

INSTITUT DE PHYSIQUE DE L'UNIVERSITÉ
DE NEUCHÂTEL

QUELQUES RESULTATS RIGoureux EN
MECANIQUE STATISTIQUE
APPLICATIONS AU PROBLEME DES CHANGEMENTS
DE PHASE

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

PIERRE-ANDRÉ VUILLERMOT

Physicien diplômé EPFZ

Février 1975
Lang Druck SA, Liebefeld/Berne

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Quelques résultats rigoureux en mécanique
statistique, applications au problème des
changements de phases.

de Monsieur Pierre-André VUILLERMOT

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

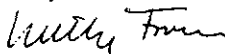
Messieurs les professeurs M. Romerio,

E. Ascher (Genève) et P. Huguenin

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer
d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 28 janvier 1975

Le doyen :



Willy Form

Table des matières

1. Introduction	page	1
2. Généralisation de l'inégalité de Bogoliubov-Mermin		5
Exercices		10
3. Absence d'ordre à longue portée thermodynamique dans une classe de modèles réticulaires à une et deux dimensions		11
Exercices		23
4. Diagonalisation de l'opérateur de transfert associé à une classe de modèles réticulaires unidimensionnels		26
Exercices		37
5. Transitions multiples dans un alliage quaternaire bidimensionnel		38
Exercices		44
6. Problèmes ouverts		45
7. Références bibliographiques		47

1. Introduction

L'étude de la mécanique statistique dans le cadre de la physique mathématique moderne et la clarification de certains concepts fondamentaux qui en découle (... limite thermodynamique, changements de phase ...) constituent incontestablement un triomphe des temps récents. Une ère nouvelle commence en 1944 avec la résolution exacte du modèle d'Ising bidimensionnel par Onsager ([1] - [10]) : c'est la première fois dans l'histoire de la physique qu'est établi de façon rigoureuse le lien existant entre la donnée d'une dynamique microscopique régie par un hamiltonien non trivial et l'apparition de singularités dans certaines fonctions thermodynamiques.

A peu près à la même époque paraît le travail de Van Hove [11] dans lequel l'auteur établit, pour une classe importante d'interactions, l'existence d'une limite thermodynamique pour l'ensemble canonique; puis celui de Yang et Lee ([12], [13]) qui proposent une théorie des changements de phase basée sur l'idée suivant laquelle certaines régions du plan de l'activité complexe peuvent ne contenir aucun zéro de la grande fonction de partition à la limite thermodynamique. Il est remarquable de constater que, contrairement à la démarche de Onsager visant à mettre en évidence la nature exacte des singularités aux points de changements de phase, les

résultats démontrés dans ces deux travaux fondamentaux ne dépendent en aucune façon de la connaissance complète des propriétés statistiques des systèmes envisagés. Nous assistons donc vers 1950 à la naissance de deux démarches théoriques nouvelles, visant toutes deux à asseoir les fondements de la mécanique statistique sur des bases mathématiques précises, mais philosophiquement assez nettement différentes l'une de l'autre : d'une part, on tente d'obtenir une forme explicite pour la fonction de partition de divers systèmes statistiques ([14] [15]), afin de mettre en évidence des singularités éventuelles; de l'autre, on cherche à obtenir le plus grand nombre possible de résultats rigoureux ne nécessitant pas une expression déterminée pour la fonction de partition.

Il est incontestable que ces deux points de vue complémentaires ont profondément influencé toute la recherche ultérieure en mécanique statistique ([16] - [25]), et il est probable qu'ils vont coexister encore pendant longtemps. Nous y avons été nous-mêmes particulièrement sensibles, et c'est la raison pour laquelle nous présentons dans ce travail quelques résultats nouveaux reflétant les deux tendances que nous venons d'esquisser. Nous voulions à l'origine obtenir un certain nombre de résultats exacts permettant de comprendre, sur la base d'un modèle microscopique simplifié, l'origine de l'orientation privilégiée des molécules dans

les cristaux liquides; nos recherches ultérieures ont néanmoins rapidement montré que le formalisme mathématique utilisé (les rudiments de la théorie des groupes de Lie, des C^* -algèbres et de l'analyse fonctionnelle) était suffisamment puissant pour nous permettre d'élaborer une théorie générale d'une classe de systèmes réticulaires classiques relativement peu étudiés jusqu'ici, et assez abstraits pour être interprétés de façons diverses (... cristaux liquides, systèmes magnétiques, alliages ...). C'est la raison pour laquelle nous avons délibérément choisi un mode d'exposition complètement déductif, en formulant tout d'abord des énoncés de nature assez générale pour en déduire ensuite les exemples particuliers, et rédigé un texte relativement condensé, cela d'autant plus que la presque totalité des résultats présentés ont déjà fait l'objet de publications récentes ([26] - [28]). Nous avons néanmoins inséré à la fin de chaque section un certain nombre d'exercices destinés à attirer l'attention du lecteur sur certaines questions intéressantes peu développées dans l'exposé, mais s'y rapportant directement.

Dans la section 2, nous dérivons une forme généralisée de l'inégalité de Bogoliubov-Mermin [29] valable pour tous les systèmes réticulaires classiques dont la variété de configuration est un groupe de Lie G réel compact et connexe; cette inégalité relie les éléments de $C^\infty(G; \mathbb{C})$, l'algèbre

des fonctions indéfiniment dérivables à valeurs complexes sur \mathbb{G} ; elle est utilisée dans la section 3 pour démontrer l'absence d'ordre à longue portée thermodynamique dans une classe de modèles à une et deux dimensions définis par des hamiltoniens \mathbb{G} -invariants; nous verrons que cette classe contient la plupart des modèles vectoriels classiques généralement utilisés dans l'étude des phénomènes critiques, en particulier le modèle de Stanley du ferromagnétisme [30] et une version réticulaire du modèle de Maier et Saupe d'un cristal liquide nématique [31]. Dans la section 4, nous étudions la décomposition spectrale de l'opérateur de transfert associé à une classe de systèmes réticulaires unidimensionnels. Dans la section 5, nous montrons que l'existence d'un ordre à longue portée et de points de changements de phase est possible lorsque le groupe \mathbb{G} n'est pas connexe, en prouvant que la fonction de partition d'un alliage quaternaire bidimensionnel se réduit au produit des fonctions de partition de deux modèles d'Ising de spin $\frac{1}{2}$; suivant les valeurs attribuées aux constantes de couplage, le modèle exhibe deux points de changements de phase et deux types d'ordre à longue portée dont l'un décrit la séparation de phase du système en deux alliages binaires substitutionnels. La section 6 est consacrée à la discussion de problèmes ouverts.

2. Généralisation de l'inégalité de Bogoliubov-Mermin

Dans toute la suite, le réseau à ν dimensions ($\nu \in \mathbb{N}$) sera identifié au produit cartésien \mathbb{Z}^ν . Nous associons à chaque $R \in \mathbb{Z}^\nu$ une copie G_R d'un groupe de Lie G réel compact et connexe de dimension n , décrivant les configurations du sous-système correspondant. Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ une partie finie de \mathbb{Z}^ν , de cardinal $|\Lambda|$; nous définissons alors la variété de configuration associée à Λ par le produit direct

$$G(\Lambda) = \prod_{R \in \Lambda} G_R$$

de dimension $n|\Lambda|$, également compact et connexe dans la topologie produit. Soit dg la mesure de Haar sur $G(\Lambda)$, normalisée à un; pour chaque $h \in C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{R})$ nous introduisons la " fonction de partition "

$$Z_\Lambda = \int_{G(\Lambda)} dg \exp[-\beta h(g)]$$

où $0 < \beta = (K_B T)^{-1} < +\infty$ (K_B : constante de Boltzmann; T : température absolue), si bien que nous pouvons écrire la " moyenne thermique " sous la forme

$$\langle \Phi \rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \int_{G(\Lambda)} dg \exp[-\beta h(g)] \Phi(g)$$

pour chaque $\Phi \in C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{C})$, avec $Z_\Lambda \neq 0$.
 La généralisation annoncée de l'inégalité de Bogoliubov-Mermin dont nous aurons besoin dans la section suivante est démontrée dans le

Lemme 2.1. Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $(D_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ une famille d'opérateurs différentiels sur $G(\Lambda)$ et $(\Phi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ une famille de fonctions dans $C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{C})$; alors pour chaque famille $(X_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ de champs vectoriels complexes invariants à gauche sur $G(\Lambda)$, on a

$$\sum_{\alpha=1}^N \langle |D_\alpha \Phi_\alpha|^2 \rangle_\Lambda \cdot \sum_{\alpha=1}^N \langle X_\alpha(\overline{X_\alpha h}) \rangle_\Lambda \geq (\beta N)^{-1} \left| \sum_{\alpha=1}^N \langle X_\alpha(D_\alpha \Phi_\alpha) \rangle_\Lambda \right|^2 \quad (2.1.)$$

(la barre dans (2.1.) indique la conjugaison complexe).

Démonstration. De l'inégalité de Schwarz dans $C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{C})$ nous obtenons

$$\langle |\Phi|^2 \rangle_\Lambda \cdot \langle |\Psi|^2 \rangle_\Lambda \geq \left| \langle \Phi \Psi \rangle_\Lambda \right|^2$$

pour les moyennes thermiques reliant deux fonctions Φ et Ψ ; en particulier nous avons

$$\langle |D_\alpha \Phi_\alpha|^2 \rangle_\Lambda \cdot \langle |X_\alpha h|^2 \rangle_\Lambda \geq \left| \langle (D_\alpha \Phi_\alpha)(X_\alpha h) \rangle_\Lambda \right|^2 \quad (2.2.)$$

pour chaque α . D'autre part, puisque χ_α est une dérivation sur $C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{C})$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \exp[-\beta h] (D_\alpha \Phi_\alpha)(\chi_\alpha h) &= -\beta^{-1} (D_\alpha \Phi_\alpha)(\chi_\alpha \exp[-\beta h]) = \\ &= -\beta^{-1} \left[\chi_\alpha \left((D_\alpha \Phi_\alpha)(\exp[-\beta h]) \right) - \exp[-\beta h] (\chi_\alpha (D_\alpha \Phi_\alpha)) \right] \quad (2.3.) \end{aligned}$$

