la précède : a + b = ... + c réponse : (a + b)
a + b = c + ..., réponse : (a+b+c).

5. Sara D. A qui on peut rattacher Sonia E, et éventuellement Marion D. et Alain E.

$2 + 6 = \overset{8}{\ldots}$		$4 = 5 + \overset{\text{farse}}{\ldots}$	$7 = 2 + \overset{5}{\ldots}$	
$3 + \overset{5}{\ldots} = 8$	$9 + \overset{0}{\ldots} = 4$	$4 = \overset{3}{\ldots} + 7$	$8 = \overset{5}{\ldots} + 3$	$4 = \overset{\text{farse}}{\ldots} + 4$
$\overset{6}{\ldots} + 3 = 9$	$\overset{1}{\ldots} + 8 = 7$	$\overset{6}{\ldots} = 1 + 5$	$\overset{7}{\ldots} = 5 + 2$	

Note : Corrections à 4 = ... + 4. Elle met $4 = \overset{0}{\ldots} + 4$ puis gomme et écrit : "farse".Pour 4=5... elle répond $4=5\overset{9}{\ldots}$ puis gomme et écrit "farse".

Toutes les réponses de Sara sont exactes sauf dans les trois items impossibles : $9 + \overset{0}{\ldots} = 4$ $\overset{1}{\ldots} + 8 = 7$ et $4 = \overset{3}{\ldots} + 7$. Notons cependant que des traces nettes sur sa feuille montre son hésitation à ces items (alors qu'il n'y a pas de telles traces aux autres réponses). Je fais donc l'hypothèse que $9 + \overset{0}{\ldots} = 4$ et $\overset{1}{\ldots} + 8 = 7$ sont des réponses alternatives (soustractives ou autres). Tout comme ses "farses" d'ailleurs.

6. Sylvie E.

$2 + 6 = \overset{8}{\ldots}$		$4 = 5 + \overset{1}{\ldots}$	$7 = 2 + \overset{5}{\ldots}$	
$3 + \overset{5}{\ldots} = 8$	$9 + \overset{13}{\ldots} = 4$	$4 = \overset{3}{\ldots} + 7$	$8 = \overset{5}{\ldots} + 3$	$4 = \overset{R}{\ldots} + 4$
$\overset{7}{\ldots} + 3 = 9$	$\overset{14}{\ldots} + 8 = 7$	$\overset{6}{\ldots} = 1 + 5$	$\overset{7}{\ldots} = 5 + 2$	

Encore un traitement sans refus, toutes les réponses sont correctes, sauf celle des items impossibles. $9 + \overset{13}{\ldots} = 4$. $\overset{14}{\ldots} + 8 = 7$, $4 = 5 + \overset{1}{\ldots}$ et $4 = \overset{3}{\ldots} + 7$. (où elle a commencé par répondre 11). Il se trouve qu'il y a eu en plus les coïncidences suivantes :

1^{e} passation : séquence descendante, égal final ⟶ addition
2^{e} passation : séquence ascendante, égal initial ⟶ soustraction.

Il y a eu donc réponses "alternatives", le choix dépendant de "conditions factuelles et locales". On pourrait "simuler" ainsi les réponses présentes. Dans 9 + ... = 4 et dans ... + 8 = 7, le 1^er^ nombre lu (gauche) étant le plus grand, Sylvie ne peut pas complémenter à la 1^ère^ donnée, elle compte alors au-delà, 4 au-delà de 9 c'est 13, 7 au-delà de 8, c'est 15. Tandis que pour 4 = ... + 7 et 4 = 5 + ..., la complémentation est possible puisqu'on commence par le petit nombre. Malheureusement, cette procédure ne rend pas compte des autres réponses. Ce qui rend cette interprétation moins sûre.

7. Fanny B.

$2 + 6 = \overset{8}{\dots}$		$4 = 5 + \overset{9}{\dots}$	$7 = 2 + \overset{9}{\dots}$	
$3 + \overset{11}{\dots} = 8$	$9 + \overset{13}{\dots} = 4$	$4 = \overset{R}{\dots} + 7$	$8 = \overset{6}{\dots} + 3$	$4 = \overset{8}{\dots} + 4$
$\overset{R}{\dots} + 3 = 9$	$\overset{R}{\dots} + 8 = 7$	$\overset{6}{\dots} = 1 + 5$	$\overset{7}{\dots} = 5 + 2$	

Voici un exemple de traitements où les procédés sont peu intégrés, et où on a l'impression que le sujet répond de cas en cas.

lacune finale ——> addition
lacune initiale ——> forme ... = • + • —>addition
——> forme ... + • = • —>refus
lacune médiane : ——> forme a + ... = b —>addition
——> a = ... + b = séq.ascend.soustr.
séq.descend.refus

Les réponses aux items à lacune médiane, surtout a = ... + b, proviennent sans doute des exercices scolaires (où la forme a = ... + ... est utilisée pour signifier les décompositions des petits nombres). On remarquera aussi que ce traitement a une forte proportion de réponses additives, une seule soustraction ($8=\overset{6}{\dots}+3$). Je classerai alors ce traitement parmi ceux dont les refus sont motivés par une forme.

Note : D'après les réponses de Fanny à l'épreuve III (cf. pg137) on peut voir qu'elle se centre sur un aspect séquentiel.

8. Pina C. (cf. feuille pg. 5)

$2 + 6 = \overset{8}{\ldots}$		$4 = 5\ \overset{9}{\ldots}$	$7 = 2 + \overset{3}{\ldots}$	
$3 + \overset{7}{\ldots} = 8$	$9 + \ldots = 4$	$4 = \overset{10}{\ldots} + 7$	$8 = \overset{9}{\ldots} + 3$	$4 = \ldots + 4$
$\overset{6}{\ldots} + 3 = 9$	$\ldots + 8 = 7$	$\overset{6}{\ldots} = 1 + 5$	$\overset{7}{\ldots} = 5 + 2$	

Ce traitement est remarquable parce que tous les items à égal final sont traités correctement (sauf 3 + .7. = 8). Pour les items à égal initial, elle recourt à l'addition, soustraction et procédé comptine, sauf pour les items ... = n + m (où elle retrouve sans doute la forme n + m).

9. Patrick D.

1ère passation :

$2 + 6 = \overset{26}{\ldots} = 8$ $4 = \overset{1Ƨ}{\ldots} + 7^{=10}$ $4 = \overset{Ɛ1}{\ldots}+4^{=8}$ $\overset{54}{\ldots}+3 = 9$ $\overset{1Ƨ}{\ldots}=5+2^{=8}$
et enfin : $4=5+\overset{31}{\ldots} = 4$

2ème passation :

$8=\overset{3}{\ldots} + 3^{=6}$ $\overset{R}{\ldots}= 1 + 5$ $9+\overset{R}{\ldots}= 4$ $7=2 +\overset{2=4}{\ldots}$ $\overset{R}{\ldots}+8=7$ et $3+\overset{5}{\ldots}= 8$.

Patrick change de traitement entre les 2 passations. Voici pour la première passation les relations condensées des écritures de Patrick :

2+6=2+6=8 4+1+2=7 4=1+3 5+4=9 1+2+2=5 et 3+1=4.
1+2+7=10 1+3+4=8 1+2+5=8

Patrick procède donc ainsi :

a) il répond par un couple de nombres (sans mettre de signe +) qui représente une décomposition : 2,6 pour 8;1,2 pour 3;1,3 pour 4 5,4 pour 9 ; 1,2 pour 3 et 3,1 pour 4.

b) Cette décomposition n'est pas donnée au hasard : soit il s'agit d'une décomposition de l'une des données : 5,4 pour 9, 3,1 pour 4 ; soit il s'agit d'une décomposition d'un résultat calculé par Patrick : 4 = 3 + 7 ⟶ 4 = 12 + 7 (lire 4 égal un deux plus 7) ⟶ 4 = 1 2 + 7 = 10. Une confirmation de cette interprétation est donnée par la réponse effacée de Patrick : 4 = 37 + 7. Autre exemple : 1 + 2 + 2 = 5.

c) Patrick recompose le couple de nombres ainsi trouvé avec l'autre donnée. Le résultat de cette composition est précédé d'un signe égal et se trouve tout à droite. L'écriture se termine donc toujours par un résultat. On se réfèrera au tableau pg 72 pour voir que ce système est repris sur les 3 épreuves lors de cette passation.

Voici maintenant le traitement de la 2^{e} passation :

Patrick opte pour un second traitement tout aussi personnel. Il répond en doublant l'une des données. Mais pour pouvoir réaliser cela, il lui faut une disposition de l'équation qui s'y prête, sinon il refuse les items:

$8 = \overset{3}{\ldots} + 3 \, ^{= 6}$ $7 = 2 + \overset{2}{\ldots} \, ^{= 4}$ les autres items sont refusés, sauf : $3 + \overset{5}{\ldots} = 8$. (on remarque que c'est un item possible, avec égal final). Lors de cette passation, les réponses de Patrick aux autres épreuves sont beaucoup plus conformes qu'auparavant. Ce très joli exemple de traitement montre à quel degré de subtilité certains élèves peuvent arriver (sans qu'on s'en apperçoive le plus souvent).

<u>10.</u> <u>Isabelle C.</u> Auquel on peut rattacher Patrick E.

1ère passation :

$2 + 6 = \overset{9}{\ldots}$; $4 = \overset{3}{\ldots} + 7$; $4 = \overset{8}{\ldots} + 4$; $\overset{12}{\ldots} + 3 = 9$ barré ; $\overset{1}{\ldots} = 5 + 2$; $4 = 5 + \overset{9}{\ldots}$.

2ème passation :

$8 = \overset{10}{\ldots} + 3$, barré ; $\overset{5}{\ldots} = 1 + 5$ barré ; $9 + \overset{8}{\ldots} = 4$ barré ; $7 = 2 + \overset{8}{\ldots}$ barré ; $\overset{13}{\ldots} + 8 = 7$ barré ; $3 + \overset{14}{\ldots} = 8$ barré.

On remarque des erreurs systématiques de comptage de l'ordre de l'unité. Isabelle écrit sa réponse dans la lacune, puis elle barre l'item. Il semble que cela se développe chez elle comme stratégie de réponse. Au départ, 1ère passation par ex., elle trace sans doute $\overset{12}{\ldots} + 3 = 9$ après vérification, 12 + 3 ne fait pas 9. Puis, au fur et à mesure des items de la 2e passation, cela devient un procédé.

Patrick E. (cf. tableau 74) semble faire de même, mais alors il met systématiquement le nombre 1 dans sa lacune et barre. Dans une autre classe encore, Roby à qui je proposais des items de ce type m'a spontanément dit, "alors j'ai qu'à mettre n'importe quoi puis tracer! Il m'a alors montré : 6 = ... + 8 6 = $\overset{5}{\ldots}$+ 8 puis il barre ... le 6! De même $\overset{7}{\ldots}$+ 6 = 3 le 7 est barré, en enfin, après s'être aperçu de son erreur à 4 = 5 $\overset{9}{\ldots}$ il barre le 4.

Conclusion : Il se peut que tel lecteur trouve ces descriptions et analyses forcées, voire ad hoc. Cette objection tombe cependant dès qu'on considère que l'étude porte tout autant sur l'objet que sur le sujet. La grande diversité des combinaisons montre à la fois la richesse des sujets et le fait que l'objet n'était manifestement pas le même pour tous. On pourrait dire que l'objet a été vu (regardé) de façons différentes. L'important est alors de noter qu'un même élève peut changer d'optique d'une passation à l'autre, et même d'une épreuve à l'autre. Ex.: Yuko A., Géraldine A., Antonio C., Patrick D. Carolle E. etc... Ceci, lié à la variété évoquée plus haut, laisse penser à une "véritable exploration" du domaine numérique (i.e.des nombres, comptages et signes associés) par cette population de jeunes et vifs esprits.

* * *

II.4.2. Tableaux

L'analyse qui va suivre se base sur des considérations de deux ordres : d'une part dans un profil de réponse, le nombre de procédés que l'on peut distinguer qui peut aller de 1 (Traitements monotones) à 4 (Traitement varié + - RA). Les tableaux qui suivent permettent de se faire une idée de l'ensemble des profils de réponses recueillies. Pour plus de détails le lecteur se réfèrera aux tableaux XXIV pg 66 d'une part les réponses des élèves aux items des 3 épreuves et d'autre part, pour chaque élève la caractérisation de ses traitements aux 3 épreuves de calcul.

Note. Les épreuves ont été passées en 2 jours. Bien que tous les élèves n'aient pas eu les feuilles de données dans le même ordre (comme dans la plus pure tradition, deux élèves voisins n'avaient pas en même temps la même feuille de données), j'ai numéroté les passations de la façon suivante :

passation ① 2+6=... 4=...+7 4=...+4 ...+3=9 ...=5+2
et 4=5+...

passation ② 8=...+3 ...=1+5 9+...=4 7=2+...
...+8=7 3+...=8.

Une référence du type : Alexandra 1^{o} E ① signifie : les réponses de Alexandra (de la classe E à la passation ①. (Alexandra 1^{o}, car il y a dans cette classe une autre élève nommée Alexandra).

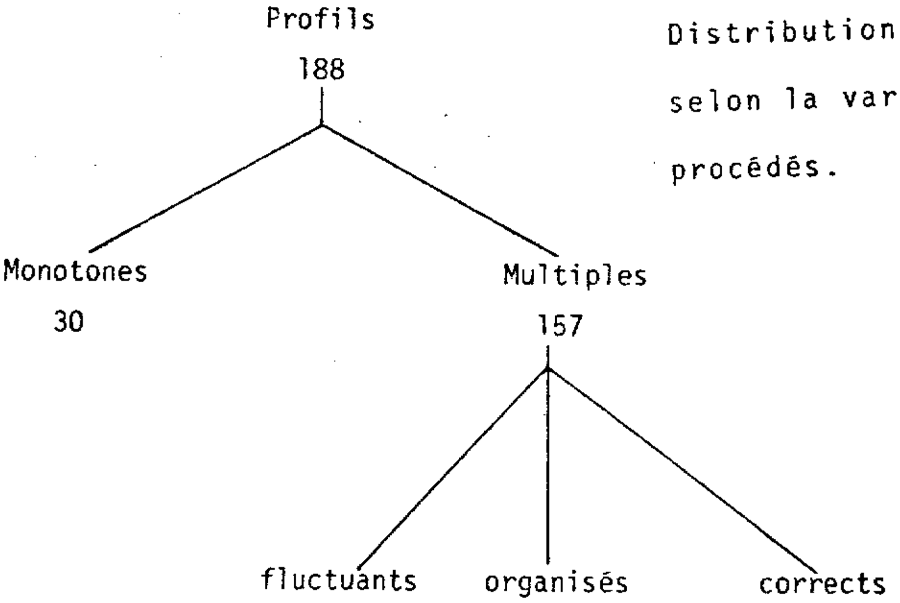


TABLEAU XXVIII

Distribution des profils de réponses selon la variété et l'intégration des procédés.

	N^{o}	Descriptif	Exemple	Nb.
MONOTONES (30)	1.	Refus aux items	Adrien B.pass.1.	1
	2.	Addition aux items	Philomena A.	27
	3.	Soustraction aux items	Luc C.pass.2	2
MIXTES + R (16)	4.	Sans organisation apparente	Marco B.	5
	5a.	Lacune finale (ou extrême) → +, sinon R	Anne 2^{o}A.(finale) Laurence A. (extrême)	6
	5b.	forme n+m seul traité ... + n=m et n=m+... refusés	Julien A.pass.1 Christophe C. pass.2	3
	5c.	Lacune et forme interviennent	Fanny B.	2
MIXTES + - (28)	6.	Sans organisation apparente	Neda B.pass.2	5
	7a.	Lacune finale: + , sinon -	Corinne C.	6
	7b.	forme n+m → + , sinon-	Sébastien D. pass. 2	1
	8a	Réponses "alternatives". Selon la séquence seule	Nicolas C pass.1	1
	8b.	Réponses "alternatives" Selon position du = et séquence	Sylvie E.	2
	8c.	Réponses "alternatives" Selon position lacune et séquence	Johana C.	6
	8d.	Réponses "alternatives" aux items impossibles (les autres corrects)	Sara D.	7

	N°	Descriptif	Exemple	Nb.
TRAITEMENTS + - R A ou + - A (37)	9a.	Traitements difficilement interprétables	Grégoire A.	6
	9b.	Traitements variés (fluctuants)	Mandana B.	10
	10a.	Traitement autre comptine: (l'élève donne le nb. suivant dans la comptine ou additionne)	Giao A.	8
	10b.	Traitement autre comptine utilisé sans qu'il soit possible de dire pourquoi.	pass.1	1
	10c.	Traitement autre comptine utilisé de façon alternative (=initial, forme non n+m)	Pina C.	2
	11	Système personnel de traitement écriture additive comptine procédé : doubles compositions/décompositions efface ses réponses	Dela D. Frédéric A Patrick D Antonio C Isabelle C.	10
TRAITEMENTS + - R (25)	12a.	Traitements difficilement interprétables	Alexandre B. Claudio B.	4
	12b.	Traitements variés (fluctuants)	Stéphane A pass.2	4
	13a.	Distribués selon la place de la lacune	Nicolette E. pass.2	2
	13b.	Refus d'une forme d'item. Autres items traités de façon correcte	Giancarlo B.	10
	13c.	Distribués selon lacune x séquence	Nadia B.	5
	14	Traitements corrects	Patrick 1° E	52
			Total passations	188

TABLEAU XXIX Classement des profils de réponses de l'épreuve II. Unité : passation.

II.4.3. Synthèse

Je vais procéder dans l'analyse qui suit en examinant successivement les profils de réponses monotones, mixtes, multiples. Je prendrai deux points de vue, de façon alternée dans le texte. Tout d'abord des considérations à priori sur le type de profils que l'on pourrait s'attendre trouver, ensuite la caractérisation de ce qui a été obtenu. Le tableau XXIX quoique très détaillé présente avant tout une description (bien sûr une analyse y préside). De sorte que les catégories sont mises sur une ligne, et présentées de façon disjointe. Evidemment cela ne rend pas totalement compte de la réalité. D'autre part, l'unité prise est le profil de réponses, d'une passation (ce qui correspond à 6 items de l'épreuve II, 3 items de l'épreuve III et 4 items de l'épreuve IV) . Dans la mesure du possible j'ai cherché à caractériser de façon cohérente les deux passations (le profil des 12 réponses). Mais cela n'est pas toujours possible, un certain nombre d'élèves changeant de point de vue d'une fois à l'autre (exemples : Géraldine A., Yuko A., Laurence A., etc...).

II.4.3.1. Profils "monotones" (un seul procédé mis en oeuvre

Je ne reviendrai pas sur les refus systématiques (cf. chap.II.2 pg 82).

A. Traitements additifs. (catégorie 2).

Les traitements "monotones" sont presque tous additifs. Sur 30, 27 sont additifs. 20 de ces traitements sont le fait de 10 élèves dont les procédés de réponses ne varient pas de passation à passation. Parmi les 7 élèves qui ont eu à l'une ou l'autre des passations un traitement plus varié, Yuko A. a répondu correctement, Julien A. Christine A. restent additifs ; de même que Sabine A. et Stéphane A. (bien qu'ils donnent une soustraction) Neda B. et Alexandra 2^{o} D. ne produisent aucun refus mais 2 ou 3 complémentations. On s'aperçoit ici de la spécificité de la classe A. où dominent les additions.

Comment apprécier ces traitements ? Voici quelques caractéristiques:

a) Un seul procédé mis en oeuvre. Donc très faible élaboration de ce traitement.

b) "Indifférence" de l'élève aux variantes d'écriture.

c) Travail soigné, additions le plus souvent correctes (dans des calculs dépassant 10)

d) Ces élèves connaissent d'autres procédés que l'addition.

A prime abord, on pourrrait qualifier ce type de traitement de scolaire ou appliqué, avec la conotation négative que cela suppose. En second lieu, on peut s'étonner du contraste entre une certaine maîtrise du comptage (addition) et une pauvreté de réponses. Une explication concilie le tout sans pour autant être dépréciative. L'attention de l'élève n'a pas porté sur l'écriture mais sur le procédé de comptage lui-même. L'écriture n'est que faiblement intégrée à ce système d'opérations. Le sujet puise dans l'écrit les données numériques dont il a besoin mais sans plus. Pas étonnant alors qu'il écrive sa réponse à la place indiquée (lacune) même si cela devait donner une égalité comme $3 + \overset{11}{\ldots} = 8$ où le plus grand nombre est médian. Lui (l'élève) n'écrirait sans doute pas comme ça, mais ici, ce n'est pas son problème.

Il y a de bons exemples avec Philomena A. ou Maja B. Il a été permis à ces élèves de s'aider de jetons pour leurs comptages. A l'épreuve II elles donnent des réponses additives, assez correctes, à l'épreuve IV elles somment les 3 données, tandis qu'elles refusent de répondre à l'épreuve III, faute de données sans doute. Il n'est pas exagéré de penser que toute l'attention de ces élèves aura porté sur la manipulation des jetons (moyen très lourd de comptage) et que, de ce fait, les données écrites sont passées au second plan. L'élève se contentant d'y puiser les quantités de jetons à rassembler (et à compter).

Quelques élèves, bien que ne donnant pas de réponses monotones ont un traitement fortement additif :

Stéphane A., Fabrice A., Giao A.; Daniel B.; Christophe C.; Carolle E.

3. Traitements soustractifs. (catégorie 3)

Il n'y a pas beaucoup de traitements soustractifs. Luc C ① et Nicolas C ① ont donné des réponses fortement soustractives. A la seconde passation, Nicolas a donné un profil plutôt additif tandis que Luc recourt à un procédé de type "comptine" assimilable à une soustraction. Autres réponses non monotones mais pourtant "fortement" soustractives : Antonio C. ① , Sébastien D ② , Olivia D ② et éventuellement Olivier D. Cette rareté des procédés soustractifs exclusifs tient à l'antériorité des comptages additifs (ainsi que des exercices d'addition de la forme a + b = ...). Mais cela veut aussi dire que le recours à la soustraction-complémentation s'accompagne d'une plus grande attention à l'écriture: les bornes de la complémentation étant indiquées dans la forme de l'écriture lacunaire (il en est de même pour les réponses "refus" puisque "l'impossibilité" d'un item ne tient qu'à sa forme écrite). Je retiens ici, dans le cas de cette expérience, cette intégration de la forme écrite au complexe procédural: addition, complémentation, refus. Je ne prétendrai pas cependant que l'écriture équationnelle est un support nécessaire à l'apprentissage de la soustraction, ni même que c'est un support idéal pour un tel apprentissage. Je ne fais qu'examiner comment les élèves investissent l'écrit, moyen privilégié d'enseignement.

II.4.3.2. Profils mixtes (2 procédés +R, +- ou -R)

A. Examinons la forme que prend ce recours à l'écrit. Tout d'abord, il faut noter que dans la complémentation (soustraction) deux ordres sont à respecter :

1° L'ordre de prise en compte des données
2° L'ordre de grandeur des nombres donnés.

On mentionne et confond souvent ce double aspect ordinal. Ainsi par exemple, on observe que dans leurs comptages d'addition les enfants intervertissent très souvent leurs données pour commencer leur comptage (récitation de la comptine) à partir du plus grand des deux nombres (ex.: pour 2+6 compter 6,7,8 plutôt que 2345678). Certains ont voulu voir là une reconnaissance précoce de la commutativité. Or c'est justement confondre les deux types d'ordre. L'inversion de comptage ci-dessus est un jeu sur l'ordre de grandeur des nombres donnés alors que la commutativité est un jeu sur l'ordre de prise en compte des données.

prime avant tout par une écriture). J'ai déjà parlé de cette question d'ordre double aux chapitre I.2.3. pg 23 et I.2.4. pg 25.

Si dans le traitement du sujet, celui-ci se base sur l'ordre de grandeur des données seules, il pourra alors toujours complémenter vu que dans un couple de nombre différents il y en a toujours un qui est plus grand. De tels sujets pourraient répondre alors soit exclusivement par soustraction, soit par additions ou soustractions. Nous avons vu le premier cas et constaté l'inexistence quasi totale de traitements soustractifs. Nous verrons le second cas un peu plus loin.

Dans l'alternative que le sujet se base aussi sur l'ordre de prise en compte des données, et adopte invariablement le sens de lecture gauche droite, on pourrait imaginer un traitement mixte -R. Complémentation (soustraction) quand le grand nombre est final (on part de la lère données pour "elles"à la seconde) c'est-à-dire en cas de séquence ascendante, et refus en cas de séquence descendante. Je constate que dans les réponses recueillies il n'y a pas de traitement de ce type (-R).

On pourrait encore imaginer un traitement un peu plus élaboré, avec détermination selon la position du égal de l'ordre de prise en compte des données. (= final = g/dte ; = initial = dte/g). Ainsi on aurait soit un traitement mixte -R, mais nous avons vu qu'il n'y en a pas dans les résultats recueillis, soit un traitement mixte $^{+-}$ avec complémentation en cas de séquence ascendante et addition en cas de séquence descendante. Nous avons vu que ce schéma ne convenait pas pour rendre compte du traitement de Sylvie E (cf pg 107) ; et en fait, seul le traitement de Nicolas C ② pourrait y être rattaché.

Ce ne sont donc pas seulement des considérations sur l'ordre de grandeur des données numériques qui interviennent dans l'interprétation des élèves. Interviennent aussi d'autres factuers dont surtout la place de la lacune. Je puis être même plus précis en disant que la comparaison numérique des données est subordonnée à la mise en oeuvre d'une procédure de résolution préalablement déterminée. (ce que confirme la présence d'additions dans presque tous les profils de réponses).

B. Traitements mixtes +R (catégorie 5).

Comme on l'a vu précédemment, ce type de traitement est intéressant pour connaître ce qui a motivé le refus des élèves. (cf. chap. II.2. pg 84). Ces traitements se distribuent en deux classes selon que le "critère" de refus porte sur la lacune (Anne 2° A. Laurence A. Géraldine A ① Nicolette E ① ou sur ce que j'ai dénommé des "formes" présentes dans les items, c'est-à-dire la présence dans l'écriture du groupe a+b ou a=b (...=5+2 par ex. ou ...+8=7) (Julien A ① Olivia B ① Fanny B. Christophe C ②).

Remarques : 1° Ici, le refus se greffe sur un traitement uniquement additif. Il y a donc addition sur certaines formes seulement à l'exclusion des autres. C'est le contraire du traitement monotone additif. Je distingue position de la lacune (finale ou extrême) des autres "formes" dans la mesure où, pour moi, l'aspect position de la lacune est lié à l'aspect déroulement du calcul (vection facteur-résultat et amplification). Notons encore que les deux choses peuvent se combiner (Fanny B.).

2° Nous verrons plus loin (cf. Tableau XXIX aussi) que certains élèves résolvent correctement les items pour une certaine forme d'items seulement (ex. Giancarlo B. refus de la forme a=b ou encore Adrien B. refus des items avec = initial).

C. Traitements mixtes -R (catégories 7 et 8)

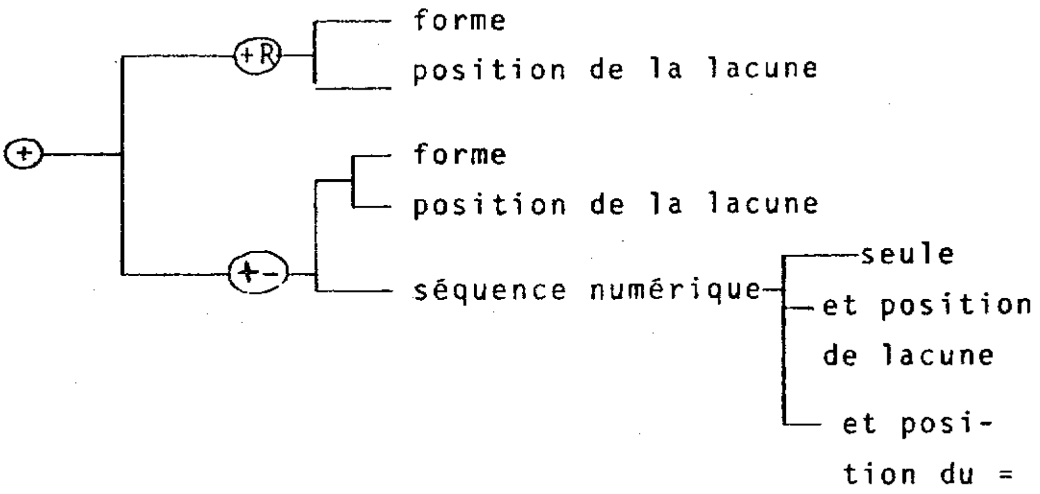
Parmi les profils mixtes -R, je ferai une distinction entre les traitements qui tiennent compte de la séquence et les autres. En effet certains élèves semblent avoir donné une réponse additive "alternative" lorsqu'ils se trouvaient devant un item "impossible". J'ai déjà décrit les modèles de ces traitements au chap. II.4.1. pg 104. Il s'agit de Johana C., Yves D., Anthony E. ; Sara D. Sonia E. et éventuellement Marion D. et Alain D. enfin Sylvie E.

Un autre groupe d'élèves ont un traitement moins élaboré qui se base semble-t-il sur un seul critère de forme : position finale ou non de la lacune : Corinne C. Nathalie C. Olivia D ① Yanis D ① ou forme a+b comme Sébastien D ② . Le fait significatif est que l'analyse retrouve ici, investis d'une signification différente, les mêmes critères que pour les traitements +R, et nous le verrons cela se prolonge à certains traitements multiples +-R.

Notons enfin quelques profils dont le critère de décision m'échappe. Neda B ② Olivia B ② Alexandra 2° D ② Carolle 2° E. Ces traitements seront considérés comme "fluctuants", et dénotent sans doute d'une faible intégration des procédés de comptage et des notations.

D. Schéma en filière.

On peut alors représenter la distribution des traitements selon deux filières qui prolongent les traitements additifs



Ceci est en parfait accord avec le point A ci-dessus (pg116). Les critères de formes ou positions de lacune "orientant" la prise en compte des données écrites. Mais je profite de l'occasion pour répéter que ce qui m'importe n'est pas tant de retrouver ici quelques caractéristiques propres aux opérations de lecture mais surtout d'examiner comment celles-ci s'intègrent aux opérations numériques et crochent sur les représentations séquentielles. Du moins c'est ce que je crois avoir compris avec cette étude.

II.4.3.3. Traitements multiples +-R organisés (catégorie 13)

Ces traitements sont plus élaborés dans la mesure où on trouve les trois réponses : addition, soustraction et refus. On peut reprendre les mêmes distinctions que précédemment pour comparer ces profils.

A. Je commencerai par la catégorie 13b. On peut schématiser ces traitements par le sigle +-R/R c'est-à-dire que l'ensemble des items est discriminé en deux classes, selon la forme des items la première est traitée avec les 3 éventualités +-R tandis que la seconde est refusée. On a alors :

Adrien B., Antonio C ①, Stephanie D. Patrick 2° E. refusent les items à = initial mais résolvent les autres. Sabine A ②, curieusement, refuse les items à = final et traite les items à = initial seuls.

Patrick 2° E. traite en plus additivement les items ... = a+b .

Stéphanie D. traite quelques items à égal initial mais comme si ils étaient écrits avec un égal final (cf. Nadia B.)

Giancarlo B. comme nosu l'avons vu refuse de traiter les items où on retrouve le triplet a=b (cf. chap. II.2. pg 86). Notons que Giancarlo refuse aussi les items impossibles tels 9+...=4. Il y a donc pour lui un double système de référence. On peut voir de tels "doubles systèmes" (c'est-à-dire des systèmes pas totalement intégrés) chez Laurence A (pg 84) Henriette C (pg102) ou encore Pina C (pg108) etc...

B. On retrouve le critère de position de la lacune chez Robertha B ① qui additionne les items à lacune finale, refuse les items à lacune médiane et soustrait pour les items à lacune initiale. Ou encore Nicolette E ② .

C. Enfin les élèves qui comme Nadia B tiennent compte de la séquence numérique, sans s'occuper de la place du égal. Nadia B Cédric C ① et Henriette C.

Naturellement, au-delà, on trouve les traitements corrects (catégorie 14) cf. point II.4.3.6.ci-dessous).

II.4.3.4. Traitements multiples +-RA (catégories 10 et 11)

A. Procédé comptine (catégorie 10)

J'ai déjà parlé de ce procédé qui est en fait l'écriture du comptage. J'ai mentionné que ce n'était pas seulement un procédé archaïque de noter l'addition mais que cela pouvait réémerger avec la complémentation, l'élève écrivant littéralement les nombres qui se trouvent entre les deux bornes considérées (cf. pg 95 et discussion des traitements de Frédéric A., Giao A, Fabrice A à l'épreuve III Chap. II.5.2.pg 136).

Le plus intéressant avec ce procédé c'est qu'il peut être plus ou moins intégré aux autres et correspondre aux notations. Ainsi on trouve ce procédé utilisé de façon systématique et monotone comme chez Frédéric A, Giao A. Fabrice A (associé aussi quelquefois à l'addition). Mais s'adaptant aussi plus ou moins à ce qui est écrit. Ainsi Fabrice A et Stephano C (cf. pg 95) où cela est particulièrement frappant (même si pour Stephano C je ne sais ce qui l'amène à recourir à ce procédé). On le trouve aussi chez Pina C comme procédé "alternatif" pour les items à égal initial où on ne retrouve pas la forme ...=a+b.

B. Autre procédé ou "système" de résolution.

Je ne vais pas revenir sur ce que j'ai déjà expliqué au chapitre II.3. pg 88 . Juste montrer qu'on y retrouve plusieurs aspects et rappeler que l'ensemble des réponses forme quelque chose d'assez homogène.

aspect séquenciel de l'écriture	Dela D
de la comptine	Frédéric A
aspect refus d'une forme	Patrick D
interprétation spécifique	Antonio C 2

II.4.3.5. Traitements difficilement interprétables et variés (catégories 4,6,9,12)

La distinction consiste en ceci. Les traitements peuvent comporter des réponses difficiles à interpréter dont le statut n'est pas aussi clair que le procédé comptine (par exemple). Ainsi le recours au nombre 1 sans que celui-ci opère (ex. Olivier D).

Dans d'autres cas, c'est la distribution des procédés sur certains items qui reste mystérieuse. Il semble que l'élève ne renvoie qu'une image de la diversité des formes par le recours à des procédés divers. Dans tous les cas, le système procédural et le système des signes semblent faiblement intégrés chez leurs auteurs. Notons enfin que dans ces profils de réponses il y a très peu de refus !

II.4.3.6. Traitements corrects (catérogie 14).

Un traitement correct est, en fait, difficile à décrire. Et cela tient au plan d'expérience : on ne peut donner une description sur une seule dimension. Je puis illustrer ceci autrement, en faisant remarquer que le tableau des réponses justes admet une symétrie centrale (et non pas une symétrie simple) :

+	+		R	-
-	R	•	R	-
-	R		+	+

On est en droit de se demander comment les élèves peuvent aussi aisément couvrir une complexité de cet ordre. L'hypothèse est bien sûr que leurs traitements sont contrôlés par une procédure (complexe de procédure, construction algorithmique) qui pas à pas oriente leurs opérations. Ceci suppose un ordre très précis et peu souple (comme évoqué plus haut pg 116-117).

La richesse des combinaisons décrites et analysées jusqu'ici, l'absence de traitement contrôlés par des algorithmes plus élémentaires (pg 78) montrent que le sujet n'accède pas formellement à l'algorithme de la réponse correcte, mais que celui-ci est en quelque sorte médiatisé par des significations. Qui est à l'écoute attentive des termes utilisés par les élèves lorsqu'ils disent leurs comptages ne peut s'y méprendre. Pour l'addition, c'est le vocable "ça fait" qui revient très souvent (ex. "7 plus 2 ça fait ..., 9" ou encore "1 plus 5 ça fait la même chose que 3 plus ..., 3").Dans le cas de la complémentation, on trouve le terme "pour faire" (ex. 3+...=8, "pour faire 8 et j'ai 3 ..., 4 5 6 7 8, 5" ! Ou encore : 9+...=4, "pour faire 4 j'ai 9 ..., c'est pas possible") ou encore 4=...+7, "pour faire 4 ou pour faire 7 ?"). Ces termes sont très clairs. Dans ce cas, l'emploi de la forme passive (pas très usuelle et à laquelle ils n'ont pas spontanément recours) est bien comprise. Ainsi cas le plus frappant, Céline(interviews cliniques) qui répondait à l'écrit : $7 = 2 + \overset{9}{\ldots}$, invariablement durant 4 mois, mais qui lorsque je lui lisai l'item : "7 est fait par ... m'interrompait et finissait la phrase : "2 et puis encore 5". Cette particularité ne se retrouve pas à la soustraction, où le vocable "ça fait" est aussi employé : 7 - 2 ça fait 5 mais où l'expression passive n'a semble-t-il pas de signification (selon un rapide sondage qu'il faudrait reprendre). "5 est fait par 7 moins ... ?" apparaît comme tout à fait saugrenu.

Cette référence a un faire comporte deux aspects très intéressants : d'une part, cela se rapporte à une opération qui s'accomplit, lui est donc lié un aspect séquentiel évident : début(départ) accomplissement et fin. (but, résultat). A ce niveau exactement se situe la différenciation addition/complémentation. D'autre part, la position du sujet et de ses actions est nettement déliminée par rapport à l'écriture.

Dans ce type d'algorithme, le sujet commence sa procédure par la détermination, dans l'écriture de l'item, de la place du résultat, celle-ci sera alors occupée par un chiffre ou une lacune et permettra de définir le calcul à effectuer : addition ou complémentation. En dernier lieu, dans le cas de la complémentation, la possibilité de l'entreprise sera jugée.

* * *

II.4.4. Conclusions.

1°. Je veux tout d'abord commencer par une comparaison avec un type de tâche abondamment exercé en 1P. Je veux dire celui d'écritures lacunaires de relations où l'élève doit compléter les items de la forme a ... b par les signes > et < . Le lecteur se rappellera que Laurence A. (mais aussi Nadia B. dans son $9 + \overset{>}{\ldots} = 4$) a glissé sur ce type de tâche (cf. pg 84). Et que ce glissement avait lieu à propos des items à lacune médiane. On se rappellera aussi la différence nette qu'elle établissait entre tâches de calcul (lacunes extrêmes) et tâches de comparaison.

Les exercices de "relation lacunaire" sont assez difficiles pour les élèves. On peut d'ailleurs se demander quelle est leur utilité vu que ces difficultés ne tiennent en aucun cas à une incapacité des élèves à déterminer lequel des deux nombres est le plus grand (ou le plus petit). Les enseignants, eux aussi, se trouvent assez démunis quand il s'agit d'expliquer la bonne réponse aux élèves en difficulté On peut dire qu'il manque aux élèves une indication pour savoir dans quel ordre prendre les données. Et le fait que le signe > se lise différemment de gauche à droite et de droite à gauche n'arrange rien. On peut dire les choses différemment : la difficulté réside dans le fait qu'il faudrait considérer la comparaison comme achevée et à reconstituer. Tout comme dans les tâches de calcul. Mais ici, la procédure inverse n'a pas de statut comme la complémentation en a vis à vis de l'addition.

La difficulté semble donc bien être de se trouver un point de repère fixe. Car l'ordre dans lequel prendre les données dépend de l'ordre d'écriture, de l'ordre de grandeur des données ainsi que de ceux qui découlent de l'ensemble des actions en jeu. Il ne s'agit pas d'un ordre précis mais d'une concordance d'ordres différents (coordination).

Revenons-en alors aux tâches de calcul. La procédure de comptage en elle-même suppose un ordre de prise en compte des données (tout simplement, comparez complémentation et soustraction par comptage à rebours). Sa détermination, en retour, permet sans doute aux sujets d'avoir un appui stable. On ne rencontre alors pas les difficultés

Remarquons enfin que les tâches sont suffisamment proches pour que des glissements s'opèrent. On a vu le cas de *Laurence A.*, mais *Roby* faisait le glissement inverse ex.:

$6 \overset{6}{\ldots} 12$; $3 \overset{5}{\ldots} 8$; $\cancel{3} \overset{6}{\ldots} 9$ (une réponse erronée due à un oubli de 1 mais dans son comptage, puis il s'en aperçoit et trace 11) ; $7 \overset{3}{\ldots} 10$. C'est comme si Roby inventait la présence de signes + et =. D'autres cas ont été observés et montrent que la position de la lacune est un indice important pour les élèves dans ces glissements : relations/complémentation (la complémentation suppose une comparaison).

2° *La signification* évoquée à la fin des paragraphes précédents II.4.3.6. pg 122 , *ordonne et réorganise les procédures. C'est en cela que les éléments symboliques s'intègrent dans un système d'opérations tout en lui imprimant une forme.* Revenons-en à l'algorithme de résolution des équations monolacunaires. Si on voulait en faire un organigramme, il conviendrait de préférence de commencer par l'opération de détermination de la position du signe égal puis du résultat et procéder à une première bifurcation selon que la lacune porte sur ce dernier ou non. Ce genre d'organisation de l'action ne s'accommode que mal d'interversions entre les opérations (Ainsi en est-il en général des algorithmes). Par exemple commencer par la détermination de la position de la lacune (avant d'examiner où se trouve le =) donne un organigramme plus complexe. On ne peut évidemment pas s'attendre à ce que ceci soit construit ni retenu par le sujet sans que quelque chose le guide, et supplée ainsi à une vision structurelle élaborée (que je tente de donner ici en tant qu'analyste).

La diversité des profils de réponses montre à mon avis ceci.

1° L'existence de combinaisons partielles n'intégrant pas encore tous les procédés en un seul système et ne s'organisant pas d'emblée selon l'interprétation (la signification) la plus adéquate. Les sujets en outre sont susceptibles de changer d'interprétation sans crier gare, ou encore de "surimprimer" des opérations diverses sur une même donnée écrite.

2^o L'existence d'erreurs où l'élève est tellement guidé par une interprétation qu'il omet d'examiner avec sufisamment de soin la donnée écrite.

Ceci montre une fois de plus que les signes ne prennent de sens que relativement aux opérations engagées par le sujet. Le rôle primordial de la lacune le confirme. C'est elle aussi qui rend ces tâches de calcul lacunaire plus naturelles aux yeux des élèves que celles du jugement d'équations (épreuve I). Qu'un sujet ne voie pas certains signes, certaines organisations, ou, plus simplement, ne fasse pas certaines mises en relations dénote non pas son incapacité à le faire mais seulement le fait que les opérations qu'il mobilise ne l'engagent pas à le faire.

La sûreté des élèves qui répondent correctement tend à faire penser qu'une fois acquise, la clé d'interprétation "renvoie" toutes les autres considérations comme fantaisies et faux problèmes (fausses difficultés). En ce sens, c'est par une réduction (synthèse) que le développement procédural (enrichissement et diversification des moyens et support de résolution lors des explorations du sujet) se conclut.

* * *

II.5. Analyse des profils de réponses à l'épreuve III.