Comme l'invariance à gauche de χ_α implique (exercice 1)

$$\int_{G(\Lambda)} dg (\chi_\alpha \Phi)(g) = 0 \quad (2.4.)$$

nous obtenons

$$\langle (D_\alpha \Phi_\alpha)(\chi_\alpha h) \rangle_\Lambda = \beta^{-1} \langle \chi_\alpha (D_\alpha \Phi_\alpha) \rangle_\Lambda \quad (2.5.)$$

par intégration sur $G(\Lambda)$ des membres de gauche et de droite de (2.3.). Une modification du même genre s'obtient pour le second facteur dans (2.2.), ce qui donne

$$\langle |\chi_\alpha h|^2 \rangle_\Lambda = \beta^{-1} \langle \chi_\alpha (\overline{\chi_\alpha h}) \rangle_\Lambda \quad (2.6.)$$

La substitution de (2.5.) et (2.6.) dans (2.2.) conduit à

$$\langle |D_\alpha \Phi_\alpha|^2 \rangle_\Lambda \cdot \langle \chi_\alpha (\overline{\chi_\alpha h}) \rangle_\Lambda \geq \beta^{-1} \left| \langle \chi_\alpha (D_\alpha \Phi_\alpha) \rangle_\Lambda \right|^2$$

si bien que

$$\sum_{\alpha=1}^N \langle |D_{\alpha} \Phi_{\alpha}|^2 \rangle_{\Lambda} \cdot \sum_{\alpha=1}^N \langle \chi_{\alpha}(\overline{\chi_{\alpha} h}) \rangle_{\Lambda} \geq$$

$$\geq \sum_{\alpha=1}^N \langle |D_{\alpha} \Phi_{\alpha}|^2 \rangle_{\Lambda} \cdot \langle \chi_{\alpha}(\overline{\chi_{\alpha} h}) \rangle_{\Lambda} \geq (\rho N)^{-1} \left| \sum_{\alpha=1}^N \langle \chi_{\alpha}(D_{\alpha} \Phi_{\alpha}) \rangle_{\Lambda} \right|^2 \quad (2.7.)$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques. La relation (2.4.) n'est évidemment pas satisfaite en général lorsque χ_{α} est remplacé par un champ vectoriel quelconque (exercice 1); dans ce cas en effet, des termes supplémentaires, provenant par exemple de l'intégration sur $G(\Lambda)$ du premier terme dans (2.3.), apparaissent dans l'inégalité de base (2.1.). Ces contributions sont par conséquent intimement liées aux " corrections de surface " discutées par Mermin dans [29] , et la relation (2.4.) nous donne un moyen efficace pour les contrôler. D'autre part, la connexion entre l'inégalité que nous venons de démontrer et celle de Bogoliubov-Mermin est facilement établie si nous remarquons que l'inégalité (2.1.) peut également être démontrée lorsque la variété associée à chaque noeud du réseau est symplectique, à condition toutefois d'imposer aux χ_{α} des restrictions sup-

élémentaires jouant le rôle de (2.4.) si la variété n'admet plus une structure de Lie. On choisit alors $N=1$ dans (2.1.) et, pour Φ et Ψ de classe C^∞ , on pose $\chi_{\alpha=1} = \chi_\Phi$ où

$$\chi_\Phi \Psi = [\Phi, \Psi]$$

est le crochet de Poisson de Φ et Ψ ; la substitution dans (2.1.) donne alors avec $D_1 \Phi_1 = \Psi$ l'inégalité

$$\langle |\Psi|^2 \rangle_\Lambda \cdot \langle [\Phi, [\overline{\Phi}, h]] \rangle_\Lambda \geq \beta^{-1} \left| \langle [\Phi, \Psi] \rangle_\Lambda \right|^2 \quad (2.8.)$$

qui est bien la relation de Bogoliubov-Mermin traditionnelle.

D'autre part, pour $R \in \mathbb{Z}^V$, soit \mathfrak{G}_R l'algèbre de Lie de G_R ; puisque G_R est compact, il existe sur $\mathfrak{G}_R \times \mathfrak{G}_R$ une forme bilinéaire B strictement positive et invariante sous la représentation adjointe de G_R [32] ; soit $(X_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ une base de \mathfrak{G}_R et $(Y_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ la base duale relativement à B , c'est à dire $B(X_\alpha^{(R)}, Y_{\alpha'}^{(R)}) = \delta_{\alpha, \alpha'}$ pour chaque α et α' ; on peut alors construire l'élément

$$\gamma^{(R)} = \sum_{\alpha=1}^n \chi_\alpha^{(R)} Y_\alpha^{(R)} \quad (2.9)$$

qui appartient au centre de l'algèbre enveloppante univer-

selle de \mathfrak{G}_R (exercice 2); cela implique en particulier que toutes les fonctions sphériques zonales de G_R , définies par rapport à un sous-groupe fermé $K_R \subset G_R$, sont fonctions propres de $\gamma^{(R)}$ [32]; ce résultat sera d'une grande importance dans la démonstration du théorème que nous donnerons dans la section suivante.

Exercice 1. a) Soit $G = SO(2)$ (groupe des rotations du plan euclidien \mathbb{R}^2); expliciter la forme des champs vectoriels complexes dans ce cas; même question pour les champs invariants à gauche et démontrer alors l'équivalent de la relation (2.4.); en donner un contre-exemple pour le cas où le champ n'est pas invariant à gauche.

b) Démontrer la relation (2.4.) dans le cas où X_α est un champ vectoriel invariant à gauche réel sur $G(\Lambda)$.

(Indication : utiliser la définition

$$(\chi_\alpha \phi)(g) = \left. \frac{d}{dt} \phi(g \exp[t\tilde{X}_\alpha]) \right|_{t=0}$$

de X_α (où \tilde{X}_α est dans l'algèbre de Lie de $G(\Lambda)$), et l'invariance de la mesure de Haar sous les translations).

c) Démontrer la relation (2.4.) dans le cas général où X_α est un champ vectoriel invariant à gauche complexe.

Exercice 2. a) Etant donnée la base $(X_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ de \mathfrak{G}_R introduite dans le texte, démontrer l'existence et l'unicité de la base duale $(Y_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ en la construisant explicitement.

b) Démontrer que l'élément $\gamma^{(R)}$ défini en (2.9.) ne dépend pas du choix des bases duales $(X_\alpha^{(R)})$ et $(Y_\alpha^{(R)})$.

c) Démontrer que $\gamma^{(R)}$ est un élément du centre de l'algèbre enveloppante universelle de \mathfrak{G}_R en prouvant que c'est un point fixe de la représentation adjointe $\text{Ad}(G_R)$ de G_R , considérée ici comme automorphisme de l'algèbre enveloppante.

(Indication : utiliser astucieusement le résultat b)).

L'élément $\gamma^{(R)}$ est appelé élément de Casimir.

Le lecteur intéressé pourra trouver les notions utiles à la compréhension du texte et des exercices dans les références [33] - [40] .

3. Absence d'ordre à longue portée thermodynamique dans une classe de modèles réticulaires à une et deux dimensions.

Nous devons maintenant définir de façon précise la classe des systèmes réticulaires que nous allons considérer, en en spécifiant la dynamique. Nous définissons un potentiel comme une application χ faisant correspondre à chaque

partie finie $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ une fonction $\chi(\Lambda)$ dans la C^* -algèbre abélienne $C^0(G(\Lambda); \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $G(\Lambda)$, munie de la norme [41],

$$\|\Phi\| = \sup_{g \in G(\Lambda)} |\Phi(g)|$$

(Voir les références [42] - [44] pour des considérations du même genre concernant d'autres types de systèmes réticulaires).

Alors l'ensemble \mathcal{B} de tous les potentiels tels que

$$\|\chi\| = \sum_{\Lambda \neq \emptyset} \frac{\|\chi(\Lambda)\|}{|\Lambda|} < +\infty \quad (3.1.)$$

et satisfaisant à l'invariance de translation

$$\chi(\Lambda + R_0)(g_{R_1+R_0}, \dots, g_{R_{|\Lambda|}+R_0}) = \chi(\Lambda)(g_{R_1}, \dots, g_{R_{|\Lambda|}}) \quad (3.2.)$$

pour chaque $R_0 \in \mathbb{Z}^{\nu}$ et chaque $(g_{R_1}, \dots, g_{R_{|\Lambda|}}) \in G(\Lambda)$, ainsi qu'à $\chi(\emptyset) = 0$, devient un espace de Banach réel relativement à la norme (3.1.) (exercice 3).

Avec $\chi^{(0)}$ et $\chi^{(n)}$ donnés dans \mathcal{B} , nous restreindrons notre attention aux hamiltoniens $h \in C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{R})$ de la forme

$$h = h^{(0)} + \lambda h^{(1)} =$$

$$= \sum_{R, R' \in \Lambda} J(R-R') \chi^{(0)}(\{R, R'\}) + \lambda \sum_{R \in \Lambda} \chi^{(1)}(\{R\}) \quad (3.3.)$$

pour lesquels les normes $\|\chi^{(0)}(\{R, R'\})\|$ sont indépendantes de $\{R, R'\}$, $J(-R) = J(R)$, $J(0) = 0$ et

$$\sum_{R \in \mathbb{Z}^d} R^2 |J(R)| < +\infty \quad (3.4.)$$

Dans le premier terme de (3.3.), chaque $\chi^{(0)}(\{R, R'\})$ est alors identifié à une fonction dans $C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{R})$; nous supposons de plus que $h^{(0)}$ est G -invariant, c'est-à-dire qu'il s'identifie à un point fixe de l'automorphisme involutif $\tau_g^{(\Lambda)}$ de $C^\infty(G(\Lambda); \mathbb{C})$ défini par la translation à droite

$$(\tau_g^{(\Lambda)} \Phi)(g_{R_1}, \dots, g_{R_{|\Lambda|}}) = \Phi(g_{R_1} g, \dots, g_{R_{|\Lambda|}} g) \quad (3.5.)$$

Cela implique au niveau infinitésimal la relation

$$\sum_{R \in \Lambda} \chi^{(R)} h^{(0)} = 0 \quad (3.6.)$$

valable pour chaque copie $\chi^{(R)}$ de n'importe quel χ dans l'algèbre de Lie de G (exercice 3).

Le second terme dans (3.3.) contient le paramètre réel λ

représentant la source extérieure brisant la symétrie de $h^{(0)}$, dans le sens où $h^{(1)}$ n'est un point fixe que de la restriction de $\tau_g^{(1)}$ à un sous-groupe fermé $K \subset G$; enfin, nous admettons que $\chi^{(1)}(\{R\})$, également identifié de façon triviale à un élément de $C^\infty(G^{(1)}; \mathbb{R})$, est une fonction sphérique zonale de G relativement à K [32].