II.5.1. Retour à la tâche.

Avant de passer à l'analyse des profils proprement dits, il faut faire un retour à la tâche et situer celle-ci par rapport à l'épreuve II. Les items sont bilacunaires. Ceci a pour particularité (comme noté au chapitre I.3.4. pg 48) de poser moins de contraintes au sujet mais d'un autre côté (et spécialement relativement à l'écrit de lui laisser plus de choses à sa charge". Certes, on peut théoriquement imaginer de ramener la forme bilacunaire à une forme monolacunaire, et ce, par une opération très peu "coûteuse" puisque pouvant être faite arbitraitement, de façon indépendante. Il suffit de remplir arbitraitement l'une des deux lacunes. On résoudra ensuite l'item monolacunaire produit. Une telle démarche demande cependant pas mal de décentration (apparaît comme "désinvolte") face à la tâche. On commencerait par chercher non pas à résoudre mais à se ramener à un problème connu. Cette recherche porterait sur le traitement de l'écrit. Une fois la forme rendue reconnaissable, on passerait à l'interprétation des données.

Les données de cette recherche infirment, bien sûr, une telle hypothèse. Hypothèse dont le défaut majeur est de réduire l'assimilation à une assimilation de forme (la tâche à litem) ce qui finalement est confondre entre signifiant et signifié. Les résultats recueillis indiquent que les sujets traitent avant tout d'un calcul. C'est dans le cadre de la réalisation de celui-ci : composition, décomposition, double ... que sont mis en oeuvre des opérations spécifiques produisant le couple de réponses numériques. Il y a donc trois aspects à tenir compte :

- La détermination de l'opération cadre (composition, décomposition, etc.)
- La détermination spécifique de chacune des deux réponses.
- Le travail sur l'écriture de l'item.

C'est l'articulation de ces apsects que je veux examiner maintenant.

II.5.1.1. Opération cadre

Dans la plupart des cas la détermination de l'opération cadre se fait prioritairement sur la place de la donnée. Certains sujets omettent alors de tenir compte de la place des égal. Ainsi l'aspect séquentiel (et les représentations des sujets à ce propos) servent de contrôle à l'interprétation.

Dans certains cas (cf plus loin II.5.2.3) la position de la donnée n'influe pas sur la détermination du calcul à réaliser. Il n'y a alors pas contrôle par la place de la donnée. Mais néanmoins (vu que le sujet ne calcule pas par écrit) la position de la donnée porte sa marque à la forme de la réponse finale. Le sujet est guidé par l'item.

II.5.1.2. Calculs produits.

Une fois le calcul (opération cadre) déterminé, il reste à le réaliser. Cette réalisation comporte deux aspects (peut-être deux moments de la résolution). Tout d'abord une opération de détermination d'une donnée auxiliaire, ensuite l'effectuation du calcul (comptage) proprement dit : addition, complémentation, soustraction. Ce schéma est licite, à ce que nous avons vu, si on explicite plus précisément l'articulation entre ces deux aspects : l'opération de détermination n'est pas arbitraire (quand même théoriquement elle pourrait l'être). D'une part, elle doit être effectuée (on ne choisit pas "comme ça" un nombre au hasard) d'autre part, elle s'inscrit dans un cadre plus général: réaliser le calcul que le sujet pense devoir faire.

Le sujet peut vouloir se rabattre sur un calcul simple ou trivial (ajouter 1,2,0) ou encore familier (su par coeur ou du moins très rapidement reconnu). Dans ce cas, le sujet va procéder à une détermination judicieuse de la donnée auxiliaire pour aboutir à un tel calcul.

Des moyens simples de déterminer une donnée auxiliaire sont le recours à des nombres particuliers comme 0,1 etc...; la répétition donnée (comptine). Selon les cas, ces moyens sont susceptibles d'aboutir à un calcul simple ou familier. Inversement, ce qui rend un calcul familier est en général le fait de pouvoir associer à la relation additive de base une ou plusieurs relations auxiliaires entre les données (redondance de relations). Là encore, les relations auxiliaires les plus intuitives sont : la présence de nombres particuliers (0,1), la répétition d'une des données, ou encore la succession dans la comptine. Ceci donne les sommes triviales (5+1=6) les compositions doubles (4+4=8) les décompositions de nombres pairs et impairs (10=5+5, 7=4+3).

Notes : 1° Avec le temps ces relations vont s'élargir à tout un éventail d'autres relations se rapportant à divers systèmes figuratifs : numération parlée puis écrite, comptine, comptine de nombres pairs, impairs, de n en n, ou autres, tels nombres en couleur Cuisenaire etc...

2° L'élève apprend à calculer. Progressivement le champ des sommes familières s'élargit. Un schéma de résolution à deux phases, comme ci-dessus, est intéressant, car il permet de rendre compte à la fois de l'articulation entre ces opérations spécifiques et de la possibilité d'un certain jeu entre celles-ci. Ainsi, dans la mesure où l'élève reproduit une même opération de détermination de la donnée auxiliaire, il ne sera pas assuré pour autant de bien tomber. Par exemple s'il passe de $\overset{3}{\dots}+4=\overset{7}{\dots}$ (composition familière) à $5+\overset{6}{\dots}=\dots$ qui cette fois l'oblige à compter.

3° On peut dès lors affirmer la caractérisation des réponses entreprises auparavant (chap. I.3.1. pg 41 bien que, dans le cadre de cette recherche, un obstacle subsiste : les données des items sont peut-être trop disparatres. On y trouve en effet des nombres très familiers des élèves comme 2 ou 4. Il n'en est sans doute pas de même avec 7. Ainsi : 2+2=4, 4+4=8, 2+3=5 et 3+4=7, sont plus familières aux élèves de 1P que : 7+7=14 7+6=13 et 7+8=15.

Examinons maintenant les résultats fournis par la recherche.

1°. Les compositions et les décompositions produites ne sont pas faites au hasard. Sur 402 réponses de ce type, 135 sont des sommes avec le nombre 1, 98 sont des doubles et dans 78 cas enfin les facteurs de la somme sont consécutifs. Donc dans 3/4 des cas au moins la relations additive est doublée d'une relation seconde.

Il en est de même avec les réponses autres. Dans 2/3 des cas il y a une relation auxiliaire entre les 3 nombres de l'équation. Comme le taux de réponses autres est plus élevé à l'épreuve III et que d'autre part, les erreurs aux items à égal final sont essentiellement de ce type, il est intéressant de regarder de plus près ces réponses.

a.) 6 réponses "systématiques" où l'élève a transformé la donnée écrite en réécrivant un calcul sur la donnée (Stéphane C. Patrick et Dela D.) .

b.) 21 réponses difficilement interprétables. Certaines provenant semble-t-il d'erreur de comptage ($\overset{8}{\ldots}+4=\overset{2}{\ldots}$ ou $\overset{6}{\ldots}+\overset{9}{\ldots}=5$ par ex.).

c.) 7 réponses où l'élève répète 2 fois la donnée ($7=\overset{7}{\ldots}+\overset{7}{\ldots}$ par ex.).

d.) 25 réponses comportant une répétition (et n'étant pas des doubles). Soit la donnée est répétée ($7=\overset{7}{\ldots}+\overset{6}{\ldots}$) soit le nombre "auxiliaire" $\overset{5}{\ldots}+4=\overset{5}{\ldots}$ .Les réponses sont intéressantes. On remarque que la donnée auxiliaire (ou plutot la réponse répétée) est soit 1, soit le prédécesseur, soit le successeur de la donnée. Enfin toutes ces réponses sont écrites de manière à ce que le nombre maximum occupe une place extrême : finale ou initiale. Plusieurs proviennent sans doute à l'erreur de comptage exposée pg 92 : 2+6=6.

e.) 18 réponses comptine où le sujet écrit un des triplets de la comptine incluant la donnée ($7=\overset{8}{\ldots}+\overset{9}{\ldots}$ par exemple).

2° Je vais examiner particulièrement l'item ... = ...+6. Mon explication est que c'est la position finale de la donnée qui fait avant tout leurre. Une explication concurrente serait de dire que cela tient plutôt au nombre 6, et à l'attrait de sa décomposition en 3+3. Je remarquerai alors :

a) Pour cet item les décompositions se distribuent ainsi : 9 réponses (5,1,6) 3 réponses (4,2,6) et 16 réponses (3,3,6).

b) On compte 78 compositions doubles et ce surtout pour les items ...+4=... ...+2=... et 5+...=... . On compte 22 décompositions de nombres pairs en 2 moitiés : 16 de 6 en 3 et 3 et 6 seulement pour les items : ...+4=... ...+2=... (or 1+1=2 et 2+2=4 sont tout aussi attrayantes que 3+3=6). On compte 46 décomposition de nombres impairs en 2 facteurs consécutifs. (7=...+... et ...+...=5 surtout).

Mon interprétation est plus plausible.

3° Le cas de la classe (scolaire) E est à signaler (pour la suite). Les élèves de cette classe avaient déjà travaillé (par un concours de circonstances) à des items bilacunaires (autres que ceux de la forme ...+...=n ou n =...+... exercée dans le manuel de fiches de l'élève). Dans cette classe, les élèves ont recouru à deux sortes de procédés de résolution : composition par double et composition/décomposition triviale. De plus, les doubles ont été utilisés de préférence pour les items à donnée médiane. Rien pourtant n'a été expliqué dans ce sens aux élèves. Ce procédé a sans doute été acquis lors d'exercices antérieurs.

II.5.1.3. Ecriture et séquence.

Je vais ici procéder à une comparaison avec l'épreuve II. Les réponses peuvent être classées de non séquentielles (le nombre médian est le maximum de 3 nombres de l'équation complétée,(ex. : $5=\overset{11}{...}+6$) de séquentielles correctes ou à contre sens (ex.:$3+\overset{5}{...}=8$ et $7=\overset{6}{...}+\overset{5}{...}$ séquentielles correctes; $\overset{15}{...}+8=7$ et $7=\overset{3}{...}+\overset{10}{...}$ séquentielles à contre sens). Comparons alors les taux de réponses non séquentielles aux épreuves II et III. Pour l'épreuve II, il convient d'écarter les items : ...=1+5, 7=2+... et ...+3=9, car on ne peut pas y donner une réponse non séquentielle. J'ai donc comptabilisé sur un ensemble de 9x94 = 846 réponses.

Epreuve II	Epreuve III
$\frac{148}{846} = 17\%$	$\frac{19}{564} = 3\%$

TABLEAU XXX TAUX DE REPONSES NON SEQUENTIELLES AUX EPREUVES II et III

Il n'y a donc pour l'épreuve III quasiment pas de réponses non séquentielles. Ceci tient au fait qu'à l'épreuve III, le sujet peut toujours s'arranger à mettre le résultat de ses compositions en place extrême (initiale ou finale), tandis que pour la décomposition les seuls cas d'erreurs sont ceux des items : ...+4=... et ...+2=... . A l'épreuve II, le sujet est appelé (tenu) à écrire sa réponse à <u>la</u> place désignée par la lacune. S'il a répondu additivement à 8=...+3, il n'a pas le choix : fournir une réponse non-séquentielle ou transformer la donnée.

Examinons maintenant les réponses à contre sens. Pour la comparaison, il faut séparer les cas où les items ont un égal initial de ceux où le égal est final.

	Epreuve II	Epreuve III		
= final	$\frac{67}{282} = 24\%$	$\frac{22}{376} = 6\%$	...+8=7 9+...=4 ...+3=9	...+4=... ...+2=... 5+...=... ...+...=5
= initial	$\frac{133}{376} = 35\%$	$\frac{69}{188} = 37\%$	4=...+7 4=5+... ...=1+5 7=2+...	7=...+... ...=...+6

TABLEAU XXXI TAUX DE REPONSES A CONTRE SENS

Dans l'épreuve III, les réponses à contre sens concernent quasi exclusivement des items à = initial. C'est donc que ces erreurs sont dues à l'omission de la place du = dans l'interprétation de la tâche. Dans l'épreuve II par contre, si les réponses à contre sens sont aussi nombreuses (que pour l'ép. III) aux items à égal initial, elles sont nettement supérieures aux items à égal final.

Comme déjà dit, le sujet a dans l'épreuve III une plus grande part de l'opération à reconstituer. L'épreuve III est nettement plus une épreuve écrite que l'épreuve II. Si ceci allège les contraintes, d'un autre côté, l'émergence de représentations spontanées du sujet est favorisée. La séquence gauche→droite ressort car le sujet identifie souvent l'accomplissement de l'opération additive (séquence temporelle : facteur→ résultat et ordre des nombres : amplification) avec l'accomplissement de l'acte d'écrire (déroulement des marques de gauche à droite).

* * *

II.5.2. Analyse des profils de réponses.

Je distinguerai les catégories de profils suivantes (on se référera aux tableaux XXIV pg 66).

N°	Descriptif		Exemple	Nb
1	Refus aux items	Point 4°	Philòmena A.	17
2	Profil difficilement interprétable		Sophia A.	22
3	Refus du égal initial		Adrien B.	2
4	Organisés selon un système personnel autre.	Point 3°	Dela D.pass.1	8
5	Organisés selon le procédé de résolution mis en oeuvre (écriture pas prise en compte directement)		Fanny B.	16
6.	Traitement séquentiel en fonction de la place de la donnée seule.	Point 2°	Nadia B.	44
7	Corrects (au plus un refus ou une erreur de syntaxe)	Point 1°	Patrick 1°E.	79
		Référence à l'analyse des pages	Total passations	188

TABLEAU XXXII Classement des profils de réponses de l'épreuve III. Unité : passation.

1° Les traitements où l'élève tient à la fois compte de la place de la donnée et de celle du égal sont corrects (catégorie N°7). Il y a 79 traitements de ce type. Dans 5 cas seulement, et pour 5 items, il y a une erreur de syntaxe. (ex.: Géraldine A. ② : $\overset{5}{\ldots}+2=\overset{3}{\ldots}$).

2° Il y a ensuite les traitements où l'élève tient compte de la place de la donnée seulement (où il répond aux items à égal initial comme si le égal était final). Ceci correspond au traitement de <u>Nadia B.</u> à l'épreuve II. Il y a des traitements de la sorte (Catégorie N°6). Avec, là aussi, très peu d'erreurs de syntaxe.

Les exemples de ce type de traitement seront ceux de <u>Nadia B.</u> (pour montrer la cohérence de son interprétation aux épreuves II et III :

$7=\overset{2}{\ldots}+\overset{9}{\ldots}$ $\overset{4}{\ldots}+4=\overset{8}{\ldots}$ $5+\overset{2}{\ldots}=\overset{7}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots}+\overset{2}{\ldots}=5$ $\overset{2}{\ldots}+2=\overset{4}{\ldots}$ $\overset{5}{\ldots}=\overset{1}{\ldots}+6$

et de <u>Frédéric A</u> (pour montrer aussi la cohérence de son interprétation aux épreuves II et III, mais en outre pour montrer que ce qui différencie ce traitement de celui de Nadia ci-dessus provient <u>du recours à une procédure comptine,</u> et non pas aux représentations sous-jacentes. Frédéric adapte sa procédure à la donnée tout comme Nadia. Ceci montre le peu de distance qu'il y a entre procédure de comptage et procédure comptine : même champ procédural. (cf. pg 95
$7=\overset{8}{\ldots}+\overset{9}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots}+4=\overset{5}{\ldots}$ $5+\overset{6}{\ldots}=\overset{7}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots}+\overset{4}{\ldots}=5$ $\overset{1}{\ldots}+2=\overset{3}{\ldots}$
$\overset{4}{\ldots}=\overset{5}{\ldots}+6$ (1+2=3 est correct bien sûr !)

3° Les traitements que nous venons d'étudier jusqu'à maintenant (catégories 1 et 2) peuvent être qualifiés de "multiples organisés" (si on veut en rester à la nomenclature du parag.précédent). Le recours à la composition ou à la décomposition est contrôlé (sur l'écriture). Et il semble bien que le sujet ait effectivement cherché à reconstituer une opération écrite. Il n'en est pas de même avec les traitements que je vais présenter maintenant, où il semble que ce soit le <u>procédé de résolution</u> qui prenne le pas sur la reconstitution. On compte 23 profils de réponses de la sorte (Catégories No. 4 et 5). Décrivons-en quelques-uns.

Tout d'abord une comparaison. Les réponses de Frédéric A avec celles de Fabrice A et Giao A. Ces 3 élèves recourent au procédé "comptine". Mais alors que Frédéric ajuste ce procédé à l'écriture de l'équation de sorte que l'ordre des nombres soit toujours de gauche à droite celui de la comptine, Fabrice et Giao partent toujours du nombre de la donnée. Fabrice respecte un ordre, séquence droite ⟶ gauche, mais pas Giao :

Frédéric A : (catégorie 2°)

$7=\overset{8}{\dots}+\overset{9}{\dots} \quad \overset{3}{\dots}+4=\overset{5}{\dots} \quad 5+\overset{6}{\dots}=\overset{7}{\dots} \quad \overset{3}{\dots}+\overset{4}{\dots}=5 \quad \overset{1}{\dots}+2=\overset{3}{\dots} \quad \overset{4}{\dots}=\overset{5}{\dots}+6$

Fabrice A : (catégorie 3°)

$(7=7+\dots) \quad (\overset{7}{\dots}+4=\overset{6}{\dots}) \quad (5+8=\dots) \quad \overset{7}{\dots}+\overset{6}{\dots}=5 \quad \overset{4}{\dots}+2=\overset{3}{\dots} \quad \overset{8}{\dots}=\overset{7}{\dots}+6$

effacé effacé ↑ effacé ← ← ←

comptage doigts:6 pour 11

Giao A : (catégorie 3°)

$7=\overset{8}{\dots}+\overset{11}{\dots} \quad \overset{5}{\dots}+4=\overset{6}{\dots} \quad 5+\overset{7}{\dots}=\overset{4}{\dots} \quad \overset{7}{\dots}+\overset{6}{\dots}=5 \quad \overset{3}{\dots}+2=\overset{4}{\dots} \quad \overset{7}{\dots}=\overset{8}{\dots}+6$

comptage? comptage?

Ces exemples illustrent très bien la différence qu'il y a entre les catégories 1 et 2 de traitement et la catégorie 3. Passons maintenant en revue quelques autres exemples.

Christophe C :

$7=\overset{1}{\dots}+\overset{6}{\dots} \quad \overset{1}{\dots}+4=\overset{3}{\dots} \quad 5+\overset{1}{\dots}=\overset{5}{\dots} \quad \overset{1}{\dots}+4=\overset{5}{\dots} \quad \overset{1}{\dots}+2=\overset{1}{\dots} \quad \overset{1}{\dots}=\overset{5}{\dots}+6$

Christophe donne une décomposition avec 1. On peut aussi remarquer que le 1 est toujours placé dans la lacune la plus à gauche comme s'il y avait effectivement une procédure en deux temps, du moins sur l'écrit.

Alains C :

$7=\overset{7}{\dots}+\overset{14}{\dots} \quad \overset{4}{\dots}+4=\overset{8}{\dots} \quad 5+\overset{5}{\dots}=\overset{10}{\dots} \quad \overset{10}{\dots}+\overset{5}{\dots}=5 \quad \overset{2}{\dots}+2=\overset{4}{\dots} \quad \overset{12}{\dots}=\overset{6}{\dots}+6$

Alain procède toujours par doublons, il compose la donnée avec elle même. Il place la répétition de la donnée sur la lacune adjacente à celle-ci. Ceci imprime une séquence gauche-droite à ses réponses sauf pour $\overset{12}{\ldots}=\overset{6}{\ldots}+6$ et $\overset{10}{\ldots}+\overset{5}{\ldots}=5$ où les 2 lacunes précèdent la donnée. On a un joli exemple d'inversion de la séquence due aux contraintes de la donnée écrite.

Note: Alain C donne aux épreuves II et IV des réponses strictement additives et monotones. Ici aussi, ce traitement peut être qualifié de monotone.

Fanny B:

$7=\overset{5}{\ldots}+\overset{12}{\ldots}$ $\overset{4}{\ldots}+4=\overset{8}{\ldots}$ $5+\overset{5}{\ldots}=\overset{10}{\ldots}$ $\overset{10}{\ldots}+\overset{5}{\ldots}=5$ $\overset{4}{\ldots}+2=\overset{2}{\ldots}$ $7=\overset{1}{\ldots}+\overset{6}{\ldots}$

Fanny procède par composition. Et dans 4 cas par des doublons. Composition signifie que le calcul "part de la donnée". Et ceci imprime alors une vection au traitement de l'item. Ainsi à la première passation où 2 items sur 3 ont une donnée initiale, le calcul va de gauche à droite, tandis qu'au contraire à la seconde passation, où 2 données sur 3 sont finales, la séquence est droite ⟶ gauche. On remarquera que Fanny traite les items à donnée médiane selon la vection imprimée à ses autres résolutions.

Carolle E :

$7 = \overset{2}{\ldots}+\overset{5}{\ldots}$ $\overset{8}{\ldots}+4=\overset{4}{\ldots}$ $5+\overset{3}{\ldots}=\overset{2}{\ldots}$ $\overset{2}{\ldots}+\overset{3}{\ldots}=5$ $\overset{2}{\ldots}=2+\overset{4}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots}=\overset{3}{\ldots}+6$

Ici Carolle décompose lorsque la donnée est extrême (initiale ou finale) et compose par doublons lorsque la donnée est médiane. Ceci imprime une séquence droite ⟶ gauche aux items de la 1ère passation et gauche ⟶ droite à ceux de la seconde. L'intérêt est de noter que les réponses aux items à donnée médiane sont écrites de façon cohérente avec ce système. (Dans la classe E, on a effectivement posé l'item ...=2+... tandis que pour les 4 autres classes c'est : ...+2=...).