D'autre part, la condition (3.4.) est suffisante pour prouver l'existence à la limite thermodynamique au sens de Van Hove ([11], [45]) de l'énergie libre par noeud

$$f_\Lambda(\lambda) = -(\beta|\Lambda|)^{-1} \log \int_{G^{(1)}} dg \exp[-\beta(h^{(0)} + \lambda h^{(1)})(g)].$$

Comme de plus la fonction f_Λ est concave pour chaque λ , il est possible de prouver l'existence d'une limite thermodynamique pour sa dérivée

$$\frac{df_\Lambda(\lambda)}{d\lambda} = |\Lambda|^{-1} \left\langle \sum_{R \in \Lambda} \chi^{(1)}(\{R\}) \right\rangle_\Lambda, \quad (3.7)$$

cela pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ ([28] et référence citée; exercice 4).

Sous ces conditions, nous pouvons alors démontrer le

Théorème 3.1. Si nous posons (dans le sens de [28])

$$f(\lambda) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}} f_{\Lambda}(\lambda)$$

et

$$\eta(\lambda) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}} \frac{df_{\Lambda}(\lambda)}{d\lambda}$$

(avec $\eta(\lambda) = \frac{df(\lambda)}{d\lambda}$ presque partout) et si

$$\gamma^{(R)} \chi^{(R)}(f_R) = \mu \chi^{(R)}(f_R) \text{ avec } \mu \neq 0, \text{ alors}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(\lambda) = 0$$

lorsque $\nu \leq 2$.

Démonstration. Nous supposons tout d'abord que les interactions sont de portée strictement finie, ce qui signifie que $J(R) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de R , ou encore que la somme (3.4.) ne contient qu'un nombre fini de termes. Nous pouvons alors enfermer le système dans la région

$$\Lambda(R^{(0)}) = \left\{ R \in \mathbb{Z}^{\nu}; 0 \leq R_i < R_i^{(0)}; i \in \{1, \dots, \nu\} \right\}$$

pour $R^{(0)}$ suffisamment grand; soit

$$\Delta = \left\{ K \in \mathbb{R}^{\nu}; K_i = \frac{2\pi n_i}{R_i^{(0)}}; n_i \in \mathbb{Z}; -\frac{R_i^{(0)}}{2} < n_i < \frac{R_i^{(0)}}{2} \right\}$$

la première zone de Brillouin correspondante; le " paramètre d'ordre " relatif à ce système fini est défini par

$$\eta(\lambda) = |\Lambda(R^{(0)})|^{-1} \langle h^{(1)} \rangle_{\Lambda(R^{(0)})} = \frac{df_{\Lambda(R^{(0)})}(\lambda)}{d\lambda} \quad (3.8.)$$

et nous notons $K \cdot R = \sum_{i=1}^N k_i R_i$ pour chaque $K \in \Delta$ et chaque $R \in \Lambda(R^{(0)})$; l'idée de la démonstration consiste alors à appliquer l'inégalité (2.1.) en faisant un choix judicieux des familles $(D_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$, $(\Phi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ et $(X_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$, afin d'obtenir un contrôle sur la grandeur (3.8.) par l'intermédiaire d'une borne supérieure dépendant de λ ; il est possible de réaliser cela en choisissant $N = n$ et, pour un $K \in \Delta$ donné,

$$X_\alpha = \sum_{R \in \Lambda(R^{(0)})} \exp[ik \cdot R] X_\alpha^{(R)}$$

$$D_\alpha = \sum_{R \in \Lambda(R^{(0)})} \exp[-ik \cdot R] Y_\alpha^{(R)}$$

où $(X_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ et $(Y_\alpha^{(R)})_{1 \leq \alpha \leq n}$ sont les deux bases duales de \mathfrak{S}_R apparaissant dans l'expression du Casimir (2.9.) ; puis

$$\Phi_\alpha = \sum_{R \in \Lambda(R^{(0)})} \chi^{(\alpha)}(\{R\})$$

pour chaque α . Nous obtenons alors successivement

$$\sum_{\alpha=1}^n \langle |D_\alpha \Phi_\alpha|^2 \rangle_{\Lambda(R^{(0)})} = \sum_{R, R' \in \Lambda(R^{(0)})} \exp[ik \cdot (R-R')] \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \left(Y_\alpha^{(R)} \chi^{(\alpha)}(\{R\}) \right) \left(Y_\alpha^{(R')} \chi^{(\alpha)}(\{R'\}) \right) \right\rangle_{\Lambda(R^{(0)})} \quad (3.9.)$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^n \chi_{\alpha}(D_{\alpha} \Phi_{\alpha}) = \sum_{R \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \gamma^{(R)} \chi^{(1)}(\{R\}) = \mu \sum_{R \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \chi^{(1)}(\{R\})$$

puisque les fonctions $\chi^{(1)}(\{R\})$ sont des fonctions propres de $\gamma^{(R)}$, ou bien

$$\left| \left\langle \sum_{\alpha=1}^n \chi_{\alpha}(D_{\alpha} \Phi_{\alpha}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \right|^2 = \mu^2 |\Lambda(\mathbb{R}^{2n})|^2 \eta_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})}^2(\lambda) \quad (3.10.)$$

à cause de (3.8.). Finalement

$$\sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}(\overline{\chi_{\alpha} h}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} =$$

$$= \sum_{R, R' \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \exp[iK(R \cdot R')] \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R')} h^{(1)}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} + \lambda \sum_{R \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R)} \chi^{(1)}(\{R\})) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \quad (3.11.)$$

L'expression (2.6.) montrant que cette expression n'est jamais négative, nous pouvons lui ajouter la même expression où K a été remplacé par $-K$, et obtenir ainsi la majoration

$$\sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}(\overline{\chi_{\alpha} h}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \leq$$

$$\leq 2 \sum_{R, R' \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \cos K \cdot (R \cdot R') \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R')} h^{(1)}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} + 2\lambda \sum_{R \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R)} \chi^{(1)}(\{R\})) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} =$$

$$= -2 \sum_{R, R' \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} (1 - \cos K \cdot (R \cdot R')) \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R')} h^{(1)}) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} + 2\lambda \sum_{R \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \sum_{\alpha=1}^n \left\langle \chi_{\alpha}^{(R)}(\chi_{\alpha}^{(R)} \chi^{(1)}(\{R\})) \right\rangle_{\Lambda(\mathbb{R}^{2n})} \quad (3.12.)$$

où la dernière égalité résulte de la G -invariance (3.6.).
 Nous introduisons alors la forme explicite (3.3.) de $h^{(i)}$
 dans (3.12.), puis (3.9.), (3.10.) et (3.11.) dans
 (3.1.); comme les moyennes thermiques apparaissant dans
 ces expressions font intervenir des fonctions continues sur
 le groupe compact $G(\Lambda(R^{(i)}))$, leurs valeurs absolues
 sont bornées supérieurement par des constantes positives;
 le reste découle de manipulations types [45] et nous ob-
 tenons finalement

$$1 \geq \frac{(\beta n)^{-1} \mu^2 \eta_{\Lambda(R^{(i)})}^2(\lambda)}{|\Lambda(R^{(i)})|} \sum_{K \in \Delta} (AK^2 + B|\lambda|)^{-1}$$

où A et B sont des constantes réelles et positives; dans
 la limite thermodynamique $R^{(i)} \rightarrow +\infty$ (c'est-à-dire $R_i^{(i)} \rightarrow +\infty$
 pour chaque $i \in \{1 \dots \nu\}$), cela donne en particulier

$$0 \leq \eta^2(\lambda) \leq \frac{\beta n \pi A}{\mu^2} \cdot \frac{\left(\frac{B}{A} |\lambda|\right)^{1/2}}{\operatorname{arctg}\left(\frac{A \pi^2}{B |\lambda|}\right)^{1/2}} \quad (3.13.)$$

pour $\nu = 1$, et

$$0 \leq \eta^2(\lambda) \leq \frac{2 \beta n \pi A}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{A \pi^2}{B |\lambda|} + 1\right)^{1/2}} \quad (3.14.)$$

pour $\nu = 2$; cela implique $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(\lambda) = 0$, ce qui
 achève la démonstration puisque les deux inégalités (3.13.)

et (3.14.) restent valables pour les interactions satisfaisant (3.4.) (exercice 3).

Pour illustrer et interpréter ce résultat, nous donnons maintenant quelques exemples simples montrant que la classe de modèles définie ci-dessus contient la presque totalité des modèles vectoriels généralement utilisés dans l'étude des phénomènes critiques. A chaque $R \in \mathbb{Z}^{\nu}$ nous associons une copie \mathbb{R}_R^D de l'espace euclidien à D dimensions ($D \geq 3$) muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) , dans lequel nous considérons la représentation fidèle de $G = SO(D)$ par les matrices orthogonales; nous choisissons $K = SO(D-1)$ comme sous-groupe fermé de G , réalisé comme sous-groupe d'invariance du vecteur unité \underline{n} choisi une fois pour toutes dans \mathbb{R}^D , ce qui signifie que $k\underline{n} = \underline{n}$ pour chaque $k \in K$; les fonctions sphériques zonales de G définies par rapport à K sont dans ce cas, lorsqu'on les considère sur la sphère unité $S^{D-1} \cong SO(D)/SO(D-1)$, les polynômes de Gegenbauer $C_{\ell}^{D-2/2}$, où $\ell = 0, 1, 2, \dots$ [46].

L'hamiltonien choisi est

$$h(g_{R_1}, \dots, g_{R_{|\Lambda|}}) = \sum_{R, R' \in \Lambda} \gamma(R, R') C_{\ell}^{\frac{D-2}{2}}(\underline{g}_R^{-1} \underline{n} \cdot \underline{g}_{R'}^{-1} \underline{n}) + \lambda \sum_{R \in \Lambda} C_{\ell}^{\frac{D-2}{2}}(\underline{n} \cdot \underline{g}_R \underline{n}) \quad (3.15)$$

avec $\ell \neq 0$ et une source extérieure λ dans la direction de \underline{n} ; ce modèle peut être interprété comme un système de spins classiques ([27], [28], [30]) et le " paramè-

tre d'ordre " qui s'annule dans la limite thermodynamique pour $\nu \leq 2$ et $\lambda \rightarrow 0$ est

$$\eta_{\Lambda}(\lambda) = |\Lambda|^{-1} \left\langle \sum_{R \in \Lambda} C_{\ell}^{\frac{D-2}{2}}(\underline{n} \cdot \underline{g}_R \underline{n}) \right\rangle_{\Lambda} \quad (3.16)$$

En particulier pour $\ell = 1$, nous avons $C_{\ell}^{\frac{D-2}{2}}(x) = (D-2)x$ et nous obtenons le modèle de Stanley pour les ferroaimants qui n'est par conséquent jamais ferromagnétique lorsque $\nu \leq 2$. Pour $D = 3$, les polynômes de Gegenbauer se réduisent aux polynômes de Legendre P_{ℓ} et (3.15.), (3.16.) donnent respectivement

$$h(\underline{g}_{R_1}, \dots, \underline{g}_{R_N}) = \sum_{R, R' \in \Lambda} J(R-R') P_{\ell}(\underline{g}_{R'}^{-1} \underline{n} \cdot \underline{g}_R^{-1} \underline{n}) + \lambda \sum_{R \in \Lambda} P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{g}_R \underline{n}) \quad (3.17)$$

et

$$\eta_{\Lambda}(\lambda) = |\Lambda|^{-1} \left\langle \sum_{R \in \Lambda} P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{g}_R \underline{n}) \right\rangle_{\Lambda} \quad (3.18)$$

En particulier si $\ell = 1$, nous obtenons le modèle de Heisenberg classique qui a été discuté par Mermin dans la référence [29] et pour lequel (3.18.) représente " l'aimantation " comme fonction du " champ magnétique " λ ; pour $\ell = 2$, nous obtenons avec (3.17.) une version réticulaire du modèle de Maier et Saupe d'un cristal liquide nématique ([26] - [28],

[31], [47] - [52]), dans laquelle les vecteurs $\underline{n}_R = \underline{g}_R n$ sont interprétés comme les " directeurs " de longues tiges minces simulant des molécules organiques allongées dont les centres de masse sont localisés aux noeuds de \underline{Z}^v ; ces molécules sont dites en interaction de dispersion lorsque $\mathcal{J}(R) = R^{-6}$ pour $R \neq 0$ et le théorème (2.1.) permet alors de conclure que le modèle n'exhibe aucun ordre nématique lorsque $v \leq 2$: le système est désorienté à toute température finie dans le sens où la phase correspondant à une orientation privilégiée des molécules dans la direction de \underline{n} n'est pas thermodynamiquement stable.

Remarques. L'intérêt premier de la formulation présentée dans cette section réside dans le fait qu'elle met clairement en évidence le rôle de la symétrie de $h^{(0)}$, par le truchement de (3.6.), dans l'établissement de la relation (3.12.); le lecteur vérifiera par exemple que si $h^{(0)}$ est lui-même K -invariant, comme c'est le cas pour le modèle de Heisenberg anisotrope ($G = SO(3)$)

$$h^{(0)}(g_{R_1}, \dots, g_{R_{1M}}) = \sum_{R, R' \in \Lambda} \mathcal{J}(R-R') \left\{ \alpha (\underline{g}_R n \cdot \underline{g}_{R'} n) + (1-\alpha) (n \cdot \underline{g}_R n) (n \cdot \underline{g}_{R'} n) \right\} \quad (3.19)$$

lorsque $\alpha \neq 1$, la relation (3.6.) ne peut plus être établie et le théorème (3.1.) perd sa validité (voir cepen-

dant l'exercice 5).

L'existence d'une transition de phase dans le modèle (3.19) a d'ailleurs été démontrée de façon rigoureuse par Bortz et Griffiths [53] , au moins pour de petites valeurs de α et des interactions entre plus proches voisins lorsque $\nu = 2$ et $\nu = 3$. La démonstration du théorème (3.1.) montre d'autre part, contrairement aux exemples que nous avons discutés, qu'il ne doit pas nécessairement y avoir une relation " a priori " entre les fonctions $\chi^{(n)}(\{R, R'\})$ et $\chi^{(n)}(\{R\})$ pour que notre argument soit applicable : la G -invariance des $\chi^{(n)}(\{R, R'\})$ est une chose et le fait de définir les $\chi^{(n)}(\{R\})$ comme des fonctions zonales en est une autre. Ce sont néanmoins presque toujours des interactions du type (3.15) ou (3.17) qui retiennent l'attention dans les applications, bien que la question de savoir s'il est possible que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \eta(\lambda) \neq 0$ lorsque $\nu \geq 3$ n'ait pas reçu de réponse à l'heure actuelle; cette possibilité n'est en tout cas pas exclue par la démonstration que nous avons donnée.

Signalons enfin que c'est le fait d'avoir $\eta(\lambda) = \frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda}$ (presque partout) qui nous a incité à parler " d'ordre à longue portée thermodynamique " : tout autre type d'ordre à longue portée n'est pas a priori exclu par notre argument ([54] , [55]).

Note bibliographique. C'est dans les travaux de Bloch [56], Peierls [57] et Landau [58] que nous trouvons pour la première fois des considérations concernant l'existence d'ordre à longue portée dans des systèmes à une et deux dimensions; c'est néanmoins seulement en 1966 que Mermin et Wagner [59] démontrent de façon rigoureuse que la version quantique du modèle de Heisenberg n'exhibe aucune aimantation spontanée à une et deux dimensions lorsque les interactions spin-spin ont une décroissance suffisamment rapide aux grandes distances (condition (3.4.)). Leur démonstration est basée sur une inégalité pouvant être considérée comme la version quantique de (2.8.) [45] , et due originellement à Bogoliubov [60] . La démonstration de l'inégalité (2.8.) par des arguments purement classiques est due à Mermin [29] . Le lemme (2.1.) et le théorème (3.1.) sont dus à Vuillermot et Romerio [28].

Le lecteur intéressé pourra encore consulter les références [61] - [70] en ce qui concerne l'étude de l'ordre à longue portée dans d'autres systèmes physiques.

Exercice 3. a) Démontrer que l'expression (3.1.) définit une norme sur \mathcal{B} ; mettre à cette occasion clairement en évidence le rôle de l'invariance de translation (3.2.); démontrer alors que \mathcal{B} est un espace de Banach réel relativement à la norme (3.1.) pour les opérations

$$(\chi_1 + \chi_2)(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \chi_2(\lambda)$$

et $(\lambda \chi)(\lambda) = \lambda \chi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

puis que le sous-espace \mathcal{B}_0 des potentiels de portée strictement finie (c'est-à-dire $\chi(\lambda) = 0$ sauf pour un nombre fini de λ) est partout dense dans \mathcal{B} .

b) Démontrer que $\tau_{\mathfrak{g}}^{(\lambda)}$ défini en (3.5.) est un automorphisme involutif de la C^* -algèbre $C^0(G(\lambda); \mathbb{C})$.

c) Démontrer la relation (3.6.).

Exercice 4. Démontrer l'existence dans la limite thermodynamique (au sens de Van Hove) de l'énergie libre par noeud

$$f_{\Lambda}(\lambda) = -(\beta|\Lambda|)^{-1} \log \int_{G(\Lambda)} dg \exp[-\beta(h^{\omega} + \lambda h^{\omega'}) (g)]$$

et de sa dérivée (3.7.).

(On consultera les références [11] , [18] , [28] et [45]).

Exercice 5. On considère l'hamiltonien (3.19) avec $\alpha \neq 1$ sur $SO(3)(\Lambda)$.

a) Démontrer explicitement que la relation (3.6.) n'est pas satisfaite dans ce cas et se convaincre alors que le théorème (3.1.) perd sa validité.

b) Démontrer néanmoins en modifiant convenablement la démonstration du théorème (3.1.) que le paramètre d'ordre

$$\eta_{\Lambda}(\lambda) = |\Lambda|^{-1} \left\langle \sum_{R \in \Lambda} (\underline{q}' \cdot \underline{g}_R \underline{q}') \right\rangle_{\Lambda}$$

est nul dans les limites $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$ et $\lambda \rightarrow 0$ lorsque $\nu \leq 2$ si \underline{q}' est orthogonal à \underline{q} , cela pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$.
Interpréter physiquement ce résultat.

c) Généraliser ce résultat en considérant le groupe de configuration $SO(D)(\Lambda)$ ($D \geq 3$) (modèle de Stanley anisotrope).

Exercice 6. On considère la C^* -algèbre abélienne $C^{\circ}(G(\Lambda); \mathbb{C})$ introduite au début de la section 3 et l'application

$$S_{\Lambda} : C^{\circ}(G(\Lambda); \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ définie par}$$

$$S_{\Lambda}(\Phi) = Z_{\Lambda}^{-1} \int_{G(\Lambda)} dg \exp[-\beta h(g)] \Phi(g)$$

(voir la section 2).

a) Démontrer que S_{Λ} est un état sur $C^{\circ}(G(\Lambda); \mathbb{C})$ (" état de Gibbs local ").

b) Démontrer que S_{Λ} est G -invariant au sens de Lanford et Ruelle ([45], [71]) si, et seulement si, h est un point fixe de $T_g^{(\Lambda)}$.

c) Démontrer que \mathcal{S}_Λ n'est pas un état pur, mais une combinaison convexe d'états pure représentés par des mesures de Dirac sur $\mathcal{G}(\Lambda)$ (" mélange statistique "). Interpréter physiquement cette décomposition dans le cadre du modèle (3.17).