Alexandra 1° E :

$7=\overset{3}{\ldots}+\overset{4}{\ldots}$ $\overset{4}{\ldots}+4=\overset{8}{\ldots}$ $5+\overset{4}{\ldots}+\overset{1}{\ldots}$ $\overset{4}{\ldots}+\overset{1}{\ldots}=5$ $\overset{4}{\ldots}=2+\overset{2}{\ldots}$ $\overset{3}{\ldots}=\overset{3}{\ldots}+6$

Même traitement que ci-dessus sauf que les items à donnée médiane sont complétés de sorte à ce que le résultat soit syntaxiquement correct. Question qui ne se pose pas dès lors que pour les items à donnée initiale ou finale on a opté pour une décomposition.

Note à propos de ces deux élèves Carolle E et Alexandra E.

a.)Elles sont dans une classe où on l'a vu (pg 131) les élèves recourent volontiers pour les items à donnée médiane à des compositions par doubles. Cela tient peut-être au fait qu'alors les données sont paires.

b.)Carolle et Alexandra décomposent si la donnée est extrême, cette interprétation résulte peut-être des exercices qu'elles ont rencontré dans leur manuel où les seuls items bilacunaires proposés sont de la forme ...+...=n et n=...+... (décomposition). C'est cependant dans cette classe que la maîtresse avait proposé spontanément des équations bilacunaires de types plus variés !

A cette catégorie de profils, j'adjoins encore les réponses où l'élève a réécrit sur sa donnée des signes équationnels (cf. Stephano C, Patrick D, Dela D, catégorie 4).

Les traitements de Giao A, Alain C, Christophe C, Fanny B peuvent être qualifiés de monotones. Mais les formes des réponses ne sont pas quelconques du point de vue de l'écriture. Celle-ci cependant résulte plus d'une application contrôlée d'un même procédé de résolution sur la forme des données que d'une analyse conforme des symboles équationnels. La situation est analogue à celle décrite pg 115 pour l'épreuve II.

Les traitements de Carolle b E et Alexandra a E combinent deux procédés différents, discriminés par la forme même des items (donnée médiane). On peut dès lors les considérer comme multiples, faiblement structurés.

4^{o} On compte encore : 2 traitements de refus des items à égal initial, chez Adrien B, ce, de façon conforme à ce qu'il a répondu pour l'épreuve II (Catégorie No. 3)

22 profils difficilement interprétables et
17 profils de refus (Catégories 1, 2).

5^{o} Remarques sur ces catégories par rapport à celles de l'épreuve II.

1. En même temps qu'apparaît plus nettement l'aspect séquentiel, les profils sont plus difficilement différenciables. Les catégories sont moins précises.

2. Cependant, en gros, les profils de réponses des élèves se situent de la même façon aux deux épreuves. Ceci cependant ne veut pas dire que l'élève ait recouru aux mêmes procédés exactement. Ainsi, l'exemple de Christophe C qui est plutôt additif à l'épreuve II (avec des refus de forme cf pg 118) mais qui décompose systématiquement à l'épreuve III. Je laisse le lecteur intéssé trouver les autres exemples.

* * *

II.5.3. Conclusions.

Cette analyse montre bien comment les deux niveaux d'interprétation de la tâche : finalisation (composition/décomposition) et les procédés de résolution s'articulent sur l'écrit. Le point décisif est entre l'effectuation d'une opération écrite et l'effectuation d'opérations en vue de reconstituer une opération écrite. Il se manifeste par le recours à une représentation "extériorisée" de l'opération, sur les symboles écrits. Il n'y a cependant pas à priori univocité de relation entre système de représentation et système d'écriture. Il y a du jeu. Que l'on voit à la force des indices séquentiels Pour résoudre de façon correcte (ic.conventionnelle) les items, il faut au moins recourir à une orientation préalable de la lecture : de sorte à ce que le signe + soit toujours lu avant le signe =. Ceci, ultérieurement, favorisera une conception plus abstraite et atemporelle des opérations. En fait ce détachement se fera au moment où pour le sujet d'autres opérations (opérations de comparaisons, de compensation, de mise en relation d'écritures diverses) prendront le relais des opérations de comptage proprement dites.

* * *

II.6. Analyse de l'épreuve IV.

II.6.1. Remarques préliminaires.

1° Il s'agit donc de compléter des écritures lacunaires de type a+b=c+... et a+b=...+c. On peut dire que la réponse correcte (conforme) est une réponse de décomposition puisque, pour trouver (à coup sûr) le résultat, il suffit de soustraire c du résultat de la somme a+b. Dans la mesure où sont combinés somme et soustraction, je noterai ces réponses CD (pour composition/décomposition). On peut alors examiner les réponses non correctes. On a vu (pg 52 tableau XX) que celles-ci se répartissent en réponses somme, somme totale des 3 données, somme partielle de deux données, en général les données a et b, ainsi que quelques rares réponses de décomposition. Les réponses autres comportent quelques réponses par comptine, par répétition d'une donnée, ou encore par transformation de la donnée : soit par césure en deux équations, soit par enchaînement des calculs. Enfin bien sûr des réponses refus. Je renvoie le lecteur à la page 99 pour un joli inventaire des réponses. Je me contenterai de donner 4 exemples :

$3+4=\overset{2}{\ldots}+5$	réponse correcte, CD, ou encore décomposition complète
$3+4=\overset{12}{\ldots}+5$	réponse somme totale, St
$3+4=\overset{7}{\ldots}+5$	réponse somme partielle
$3+4=\overset{1}{\ldots}+5$	réponse décomposition, D, ou encore décomposition partielle.

2° Il convient alors de faire une remarque essentielle. *La position de la lacune est, pour ces items, irrelevante quant au choix de la procédure.* Qu'on ait à résoudre a+b=c+... ou a+b=...+c, la procédure devrait être la même.

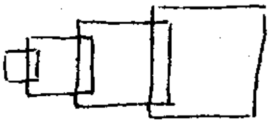
En terme de traitement, et selon le vocabulaire adopté pour l'épreuve II, cela signifie que le traitement correct (conforme, attendu...) est un traitement "monotone", la même procédure étant mise en oeuvre invariablement. Ici apparaissent donc les limites de ces caractérisations. Ceci n'écessite quelques remarques :

a) Tout d'abord, il faut constater que cette procédure invariable à mettre en oeuvre est déjà complexe puisqu'elle combine deux opérations : composition/décomposition (qui vont en "sens inverse"). De ce point de vue, il y a une analogie à faire entre la tâche de ces items avec celle des items de l'épreuve III. (cf pg 128).

b) Secondement, et par conséquent, on pourrait dire que pour chacune des tâches proposées (épreuves II, III, IV) il n'y a finalement qu'un seul procédé à mettre en oeuvre : i.e. l'algorithme correspondant à cette classe d'items. Bien sûr, les termes descriptifs utilisés ne sont que relatifs à un certain niveau d'intégration des procédures. On reviendra là-dessus plus loin (pg).

c) Il reste néanmoins une particularité à l'épreuve IV, qui se situe sur le plan de l'écrit. En effet, pour les items des épreuves II et III les élèves pouvaient s'appuyer sur la position de la lacune (des données ou encore des données relativement à la lacune) pour son interprétation. Il n'en est rien ici, où l'indice de la tâche sera autre : la forme globale des items par exemple, ou encore des indices plus spécifiques comme la présence de deux signes + ou encore d'un signe = central etc...

3^0 Nous avons cependant vu au chap. I.4.4.(pg 57) que certains élèves investissent la lacune et sa position d'une signification. Les réponses St données préférentiellement aux items a+b=c+... et Sp aux items a+b=...+c indiquent que cette signification est relative à l'aspect séquentiel (résultat final, amplification) et au repérage de la forme termaire a+b=c. Une telle interprétation provient d'une "conception fonctionnelle" : l'opération + produit, à partir des données un résultat. Il est normal que celui-ci succède à l'opération, et que cette dernière"s'évanouisse"au profit du résultat. Ceci trouve un prolongement très explicite dans l'écriture itérée : a+b=c+d=e+f=g etc... (2+6=8+5=13+3=16...etc.) qui signifie la suite des opérations : a+b=c c+d=e e+f=g. La condensation répond à une économie d'écriture: (c),(e) ne sont pas répétés, de plus elle est extrêmement explicite parce que cette "contraction" rend très bien l'enchaînement même des opérations. Le calcul s'écoule dans l'écriture. On peut faire un dessin qui illustre tous ces aspects (séquence, amplification, enchaînement...) : représentons la forme •+•=• par le chaînon: □ , le calcul enchaîné est alors :



etc...

4° Il convient de conclure cette introduction par quelques considérations à propos de l'enseignement. En 1P, les élèves n'ont en principe pas à résoudre de tels exercices. Mais il n'est pas rare de voir l'enseignant prendre les devants du manuel et proposer quelques calculs de ce type. Il en a été ainsi pour la classe D (au moins). De plus, c'est sur un autre support, symbolique qu'on propose ce type de tâche en 1P. Il s'agit de fiches (telles OP.13 ou OP.15 en 1ère année primaire pour le lecteur qui voudrait s'y référer où sont dessinés de petits rectangles $\boxed{a+b}$ dans lesquels est écrite une opération. Ces rectangles sont reliés ou doivent être reliés par des traits symbolisant la relation d'équivalence : "représente la même quantité que" ou des flèches symbolisant la relation d'ordre: "représente une quantité plus grande (ou juste plus grande, ou encore plus petite) que". Selon les informations disponibles, présence ou absence de traits ou flèches, présence ou absence de nombres dans les rectangles, les élèves doivent compléter correctement. Par exemple : $\boxed{3+4}$—$\boxed{\ldots+\ldots}$ où le trait signifie "représente le même nombre que". L'élève est censé trouver un calcul qui "donne aussi 7". Ces exercices sont difficiles, et on observe bien des enseignants proposer à leurs élèves "d'écrire le résultat au-dessus du petit rectangle", c'est-à-dire de procéder comme je vais le décrire ci-dessous

Je renvoie le lecteur intéressé par cette question à ma thèse: La transposition didactique au travers de l'enseignement des mathématiques en 1P et 2P en Suisse Romande, chapitre VI, pg 355 à 367 ainsi qu'au chapitre III et IV de cette présente étude.

Pour les items de l'épreuve IV, la difficulté réside dans la compréhension du code qui veut que les expressions algébriques doivent être prises en bloc (d'où les petits carrés cités plus haut). On ne doit alors pas s'étonner que, dans la forme a+b=c+d(1+5=3+3)a+b ne "fasse" pas c (1+5 ne fait pas 3). Inversément, il ne s'agirait pas de repérer dans la forme a+b=c+d la forme partielle a+b=c (dont a+b=c+d serait le prolongement). Ces exercices sont généralement difficiles pour les élèves (même de 2P). Les maîtres font souvent le choix d'enseigner un truc (une démarche) de résolution. C'est bien sûr de procéder par substitution (évidemment on ne présente pas ceci ainsi). Devant une écriture du type a+b=c+... ou a+b=...+c, l'élève est appelé à calculer a+b, à noter son résultat, soit au-dessus de l'expression a+b, soit même au-dessus du signe égal (ou encore d'autres variantes... mais cette sous-tâche, noter, peut être primordiale par sa fonction orientatrice des procédures du sujet, ainsi que par l'indication des opérations par lesquelles commencer). Ensuite, par substitution de ce résultat à l'expression a+b, la tâche revient à résoudre une relation ternaire, qui pourrait fort bien être écrite sous la forme d'une équation lacunaire. Exemple : 3+4=...+5, $3\overset{7}{+}4$=...+5 puison résoud 7=...+5, on trouve 2 que l'on écrit dans la lacune. Cette façon de procéder est assimilable par les élèves car elle rencontre les représentations de ceux-ci et réinvestit la lacune d'une signification. L'opération préliminaire (y compris la notation du résultat intermédiaire) consiste en une substitution.A ce titre on se situe à un niveau d'abstraction supérieur. Alors que dans l'écriture a+b=c on pouvait dire "a+b fait c", dans a+b=c+d, on dira que "a+b fait la même chose que c+d". Aux opérations engagées dans la résolution s'adjoint alors une opération (d'articulation): la substition. Le traitement écrit, indiqué par l'enseignant, supporte donc pour l'élève cette opération. Un très joli exemple est donné plus loin avec Aline E (pg 151). Il convient alors de faire deux remarques: 1^{o} Cette notation est tout à fait inusitée pour les élèves. Dans ce sens on ne se ramène pas à une forme déjà connue. Au contraire peut-être, cette forme non usuelle est un indicateur puissant de la manière de procéder. Du point de vue de la tâche bien sûr on se ramène à deux sous-tâches connues. (On rapprochera cette remarque de l'analyse du paragraphe II.5.1).

2^{o} Cette notation n'a pas en mathématiques de signification. Il est piquant de voir l'enseignement insister d'une part à une définition rigoureuse du égal, des écritures d'équation, et d'autre part recourir à de tels artefacts.

Les manuels suisses romands prévoient explicitement, mais discrètement, le recours à un tel algorithme de résolution. Cependant, celui-ci devrais être dépassé pour des opérations plus fines de comparaison et de compensation qui permettraient de trouver la réponse "sans compter". Le but de tout ceci est bien sûr le calcul qui consiste à réduire la difficulté des opérations par le recours à des opérations équivalentes plus simples à effectuer. (on retrouve alors la substitution et les opérations comparatives qui permettent la détermination de ces opérations plus simples). L'algorithme présenté ci-dessus a alors l'inconvénient d'enfermer les élèves dans le comptage et peut faire obstacle à ces comparaisons. C'est pourquoi les enseignants font appel à un autre truc de résolution : l'analogie entre une équation et une balance.

* * *

II.6.2. Description en 14 catégories de profils.

L'analyse de profils sera menée si possible sur les 8 réponses données aux deux passations. Cependant, comme précédemment, je compterai les passations, soit les quadruplets de réponses. Rappelons que lors de chaque passation, 2 items de chaque type (lacune finale lacune médiane) avaient été proposées (on se référera aussi aux tableaux XXIV, pg 66 à 74).

N^{o}	Descriptif	Exemple	Nb.
1.	Refus aux items	Anne 2^{o}A.	14
2.	Traitement difficilement interprétable	Alec A.	8
3.	Traitement "autre" selon un système "personnel"	Graziella B. passation 2.	4
4.	Répétition d'une donnée	Elena C. (1ère donnée répétée)	4
5.	Un seul item traité	Alain E.	10
6.	Procédés variés (fluctuants)	Nicole D.	16
7.	St. Somme totale aux 4 items	Philomena A.	32
8.	Sp. Somme partielle (ou autres procédés partiels) aux 4 items	Giao A.(Somme de la 1ère et de la 3ème donnée)	11
9.	Somme totale pour a+b=c+... Somme partielle, a+b,pour a+b=...c	Johana C.	11
10.	Somme totale pour a+b=c+... Procédés variés, dont refus, pour a+b=...+c	Géraldine A. passation 2.	8
11.	Procédés variés,dont refus pour a+b=c+... Somme partielle pour a+b=...+c	Nathalie D.	21
12.	Transformation de la donnée	Sandrine C.	6
13.	Un type d'items correct Procédés variés,dont refus,pour l'autre type	Karen D	8
14.	3 items corrects au moins		35

Total des passations 188

TABLEAU XXXIII Classement des profils de réponses de l'épreuve IV en 14 catégories. Unité: passation.

II.6.3. Caractérisation des traitements.

L'analyse qui va suivre permettra de simplifier cette catégorisation. Je me baserai uniquement sur la distinction entre item à lacune finale (1er type) et item à lacune médiane (2ème type).

On trouve 98 passations typiques où le sujet a soit donné 4 réponses identiques : CD (correct), St, Sp, Autre, Répétition de donnée, Refus, soit donné 2 types de réponses selon chacune des 2 formes des items. Si on se restreint aux réponses St, Sp et CD, on aboutit à un tableau qui permet de distinguer 3 niveaux de traitements.

Explication de la notation :

St = Somme totale

Sp = Somme partielle

CD = composition/décomposition, abréviation pour réponse correcte.

▨ = procédé de résolution différent des 3 procédés ci-dessus.

St/St = traitement où l'élève a répondu de la même façon aux items des 2 types.

▨/Sp = traitement où l'élève a répondu par un même procédé aux items à lacune finale et par Sp aux items à lacune médiane.

TABLEAU XXXIV Classification des traitements type

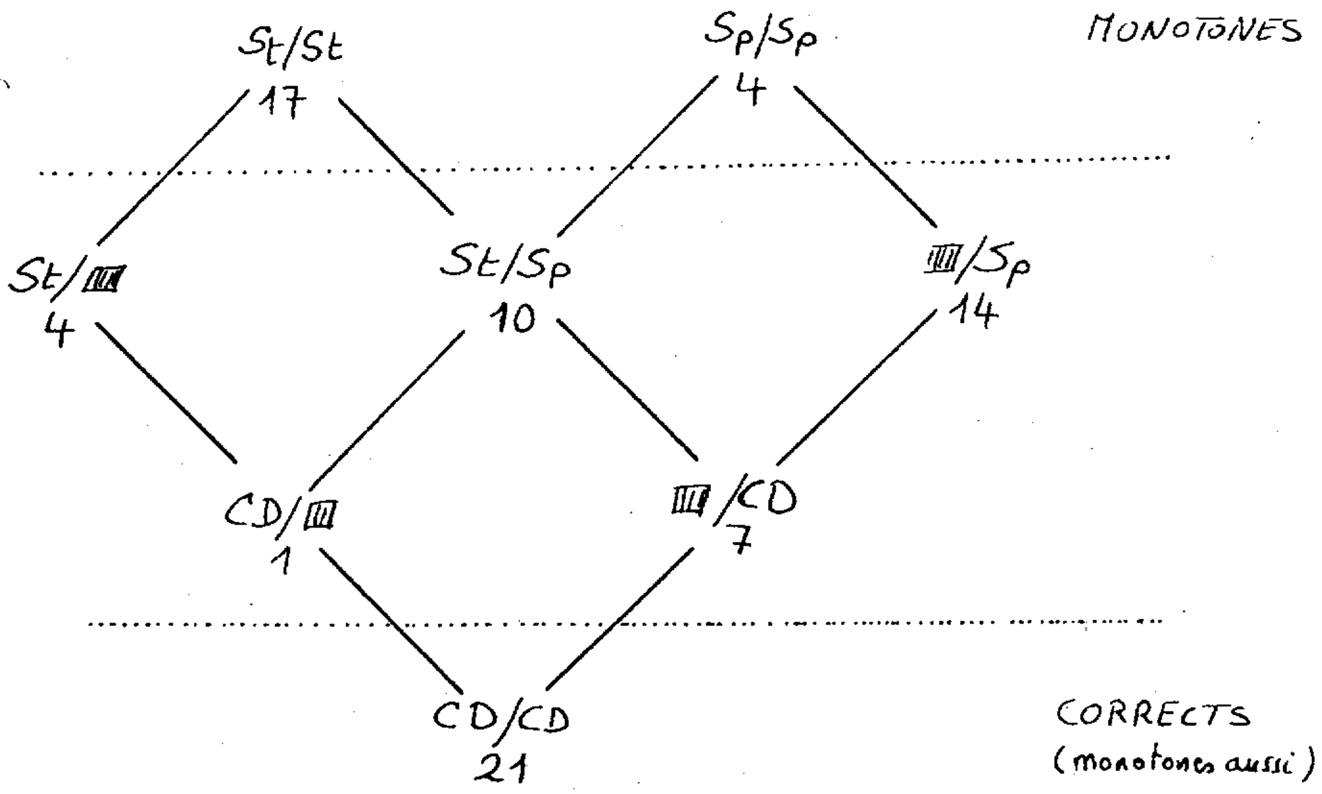
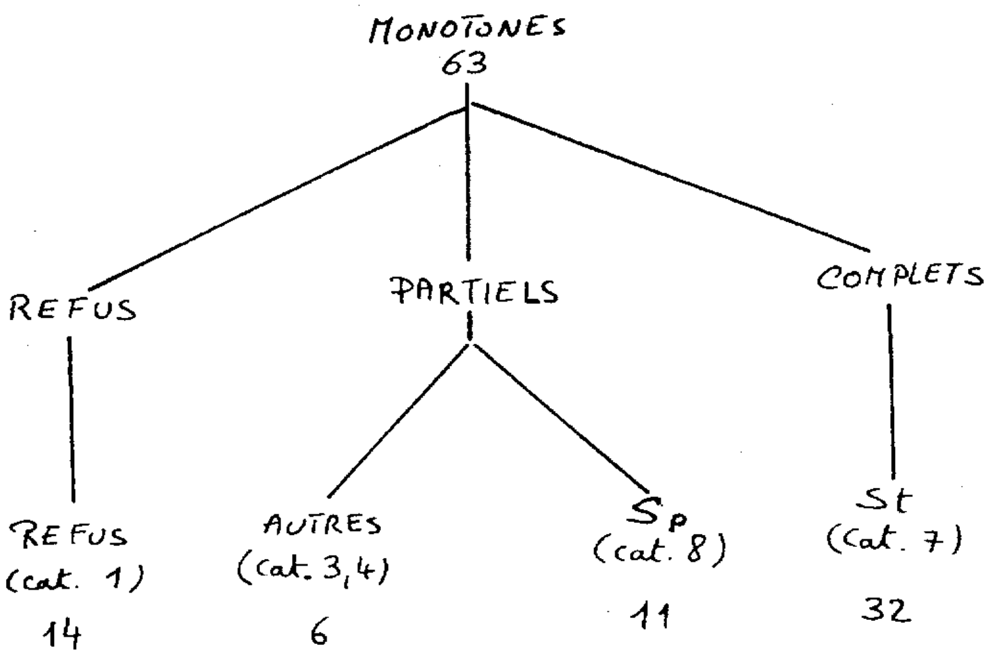


TABLEAU XXXV Classification des traitements monotones



Je propose de prolonger cette analyse à tous les profils de réponses :

1°. *63 profils témoignent d'un quadruple recours au même procédé de résolution.* Les traitements *monotones* sont ceux des catégories *1*.: refus, *3* et *4* : Autres (il y a 2 traitements de la catégorie *3* et les 4 traitements par répétition de la catégorie *4*), *7* St et *8* Sp. (cf. tableauXXXV de la page précédente).

On remarque que 2/3 de ces traitements sont des sommes. Ceux-ci correspondent bien aux traitements monotones additifs de l'épreuve II. De plus, *la moitié* sont des *sommes totales* tandis que le *sixième* seulement sont des *sommes partielles.* On peut faire ici une analyse analogue à celle de l'épreuve II (cf. chap. II pg 115) : l'élève est centré sur son procédé de comptage, il s'applique même jusqu'à additionner toutes les données. Souvent ce sont les mêmes élèves qui donnent ces traitements à ces deux épreuves.

2°. *26 profils multiples non organisés* sont ceux de la catégorie *3* (Olivia B ① , Patrick b E① .) , des catégories *5* et *6*.

3°. *40 profils organisés autour des 2 formes d'items et des deux interprétations : somme partielle/somme totale.* Catégorie *9*, *10* et *11*.

a) Plaçons nous tout d'abord dans le cas des sommes partielles. On peut dire que l'élève repère dans l'écriture la forme ternaire: a+b=... (ou encore plus rarement b=c+.../b=...+c). A titre d'exemple voyez les réponses de *Stéphano C ①* qui *rétablit* la forme ternaire.

$1+5=^{6}3+.\overset{2}{.}.$ $3+4=.\overset{74}{..}+5$ $2+7=^{6}7+.\overset{6}{.}.$ $3+6=.\overset{9}{.}.+9$

1+5=6/3+5 3+4=7/4+5 2+7=6/7+6 3+6=9/+9 (cf.aussi *Boris B*).

Ce type de considération dicte alors le traitement Sp aux items de lacune médiane: $\underbrace{a+b}= \overset{Sp}{\ldots}+c$. Un seul élève complète en enchaînant (cf. plus loin Dela D).Mais en général la résolution s'arrête au calcul de Sp. Sans doute parce que le calcul Sp+c n'est demandé ni par la présence d'un signe égal ni par une seconde lacune.

Lorsqu'un élève répond de cette façon à un item de lacune médiane, comment répond-il aux items à lacune finale ? A priori, toutes les réponses sont envisageables. Mais elles n'auront pas la même signification. Ainsi, une interprétation systématique dans les termes du repérage d'une forme ternaire $\boxed{a+b=c}+\ldots$ indiquerait le refus. Car dans tous les items proposés, l'égalité n'a jamais eu lieu. C'est bien ce que fait Sabine A ①. $1+5=\cancel{3}+\ldots$ $2+7=\cancel{7}+\ldots$ (noter la façon de refuser l'item, elle est explicite) ou encore Daniel B ① $3+4=\overset{7}{\ldots}+\cancel{5}$ $3+6=\overset{9}{\ldots}+\cancel{9}$ et refus de traiter : 1+5=3+... et 2+7=7+... . Autres exemples Nathalie D et Laurence E. Il y a 12 traitements de la sorte.

Mais pour répondre ainsi, il faut que le sujet soit bien au clair avec la raison de sa réponse aux items a+b=...+c. Or, une réponse Sp peut être aussi le fruit d'une lecture gauche- droite, l'élève s'arrêtant à la lacune. Ce qui donnerait :
$\underbrace{a+b}=\overset{Sp}{\ldots}+c$ et $\underbrace{a+b=c}+\overset{St}{\ldots}$ .C'est ce que fait par exemple Alexandra 1^{o} E. (et qui de cette façon donne des traitements analogues aux épreuves II, III et IV !).

Enfin, on ne peut pas exclure le recours à des réponses alternatives pour les items a+b=c+... : St ou autres. (je laisse de côté volontairement les traitements corrects).

Par rapport à l'écriture, ce qu'il faut retenir, c'est que l'aspect partiel de la résolution soit fondé sur la forme même de l'item.

b) Un second pôle sera alors celui des sommes totales aux items de la forme a+b=c+... . Tout le raisonnement précédent (point a)) peut être repris (ce que je ne ferai pas pour ne pas allonger inutilement). Il faut alors noter qu'on trouve moins de traitements de la sorte.

Reste une question: Qu'est-ce qui en regard de l'écriture équationnelle lacunaire "légitime" une telle interprétation ? La réponse tient dans ce qu'on a ressorti des analyses précédentes relativement à l'aspect séquentiel. Il y a corrélation forte entre résultat final, grand nombre final et lacune finale. Ceci amène à traiter les items a+b=c+... par une somme totale et permet de tenir compte d'une façon simple des 3 données de l'item. On peut alors examiner le cas de Nadia B qui, cohérente tout au long des exercices et des passations répond, selon ce critère :

$1+5=3+\overset{9}{\ldots}$ $3+4=\overset{R}{\ldots}+5$ $2+7=7+\overset{R}{\ldots}$ $3+6=\overset{R}{\ldots}+9$
$4+2=2+\overset{9}{\ldots}$ $5+4=\overset{R}{\ldots}+3$ $3+4=3+\overset{10}{\ldots}$ $6+2=\overset{R}{\ldots}+4$. Mais on peut citer encore pour leur cohérence sur les 3 épreuves : Géraldine A, Corinne C, Nathalie C, Cédric C etc.

c) Notons que les deux interprétations ci-dessus: forme ternaire, séquence amplifiante gauche-droite, ne sont pas exclusives. Elles peuvent être tenues alternativement sur les deux formes d'items. C'est ce que montrent les 11 traitements de la catégorie 9.

Ces deux façons de traiter sont de même nature et s'intègrent bien dans la conception d'enchaînement du calcul (et des équations). Un joli exemple est donné par Dela D :

A la première passation il répond (comme pour les épreuves II et III d'ailleurs) :
$1+5=3+\overset{1}{\ldots}{}^{10}$ $3+4=\overset{1}{\ldots}+5\ {}^{13}$ $2+7=7+\overset{16}{\ldots}$ $3+6+\overset{1}{\ldots}+9\ {}^{18}$ (donc St avec un terme auxiliaire de plus et la somme écrite tout à droite).

A la seconde passation, ses réponses sont :
$4+2=2+\overset{R}{\ldots}$ $5+4=\overset{9}{\ldots}+3$ $\overset{12}{\ldots}$ (et il met 3 petits points sous le 12 !)
$3+4=3+\overset{R}{\ldots}$ $6+2=\overset{8}{\ldots}+4$.(donc Sp avec un enchaînement !)

(Dela D a produit des traitements identiques aux 4 épreuves ! jugement d'équation compris).

d) On peut résumer toute cette discussion par le tableau suivant :

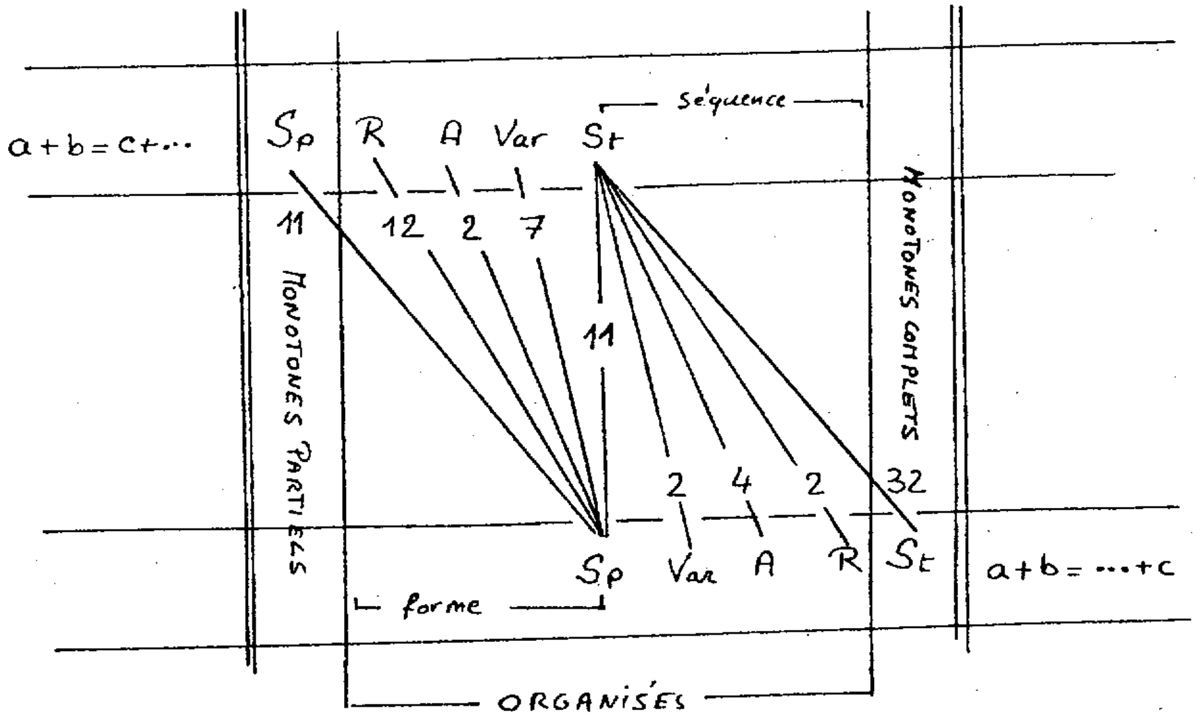


TABLEAU XXXVI: Classification des profils organisés

4° 6 profils avec correction de la donnée. 3 types de corrections:

a) césure de l'item en deux calculs ternaires. Ex. Sandrine C Stephano C ① Boris B Patrick D ①.

J'ai déjà mentionné qu'on peut les inclure avec les traitements selon la forme (pôle Sp ci-dessus). Mais je les ai comptabilisés à part.

b) Somme tout à droite avec éventuellement enchaînement. Ex. Dela D. lui aussi déjà mentionné.

c) Ecriture selon "algorithme" de résolution. Ex. Aline E ②;
$1\overset{6}{+}5=3+.\overset{3}{.}.^{6}$ $3\overset{7}{+}4=.\overset{2}{.}.+5^{7}$ $2\overset{9}{+}7=7+.\overset{2}{.}.^{9}$ $3+6=.\overset{0}{.}.+9$

Remarquez la notation d'Aline, le nombre du résultat intermédiaire est écrit au dessus du groupe de facteurs : $\overset{6}{1+5}$ puis reporté à la même hauteur <u>tout à droite</u> : $\overset{6 \dashrightarrow 6}{1+5=3+\overset{3}{\ldots}}$

5° <u>43 profils corrects ou mixtes : somme/corrects.</u> Cette catégorie de profils comporte des réponses correctes CD soit à tous les items soit spécifiquement à un des types d'items seulement. On a :

1) 21 traitements strictement corrects.
2) 14 traitements corrects comportant une réponse erronnée
3) 7 traitements mixtes, CD pour a+b=c+...
   Sp, D ou R pour a+b=...+c

4) 1 traitement mixte : CD pour a+b=...+c
   Sp pour a+b=c+...

On comparera ces chiffres aux 20 traitements incorrects comportant une réponse correcte : (cat.5 :7;cat.6 :8;cat.8 :1,cat.11 :4).

Je retiendrai de ceci le fait que tout comme interprétations somme partielle et somme totale n'étaient pas incompatibles et pouvaient se distribuer sur les deux types d'items considérés, il n'y a pas incompatibilité non plus avec les traitements corrects.

* * *

II.6.4. <u>Conclusion.</u>

On a vu que les items de l'épreuve IV sont en rupture sur ceux des épreuves précédentes par le fait que ce sont deux expression numériques qui sont mises en relation et non plus un calcul et son résultat. Ceci se marquait sur l'écrit par la non relevance de la position de la lacune, tandis qu'au plan des opérations, la procédure de résolution correcte est déjà assez complexe. A l'épreuve III le sujet devait déterminer une donnée auxiliaire, ici il doit calculer un résultat intermédiaire.

Relativement aux procédés de résolution, cela se traduit par un lien un peu différent. Alors que les différences de procédés se traduisaient par des items bien précis, ici, les réponses incorrectes ne correspondent à aucun item présenté : si ce n'est les réponses $a+b=\overset{Sp}{\dots}+c$. Ce type de réponse apparaît d'ailleurs bien comme charnière puisqu'il peut être envisagé soit comme une réponse incomplète : l'élève s'est arrêté au résultat intermédiaire. (Du moins on pourra lui présenter ainsi sa propre réponse), soit comme une assimilation de l'écriture équationnelle à une conception fonctionnaliste de a+b=c (ce qui donne les écritures enchaînées). Pour qui veut respecter les signes, ce sont alors les items a+b=c+... qui vont poser problème: comment tenir compte de toutes les données?

L'effort des maîtres à recourir à l'inscription du résultat intermédiaire au-dessus de la donnée, est une assimilation de l'item à un super item lacunaire à double lacune dont l'une reste occulte (j'ai cependant vu des enseignants proposer sur des stencils des items de la forme : $\overset{\dots}{a+b}=\dots+c$).Mais, dans la mesure où il ne s'agira bientôt plus de compter mais d'effectuer des opérations d'autres types (comparaisons, compensation, passage à la dizaine, jeux d'écriture équationnelle ou encore jeu sur la numération de position), la rupture sera confirmée, et l'écriture équationnelle prendra une toute autre signification.

J'ai gardé pour la fin l'élément essentiel. C'est celui de la coexistence chez les sujets de plusieurs systèmes d'interprétations. Soit addition totale ou partielle, soit addition et traitement correct. Il semble donc que le traitement correct n'est pas un développement logique (naturel) des traitements erronés (comme c'est le cas du passage addition soustraction) et que les élèves ne trouvent pas dans le support écrit les indications suffisantes pour les orienter sur un algorithme de résolution. On peut faire l'hypothèse que la mobilisation d'opération de comptage uniquement fait obstacle à une interprétation correcte des écritures.

* * *

II.7. Conclusion du Chapitre II.

II.7.1. A la tâche !

Pour atteindre le traitement des données écrites par les élèves, il a paru intéressant de dépasser l'analyse des réponses pour celle des profils de réponses que chaque sujet a produit pour chaque épreuve. Cette analyse m'aura amené à préciser les tâches, à les comparer entre elles. Si toutes les productions proviennent d'un même champ, il n'en reste pas moins qu'elles prennent des formes particulières pour chaque type d'exercice. L'étude des profils amène deux éléments. D'une part, on aborde la question de la variété des procédés à disposition du sujet, et celle, primordiale, de leur intégration. D'autre part, on examine l'articulation opération/système symbolique du fait même que l'intégration évoquée plus haut "prend" autour des systèmes figuratifs - dont l'écriture. Il est apparu toute l'importance de cette dimension dans l'orientation du sujet (interprétation de la donnée, finalisation des opérations). Celui-ci se base alors sur la concordance de deux ordres : celui du calcul et celui de l'acte d'écriture lui-même.

A l'épreuve II, il aura fallu essentiellement traiter de la diversité. Ceci provient de la forme même des items proposés. D'une part il y a 12 items jamais identiques. Ensuite la "richesse" des données (il faut tenir compte de deux nombres chaque fois). Enfin la demande directe d'un calcul: les facteurs sont là, la lacune indique la place où inscrire le résultat. Si pour son interprétation, le sujet se base sur l'ordre gauche droite, il n'a en principe pas toujours loisir, sur ces exercices,d'écrire sa réponse de façon séquentielle. Une formulation en termes de "pour faire", et "ça fait" permet aux élèves de maîtriser cette classe d'exercices.

L'épreuve III frappe moins les élèves par sa diversité. Cela tient au fait essentiel qu'une seule donnée numérique est proposée. Il y a donc moins d'éléments à tenir compte. De plus, bien sûr, il n'y a que 6 formes différentes d'items. D'autre part, comme je l'ai déjà dit,ces items donnent plus de place au sujet.Il écrit plus qu'à l'épreuve II où,à la limite,il suffisait d'inscrire un résultat dans une lacune. Les représentations séquentielles ressortent alors plus dans les items bilacunaires. Un second aspect important est l'articulation entre les opérations mises en oeuvre dans la résolution. Nous avons vu que la donnée est tout d'abord interprétée et fournit le calcul à réaliser : composition/décomposition (et év. doubles etc... opérations moins générales) et qu'ensuite cette réalisation n'est pas faite au hasard. Prédominance des sommes triviales, des doubles ou des compositions/décompositions de leurs facteurs consécutifs.

L'épreuve IV présente à nouveau une plus grande richesse d'information. Toute la difficulté est, semble-t-il dans le traitement de cette richesse. On voit alors des résolutions qui la réduisent et ne tiennent compte que de deux données (par l'identification de la forme ternaire). Cela amène de la diversité là où théoriquement il ne devrait pas y en avoir, et ce de deux manières : Tout d'abord la lacune et sa place discrimine 2 types de solutions: somme partielle, somme totale. Enfin (et c'est plus intéressant), plusieurs types d'interprétations divergentes coexistent dans le même sujet. Ceci a été observé aussi lors d'entretiens individuels. Les sujets manquent d'éléments pour "mobiliser" une résolution plutôt qu'une autre (je ne préfère pas utiliser ici le mot "choisir"). Ainsi, par contraste avec l'épreuve III, les diverses opérations en jeu semblent moins solidaires les unes des autres.

Le calcul, c'est bien sûr ce qui relie tous ces exercices. Et c'est en la détermination de la forme du calcul à réaliser que réside l'essentiel de la tâche. Encore une fois, celle-ci ne doit pas être identifiée à telle ou telle forme particulière d'items. Si en pédagogie, on se trouve constamment devant cette ambiguïté, cela tient à ce que, outre leur fonction d'exercer l'élève, les items jouent un rôle dans l'identification de ce qu'il s'agit de faire apprendre aux élèves (on s'adresse alors au maître). Ils sont pris comme <u>signifiants</u> pour une tâche dont on estime devoir faire apprendre la résolution aux élèves. Dans ce cas bien évidemment, c'est la résolution correcte qui est promue. On bute constamment sur ceci dans les manuels scolaires de naguère, d'aujourd'hui, de demain sans doute. A ce propos les équations lacunaires sont déjà bien vieilles. Mais pas plus que la relation "prix de vente plus bénéfice égale prix d'achat", les équations lacunaires ne sont les véritables objets d'un enseignement de mathématique (ni d'un enseignement du calcul ni même de l'arithmétique). On retrouve ici bien sûr la transposition didactique en un de ses aspects : le fait de s'adresser dans la présentation du savoir tout autant à l'élève (à qui l'on propose le savoir) qu'au maître (à qui l'on propose de présenter à l'élève le savoir), aboutit généralement à la réduction de la connaissance à la réussite à certaines tâches standards , évoquées par des formes symboliques tout aussi figées. De telle manière tout le monde y trouve son argent : l'élève résoud avec les moyens du bord et le maître interprète la réussite en termes de connaissance mathématique.

Ainsi, par exemple, une enseignante de 2P me disait en début d'année que son objectif était de "faire apprendre à ses élèves la décomposition des nombres 1 à 20". Or l'observation de ses élèves m'avait montré que cela faisait au moins 6 mois qu'ils ne faisaient que ça (à leur manière et spontanément, sans le montrer, à propos de diverses tâches scolaires). Ainsi donc l'enseignant se trouve être le médiateur entre deux "filières". D'une part il y a la connaissance des sujets qui a son autonomie de développement (mais pas indépendance totale bien évidemment) et sa spontanéité, d'autre part, il y a la matière à enseigner construite selon sa cohérence interne. L'exemple ci-dessus surprend l'enseignant à désigner tel ou tel aspect de connaissance comme un objet à enseigner. Mais si l'enseignant considère que cette désignation constitue cet objet, alors il se trouve devant la situation paradoxale de ne pas pouvoir s'en remettre au savoir des élèves bien que devant forcément compter sur lui. On peut dire ces choses autrement et noter qu'il y a désignation d'un objet à apprendre, dictée par une conception fonctionnaliste et décontextualisée du savoir. (cohérence du savoir : les décompositions des nombres de 1 à 10, "le passage à la dizaine", sont nécessaires à l'apprentissage (solide) des opérations numériques), sans se référer à son correspondant dans le fonctionnement des sujets lors de situations bien précises. C'est comme si ces derniers devaient s'approprier la connaissance avant même d'en user. De cette identification procède une sorte de démantellement de la matière à enseigner.

Je poursuivrai donc cette étude par une partie consacrée aux exercices de 1P et 2P qui présentent aux élèves des écritures lacunaires. Confrontant ainsi ces deux ordres de reconnaissance sur cet objet relativement simple. (à paraître).

* * *

II.7.2. Production des élèves.

Il est une seconde conclusion que je voudrais tirer. La démarche entreprise dans ce chapitre répond à un souci de mieux rendre compte de ce que font les sujets. Ceci amène l'analyse à un ordre de complexité bien supérieur que dans le seul exercice comptable des réponses des élèves, même entrepris finement comme dans le chapitre I. Il est significatif d'avoir abouti dans ce travail. Même s'il aura fallu pousser l'interprétation et, par conséquent, multiplier les contrôles et recoupements nécessaires. J'espère que ce travail, entrepris sur un tout petit objet, permettra de jeter quelques bases à de telles analyses, dont il faudra encore simplifier la démarche. J'aimerais pour le moment que ce texte invite le lecteur à ne pas négliger de porter une attention détaillée aux productions des élèves. C'est aussi le but du cadre général, que j'ai décrit ici, que de soutenir ces analyses et de permettre aux chercheurs à affronter la richesse des informations recueillies.