4. Diagonalisation de l'opérateur de transfert associé à une classe de modèles réticulaires unidimensionnels.

Il est certainement utile de remarquer à ce point de l'exposé que les fonctions de partition des modèles que nous venons de considérer, et à plus forte raison la forme exacte des paramètres d'ordre que nous avons définis, sont encore inconnues à l'heure actuelle pour $\nu \geq 1$. Le cas unidimensionnel constitue néanmoins une exception lorsque les interactions sont limitées aux voisins les plus proches, ou lorsque le groupe $\mathcal{G}(\Lambda)$ n'est pas connexe (groupes discrets), ou lorsqu'aucune source extérieure n'est présente ($\lambda = 0$): de telles situations permettent en effet souvent d'obtenir des formes explicites non seulement pour les fonctions de partition, mais encore pour les fonctions de corrélation à deux corps. Ce sont ces formes explicites que nous nous proposons de déterminer dans cette section pour une classe de modèles particuliers, en utilisant le formalisme de l'opérateur de transfert associé à des condi-

tions aux limites périodiques. Pour fixer les idées, nous enfermons le système dans la région

$$\Lambda(N) = \left\{ R_j \in \mathbb{Z} ; j \in \{1 \dots N\} \right\}$$

de cardinal $|\Lambda(N)| = N < +\infty$, et nous considérons des hamiltoniens de classe $C^0(G(\Lambda); \mathbb{R})$ donnés par

$$-h(g_{R_1}, \dots, g_{R_N}) - \mathcal{J} \sum_{j=1}^N h^{(0)}(g_{R_j}, g_{R_{j+1}}) + \lambda \sum_{j=1}^N h^{(1)}(g_{R_j}) \quad (4.1.)$$

avec $\mathcal{J}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $g_{R_{N+1}} = g_{R_1}$, ce qui définit les conditions aux limites périodiques. La fonction de partition

$$Z_N(\gamma_1; \gamma_2) = \int_{\substack{\gamma_1 = \beta \int \\ \gamma_2 = \beta \int \lambda G(\Lambda(N))}} dg_{R_1} \dots dg_{R_N} \exp \left[\gamma_1 \sum_{j=1}^N h^{(0)}(g_{R_j}, g_{R_{j+1}}) + \frac{\gamma_2}{2} \sum_{j=1}^N \{ h^{(1)}(g_{R_j}) + h^{(1)}(g_{R_{j+1}}) \} \right]$$

peut alors s'écrire

$$Z_N(\gamma_1; \gamma_2) = \int_G dg T_{(\gamma_1; \gamma_2)}^{(N)}(g, g) \quad (4.2.)$$

où $T_{(\gamma_1; \gamma_2)}^{(N)}$ désigne le N^{ième} itéré du noyau $T_{(\gamma_1; \gamma_2)}^{(1)} \equiv T_{(\gamma_1; \gamma_2)}$ défini par

$$T_{(\gamma_1; \gamma_2)}(g, g') = \exp \left[\gamma_1 h^{(0)}(g, g') + \frac{\gamma_2}{2} \{ h^{(1)}(g) + h^{(1)}(g') \} \right] \quad (4.3.)$$

avec

$$T_{(\tau_1, \tau_2)}^{(N+1)}(g; g') = \int_G dg'' T_{(\tau_1, \tau_2)}^{(N)}(g; g'') T_{(\tau_1, \tau_2)}(g''; g')$$

Ce noyau sera désormais supposé symétrique en g et g' , c'est-à-dire $h^{(0)}(g; g') = h^{(0)}(g'; g)$ pour chaque $g, g' \in G$.

Comme il est d'autre part de carré-intégrable relativement à la mesure de Haar sur $G \times G$, il engendre sur $L_c^2(G; dg)$, l'espace d'Hilbert des (classes de) fonctions à valeurs complexes sur G , de carré intégrable par rapport à la mesure de Haar dg , la transformation linéaire, symétrique et complètement continue $\tilde{T}_{(\tau_1, \tau_2)}$ définie par

$$(\tilde{T}_{(\tau_1, \tau_2)} \Phi)(g) = \int_G dg' T_{(\tau_1, \tau_2)}(g; g') \Phi(g')$$

Les valeurs propres de $\tilde{T}_{(\tau_1, \tau_2)}$ et les fonctions propres orthonormées correspondantes seront désignées par μ_n et φ_n respectivement ($n = 0, 1, 2, \dots$), en convenant de l'arrangement $\mu_0 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ où chaque valeur propre apparaît un nombre de fois égal à sa multiplicité [72]; l'existence d'une valeur propre μ_0 positive, maximale et simple est assurée par une généralisation de Jentzsch [73] pour le cas des transformations intégrales à noyaux positifs des résultats classiques de Perron et Frobenius ([74], [75]). La relation (4.2.) signifie alors que la fonction de partition se réduit à la trace $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^N$ de $\tilde{T}_{(\tau_1, \tau_2)}^{(N)}$, soit

$$Z_N(\tau_1, \tau_2) \cong \mu_0^N$$

à la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$.

La connaissance de la décomposition spectrale de $\widetilde{T}_{(\tau_1, \tau_2)}$ est également essentielle pour la détermination des fonctions de corrélation à deux corps définies par les moyennes thermiques

$$S_{N(\tau_1, \tau_2)}(r) =$$

$$= Z_N^{-1} \int dg_{R_1} \dots dg_{R_N} h^{(0)}(g_{R_i}, g_{R_{i+r}}) \prod_{j=1}^N T_{(\tau_1, \tau_2)}(g_{R_j}, g_{R_{j+1}}) \quad (4.4.)$$

que nous aurons l'occasion d'interpréter physiquement plus loin; en effet, la substitution de (4.3.) dans (4.4.), puis l'intégration sur toutes les variables à l'exception de g_{R_1}, g_{R_i} et $g_{R_{i+r}}$ donnent l'expression

$$S_{N(\tau_1, \tau_2)}(r) =$$

$$= Z_N^{-1} \int dg_{R_1} dg_{R_i} dg_{R_{i+r}} h^{(0)}(g_{R_i}, g_{R_{i+r}}) T^{(i-1)}(g_{R_1}, g_{R_i}) T^{(r)}(g_{R_i}, g_{R_{i+r}}) T^{(N-i-r)}(g_{R_{i+r}}, g_{R_N})$$

En y introduisant alors la décomposition de e^{α} α ième itéré

$$T^{(\alpha)}(g, g') = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^\alpha \varphi_n(g) \overline{\varphi_n(g')}$$

nous trouvons finalement

$$S_{(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}(r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_n}{\mu_0} \right\} \int dg dg' h^{(0)}(g, g') \overline{\varphi_0(g)} \varphi_n(g) \overline{\varphi_n(g')} \varphi_0(g') \quad (4.5.)$$

après avoir utilisé l'orthonormalité des φ_n et effectué la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$ (exercice 6).

Les résultats précédents montrent donc clairement que la connaissance des solutions du problème aux valeurs propres

$$\widetilde{T}_{(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)} \Phi = \mu \Phi \quad (4.6.)$$

sur $L^2_{\mathfrak{c}}(G; dg)$ est essentielle; nous l'avons résolu dans le cas particulier où $\lambda = 0$ dans (4.1.), en obtenant le résultat suivant [27] :

Théorème 4.1. Soit $K \subset G$ un sous-groupe fermé maximal tel que (G, K) soit une paire riemannienne symétrique et $\tilde{h} \in C^0(G; \mathbb{R})$ une fonction invariante à gauche sous K , c'est-à-dire $\tilde{h}(kg) = \tilde{h}(g)$ pour chaque $k \in K$ et chaque $g \in G$; alors si nous posons

$$h^{(0)}(g, g') = h^{(0)}(g', g) = \tilde{h}(g^{-1}g')$$

dans (4.3.), toutes les valeurs propres de $\tilde{T}_{(\tau_1, \varrho)}$ sont de la forme

$$\mu_{\Phi}(\tau_1) = \int_{\mathcal{G}} dg \exp[\tau_1 \tilde{h}(g)] \Phi(g)$$

où Φ parcourt l'ensemble des fonctions sphériques zonales de type positif sur \mathcal{G} ; leur multiplicité est égale à la dimension de la représentation de \mathcal{G} associée à Φ , et les fonctions propres correspondantes sont ou bien les fonctions sphériques de \mathcal{G} , ou bien des combinaisons linéaires finies de ces fonctions sphériques.

Démonstration. Pour $g \in \mathcal{G}$ fixé une fois pour toutes, l'équation aux valeurs propres (4.6.) s'écrit dans ce cas

$$\int dg' \exp[\tau_1 \tilde{h}(k'g')] \Phi(gg') = \mu \Phi(g) \quad (4.7.)$$

après avoir effectué un changement de variables évident et utilisé l'invariance à gauche de \tilde{h} . Soit dk la mesure de Haar sur K , normalisée à l'unité; la translation à gauche par K dans (4.7.) et l'intégration des deux membres sur K conduisent alors à

$$\int_{\mathcal{G}} dg' \exp[\tau_1 \tilde{h}(g')] \int_K dk \Phi(gkg') = \mu \Phi(g) \quad (4.8.)$$

Soit $\{U^{(\alpha)}, \mathcal{H}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ l'ensemble des représentations unitaires continues et irréductibles de G dans les espaces hilbertiens $\mathcal{H}^{(\alpha)}$, non équivalentes deux à deux, de dimension $\dim \mathcal{H}^{(\alpha)} = d_\alpha < +\infty$ et de classe 1 par rapport à K ; leurs éléments matriciels étant définis par

$$U_{ij}^{(\alpha)}(g) = (\underline{x}_i^{(\alpha)}, U^{(\alpha)}(g) \underline{x}_j^{(\alpha)})_\alpha$$

où $(\cdot, \cdot)_\alpha$ désigne le produit scalaire de $\mathcal{H}^{(\alpha)}$, avec $(\underline{x}_i^{(\alpha)}, \underline{x}_j^{(\alpha)})_\alpha = \delta_{ij}$ pour chaque $i, j \in \{1 \dots d_\alpha\}$ et $U^{(\alpha)}(k) \underline{x}_i^{(\alpha)} = \underline{x}_i^{(\alpha)}$ pour tous les $k \in K$ et $\alpha \in \mathbb{A}$, il s'ensuit que la famille de fonctions $\{U_{11}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ représente l'ensemble de toutes les fonctions sphériques zonales de type positif sur G , puisque (G, K) est une paire riemannienne symétrique [32]. Mais comme (exercice 7)

$$\int_K dk U_{j_1}^{(\alpha)}(gKg') = U_{j_1}^{(\alpha)}(g) U_{11}^{(\alpha)}(g') \quad (4.9.)$$

pour chaque $g, g' \in G$, la substitution de (4.9.) dans (4.8.) montre que toutes les fonctions sphériques $\{U_{j_1}^{(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ sont solutions propres de $\tilde{T}_{(\tau_1, 0)}$, avec les valeurs propres

$$\mu_\alpha(\tau_1) = \int_G dg \exp[\tau_1 \tilde{h}(g)] U_{11}^{(\alpha)}(g)$$

Puisqu'on a d'autre part l'invariance à droite $\Phi(gk) = \Phi(g)$ pour chaque solution de (4.7.) lorsque $\mu \neq 0$,

le théorème de Peter-Weyl ([36], [46]) permet d'écrire

$$\Phi(g) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{d_\alpha} c_j^{(\alpha)} u_{j,1}^{(\alpha)}(g)$$

au sens de la convergence en moyenne, ce qui achève la démonstration. Ce résultat s'applique immédiatement aux exemples que nous avons déjà considérés à la fin de la section précédente; en effet, si $G = SO(D)$ et $K = SO(D-1)$ avec $D \geq 3$, nous considérons l'hamiltonien

$$-h(g_{R_1}, \dots, g_{R_N}) = J \sum_{j=1}^N C_{e'}^{\frac{D-2}{2}}(n \cdot g_{R_j}^{-1} g_{R_{j+1}} n)$$