Il se dégage néanmoins, au travers des écritures d'élèves (que je ne connais pas) une dimension expressive peu banale et qui reste toujours pour moi fascinante. Je suis bien content de montrer que malgré le ridicule de ces exercices, on entrevoit quelque chose de la mathématique de ces élèves. Utiliser ces dispositions tel est le travail qui reste à faire. Déjà de nombreux pédagogues se sont attelés à la tâche, et la didactique des mathématiques tente de donner des éléments fondés et systématiques à celle-ci. La première chose est bien sûr de placer les élèves devant des situations plus riches en significations et dont les feed back dirigent l'intégration des connaissances. Pour ma part, je tiens à préciser (ce n'est pas la première fois) que l'on pourrait mieux utiliser les objets d'enseignement classique. Se démarquer des objets d'enseignement et travailler ce démarquage avec les élèves est une chose faisable dans l'immédiat.

* * *

II.7.3. Le point sur l'écriture en mathématiques.

Tout au long de cette étude, ma réflexion aura porté sur les moyens mis en oeuvre pour réaliser des opérations mathématiques et les écrire. Il y a, à tout moment, plusieurs moyens à disposition du sujet. Moyens plus ou moins différenciés et intégrés les uns aux autres, pouvant en outre se combiner de manière à en créer de nouveaux. Bien sûr, chaque moyen revêt une forme particulière selon le matériel (objet ou figures) utilisé, les actions qui s'y rapportent et les coordinations des actions que cela suppose.

Mon raisonnement aura tenu à faire la distinction, pour un système de signifiants donné, entre les éléments sur lesquels portent les actions (opérations) en jeu et leur organisation en des formes diverses et d'autre part, les actions elles-mêmes que l'on effectue sur ces éléments. Dans ce sens, la comparaison de moyens différents mais équivalents est instructive. Elle permet d'établir des correspondances entre les éléments (ou formes organisées d'éléments) et aussi de comparer les actions entre elles (qui peuvent se combiner soit en doublant les uns les autres, soit en se coordinant finement). Ainsi, je dirai que ces actions sont autant de <u>figurations</u> des opérations mathématiques réalisées (on peut reprendre à ce propos les remarques de G. Vergnaud sur l'homomorphisme).

Pour l'écriture, il y a d'une part les symboles écrits et leur organisation sur la feuille, d'autre part, le fait qu'écrire est en soi une action (qui a sa temporalité propre). Dans le calcul écrit, l'écriture double les opérations du sujet. Et ceci peut aller jusqu'à <u>réaliser</u> ces opérations. Dans le cas du calcul algébrique, par exemple, les actions d'écriture réalisent une part du calcul tout comme dans le comptage le lever des doigts réalise une part de l'opération. <u>De sorte que le déroulement même de cette opération</u>

d'écriture représente l'opération en jeu. J'oserai le vocable "d'action signifiante" dans la mesure où la façon dont elle combine les signes est analogue (mais pas identique, et peut-être seulement partiellement) à celle dont agit l'opération.

En tant qu'action, l'écriture laisse des traces qui s'ordonnent, dans un temps donné, spatialement sur le papier. Dès lors, l'aspect séquentiel si souvent évoqué ici paraît essentiel. De plus, il faut considérer que dans la communication émetteurs et récepteurs partagent une convention séquentielle. Dès lors une même écriture mobilisera les mêmes actions (et le même déroulement d'actions). Des écritures de type comptine : $3+4=5+6=\underline{7}$ (pour donner un fameux exemple) à celui du traitement par l'écriture de calculs algébriques : $3x+y(5y-(4x-3))=\ldots$, en passant par les formes usuelles : $5+6=11$ ou enchaînées: $3+4=7+6=13+18=31$, on observe toujours la séquence gauche droite, haut-bas, qui intègre bien cela à l'écriture. En passant, remarquons deux choses : 1° On ne verra pas les enchaînements s'inverser, par exemple $31=18+13=6+7=4+3$.
2° Dans la pratique du calcul algébrique, on utilise des actions de réécriture (transformée) pour effectuer pas à pas les opérations signifiées : soit de façon à ne pas changer l'expression algébrique réécrite (mise en ordre, développement, factorisation etc...), soit de façon à préserver la relation d'égalité signifiée (les expressions changent mais restent égales entre elles). De sorte que les signes algébriques (nombres, lettres, parenthèses, +, - etc...) qui à un niveau donné représentent des opérations (et par là rendent compte des relations entre grandeurs) sont pris comme les traces d'opérations diverses (de type réarrangement, suppression de parenthèses, règle des signes, simplification... toutes opérations de traitement de la forme écrite qui permet de calculer sur les relations signifiées). L'effectuation des opérations elles-mêmes étant suspendue (pour un moment et plus ou moins partiellement).

On peut donc considérer une écriture de deux façons. Soit comme une organisation de traces écrites, soit comme la représentation d'opérations mathématiques (rendant compte de certaines mises en relation de la réalité traitée). Pour reprendre l'exemple du calcul algébrique, chaque équation intermédiaire peut être prise comme la trace des étapes de la résolution écrite, sans que l'on cherche le lien avec le problème traité ; mais elle peut aussi être considérée pour elle-même, comme l'expression d'une relation effectivement vérifiée dans le problème considéré.

Donc un système de signifiants est susceptible de s'enrichir d'opérations de plus en plus complexes et diverses, organisées entre elles (intégrées). Et ceci, même sans changement notable dans les signes utilisés ! Une écriture algébrique utilise toujours des symboles numériques et équationnels. Mais les signifiés s'élaborent. Si pour les élèves de 1P, dans 3+4=7 + et = sont assez indifférenciés, ce ne sera plus le cas pour celui qui traite de l'algèbre.

Dès lors, sur une écriture aussi simple que 3+4=7, le sujet peut accéder à 3 niveaux au moins : 1^{0} celui des données : 3 nombres, une opération, un résultat. A ce niveau, on peut se contenter de répondre 11 à l'item 8 = ... +3.

2^{0} Celui d'un calcul représenté dans son déroulement même. Sont alors pris en compte des facteurs de place des divers éléments. A ce niveau, on peut refuser de traiter l'item 8=...+3 car un petit nombre finit l'équation (3<8), on peut aussi lire l'équation à rebours pour restituer une séquence normale.

3^{0} Enfin, et au travers d'opérations portant sur l'organisation <u>globale</u> des données (et ne laissant pas forcément de traces écrites) celui des relations diverses exprimées. Ici on est au niveau d'un ensemble de relations qui vont de pair.

Le développement et l'apprentissage vont donc dans le sens d'une prise en compte d'ensembles de plus en plus larges et structurés même si la forme extérieure (signifiant) peut rester la même. Ainsi autour de l'écriture, de plus en plus d'opérations annexes vont graviter et seront à la charge du sujet - opérations organisées selon des formes séquentielles particulières : les algorithmes (qui en général s'appuyent sur des indices figuratifs locaux).

En mathématiques, les signifiants sont des objets d'actions. Ceci explique la solidarité des procédures et des systèmes de signifiants. On peut dire que ceux-ci <u>se construisent</u> , de la même manière que les objets. Ils sont ainsi perpétuellement réinvestis de significations nouvelles.

CHAPITRE III: QUELQUES DONNEES SUR DES ENTRETIENS AVEC LES ELEVES A PROPOS DU CALCUL LACUNAIRE.

III.1. Introduction

Le sens de ce chapitre s'inscrit dans la démarche générale de remettre progressivement les résultats d'analyse dans le contexte scolaire. Après les deux chapitres précédents restent 3 étapes. D'une part poursuivre du côté des élèves et montrer, sur exemples et résumés d'entretiens comment ces questions sont abordées par les élèves. Ceci est intéressant dans la mesure où les conditions changent. D'une part les élèves se trouvent en face de moi, et non plus seulement en face de leur feuille à rendre, d'autre part, j'ai systématiquement cherché la discussion avec les élèves. Discussion de leurs réponses, présentation d'autres réponses. J'ai donc dépassé le seul niveau de production des réponses. D'autre part bien sûr, cela donne des indications sur la manière dont se déroule (et de là peut se dérouler) l'échange entre maître et élève.

L'autre façon de poursuivre est de regarder du côté de l'enseignement. Comment s'organisent les activités faites en classe et en particulier la progression des exercices écrits. Ceci fera l'objet d'un prochain travail (en cours). L'intérêt particulier est alors celui-ci. On peut considérer ces exercices comme ADAPTES aux élèves et à leur façon de comprendre les calculs numériques. On retrouve alors la transformation d'un contenu de connaissance en une gamme de tâches scolaires.

La connaissance des opérations numériques est en premier lieu une "connaissance en action". C'est-à-dire très nettement liée à un contexte de tâches et d'échanges entre un élève sommé de trouver la réponse et un maître sanctionnant cette production. Ceci concerne tout autant le maître que l'élève. Il est assez difficile aux enseignants d'avoir accès, hors de son contexte, à toutes les connaissances (subtiles) qu'ils mettent en jeu dans l'action, dans leurs échanges avec les élèves. S'ils se rendent compte, sur exemple, car alors ils arrivent à se situer, de la finesse des ajustements réciproques, l'analyse de ceux-ci pour eux-mêmes leur paraît un exercice très abstrait (dont ils ne perçoivent pas toujours l'intérêt). Il serait très utile d'avoir de bonnes descriptions et analyses de la manière dont les enseignants s'y prennent dans leur enseignement. Par quelles consignes et images ils passent pour diriger leurs élèves. Ceci restera à faire.

Ce chapitre est très descriptif. J'ai limité les commentaires au maximum estimant que l'essentiel avait déjà été dit. Le lecteur pourra considérer ce chapitre comme annexe, illustration des analyses précédentes. En fait, je décrirai le cas d'un élève, et une anecdote de classe. Là autour je résumerai quelques entretiens avec des élèves de ces deux classes, ce qui montrera une certain invariance des réactions (conceptions) et ce, malgré les histoires différentes des classes étudiées.

III.2. Le cas de Céline.

III.2.1. 5 entretiens avec Céline.

1 19.1.79 Je rencontre ce cas lors d'un exercice fait en début de 1P. La maîtresse avait proposé un stencil où l'élève devait compléter des calculs en ligne en fonction de dessins d'objets divers.

1)

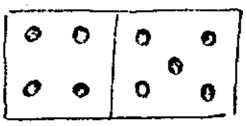
... + ... = ...

2)

... = ... + ...

... + ... = ...

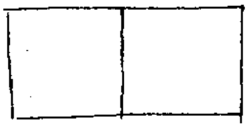
3)



... + ... = ...

... = ... + ...

4) 4+3 = 7



5) 10 = 5 + ...

A l'exercice 2 , Céline a écrit : 4=2+6
2+4=6

La maîtresse lui demande de se corriger. Céline envisage alors deux types de correction: 2=4+6 puis,comme cela ne convient encore pas 2+4=6. Mais la maîtresse lui dit qu'on ne doit pas changer ainsi la donnée (et la place des signes équationnels).

J'engage alors une discussion au cours de laquelle je me rends compte :

a) que je ne sais pas si Céline a calculé 2+4 ou si elle s'est contentée de dénombrer les fleurs sur son dessin.

b) pour elle, égale veut dire : LA MEME CHOSE. Mais elle ne sait pas CE QUE + VEUT DIRE. Finalement elle opte pour l'interprétation suivante : 6+2 ÇA VEUT DIRE QUE 6 EST PLUS QUE 2. Mais elle décode alors 2+6 en disant : 6 EST PLUS, 2 EST MOINS.

c) de même sa façon de lire les items est fantaisiste. Elle ne lit pas le signe =, elle saute le signe +, ou encore en disant: EN TOUT DEUX ET PUIS QUATRE ÇA FAIT EGALE SIX.

d) pour compter 4+6, elle trouve diverses réponses. La réponse 10. Mais aussi de façon "comptine". Pour le nombre 4, elle lève 4 doigts de la main gauche (auriculaire plié). Puis elle représente 6 en levant le pouce de la main droite (auriculaire gauche toujours baissé). Elle me demande alors : FAUT-IL COMPTER LE 5 ? Je lui demande ce que ça donne "sans compter le 5". <u>Réponse :</u> 4+6=6 "Et en le comptant?" <u>Réponse:</u> 4 ET PUIS 6,4 5 6 (en levant l'auriculaire).

e) On essaye d'autres calculs: $10=5+\overset{15}{\ldots}$ et $5=4+\overset{9}{\ldots}$.

f) Elle accepte qu'on écrive 4=5 mais refuse 5=4.

g) Enfin, je lui indique la réponse attendue à l'exercice. (6=2+4 ou 6=4+2). Cela ne l'empêche pas de faire la même erreur aux calculs suivants.

---

2 24.1.79

a) Ce jour-là, Céline me déclare spontanément qu'elle a compri Entre temps, elle a fait une fiche en classe. (OP 9 1ère édition... où on demande différentes décompositions du nombre 9. Elle me déclare : C'ETAIT A L'ENVERS (9=...+..., est,selon elle,écrit à l'envers).

b) Je lui propose alors un exercice analogue à celui du bouque (séance précédente). Elle se trompe à nouveau et, à nouveau, elle ne "lit" pas les symboles dans l'ordre. En fait elle a tendance à oublier de les lire puis quand je lui demande de relire elle n'arri pas bien à les "situer".

c) On passe alors à des comptages sur les doigts. Tout d'abord, elle ne réussit pas à compter 3+8 parce qu'elle n'a que dix doigts. Mais elle réussit à faire 8+3. Devant alors essayer à nouveau 3+8, elle trouve 13. En commençant par le petit nombre, elle a de la peine à savoir comment commencer: par un deux trois (réaliser 3) ou par trois quatre cinq etc... (compter 8 au delà de 3). De plus elle ne sait alors pas très bien où s'arrêter: dans les parages de 8 (plusieurs essais: 7, 8, 9..). Une fois que 3 et 8 ont été prononcés, elle ne sait plus très bien quoi faire.

d) Je lui propose alors des écritures complètes. Une fois qu'elle a repéré (sous mes indications) la relation qu'il y a entre les données, elle accepte n'importe quelle écriture : 3+6=9 9=3+6 3=6+9 6=3+9. Il y a donc une tâche très différente pour elle entre écrire un calcul (compléter) et juger une écriture complète. A l'écriture, le résultat est toujours à droite. A la lecture, peu importe.

e) Je lui propose une liste de calculs "complets" à juger, cette tâche n'a pour elle aucun sens.

---

3 $\boxed{26.1.79}$

Je lui demande de faire un calcul lacunaire, mais d'opérer en dessinant des petites croix et non pas mentalement ni sur les doigts. Elle ne change pas d'interprétation. Confrontée aux deux réponses : 3=3+6 (sa réponse) et 9=3+6 (celle d'un camarade), elle opte pour 3=3+6. Face à ce camarade, elle se met d'accord avec 9=3+6. Elle justifie alors son avis de la manière suivante : LÀ (9=3+6) Y EN A BEAUCOUP PLUS (de croix) ALORS C'EST CE QU'IL FAUT FAIRE.

---

4 $\boxed{31.1.79}$

Ce jour-là, je suis peu inspiré. Je me propose de faire avec des jetons. Mais l'usage de cartons $\boxed{=}$ et $\boxed{+}$ amène la tâche à n'être qu'une figuration des écritures.

a) Je lui demande d'aller chercher 20 jetons. Je dispose alors 10 jetons en ligne puis la carte $\boxed{=}$. Je lui demande de compléter avec des jetons et la carte $\boxed{+}$ "pour faire un calcul". Elle dépose alors les 10 jetons restants en ligne après la carte $\boxed{=}$ en récitant à haute voix : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Elle dit alors : EN TOUT ÇA FAIT 20. Il y a donc eu confusion de sa part: elle en est restée à ma demande d'aller chercher 20 jetons.

b) Je dispose alors oooooooooo$\boxed{=}$ooooo en lui demandant de compléter. Elle ne saisit pas ce qu'il faut faire. Je lui propose de faire comme elle veut. Elle met ooooo$\boxed{=}$ooooo . Je lui demande alors : "fais un calcul avec ça; elle met ooooo$\boxed{+}$o$\boxed{=}$oooo et dit : CINQ PLUS UN EGALE SEPT HUIT NEUF DIX. Puis elle se reprend et dit : CINQ PLUS UN EGALE SEPT. (cinq, le un c'est six, ensuite c'est sept). On retrouve donc la même interprétation qu'avec les doigts (1°19.17.9 point d)).

c) Toujours avec les jetons et les cartons, toujours de cette façon ridiculement figurative, je lui demande "d'inverser" la disposition du "calcul" : oooo$\boxed{+}$o$\boxed{=}$oooooo. Elle n'arrive pas, et laisse toujours la grande quantité de jetons à droite. Elle se contente alors d'intervertir les cartons $\boxed{+}$ et $\boxed{=}$.

d) Reprise du comptage sur doigts. 3+4: Elle réalise 3 avec une main (3 doigts levés) 4 avec l'autre (4 doigts levés) ; elle compte le tout en touchant successivement sa lèvre avec chacun des doigts levés. 3+4=7. 3+8: Elle ne sait pas où s'arrêter. Elle compte de 3 à 8 puis hésite, propose 3+8=9.

---

5 $\boxed{2.2.79}$

a) Je me rappelle du cas de la fiche OP9 (2° 24.1.79). Et je lui demande d'entrée: "Pour faire 10 il faut 6 plus ?" Elle ne me laisse pas finir ma phrase et dit : SIX SEPT HUIT NEUF DIX, QUATRE ENCORE. Puis spontanément elle écrit : 6+4=10 puis à côté en français : pour fair 10 il feau;elle souligne alors le 4 et le 10 ($6+\underline{4}=\underline{10}$).

b) Je lui propose le calcul 5+1=3+... . Elle compte puis propose la réponse 9. Quand je lui montre la réponse 5+1=3+3, elle lit: CINQ PLUS UN PLUS TROIS PLUS TROIS et effectue le comptage (trouve 12).

Ici s'arrêtent les entretiens avec Céline. Car je passe à d'autres élèves. De temps en temps, en passant je glisse une question à Céline. Ce n'est qu'en juin qu'elle décrochera sur les formes a=b+... . Et ce assez mystérieusement, ni la maîtresse, ni ses parents (ni moi) ayant eu d'autres interventions à ce sujet.

Entretemps, il y aura eu la passation de 30 items (sur 5 jours) écrits, alors que je voulais tester l'épreuve papier crayon sur ces élèves avant de commencer la recherche proprement dite. Il y a eu aussi deux confrontations de Céline avec des camarades. L'un très au fait des calculs et des écritures, puis l'autre beaucoup plus hésitant. Quel impact cela a-t-il eu sur Céline ?

Je vais maintenant relater ces confrontations.

III.2.2. Deux protocoles de confrontation.

1° 14.3.79

Céline est confrontée à Vincent L. qui est un "champion" de calcul. Il a réussi tous les items écrits sans problèmes.

Expérimentateur	Céline	Vincent
Bon, voilà un calcul (7=2+...) Céline, tu le fais et Vincent, tu diras si tu es d'accord.		
	Céline lit la donnée (7=2+...)elle compte et répond : $7=2+\overset{9}{\ldots}$	
		Vincent: C'EST FAUX, JE NE SUIS PAS D'ACCORD.
	Céline veut effacer elle dit 9+7=7, JE SUIS BÊTE ...	
		Vincent : JE SAIS, LÀ IL FAUT QUELQUE CHOSE (dans la lacune) MAIS PAS 9.
Vincent, laisse faire Céline. Tu expliqueras ensuite.		
	Céline compte: 2 3 4 5 6 7 8 ...	
		Vincent: ICI (il montre la lacune)
	Céline: met $7=2+\overset{10}{\ldots}$	
		Vincent: NON ! CE N'EST PAS ÇA
	Céline: ALORS VAS-Y! QU'ON VOIE!	
		Vincent: écrit en-dessous de la réponse de Céline: $7=2+\overset{5}{\ldots}$ Il marque ses initiales à côté de son calcul et celles de Céline à côté de $7=2+\overset{10}{\ldots}$
	Céline: JE NE SUIS PAS D'ACCORD, C'EST FAUX. Elle veut effacer	
Quelle est ta solution (Céline)?		

Céline: ON VA VOIR ÇA, JE VAIS COMPTER.

Vincent: COMPTE D'ABORD 2!

Céline écoute cette suggestion. Elle fait 2 avec les doigts d'une main, elle compte 34567 avec les doigts de l'autre main, elle dit C'EST FAUX ($7=2+\overset{10}{\ldots}$) et corrige :$7=2+\overset{7}{\ldots}$

Vincent: ÇA FAIT 9, T'ES SONNEE !
il écrit 9 au-dessus de l'équation de Céline: $\overset{9}{7}=2+7$

Céline: NON, C'EST $7=2+\overset{7}{\ldots}$!

Vincent: NON, C'EST $7=2+\overset{5}{\ldots}$

Il s'ensuit une bagarre entre Céline et Vincent, chacun voulant effacer (barrer) la solution de l'autre. Je coupe court et demande: Vincent, explique comment tu calcules.

Vincent: REGARDE (il fait deux avec une main et 5 avec l'autre).
REGARDE, DEUX ET UN, DEUX, TROIS,QUATRE,CINQ,SIX,SEPT 5 PLUS 2 EGALE 7.
(il fait deux, fait cinq,il compte les cinq et enchâine en reprenant les deux de l'autre main: son comptage est bien 5+2.