Les valeurs propres correspondantes sont alors données par

$$\mu_e(\gamma_\lambda) = \int_{SO(D)} dg \exp[\gamma_\lambda C_{e'}^{\frac{D-2}{2}}(n \cdot gn)] C_e^{\frac{D-2}{2}}(n \cdot gn) \quad (4.10.)$$

où e, e' varient indépendamment sur $\{0, 1, 2, \dots\}$, et les fonctions propres correspondantes par les harmoniques sphériques généralisées [46]. La relation (4.10.) s'écrit encore

$$\mu_e(\gamma_\lambda) = \text{const} \times \int_0^\pi d\theta \sin^{\frac{D-2}{2}} \theta \exp[\gamma_\lambda C_{e'}^{\frac{D-2}{2}}(\cos \theta)] C_e^{\frac{D-2}{2}}(\cos \theta)$$

en utilisant les angles d'Euler généralisés, ce qui donne en particulier

$$\mu_{\ell}(\gamma_1) = \text{const} \times (2\gamma_1^{-1})^{\frac{D-2}{2}} I_{\ell + \frac{D-2}{2}}(\gamma_1)$$

dans le cas du modèle de Stanley ($\ell' = 1$), où I_{τ} désigne la fonction de Bessel modifiée d'ordre τ ([27], [76]). Comme nous l'avons déjà remarqué à la fin de la section 3, il suffit de remplacer partout les $C_{\ell}^{\frac{D-2}{2}}$ par les polynômes de Legendre P_{ℓ} , lorsque $D = 3$; les fonctions propres correspondant aux $\mu_{\ell}(\gamma_1)$ se réduisent dans ce cas aux harmoniques sphériques usuelles Y_{ℓ}^m et les espaces propres associés sont de dimension $2\ell + 1$; il résulte alors immédiatement du résultat de Jentzsch cité plus haut que la valeur propre maximale, positive et simple du spectre de $\tilde{T}_{(\gamma_1, 0)}$ est obtenue pour $\ell = 0$, ce qui donne par exemple

$$\mu_0(\gamma_1) = \text{const} \times (2\gamma_1^{-1})^{1/2} I_{1/2}(\gamma_1)$$

pour le modèle de Heisenberg classique, ou

$$\begin{aligned} \mu_0(\gamma_1) &= \int_{\text{So}(3)} dg \exp[\gamma_1 P_2(\mathbb{1} \cdot g\mathbb{n})] = \\ &= \left\{ \frac{3\gamma_1}{2} \right\}^{-1/2} \exp[\gamma_1] D\left(\frac{3\gamma_1}{2}\right) \end{aligned}$$

pour la version réticulaire du modèle de Maier et Saupe,

D désignant l'intégrale de Dawson ([26] , [27]).

Il est alors trivial de déduire la thermodynamique complète des modèles considérés à partir de l'énergie libre par noeud

$$f(\gamma_1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-1} f_N(\gamma_1) = \beta^{-1} \log \mu_0^{-1}(\gamma_1) \quad (4.11.)$$

et de calculer les fonctions de corrélation à partir de (4.5.); nous ne reproduirons pas ces résultats ici, le lecteur intéressé pouvant consulter à ce sujet les références [26] et [27] et d'innombrables autres travaux consacrés aux systèmes unidimensionnels (voir par exemple [77] et la note bibliographique qui suit). Il est néanmoins important de constater que le résultat que nous venons d'obtenir précise celui de la section précédente quant au problème de l'existence de changements de phase; il s'avère en effet d'une part que $\mu_0^{-1}(\gamma_1)$, en tant que rayon de convergence de la série résolvante

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \mu^{-\alpha} T_{(\gamma_1; 0)}^{(\alpha)} = \left(1 - \mu^{-1} T_{(\gamma_1; 0)} \right)^{-1} - 1$$

est un zéro du déterminant de Fredholm [72] associé à l'équation (4.7.); ce déterminant dépendant analytiquement de $\gamma_1 \in (0, +\infty)$, il en va de même de $\mu_0^{-1}(\gamma_1)$, et par

conséquent de l'énergie libre (4.11.).

Le calcul explicite des fonctions de corrélation (4.5.)

montre d'autre part que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_{(\mathcal{R}_i, 0)}(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_{N(\mathcal{R}_i, 0)}(r) = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{H}(\lambda) \quad (4.12.)$$

pour tous les modèles vectoriels considérés lorsque $\chi_\lambda \in (0, +\infty)$, ce qui permet de donner une interprétation microscopique du théorème (3.1.); les moyennes thermiques (4.4.) ont en effet la signification de probabilités conditionnelles mesurant l'influence d'une configuration donnée en \mathcal{R}_i sur la configuration du système en \mathcal{R}_{i+r} ; le résultat (4.12.) signifie alors simplement que cette influence est négligeable aux grandes distances lorsque $\nu = 1$; que, dans le cas du modèle de Heisenberg classique, les spins n'ont pas tendance à s'orienter suivant une direction privilégiée sur une distance grande comparée au paramètre du réseau; que, dans le cas du modèle de Maier et Saupe, les orientations moléculaires en \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+r} sont pratiquement indépendantes l'une de l'autre. Cela confirme évidemment l'impossibilité pour les systèmes envisagés d'exhiber aucun ordre à longue portée que ce soit lorsqu'ils sont localisés sur un réseau unidimensionnel; il est cependant important de remarquer qu'il n'est pas évident du tout que l'analyticité de l'énergie libre à la limite thermodynamique, et la connexion (4.12.)

entre les ordres à longue portée microscopique et thermodynamique que nous avons établies pour $\nu = 1$ subsistent lorsque $\nu \geq 2$, cela malgré la validité du théorème (3.1.). Nous n'avons pas encore obtenu de résultats satisfaisants à ce sujet.

Note bibliographique.

C'est dans un travail de Kramers et Wannier [78] qu'apparaît pour la première fois le concept de l'opérateur de transfert (dû, semble-t-il, à une idée de Montroll [79]) en liaison avec le modèle d'Ising; cet opérateur a été diagonalisé pour $\nu = 2$ et des interactions entre plus proches voisins par Onsager dans [1]; cette notion a été utilisée depuis par de nombreux auteurs [77] et est à la base des contributions récentes de Lieb et de Baxter ([23], [24], [25]) concernant les problèmes ferroélectriques et de la glace; sa première application aux modèles vectoriels classiques est due à Joyce ([80], [81]); le théorème (4.1.) est dû à Romerio et Vuillermot [27].

Exercice 6. a) Etablir la relation (4.5.) pour la fonction de corrélation à deux corps à partir des indications données dans le texte.

b) Déterminer la forme explicite de (4.5.) pour le modèle de Heisenberg classique et se convaincre que l'absence d'ordre à longue portée $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sum_{(r; i_0)} \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = 0$ est mathématiquement liée à la non-dégénérescence de la valeur propre

maximale $\mu_0(\mathcal{V}_\lambda)$ lorsque $\delta_\lambda \in (0, +\infty)$; que se passe-t-il dans la limite $\delta_\lambda \rightarrow +\infty$?

Exercice 7. Démontrer la relation (4.9.). (Commencer par factoriser les dépendances en \mathcal{G} , \mathcal{K} , \mathcal{G}' dans le membre de gauche en utilisant la définition d'une représentation, puis déterminer l'intégrale restante sur \mathcal{K} en discutant la décomposition de la restriction de $\mathcal{U}^{(4)}$ à \mathcal{K} en composantes irréductibles; bien mettre en évidence le rôle de l'hypothèse suivant laquelle \mathcal{K} est maximal dans \mathcal{G} , dans le sens où le vecteur invariant $\chi_\lambda^{(4)}$ introduit dans le texte est unique).

Le lecteur intéressé pourra encore consulter les références [82] et [83] à propos de l'exercice 6, et [32], [46] pour l'exercice 7.

5. Transitions multiples dans un alliage quaternaire bidimensionnel.

Les divers exemples que nous venons de traiter montrent donc que les modèles vectoriels caractérisés par un groupe de symétrie connexe n'exhibent aucune phase ordonnée lorsque $\nu \leq 2$. Nous examinons dans cette dernière section le cas où le groupe $\mathcal{G}(\Lambda)$ est fini et $\nu \geq 2$; muni de la topologie discrète, $\mathcal{G}(\Lambda)$ devient compact, non connexe et de dimension $n = 0$ [84], si bien que les arguments des sections 2 et 3 ne s'appliquent plus. Nous allons en fait

montrer en construisant un contre-exemple que dans une telle situation, l'existence de points de changements de phase et d'ordre à longue portée est possible. Nous considérons pour cela un modèle d'alliage quaternaire dû originellement à Ashkin et Teller [85], dont nous allons résoudre un cas particulier de façon nouvelle, en évitant délibérément l'emploi des méthodes de la théorie des graphes utilisées par Betts [86], et en abordant le problème de façon suffisamment générale pour montrer l'analogie de l'alliage d'Ashkin et Teller avec le modèle récent à huit vertices de Baxter ([23], [24]).