Céline: 7=2+7

Vincent: MAIS NON!LE EGAL EST EN AVANT,PAS EN ARRIERE. $7=2+\overset{5}{\ldots}$ IL FAUT FAIRE COMME ÇA.

Pourquoi? (Vincent)

Vincent: DEUX ET PUIS ENCORE CINQ, 2, 3 4 5 6 7 (il lève successivement les 5 doigts d'une main)
C'EST JUSTE, C'EST CE QUE J'AI FAIT QUI EST JUSTE. ELLE FAIT EXPRÈS OU QUOI?

Céline: DEUX ET PUIS SEPT, ÇA FAIT 7.

Vincent: MAIS NON, 7 C'EST DEJA AVEC 2,... PUIS TU CROIS QUOI ?

Céline écrit alors:
7=2=11
(est-ce 7=2+9 et 2+9=11?)

Comment tu as fait ça (Céline) ?

Céline: Y A 7 ET PUIS ENCORE 2 ÇA FAIT 11.

Vincent: IL FAUT METTRE PLUS, PAS EGAL (il veut 7+2 et pas 7=2)

Céline: AH OUI! Elle écrit 7+2=11.

Vincent lit:
7 ... ÇA FAIT 9

Céline n'est plus sûre de son calcul.

Vincent, expliques encore une fois ton calcul.

Vincent: DEUX, UNE DEUX (deux doigts). JE FAIS 5 C'EST ECRIT 5, REGARDES, J'AI CINQ DOIGTS. ALORS ÇA FAIT 234567,ALORS C'EST JUSTE.

Céline: NON 7=2+11

Céline, tu as compris ce qu'a dit Vincent ?

Céline: Y A 2 ET PUIS 5, C'EST 5 6 7.

Ecris ce qu'il a dit.

Céline écrit 5 6 elle l'efface elle écrit 5+6=7.

C'est ce que Vincent a dit ?

Céline: OUI

Vincent: T'ES SONNEE, ÇA FAIT 11.

Céline: AH OUI. JE RECOPIE 5+6=11

Vincent: ÇA C'EST JUSTE.

Céline: C'EST PARCE QUE JE N'AVAIS PAS COMPTE SUR MES DOIGTS, APRES, IL M'A DONNE LA SOLUTION, ALORS J'AI ECRIT SANS COMPTER.

Bon mais qui a raison : Céline ou Vincent ?

Nouvelle bagarre entre les deux

Je propose les calculs écrits suivants, à faire chacun pour soi :

6=2+...	$6=2+\overset{8}{\ldots}$	$6=2+\overset{4}{\ldots}$
4=...+4	4=...+4 8	$4=\overset{0}{\ldots}+4$
6+...=2	6+...=2 8 C'EST LA MEME QU'EN HAUT	~~6+...=2~~
8=8+...	JE NE SAIS PAS	$8=8+\overset{0}{\ldots}$
	FIN	

2 $\boxed{9.5.79}$

La confrontation Céline, Denys est précédée d'un entretien avec Denys.

Fais ce calcul: 7=2+...	Denys: compte et met $7=2+\overset{9}{\ldots}$
On m'a aussi répondu $7=2+\overset{5}{\ldots}$	Denys: OUI MAIS ÇA (7=2+5) C'EST DANS L'AUTRE SENS. Denys écrit des flèches sous les équations: $\underrightarrow{7=2+\overset{9}{\ldots}} \qquad \underleftarrow{7=2+\overset{5}{\ldots}}$
Egal, ça veut dire quoi?	Denys : JE NE SAIS PAS, JE NE ME RAPPELLE PLUS.
Plus, ça veut dire quoi?	Denys: ÇA JE SAIS, ÇA VEUT DIRE: Y A UN NUMERO QUI RAJOUTE.
Quel numéro? rajoute quoi?	Denys: regarde sa feuille. MAIS MAIS, LÀ Y AVAIT + ET LA = ? (il croit qu'il y avait 7+2=9 et non pas 7=2+9)
Non, je n'ai rien changé!	Denys: C'EST DRÔLE, C'ETAIT POUR FAIRE 7 ! LÀ Y A + , 9+2 ÇA FAIT 11
Ecoute, on va refaire le calcul: 7=2+...	Denys: refait, et... remet 9 ! $7=2+\overset{9}{\ldots}$
Montre-moi le +, le =.	Denys les souligne. AH NON C'EST PAS ... 9 PLUS 2 C'EST PAS 7.
Refais alors.	Denys hésite. Il écrit $7=2+\overset{5}{\ldots}$

Et ça:...=1+5?

Denys met 6

On m'a répondu
$\overset{4}{\ldots}=1+5$

Denys: LE 5 C'EST JUSTE, LE 1 C'EST JUSTE, MAIS PAS LE 4.

Je fais venir Céline pour la confrontation

Céline

Denys

Céline, je te pose un calcul. Denys ne dis rien. Après vous discuterez.

J'écris 7=2+...

Céline: compte et note $7=2+\overset{9}{\ldots}$

Denys: NON, C'EST FAUX.

Attends Denys.

Céline, ça veut dire quoi égal ?

Céline: EGALE,C'EST COMME ÇA.
Elle écrit 10+1=11

Et plus ça veut dire quoi?

(Céline: pas de réponse).

Il est où le plus dans le calcul. Tu peux lire ?

Céline: ICI (7=2+9) C'EST 2 EST PLUS QUE 9 ... NON,9 EST PLUS QUE 2.

Tu es sûre?

Denys: PLUS, ÇA VEUT DIRE AJOUTER UNE LETTRE,AJOUTER UN NUMERO.

Céline: NON, DIX PLUS 1, 10 C'EST PLUS QUE 1,10 EST PLUS GRAND.

Lis ce calcul. Est-ce juste ?

Céline: 7 EGALE 2 PLUS 9,OUI!

Denys: C'EST PAS JUSTE. C'EST COMME MOI AVANT.C'EST ICI EGALE.(il entoure le signe = dans 7=2+9) ET ÇA DOIT FAIRE 9. TU DOIS RAJOUTER QUOI? ÇA PEUT PAS FAIRE 9. LE 2 IL EST DEJA COMPTE.

Céline: ALORS LE 2 IL VIENT EN PLUS ? Elle écrit 7=2+7

Denys: NON LE 2 TRACE (il le barre) AUTREMENT ÇA FAIT 9

Céline, lis le calcul (7=2+9)

Céline: 7 PLUS 2 ...

Denys: NON! POUR FAIRE 7! NON 7 IL Y A EGALE, PAS PLUS

Céline: corrige: $7=\cancel{2}\overset{7}{+}\cancel{9}$

Denys: NON, ICI Y A EGALE, PAS PLUS. TU FAIS LE CONTRAIRE. LIS DANS L'AUTRE SENS! Il écrit 7=2+5 et une flèche: ←

Céline: JE SUIS DROITIERE,JE LIS COMME ÇA.
Elle met sa flèche $\underrightarrow{7=2+5}$

Aie aie écoutez-vous. Tu voulais dire autre chose Denys ?

Denys: C'EST 7=2+5, POUR FAIRE 7, 5 PLUS 2.

Récréation. On reprendra après la classe.

Reprise.

Céline: répond $7=2+\overset{7}{\ldots}$

Bon. Redites-moi: + ça veut dire quoi?

Céline: QUE 10 EST PLUS GRAND QUE 1, 10 EST PLUS QUE 1
10+1=11.

Mais ici! ce +

	Denys: ÇA VEUT DIRE, ON RAJOUTE UN NUMERO. METTRE DES NUMEROS, 1, 2, N'IMPORTE.
Quel numéro?	
	Denys: N'IMPORTE
Mais dans ce calcul ?	
Céline: PLUS, PLUS 7	
Denys, tu es d'accord ?	
	Denys: $7=2+\overset{7}{...}$. ÇA VEUT PAS FAIRE 7, ÇA FAIT PAS 7.
Céline corrige $7=\cancel{2}+7$ puis elle enchaîne: SI ON TRACE LE 2,... elle écrit alors : 3=4+7	
Bon. Un dernier exercice : ...=...+7.	
Céline : ne lit pas le =. Elle commence par écrire $\overset{1}{...}=...+7$	
	Denys: MAIS ?
Céline: se corrige alors. AH NON, J'ECRIS ICI (en-dessous) $\overset{1}{...}+\overset{5}{...}+\overset{1}{...}=7$	
Toi, Denys, tu ferais quoi ?	
	Denys: $\overset{13}{...}=\overset{6}{...}+7$ 6 PLUS 7 ÇA FAIT 13.
Céline: NON! $\overset{6}{...}=\overset{1}{...}+7$	
FIN	

Commentaire sur les protocoles.

1^{o}. Ce type de protocoles est très parlé, relativement peu agi. Mais malgré tout on regardera les formulations des élèves et en particulier celles de Denys.

2^{o}. Alors que, dans le premier protocole, il est surtout question de comptage, dans le second, fait 2 mois plus tard, la discussion porte beaucoup plus sur l'écrit. Il y a là un net changement. En mai, les élèves commencent à savoir par coeur un certain nombre de sommes élémentaires (ou de la table d'addition si vous préférez). Cela est peut-être dû aussi à Denys qui, on le voit est très centré sur l'écriture.Il n'arrive pas encore à bien intégrer écriture et comptage.

3^{o}. A ce propos deux autres remarques : A) Denys ne sait pas (déclare ne pas savoir) exactement ce que le signe = veut dire. Tandis que sa définition pour + est relative à l'écriture (à vrai dire pas totalement, mais exprimée comme telle: "rajouter une lettre, rajouter un numéro).D'autre part, Denys repère la forme (triplet) ◒+● dans l'écriture d'un calcul. On peut ainsi voir que c'est après avoir complété le calcul lacunaire 7=2+... par $7=2+.\overset{9}{.}.$ qu'il s'aperçoit de l'erreur ; il argue que 2+9 fait 11 et pas 7. D'où correction. Ainsi l'opération 7+2 qui lui paraissait pertinente tant que le calcul n'était pas complet n'est plus du tout envisagée, ni même critiquée pour elle-même. D'autre part, Denys ne se trompe pas avec un autre item ...=1+5 qui lui aussi est écrit avec un égal initial. B) Céline ne donne pas une signification précise au signe +. Tandis que, pour elle, = concerne (signifie) l'ensemble d'un calcul. Ainsi: 10+1 "parce que 10 est plus que 1" - une comparaison des données sans calcul. Et 10+1=11 "égal c'est comme ça". On voit dans cet exemple que opération de calcul (comptage) et opération de comparaison sont encore partiellement indifférenciées. Signalons aussi le passage de $7=2+.\overset{9}{.}.$ à $7=2+.\overset{/}{.}.$, passage qui avait déjà été observé dans la première séance d'entretien avec Céline et qui à mon avis est typique du comptage. (cf. séance 19.1.79 - 1^{er} : 4+6=6, Séance du 24.1.79- 2^{e}: remarque à propos de la fiche OP9.) Je dirai que pour Céline le rapport addition/complémentation passe par "aller au delà de 7/s'arrêter à 7". Ce qui n'est pas loin de "pour faire 7".

III.2.3. Pour comparaison avec Céline, les avis de ses camarades.

Aussitôt après avoir eu les premiers entretiens avec Céline, j'ai voulu comparer sa façon d'interpréter avec celle de ses camarades. Ceci aura pris deux formes. D'une part le test des questions de l'épreuve papier-crayon que j'allais proposer ensuite à 5 classes "neutres" et dont j'ai fait l'objet de cette recherche. Ce test a donné des résultats très similaires à ceux analysés précédemment, je n'en parlerai donc plus. D'autre part, des interviews de camarades de Céline, choisis au gré des occasions, dont je vais donner quelques descriptions.

Le canevas d'entretien était le suivant:

a) je donnais le calcul écrit 5+1=3+9 à juger. Sans autres commentaires.

b) je racontais l'histoire suivante: "Céline devait répondre au calcul 5+1=3+... (je l'écrivais ainsi à ce moment) et elle a mis 9 là (j'écrivais un 9 au-dessus de la lacune). Qu'en penses-tu? S'ensuivait une discussion. En cas de désaccord:"Qu'est-ce que tu mettrais?"

c) Eventuellement, je proposais encore l'écriture 5+1+3=9 etc.

d) Je reprenais l'entretien avec l'histoire suivante: "Céline devait répondre à la question: 6=2+... et elle a répondu 8 (j'écrivais alors un 8 au-dessus de la lacune) Qu'en penses-tu?" La discussion continuait selon le schéma précédent.

On peut classer les 10 extraits qui suivent en 3 catégories. Tout d'abord un groupe d'élèves qui hésitent à trouver la réponse 9 correcte. Soit qu'ils pencheraient pour une réponse "somme totale", soit que découvrant la relation qu'il y a entre 5,1,3 et 9, cette réponse (9) leur paraisse d'autant plus plausible. De toutes façons, ces élèves découvrent que 5+1+3 fait 9. Le second groupe d'élèves refuse la réponse de Céline. Mais ils ne répondent pas tout à fait correctement. Certains optent pour une réponse partielle 5+1=6+0 ou 5+1=3+6... voir Johanne 5+1=3+2 (pour 5=3+2). Dans tous ces cas, la correction ne porte pas seulement sur la réponse de Céline. L'argument qui ressort pour le refus de 5+1=3+9 est avant tout celui-ci:

"5+1 ça fait 6 et 3+9 ça fait 12" (sous-entendu: donc ça ne peut pas être égal). Enfin un troisième groupe d'élève qui répondent correctement.

Remarquons encore les choses suivantes:

1. On m'a demandé à plusieurs reprises: "c'est pour faire combien?" Ceci dénote une hésitation entre deux réponses qui peuvent être 5+1 fait 6, 3+9 fait 12 ou encore 5+1 fait 6, 5+1+3 fait 9. *Ceci dénote aussi qu'une certaine marge d'interprétation subsiste sur l'écrit qui est donc susceptible d'être lu différemment selon le context* (selon "pour combien il faut faire").

2. Un certain nombre d'élèves ne s'aperçoivent pas que 5+1+3 fait 9 ni même que 6+2 fait 8.

3. La plupart du temps, sur l'écriture complète, c'est le triplet •+• qui est lu.

4. Un seul élève trouve la correction de 5+1=3+9 en 5+1+3=9. Et ce juste après avoir fait ce calcul, et s'être rendu compte que 5+1+3 faisait 9 justement.

Groupe 1. *Hésitants avec St.*

1. *Denys* (celui de l'entretien précédent mais en février et pas en mai)

a) Je raconte l'histoire de Céline. Denys demande : C'EST POUR FAIRE COMBIEN ? C'EST POUR FAIRE 6? LA (5+1) ÇA FAIT 6 ET LA (3+9), 3 4 5 6 7 8 9, 9? JE NE SAIS PAS !

b) Je raconte la seconde histoire pour 6=2+$\overset{8}{\ldots}$. Denys est d'accord avec cette réponse.

c) Il revient alors à St(=3+9). Il explicite ce qui le gène: LA 6, ET LA 3+9, MAIS POURQUOI TU AS MIS LE EGALE? Je lui demande d'écrire de façon à ce que ce soit correct. Il écrit 5+1=6. Puis enchaîne avec d'autres égalités: 1+6=7 et, pour varier, 7=1+6 puis 6=1+6 corrigé aussitôt en 6=1+7. C'EST LE CONTRAIRE dit-il puis il se ravise NON, C'EST PRESQUE PAS LE CONTRAIRE, LE CONTRAIRE DE CELUI-CI (6=1+7) JE PEUX LE FAIRE, C'EST (il écrit): 7+1=6. J'écris alors les 4 égalités en lui demandant lesquelles sont justes. Il indique alors du geste dans quel sens on doit lire ces égalités (qui dès lors sont toutes correctes à ses yeux). $\underrightarrow{6=1+7}$ $\underleftarrow{7=1+6}$ $\underleftarrow{7+1=6}$ $\underrightarrow{1+6=7}$.

d) <u>Denys</u> ne sait pas me dire ce que égal signifie, il ne sait que le lire .(<u>remarquez qu'il en sera de même en mai</u> !)

2. <u>Vincent D.</u>

a) Présentation de 5+1=3+9. Vincent est étonné.

b) Quand je raconte l'histoire (dans son déroulement) le calcul lui est suggéré. Il est alors d'accord PARCE QUE 5 PLUS 1 ÇA FAIT 6.. 7 8 9. C'EST JUSTE, CINQ PLUS UN EGALE TROIS PLUS NEUF. Je lui demande s'il est bien d'accord. Il hésite, il déclare: LA (avant le 9) IL FAUDRAIT Y AVOIR UN SIGNE EGAL. OUAIS, 5 PLUS 1 EGALE 3 EGALE 9 ! Puis reprend, il exprime par geste que c'est difficile de prendre les 3 premiers chiffres, il écrit 5+1=3=9 puis 5+1+3=9. ça y est.

c) Pour Vincent D. égale veut dire : la même chose. LA (5+1+3) C'EST LA MEME CHOSE (que 9) MAIS PAS 9.

d) Devant la présentation de $6=2+\overset{8}{\ldots}$, V.D. est partagé. QU'EST-CE QUI FAIT 8? 6 ET PUIS 2 ÇA FAIT JUSTE. Il trouve que c'est juste (6 7 8 dit-il) mais peut-être c'est faux (CAR 2 PLUS 8 ÇA FAIT 10). De même, lorsque je lui présente la réponse $6=2+\overset{4}{\ldots}$, il dit: C'EST AUSSI JUSTE MAIS C'EST UN AUTRE CALCUL. D'ailleurs. V.D. lit effectivement ce calcul de <u>droite à gauche</u> : "4 5 6"

Devant l'écriture complète 6=2+8, V.D. serait même prêt à compter le tout, c'est-à-dire 16.

3. <u>Martin.</u>

a) Tout d'abord, il n'est pas d'accord: 3+9 ÇA NE FAIT EN TOUS CAS PAS 6 (sous-entendu 6 parce que 5+1). Il propose l'écriture suivante : 5+1=6+0.

b) A l'explication, il saisit la relation. CINQ PLUS UN PLUS UN DEUX TROIS (il compte), ÇA FAIT 9, C'EST JUSTE ! Je lui demande s'il est d'accord avec la réponse $5+1=3+\overset{9}{\ldots}$. Il me demande alors: C'EST POUR FAIRE 9 OU POUR FAIRE 6? SI C'EST POUR FAIRE 6, C'EST PAS JUSTE;

SI C'EST POUR FAIRE 9, C'EST JUSTE. Il pencherait maintenant pour 9. OUAIS, 5 PLUS 1 PLUS 3, ÇA FAIT 9.

c) Je lui demande de lire l'égalité : 5 PLUS 1 EGALE 3 PLUS 9... ÇA JE NE COMPREND PAS CE QUE CELA VEUT DIRE !

d) Je lui demande ce que égale veut dire. C'EST LA MEME CHOSE, QU'ON PEUT METTRE ENSEMBLE. Spontanément il prend l'exemple suivant: 5+1 EGALE 6 ET 3 PLUS 3 EGALE 6, ON PEUT METTRE ENSEMBLE. ÇA FAIT LA MEME CHOSE.

e) Comment corrigerait-il l'écriture 5+1=3+9 "Pour faire 9?" Il écrit alors : 5+4 =3+9 puis 5+4=9. Je lui montre 5+1+3=9. Il n'arrive pas à lire cette égalité du premier coup, puis vérifie le calcul et comprend que c'est une correction possible.

Groupe 2. <u>Refusent la réponse de Céline pour une somme partielle.</u>

4. <u>Sabine.</u>

a) Elle regarde l'égalité et refuse. Elle aurait écrit 5+1=6+0.

b) de même elle refuse 6=2+$\overset{8}{\ldots}$, car ÇA FAIT PAS 6, ÇA FAIT 10. elle aurait mis 6=2+$\overset{4}{\ldots}$.
En général elle hésite, ne sait pas très bien comment se déterminer avec la forme écrite.

5. <u>Fabrice.</u>

a) Il lit correctement l'égalité présentée. Il ne sait pas, me demande : C'EST POUR FAIRE COMBIEN? JE NE COMPRENDS PAS 5+1 CA FAIT 6

b) Il ne comprend pas mieux avec l'histoire de <u>Céline</u>. Il aurait mis 6. Je lui demande s'il écrirait 5+1=3+$\overset{6}{\ldots}$. Il acquièce. Il ne comprend pas où je veux en venir.

c) 6=2+$\overset{8}{\ldots}$. C'EST PAS ÇA QU'IL FAUT, 2 (il fait 2 avec ses doigts) PUIS JE COMPTE 8, ÇA FAIT 10.

d) Que veut dire égale? ÇA VEUT DIRE AUTANT. Je lui demande de lire 6=2+... Il lit : 6 EGALE 2 PLUS... 4 POUR QUE ÇA FASSE 6. Il ne comprend pas comment Céline a trouvé 8.

e) Ensuite, il essaye de compter 5+15. Il fait 5 avec ses doigts puis essaye de faire 15 mais renonce, il n'a pas assez de doigts. 10+10 ÇA JE SAIS, ÇA FAIT 20. Je lui propose 5+10, il n'arrive pas. Puis 10+5. Là il trouve et fait aussitôt une relation avec l'écriture des unités (le 5 et le 5 de 15).