Nous associons à chaque $R \in \mathbb{Z}^v$ une copie du produit direct $C_2 \times C_2$ du groupe cyclique d'ordre deux par lui-même, et une copie de l'ensemble à quatre éléments $\{A, B, C, D\}$ représentant les constituants de l'alliage. Soit $(C_2 \times C_2)(\Lambda)$ le groupe de configuration de la région Λ au sens de la section 2; la bijection entre les ensembles $\{A, B, C, D\}$ et $C_2 \times C_2$ définie dans la table 4.1. permet alors de caractériser complètement le schéma d'interactions à deux corps

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{AA} &= \tilde{h}_{BB} = \tilde{h}_{CC} = \tilde{h}_{DD} = J_1 \\
 \tilde{h}_{AB} &= \tilde{h}_{BA} = \tilde{h}_{CD} = \tilde{h}_{DC} = J_2 \\
 \tilde{h}_{AC} &= \tilde{h}_{BD} = \tilde{h}_{CA} = \tilde{h}_{DB} = J_3 \\
 \tilde{h}_{AD} &= \tilde{h}_{BC} = \tilde{h}_{CB} = \tilde{h}_{DA} = J_4 \quad (J_k \in \mathbb{R}) \quad (5.1.)
 \end{aligned}$$

par la donnée sur $(C_2 \times C_2)(\Lambda)$ de l'hamiltonien

$$\begin{aligned}
 h(\vartheta_{R_1}, \dots, \vartheta_{R_{1M}}) &= \sum_{R, R' \in \Lambda} \tilde{h}(\vartheta_R, \vartheta_{R'}) = \\
 &= \sum_{R, R' \in \Lambda} \sum_{K, \ell=0}^3 \alpha_{K\ell} (\tilde{\gamma}_K \otimes \tilde{\gamma}_\ell)(\vartheta_R, \vartheta_{R'}) \quad (5.2.)
 \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}_K$ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles de $C_2 \times C_2$ données dans la table (4.1.), avec $\alpha_{K\ell} = 0$ si $K \neq \ell$, $4\alpha_{00} = \sum_{k=0}^3 J_k$, $4\alpha_{11} = 4\tilde{J}_1 = J_1 - J_2 + J_3 - J_4$, $4\alpha_{22} = 4\tilde{J}_2 = J_1 + J_2 - J_3 - J_4$ et $4\alpha_{33} = 4\tilde{J}_3 = J_1 - J_2 - J_3 + J_4$ (exercice 8). La substitution de la forme explicite des $\tilde{\gamma}_K$ dans la relation (5.2.) montre alors que l'hamiltonien considéré est la somme des trois fonctions définies par

$$h_1(t_{R_1}, \dots, t_{R_{1M}}) = \tilde{J}_1 \sum_{R, R' \in \Lambda} \Gamma_1(t_R) \Gamma_1(t_{R'})$$

$$h_2(t'_{R_1}, \dots, t'_{R_{1M}}) = \tilde{J}_2 \sum_{R, R' \in \Lambda} \Gamma_1(t_R) \Gamma_1(t'_{R'})$$

et

$$h_3(t_{R_1}, t'_{R_1}, \dots, t_{R_{1M}}, t'_{R_{1M}}) = \tilde{J}_3 \sum_{R, R' \in \Lambda} \Gamma_1(t_R) \Gamma_1(t'_R) \Gamma_1(t_{R'}) \Gamma_1(t'_{R'}) \text{ si } \alpha_{00} = 0,$$

où les variables t_R , t'_R varient indépendamment sur C_2 . Comme $\Gamma_1(t) = \sigma = \bar{\sigma} \in \Lambda$ lorsque t parcourt C_2 , il s'ensuit que l'hamiltonien (5.2.) est égal à la somme

$$\tilde{J}_1 \sum_{R, R' \in \Lambda} \sigma_R \sigma_{R'} + \tilde{J}_2 \sum_{R, R' \in \Lambda} \sigma'_R \sigma'_{R'} + \tilde{J}_3 \sum_{R, R' \in \Lambda} \sigma_R \sigma'_R \sigma_{R'} \sigma'_{R'} \quad (5.3.)$$

		e	t+e				
				(e,e)	(e,t)	(t,e)	(t,t)
Γ_0		1	1	$\chi_0 = \Gamma_0 \otimes \Gamma_0$	1	1	1
				$\chi_1 = \Gamma_0 \otimes \Gamma_1$	1	-1	-1
Γ_1		1	-1	$\chi_2 = \Gamma_1 \otimes \Gamma_0$	1	1	-1
				$\chi_3 = \Gamma_1 \otimes \Gamma_1$	1	-1	1

a)
b)

Table 4.1. Nous avons rappelé la table des caractères de

C_2 en a) et celle de $C_2 \times C_2$ en b); e désigne l'élément neutre de C_2 : la bijection utilisée dans le texte est définie par

- A \longleftrightarrow (e,e)
- B \longleftrightarrow (e,t)
- C \longleftrightarrow (t,e)
- D \longleftrightarrow (t,t)

où σ_R , $\sigma_{R'} = \mp 1$ pour chaque $R \in \Lambda$, ce qui signifie que le système considéré est équivalent à la superposition de deux modèles d'Ising à spin $\frac{1}{2}$ couplés par des interactions à quatre corps. Il résulte alors de ces considérations que le choix $J_1 = -J_4 = J$ et $J_2 = -J_3 = J'$ est suffisant pour rendre les deux modèles d'Ising indépendants, puisqu'il implique $\tilde{J}_3 = 0$; la fonction de partition de l'alliage se réduit dans ce cas au produit des fonctions de partition des systèmes d'Ising correspondants, soit

$$\sum_{\sigma} Z_{\sigma}(\mathbf{K}_1; \mathbf{K}_2) = Z_I(\mathbf{K}_1) Z_I(\mathbf{K}_2) \quad (5.4.)$$

où $2K_1 = \beta(J'-J)$ et $2K_2 = -\beta(J+J')$; les deux facteurs du membre de droite de (5.4.) sont à leur tour donnés par la solution de Onsager [1] lorsque les interactions sont limitées aux voisins les plus proches et $\nu = 2$. Une situation intéressante est obtenue dans ce cas si, pour fixer les idées, on admet la relation $0 < J' < J$; cela implique en effet $0 < \tilde{J}_1 < \tilde{J}_2$, ce qui revient à dire que les deux modèles d'Ising sont antiferromagnétiques; les températures critiques sont alors données par

$$-K_{C_1} = \frac{J-J'}{2k_B T_{C_1}} = 0.44069 = -K_{C_2} = \frac{J+J'}{2k_B T_{C_2}}$$

d'où $T_{C_1} < T_{C_2}$: lorsque $T > T_{C_2}$, les deux modèles

sont désordonnés, et aucun ordre à longue portée n'est présent dans l'alliage; si $T_{C_1} < T < T_{C_2}$, seul le modèle d'Ising de couplage $\frac{J+J'}{2}$ est dans sa phase ordonnée, ce qui signifie d'après (5.1.) que les voisins les plus proches des atomes A sont en majorité des atomes D mélangés à quelques C, que ceux des atomes B sont en majorité des atomes C mélangés à quelques D; enfin, si $T < T_{C_1}$, les deux systèmes d'Ising sont ordonnés, et l'ordre à longue portée dans l'alliage correspond alors à une séparation de phase en deux alliages binaires substitutionnels: le premier est presque exclusivement composé des atomes A et D, le second des atomes B et C. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il est possible de choisir les constantes de couplage J_K de telle façon que le système se réduise à un seul modèle d'Ising. L'apparition des forces à quatre corps lorsque $\tilde{J}_3 \neq 0$ complique singulièrement la situation, et aucune forme explicite de la fonction de partition n'a pu être donnée dans le cas général; la relation (5.3.) établit cependant une analogie remarquable entre l'alliage d'Ashkin et Teller et le modèle à huit vertices de Baxter ([23] - [24]), bien que les deux modèles ne soient pas équivalents [87] ; il est d'ailleurs probable que l'alliage d'Ashkin et Teller possède au moins deux températures critiques [88] , alors que le modèle de Baxter n'en a qu'une. C'est l'influence des forces à quatre

corps dans (5.3.) sur les propriétés critiques du système qui n'est pas encore complètement comprise à l'heure actuelle.

Note bibliographique.

C'est en 1943 qu'Ashkin et Teller [85] parviennent à localiser la température critique d'un alliage quaternaire bidimensionnel dans lequel les constituants identiques s'attirent; nous trouvons une généralisation de leur résultat pour des systèmes à N composants dans un travail de Potts [89] , et une solution exacte du modèle de Potts à quatre états dans les travaux de Betts [86] et Suzuki [90] ; les découvertes de certaines analogies entre l'alliage d'Ashkin et Teller et le modèle de Baxter sont dues à Fan [91] et Wegner [87] . La technique du groupe de configuration développée dans cette section est due à Vuillermot, et peut aisément être appliquée à d'autres systèmes simples ([92] , [93]).

Exercice 8. a) On demande de bien réfléchir à la signification de la bijection introduite dans le texte et d'établir alors la relation générale permettant de déterminer les constantes α_{re} .

b) Construire un modèle d'alliage binaire bidimensionnel avec des forces à quatre corps de telle façon que sa fonction de partition soit égale à celle du modèle de Baxter.

6. Problèmes ouverts.

Il y a, en liaison avec les résultats de la section 3, un certain nombre de problèmes fondamentaux auxquels nous n'avons pu donner de solutions satisfaisantes jusqu'ici; il s'agit tout d'abord de savoir si l'absence d'ordre à longue portée au sens du théorème 3.1. est équivalente à l'absence de symétries brisées à la limite thermodynamique au sens des décompositions intégrales d'états sur la C^* -algèbre quasi-locale engendrée par les $C^0(G(\Lambda); \mathbb{C})$; puis, le cas échéant, de savoir si cela est équivalent à l'existence d'un seul état d'équilibre invariant sous les translations du réseau [94]; l'ergodicité d'un tel état impliquerait alors l'absence d'ordre à longue portée microscopique, au sens faible, pour tous les modèles vectoriels considérés lorsque $\nu \leq 2$ [95]; puis d'étudier la connexion entre les propriétés mentionnées et la dérivabilité, voire l'analyticité de l'énergie libre à la limite thermodynamique considérée comme fonction de la source extérieure λ . Une extension des résultats obtenus aux modèles continus (non réticulaires) et aux modèles quantiques correspondants est également souhaitable; l'emploi de la théorie des états cohérents associés à un groupe de Lie quelconque devrait, dans ce contexte, se révéler particulièrement adéquate ([96], [97]).

Nous mentionnerons enfin, en liaison avec les résultats de la section 5, le problème important de l'étude de l'influence des forces à plusieurs corps sur les propriétés critiques des systèmes envisagés: leur présence semble en effet impliquer l'existence de phénomènes de nature nouvelle, violant apparamment le principe d'universalité de Kadanoff ([98] - [100]).

Remerciements.

Nos vifs remerciements vont au Professeur M.V. Romero, directeur de thèse, et à Mademoiselle R. Huguenin, qui s'est chargée du travail de dactylographie du présent travail.

* * *

7. Références bibliographiques

- [1] Onsager L. : Phys. Rev. 65, 117 (1944)
- [2] Ising E. : Z. Phys. 31, 253 (1925)
- [3] Kaufman B. : Phys. Rev. 76, 1232 (1949)
- [4] Kac M. et Ward J.C. : Phys. Rev. 88, 1332 (1952)
- [5] Huang K. : " Statistische Mechanik III ",
Hochschultaschenbücher - Verlag, Mannheim (1964)
- [6] Brush S.G. : Rev. Mod. Physics 39, 883 (1967)
- [7] Kac M. : " Mathematical Mechanisms of Phase
Transitions " dans " Statistical Physics, Phase
Transitions and Superfluidity ", Brandeis
University, Gordon and Breach, New-York (1966)
(Volume 1, page 241).
- [8] Feynman R.P. : " Statistical Mechanics; a set
of Lectures " W.A. Benjamin, Inc. Massachusetts
(1972), chap. 5 p.127.
- [9] Thompson C.J. : " Mathematical Statistical Mechanics ",
The Macmillan Company, New-York (1972)
- [10] Temperley H.N.V. : " Two-dimensional Ising Models "
dans " Phase Transitions and Critical Phenomena ",
Acad. Press, London (1972), p.227 .

- [11] Van Hove L. : Physica 15, 951 (1949)
- [12] Yang C.N. et Lee T.D. : Phys. Rev. 87, 404 (1952)
- [13] Yang C.N. et Lee T.D. : Phys. Rev. 87, 410 (1952)
- [14] Berlin T.H. et Kac M. : Phys. Rev. 86, 821 (1952)
- [15] Kac M. : Physics Today 17, No. 10, 40 (1964)
- [16] Ruelle D. : Helv. Phys. Acta 36, 183 (1963)
- [17] Fisher M.E. : Arch. Rat. Mech. Anal. 17, 377 (1964)
- [18] Griffiths R.B. : J. Math. Phys. 5, 1215 (1964)
- [19] Dobrushin R.L. : Teorija Verojatn. i ee Prim 9, 626 (1964)
- [20] Griffiths R.B. : J. Math. Phys. 6, 1447 (1965)
- [21] Fisher M.E. et Ruelle D. : J. Math. Phys. 7, 260 (1966)
- [22] Dyson F.J. : " Stability of Matter " dans " Statistical Physics, Phase Transitions and Superfluidity ", Brandeis University, Gordon and Breach, New-York (1966) (Volume 1 p.179).
- [23] Baxter R.J. : Phys. Rev. Letters 26, 832 (1971)
- [24] Baxter R.J. : Ann. Phys. 70, 193 (1972)

- [25] Lieb E.H. et Wu F.Y. : " Two-dimensional Ferroelectric Models " dans " Phase Transitions and Critical Phenomena ", Acad. Press, London (1972) p.331 .
- [26] Vuillermot P.A. et Romerio M.V. : J. Phys. C : Solid State Physics, 6, 2922 (1973)
- [27] Romerio M.V. et Vuillermot P.A. : J. Phys. C : Solid State Physics, 7, 1033 (1974)
- [28] Vuillermot P.A. et Romerio M.V. : Soumis pour publication dans Comm. Math. Phys.
- [29] Mermin N.D. : J. Math. Phys. 8, 1061 (1967)
- [30] Stanley H.E. : Phys. Rev. 179, 570 (1969)
- [31] Maier W. et Saupe A. : Z. Naturf. 15a, 287 (1960)
- [32] Helgason S. : " Differential Geometry and Symmetric Spaces ", Acad. Press. London (1962) ;
Chap. 2, p.87; chap. 10, p.360, en particulier les théorèmes 4.5. et 4.8.
- [33] Dixmier J. : " Algèbres de Lie ", cahier " Les Cours de Sorbonne ", Paris (1958)
- [34] Bourbaki N. : " Groupes et Algèbres de Lie ", Hermann, Paris (1960), en particulier chap.1, p. 51, proposition 11
- [35] Abraham R. : " Foundations of Mechanics ", W.A. Benjamin, Inc. New-York (1967), chap.3, p.84

- [36] Hochschild G. : " La Structure des Groupes de Lie ", Dunod, Paris (1968)
- [37] Choquet - Bruhat Y. : " Géométrie différentielle et Systèmes extérieurs ", Dunod, Paris (1968)
- [38] Pham Mau Quan : " Introduction à la Géométrie des Variétés différentiables ", Dunod, Paris (1968)
- [39] Godbillon C. : " Géométrie différentielle et Mécanique Analytique ", Hermann, Paris (1969) Collection méthodes, chap. 7 p. 123 .
- [40] Matshusima Y. : " Differentiable Manifolds ", Marcel Dekker, Inc., New-York (1972)
- [41] Dixmier J. : " Les C^* -algèbres et leurs représentations ", Gauthiers-Villars, Paris (1964)
- [42] Gallavotti G. et Miracle-Sole S. : Commun. Math. Phys. 5, 317 (1967)
- [43] Robinson D. : Commun. Math. Phys. 6, 151 (1967)
- [44] Robinson D. : Commun. Math. Phys. 7, 337 (1968)
- [45] Ruelle D. : " Statistical Mechanics, Rigorous Results ", W.A. Benjamin, Inc., New-York (1969) ; en particulier: Chap. 2, p.13; chap. 6, p.145 .
- [46] Vilenkin N.J. : " Special Functions and the Theory of Group Representations ", American Mathematical Society, Providence (1968), chap.9

- [47] Maier W. et Saupe A. : Z. Naturf. 14a, 882 (1959)
et 31
- [48] Chystyakov I.C. : Sov. Phys. Usp. 9, 551 (1967)
- [49] Brown et al. : Critical Review in Solid State
Science 1, 303 (1970)
- [50] Lasher G. : Phys. Rev. A5, 1350 (1972)
- [51] Lebwohl P.A. et Lasher G. : Phys. Rev. A6, 426 (1972)
- [52] De Gennes P.G. : " The Physics of Liquid Crystals ",
Clarendon Press, Oxford (1974)
- [53] Bortz et Griffiths R.B. : Comm. Math. Phys.
26, 102 (1972)
- [54] Griffiths R.B. : Phys. Rev. 152, 240 (1966)
- [55] Suzuki M. : Progr. Theoret. Phys. 42, 1086 (1969)
- [56] Bloch F. : Z. Physik 61, 206 (1930)
- [57] Peierls R.E. : Ann. Inst. Henri Poincaré 5, 177 (1935)
- [58] Landau L. et Lifchitz E. : " Physique Statistique ",
Editions Mir, Moscou (1967), chap. 13 p.485 :
on trouve dans ce chapitre une référence à un
travail de L. Landau (1937)
- [59] Mermin N.D. et Wagner H. : Phys. Rev. Letters 17,
1133 (1966)

- [60] Bogoliubov N.N. : Phys. Abhandl. S.W. 6, 113 (1962)
- [61] Hohenberg P.C. : Phys. Rev. 158, 383 (1967)
- [62] Wegner F. : Phys. Letters 24A, 131 (1967)
- [63] Mermin N.D. : Phys. Rev. 176, 250 (1968)
- [64] Chester G.V., Fisher M.E. et Mermin N.D. : Phys. Rev. 185, 760 (1969)
- [65] Jasnow D. et Fisher M.E. : Phys. Rev. Letters 23, 286 (1969)
- [66] Jasnow D. et Fisher M.E. : Phys. Rev. B3, 895 (1971)
- [67] Fisher M.E. et Jasnow D. : Phys. Rev. B3, 907 (1971)
- [68] Girardeau M.D. : J.Math. Phys. 10, 993 (1969)
- [69] Garrison J.C. et Wong J. : Commun. Math. Phys. 26, 1 (1972)
- [70] Garrison J.C., Wong J. et Morrison H.L. : J. Math. Phys. 13, 1735 (1972)
- [71] Lanford O. et Ruelle D. : J. Math Phys. 8, 1460 (1967)
- [72] Riesz F. et Nagy B.S.Z. : " Leçons d'Analyse Fonctionnelle ", Gauthier-Villars, Paris (1965), Chap. 6, p.239; chap. 4 p.171 .

- [73] Jentzsch R. : Crelles J. 141, 235 (1912)
- [74] Lancaster P. : " Theory of Matrices ", Acad. Press, New-York (1969), chap.9, p.279.
- [75] Pease M.C. : " Methods of Matrix Algebra ", Acad. Press, New-York (1965), chap. 18, p.373.
- [76] Abramowitz M. et Stegun I.A. : " Handbook of Mathematical Functions ", Dover, New-York (1970), Chap. 9, 10 et 11 .
- [77] Lieb E.H. et Mattis D.C. : " Mathematical Physics in one dimension ", Acad. Press, New-York (1966)
- [78] Kramers H.A. et Wannier G.H. : Phys. Rev. 60, 252 (1941)
- [79] Montroll E. : J. Chem. Phys. 9, 706 (1941)
- [80] Joyce G.S. : Phys. Rev. 155, 478 (1967)
- [81] Thompson C.J. : " One-dimensional Models-Short Range Forces " dans " Phase Transitions and Critical Phenomena ", Acad. Press, London (1972) p.177
- [82] Ashkin J. et Lamb W.E. : Phys. Rev. 64, 159 (1943)
- [83] Newell G.F. et Montroll E. : Rev. Mod. Phys. 25, 353 (1953)
- [84] Dieudonné J. : " Eléments d'Analyse ", Gauthier-Villars, Paris (1970) Tome 3, chap. 16 .

- [85] Ashkin J., Teller E. : Phys. Rev. 64, 178 (1943)
- [86] Betts D.D. : Canad. J. Phys. 42, 1564 (1964)
- [87] Wegner F.J. : J. Phys. C : Solid State Physics 2, L 131 (1972)
- [88] Wu F.Y. et Lin K.Y. : J. Phys. C : Solid State Physics 7, L 181 (1974)
- [89] Potts R.B. : Proc. Camb. Phil. Soc. 48, partie 1, 106 (1952)
- [90] Suzuki M. : Prog. Theor. Phys. 37, 770 (1967)
- [91] Fan C. : Phys. Rev. B6, 902 (1972)
- [92] Vuillermot P.A. : " Multiple Transitions in some two-dimensional alloys ", non publié .
- [93] Vuillermot P.A. : " Phase transition in a two-dimensional binary alloy with pure quartet interactions ", non publié .
- [94] Ruelle D. : Ann. of Phys. 69, 364 (1972)
- [95] Lebowitz J.L. et Martin-Löf A. : Commun. Math. Phys. 25, 276 (1972)
- [96] Perelomov A.M. : Commun. Math. Phys. 26, 222 (1972)
- [97] Lieb E.H. : Commun. Math. Phys. 31, 327 (1973)

- [98] Kadanoff L.P. : Physics 2, 263 (1966)
- [99] Kadanoff L.P. et al. : Rev. Mod. Phys. 39, 395 (1967)
- [100] Wilson K.G. et Kogut J. : " The Renormalization Group and the ξ -Expansion ", Princeton Lectures notes (1972)

* * *