6. Martine.

a) Elle n'est pas d'accord. Elle aurait mis 5+1=4+2=3+3 POUR QUE ÇA FASSE 6. Tandis que 5+1ÇA FAIT 6, 3+9 ÇA FAIT 12, 5 PLUS 12 ÇA NE VA PAS, 6 PLUS 12 NON PLUS.

b) Quand je raconte l'histoire de Céline, elle corrigerait de la façon suivante: 5+1=3+9=12.

c) De même pour $6=2+\overset{8}{\ldots}$, elle déclare: LE VRAI CALCUL, C'EST PAS COMME ÇA. Elle corrigerait en: 10=2+8, puis 6=2+4.

d) Je lui demande de changer une chose de $6=2+\overset{8}{\ldots}$ pour faire juste. Elle réfléchit puis écrit 6+2=8 en intervertissant + et = . Mais elle n'arrive pas à faire cette correction à 5+1=3+9.

e) Elle ne voit pas que 5+1+3 fait 9.

7. Johanne.

a) Elle dit qu'elle ne comprend pas, qu'elle peut lire (5 plus égale 3 plus 9) mais qu'elle ne comprend pas.

b) Elle ne comprend toujours pas. Elle aurait mis : $5+1=3+\overset{2}{\ldots}$ elle souligne 5, 3 et 2. Puis quand je lui demande de lire son égalité, elle se corrige en mettant : 5+1=6 3+2=5.

c) Elle refuse la proposition de réponse : $5+1=3+\overset{3}{\ldots}$.

8. Mélanie.

a) Elle lit (5 plus 1 égale 3 plus 9) et dit qu'elle ne comprend pas. Elle dit que 5+1 fait 6.

b) Elle comprend l'histoire de Céline, mais elle aurait mis la réponse 3.

c) Je lui présente la réponse de Céline: $10=5+\overset{15}{\ldots}$. NON, POUR FAIRE 10, 9+1=10 COMME ÇA. Je lui dis que Céline aurait écrit 10=1+11. NON, POUR FAIRE 11, 10+1=11. Puis elle s'embrouille. Accepte 10=1+11 puis plus tard elle se relit : 10 PLUS 1 PLUS 11 ... OUAIS... IL FAUT CHANGER CE EGALE. Elle écrit alors 10+1+11. Je lui demande de lire ... elle se corrige enfin 10+1=11. (on notera donc la correction non solidaire du + et du égale).

d) Retour à 5+1=3+9. Elle propose de corriger en 5+1=6+0. Je lui propose 5+1+3=9. Elle n'admet pas ça comme écriture. C'EST JUSTE QUAND ON DIT MAIS PAS QUAND ON ECRIT. Même réponse pour la proposition 5+1=6+3=9.

Groupe 3. Réponses tout à fait correctes.

9. Vincent L. (le même que celui du protocole avec Céline III.2.2)

a) Pas d'accord car 5+1 ÇA FAIT 6 ET 3+9 ÇA FAIT 12. JE POURRAIS CORRIGER, enchaîne-t-il, $5+1=3+\overset{3}{\ldots}$.

b) $6=2+\overset{8}{\ldots}$? non car 2+8 ÇA FAIT 10. Il écrirait : $6=2+\overset{4}{\ldots}$. Je lui demande de lire cette égalité : Il lit 6 (lève les 6 doigts) 2 (il fait 2 avec les doigts), 2 ET PUIS 4 ÇA FAIT 3 4 5 6.

c) Dans quel sens tu lis ? Il fait par geste: gauche droite, puis déclare : AVEC LES CALCULS ON PEUT LIRE DES DEUX COTES.

d) Il est d'accord que égal soit lu par "ça fait". Je lui demande alors de relire les égalités de Céline en disant "ça fait".

Il lit : 6 ÇA FAIT 2 PLUS 8, NON ÇA FAIT 10 ET DE MEME 5 PLUS 1 ÇA FAIT 3 PLUS 9, NON ÇA FAIT 12.

10. Michel.

a) Michel refuse : NON 5+1=3+3. Il fait un signe dans le sens droite gauche ($5+1=\underline{3+3}$)

b) Il déclare à propos de Céline : Y A DES CALCULS COMME ÇA, QUAND ON VEUT FAIRE VITE. Puis il compte :5+1...6...+3...9. Il déclare LE EGAL NE VA PAS, IL FAUT 5+1+3=9.

* * *

III.3. Une classe exemplaire.

III.3.1. Une maîtresse sauve ses élèves.

Pour mon épreuve, une 6e classe avait été contactée. J'ai assisté à la passation. L'institutrice avait la particularité de doubler le programme officiel de mathématiques, d'un programme "de mathématiques plus traditionnelles" à ce qu'elle m'avait expliqué. Ses élèves étaient très exercés au calcul. A l'époque où je suis venu (mai) elle avait déjà abordé la soustraction (ce qui se fait généralement en 2e primaire) et les élèves avaient fait beaucoup de calculs jusqu'à 17, avec entre autres des décompositions multiples de type 17= ... +...+...+... . Cette maîtresse utilisait aussi beaucoup d'images gestuelles pour ses explications. + voulait dire assembler, embrasser (elle faisait ce geste avec les bras) - voulait dire tirer, retirer.
Pour = elle utilisait (lorsqu'il le fallait) une image de balance. Enfin son explication pour $7=2+\overset{9}{\ldots}$. "Il y a là un peu de paresse, c'est tellement plus simple de prendre les 2 chiffres donnés. Ils ne lisent pas la question."

Lors de la passation, c'est moi qui présentais les items. Cependant la maîtresse est intervenue à chaque fois pour bien expliquer Ainsi, elle donna la consigne suivante pour l'item ...+...=5 : Pour faire 5, il faut combien et puis encore combien ?" Sans que je puisse intervenir. Autant dire que l'expérience était mal engagée.

Un événement de taille se produisit à l'occasion de l'épreuve IV. Il avait été convenu avec les élèves que s'ils avaient une question à poser relativement à la donnée, ils pouvaient lever la main, et que je passerai dans les rangs. Pour l'épreuve IV beaucoup de mains levées. La maîtresse a voulu me donner un "coup de main" et a voulu répondre à un élève. En passant dans les rangs, j'avais remarqué que cette épreuve posait problèmes, contrairement aux 3 autres. Répondant à un élève, à propos d'un item, la maîtresse s'est alors exclamée : "mais pensez aux balances"*s'adressant en fait à toute la classe. A ce moment, dans la classe les élèves poussent un grand soupir de soulagement, et Isabelle dit: "Ah ! je croyais que c'était impossible, et puis non ...". Les mains aussitôt se sont baissées.

Les résultats de cette classe ont été excellents. A l'épreuve IV, la plupart des élèves ont corrigé une première réponse incorrecte.

Note.

* La balance est une image pour les égalités. Chaque membre de l'équation est considéré comme un des plateaux et cela sous-tend l'explication de la tâche: Il faut faire que ce soit la même chose des deux côtés de la"balance".

Ceci montre qu'avec l'exercice d'une part et certaines indications sur la tâche, soit explicites, soit imagées (la balance signifie tout un programme d'actions), on aboutisse à de bons résultats. La part d'interprétation de l'écrit, laissée à l'élève est cependans extrêmement faible et on ne peut donc pas vérifier quelle est l'appropriation de l'élève. De plus, le recours à l'image peut faire l'illusion au maître qu'il n'a rien soufflé.

Plus intéressants sont les termes utilisés et qui ont leur efficace. (L'efficacité de cette maîtresse est sur ce type d'exercices incontestable). On trouve alors l'explication: "Pour faire 5, il faut combien et puis combien" ainsi que la balance "il faut faire que ce soit la même chose des deux côtés de la balance". On retrouve ici les significations des élèves - cf. Chap. II.4. conclusions).

Enfin, l'hésitation des élèves à l'épreuve IV montre que l'écrit n'a pas pour ces élèves de signification assez forte (complète) pour imposer une interprétation (plutôt qu'une autre). Or c'est bien ce qui avait été remarqué spécialement pour cette épreuve où les élèves semblaient adopter alternativement différentes interprétations sans que l'une s'impose réellement. Ceci a d'ailleurs été confirmé par les exemples du paragraphe III.2.3. Notons que la stratégie de la maîtresse évoquée ci-dessus aboutit à un enseignement où l'élève n'est jamais mis dans une situation où il aurait à choisir une interprétation contre d'autres. Et qu'en général même, le maître escamote les interprétations possibles.

Après la passation, je suis resté en classe. Et la maîtresse m'a proposé de questionner ses élèves. J'en ai profité pour reprendre la discussion à propos de l'épreuve IV.

III.3.2. Quelques interviews d'élèves.

1. Luc Luc vient de passer l'épreuve. Il avait répondu correctement aux 30 items. Mais pour l'épreuve IV sa première réaction fut de répondre St. Tandis qu'à la passation précédente il a répondu : $\underline{1+5=3+\overset{3}{\ldots}}$ $3+4=\overset{7}{\ldots}+\cancel{2}^{0}$ et $2+7=\overset{9}{\cancel{7}}+\overset{0}{\ldots}$.

Dans une classe, j'ai demandé à un élève ce calcul (j'écris 5+1=3+...) qu'est-ce que tu crois qu'il a mis ?

> JE NE SAIS PAS CE QUE ÇA VEUT DIRE, QUEL CALCUL IL FAUT FAIRE. Il lit : CINQ PLUS UN EGALE TROIS PLUS ... POUR FAIRE TROIS, ÇA NE VA PAS.

Qu'est-ce que tu mettrais?

> Il écrit: 2+1=3 (il a fait 3 avec ses doigts). MAIS ÇA NE VA PAS CAR IL Y A ENCORE QUELQUE CHOSE DE PLUS.

Bon, je vais te dire, l'élève il a mis $5+1=3+\overset{9}{\ldots}$.

> AH OUI ! C'EST JUSTE 5+1 ÇA FAIT DEJA 6 ET ENCORE 3 ÇA FAIT 9.

Mais d'autres camarades ont mis $5+1=3+\overset{3}{\ldots}$!

> AH NON ! JE NE SUIS PAS D'ACCORD. 5+1 ÇA NE FAIT DEJA PAS 3. SI ON RAJOUTE LE 3 ÇA FERAIT 9 PAS 3.

Et puis, tu sais ce qu'il a répondu pour 7 =2+... ?

> ...

Tu mettrais quoi?

> Il écrit $7=2+\overset{5}{\ldots}$.

Y en a qui ont mis 9 $(7=2+\overset{9}{.})$

> PAS D'ACCORD PARCE QUE 9+2 ÇA FAIT 11. 9 PUIS 1 10 PUIS ENCORE 1 11.

Ce signe (je montre =) ça veut dire quoi ?

> EGALE, ÇA VEUT DIRE LA REPONSE.

UN PEU PLUS TARD

Bon on en reprend un autre: 3+2=1+...

Il met 6. ($3+2=1+\overset{6}{\ldots}$)

Lis dans l'autre sens (c.à.d. droite-gauche)

Il lit: 6 PLUS 1 EGALE 2 PLUS 3, OUI C'EST JUSTE.

Et fais celui-là: ...+2=1+6

Il répond en mettant 3 ($\overset{3}{\ldots}+2=1+6$)

Attends, et là? 6+1=2+...

Il compte puis répond : $6+1=2+\overset{9}{\ldots}$

Et que mets-tu là ? 3+4=...+2

C'EST PAS POSSIBLE, C'EST FAUX.

Bon et là ? 3+4=2+...

Il répond par 9 ($3+4=2+\overset{9}{\ldots}$). Spontanément, il se reprend pour 3+4=...+2 et répond $3+4=\overset{9}{\ldots}+2$.

COMMENTAIRE

On a là un bel exemple d'hésitation entre un traitement correct (celui qui est sur les exercices écrits) et un traitement par somme totale. Luc est leurré par la lacune finale. Et la réponse 9 lui paraît d'autant plus plausible que le calcul que je lui ai ainsi suggéré lui paraît être "ce qu'il faut faire". Très nettement, le leurre vient de la lacune finale. Ceci se voit à ses réponses aux items 3+2=1+... puis à la lecture inversée pour $3+2=1+\overset{6}{\ldots}$ mais pas pour 6+1=2+... Cela se voit aussi à son refus initial à répondre pour 3+4=...+2. (que par écrit, il avait d'ailleurs traité $3+4=\overset{7}{\ldots}+0$!) Il n'est cependant pas trompé par 7=2+... . On peut estimer que pour Luc, il y a un phénomène d'assimilation, dans le sens où une interprétation est reportée sur l'item suivant. Mais ceci ne peut avoir lieu que parce que l'écrit n'a pas pour Luc de signification univoque. On notera à ce propos comment il argumente pour dire que 5+1=3+3 est faux : Il se centre sur le triplet 5+1, dit que déjà ça ne fait pas 3 (le 1er 3 sans doute) donc que ce 1er 3 n'est pas à considérer comme le résultat mais comme un facteur) et que si on rajoute encore 3 ça ne peut pas faire 3 (mais c'est 9).

---

2. Valérie. A répondu juste aux 30 items, mais elle avait commencé par refuser les items de l'épreuve IV.

a) Je lui propose 1+5=3+... Elle dit que ça ne va pas : 1 PLUS 5 ÇA NE FAIT PAS 3. ET PUIS, PLUS QUELQUE CHOSE ...

b) Je lui écris 5+1=6+1=7. Elle rit. Elle est d'accord avec les calculs mais pas l'écriture. Elle proposerait 5+1=6 6+1=7 (elle fait un trait vertical de séparation.)

c) Je reviens à 1+5=3+... . Nouveau refus. Je lui propose $1+5=3+\overset{3}{\ldots}$ refus, $1+5=3+\overset{9}{\ldots}$ refus car 1+5 ÇA NE FAIT PAS 3.

---

3. Lara. A l'épreuve IV, Lara avait répondu par St. Puis elle s'était reprise (après intervention de la maîtresse) et avait répondu juste. A la passation précédente, elle avait répondu Refus aux items a+b=c+... et somme totale aux items a+b=...+c .

a) Elle lit l'item "CINQ PLUS UN EGALE TROIS ... PLUS ... C'EST POUR FAIRE COMBIEN ? ON NE PEUT PAS LE FAIRE SI ÇA DOIT FAIRE 3

b) Je lui propose $5+1=3+\overset{9}{\ldots}$. La suggestion porte. PARCE QUE CINQ PLUS UN ÇA FAIT SIX ET ENCORE SEPT HUIT NEUF.

c) Elle trouve acceptable $7=2+\overset{9}{\ldots}$ comme $7=2+\overset{5}{\ldots}$ car à chaque fois elle voit la relation: 7+2=9, 5+2=7.

d) Je lui demande si elle connaît les "balances". Elle me répond que oui. Je lui dis: "ça $\underline{3+4} \qquad \underline{2+\ldots}$ c'est une balance. Est-ce que tu peux me répondre ce qu'il faut mettre là (lacune). Elle répond correctement $\underline{3+4} \quad \underline{2+\overset{5}{\ldots}}$. Je passe alors à l'écriture équationnelle 3+4=2+... Refus de la part de Lara. Puis 3+4=...+2. Elle répond par 5, l'écrit mais, une fois écrit refuse cette réponse (toujours pour la raison que 3+4 fait 7 donc pas 5 (ni 2).

COMMENTAIRE:

Ici, avec Lara le conflit est très net entre la forme ternaire a+b=c et la forme quaternaire. L'intérêt est que ce qui s'est passé en classe s'est reproduit ici. Lara sait résoudre par balance (cela lui signifie une tâche qu'elle est capable de remplir) mais elle a un problème relativement à l'écrit.

---

4. Gaspard.

Quand je lui présente 7=2+... il répond par 5 et dit C'EST EGAL A 7. 4=5+..., il ne peut pas le faire, 8=...+3 réponse 5 en disant: FAUT QUE C'EGALE A 8. 4=...+7 : JE NE PEUX PAS LE FAIRE.

Dans tous les cas du égal initial, Gaspard lit de droite à gauche. Il se base pour cela sur la forme a+b.

b) Je lui montre la réponse $7=2+\overset{9}{\dots}$. Il dit que C'EST FAUX car 2+9 ÇA PEUT PAS ETRE EGAL A 7.

c) Je lui demande de répondre à 1+5=3+... . Voici sa réaction: JE NE SAIS PAS. Puis il réfléchit. Y A UN EGALE AU MILIEU ... FAUT FAIRE UN CARRE LA (il me montre par geste qu'il faudrait écrire $\boxed{1+5} = 3+\dots$) . Il compte alors 1+5, 6 puis dit 6 EGALE ... et il complète la lacune par un 3.

Je propose alors 4+2=2+... . Il le refuse (barre l'item complètement) puis 4+2=...+4. Nouveau Refus.

d) Sans autres, je passe à 38=13+... Il n'arrive pas à lire cet item. TROIS EGALE HUIT PLUS TROIS ... NON... ONZE (il a compté 8+3) PLUS TREIZE ... NON PLUS TREIZE ... TROIS EGALE TREIZE. Il abandonne.

COMMENTAIRES

Gaspard sait tout de suite combien il faut faire (ex.8=...+3). Dans ce cas il arrive à lire et à répondre. Pour les items plus complexes, il n'arrive tout d'abord pas (il n'a pas traité ces calculs sous cette forme mais sous une autre : $\boxed{a+b}$——$\boxed{\dots+\dots}$). Il arrive à raccrocher mon écriture à ce qu'il connaît en évoquant par geste (et cela suffit à déclencher une résolution) la figure de l'étiquette $\boxed{1+5}$ (cf. chap. II.6.1.pg142). Alors la résolution est correcte. Mais un changement dans la donnée (4, 2, 2) ne lui permet pas de retrouver cette interprétation.

La réaction à 38=13+... est très intéressante. Gaspard sait lire les nombres à deux chiffres. Cependant, *il ne les reconnait pas ici* sans doute parce qu'il est en train de calculer avec des nombres plus petits que 10 (et 8 et 3 sont déjà apparus) et qu'il assimile sans autre la question à ce registre d'opération. Ici, les signes + et = ne pèsent pas lourd dans l'interprétation (ni leur position respective). Alors les tentatives de lecture sont très intéressantes, d'une part elles montrent que la lecture *s'organise autour d'un calcul que Gaspard cherche à faire et que d'autre part le problème pour lui est d'arriver à tenir compte de tous les éléments (les chiffres qu'il y voit).*

III.4. Conclusion

L'interprétation d'une donnée écrite ne se limite donc pas à une traduction. Mais elle consiste bien plus en l'organisation autour des éléments d'information donnés, d'une procédure de résolution. Sans cesse le sujet juge en fonction de "ce qu'il faut faire" ou de "c'est pour faire combien". Ce qui polarise les informations décodées d'une façon ou d'une autre. On remarque que les élèves sont capables de traitements difficiles. Peut-on dire que le problème qui se pose est un problème de choix ? Oui certainement, tant qu'on se place du côté de l'observateur, de l'analyste. Pour être plus exact, il faut dire que à priori la situation présente différents traitements éventuels (une certaine potentialité dépendant de la situation et du sujet en situation) et que le déroulement observé correspond au choix d'une de ces éventualités. Mais ce n'est que rétroactivement qu'on parlera de choix. Ou alors en indiquant que par ce mot, choix on ne désigne pas une opération du sujet. Car, dire que le sujet est capable de traitements variés ou divers, n'implique pas qu'instantanément il ait à l'esprit ces diverses éventualités, ce qui l'amènerait à un choix. Dans certains cas cela s'observe mais il reste à décrire les modalités de ceux-ci.

Il n'en reste pas moins que l'interprétation d'une tâche à partir d'une donnée écrite (tout comme la lecture elle-même) est une opération à part entière. Elle ne se fait pas automatiquement, et on voit bien que cela est soumis à des significations (des finalités que se donne le sujet, des comparaisons des éléments d'informations et des éléments traités qui rendent la réponse "plausible" etc.)

Dans un temps très court, c'est tout un agencement (construction) d'opérations diverses et parallèles qui se met en place. A mon avis le sujet n'opère pas tant un choix qu'un travail visant à faire coïncider toutes ces considérations parallèles.

* *

*

F. Conne, Août 1984.

Liste des publications INTERACTIONS DIDACTIQUES

No 1 PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., CONNE, F., SCHUBAUER-LEONI, M.L.- Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves, Universités de Neuchâtel et Genève, Contribution présentée au Colloque international du Laboratoire européen de psychologie sociale: "Représentations sociales et champ éducatif", Aix-en-Provence, du 30.11.au 3.12.81, novembre 1981.

No 2 PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., SAADA, E.H., BELL, N., CONNE, F., GROSSEN, M. - Processus psychosociologiques, niveau opératoire et appropriation de connaissances, Universités de Genève et de Neuchâtel, avril 1982.

No 2bis PERRET-CLERMONT, A.N., BRUN, J., SAADA, E.H., SCHUBAUER-LEONI, M.L., et BELL, N., CONNE, F., GROSSEN, M. - Psychosociological processes, operatory level and the acquisition of knowledge. Universités de Genève et de Neuchâtel, août 1984.

No 3 CHEVALLARD, Y., CONNE, F. - Jalons à propos d'algèbre. Universités de Genève et de Neuchâtel, novembre 1984.

No 4 SCHUBAUER-LEONI, M.L., PERRET-CLERMONT, A.N. - Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire - (Opérations additives), Universités de Genève et de Neuchâtel, avril 1984.

No 5 SCHUBAUER-LEONI, M.L., SCHUBAUER-LEONI, M.L. & GROSSEN, M., SAADA, E.H. & BRUN, J. - Formulations écrites et résolution de problèmes additifs - Analyse de leur élaboration et de leur contenu, Universités de Neuchâtel et de Genève, juillet 1984.

No 6 CONNE, F. - Une épreuve de calcul en première primaire. Analyses détaillées de productions d'élèves. Universités de Genève et de Neuchâtel, décembre 1984.