Publié dans G. Mugny & J. A. Perez (Eds.),
Psicologia social del desarrolo cognitivo, pp. 289-315, 1988
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail

LAS INTERACCIONES SOCIALES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN EL NIÑO*

Maria-Luisa Schubauer-Leoni
Anne-Nelly Perret-Clermont

La problemática que vamos a abordar en este capítulo se refiere a la elaboración efectuada por el niño, en interacción con otro, de nociones escolares y, en concreto, de los contenidos matemáticos elementales.

Un cambio epistemológico importante

Los aprendizajes matemáticos en los alumnos pequeños constituyen un campo complejo irreductible a la construcción de otros saberes, y su funcionamiento merece un enfoque específico. Examinemos desde el punto de vista epistemológico algunos aspectos que caracterizan el campo de los aprendizajes matemáticos que nos interesa aquí:

— Los saberes escolares se enseñan antes de nuestra intervención y siguen siendo enseñados al mismo tiempo y

* Este trabajo constituye el fruto de un conjunto de interacciones sociales y didácticas con el equipo de didáctica de las matemáticas de la Sección de Ciencias de la Educación de la Universidad de Ginebra. Agradecemos, pues, a nuestros colegas J. Brun, F. Conne y E.H. Saada. La recogida de los datos se pudo llevar a cabo gracias al apoyo del FNRS (contrato 1.706.0.78, A.N. Perret-Clermont y J. Brun).

después de nuestra intervención. Constituyen objetos marcados socialmente en tanto que objetos escolares, pero también están investidos de significaciones diversas que le confieren el medio familiar, social y cultural.

— Esos saberes son enseñados por actores sociales que se supone que han sido formados para ello. En nuestro caso, se trata de maestros de la escuela primaria, de «generalistas» que mantienen una relación particular con esos saberes (Perret, 1980). Además se trata de maestros que disponen de métodos de enseñanza propios y que en parte recurren al «trabajo de grupo». No olvidemos que ese tipo de práctica interactiva ya fue preconizada hace tiempo por pedagogos tales como Freinet, Cousinet, Decroly, etc.

— Los alumnos, a su vez, enfocan los saberes escolares en función de su «habitus» de alumnos que ya se han enfrentado con ese tipo de objetos. Su pasado les llevará en mayor o menor grado a identificar los objetos de la enseñanza. Se comprende, pues, que el niño extraído de su clase y confrontado a la resolución de un «nuevo» problema con un experimentador desconocido, probablemente se inspire en su historia escolar pasada. Interpretará su rol en la tarea propuesta y mostrará tal o cual competencia en función de la construcción de hábitos cognitivos y sociales que ha adquirido en otra parte.

La imagen que se hará de su compañero (adulto o niño) durante la interacción estará igualmente marcada por el objeto en cuestión. Este, convertido en el centro de lo que está en juego en la interacción, a su vez va a estar marcado por la implicación relacional particular que representa, lo que puede introducir deslizamientos en las significaciones que se construyen a su respecto. El objeto de conocimiento estará marcado en su misma naturaleza por las significaciones que los actores aprenden a conferirle.

— A causa de esto la posición del experimentador en la interacción se encuentra un poco modificada: muy probablemente por la referencia a la situación de clase, el alumno le atribuye la posición de un profesor (incluso le puede hacer jugar ese papel aunque no lo quiera).

Puesto que nuestra intención es estudiar cómo elabora el niño los contenidos matemáticos, dentro del marco del cambio epistemológico que interviene debemos repensar, en primer lugar, la significación teórica de los datos que recolectamos a través de nuestra intervención experimental y, en segundo lugar, especificar su alcance. Esto es necesario para comprender mejor la articulación de los procedimientos de enseñanza-aprendizaje de los saberes escolares específicos y su relación con el campo en el cual se sitúan. Sería ilusorio, y epistemológicamente dudoso, pensar captar exhaustivamente los procesos que están en juego en la enseñanza-apropiación de contenidos matemáticos exclusivamente a través de los experimentos de laboratorio. Este vasto objeto de estudio exige que se recurra a metodologías de investigación diversificadas, y no se puede prescindir de lo que interviene en la misma clase escolar, en las interacciones cotidianas entre el maestro, los alumnos y los saberes escolares.

En esta perspectiva de la didáctica de las matemáticas, Brousseau (1976) concibe y estudia las secuencias de la enseñanza (situaciones didácticas) que recurren a una articulación entre lo que él llama las dialécticas de la acción, de la formulación y de la validación; dialécticas que son creadas por las presiones de la situación y que por naturaleza son interaccionistas y sociales.

Para introducir al lector en el núcleo de nuestra problemática describiremos la elaboración de ésta *a través de la acción de una vía doble*:

1) Un primer enfoque elaborado en psicología social evolutiva, con sus numerosos trabajos que ponen de manifiesto el papel motor en la construcción de la inteligencia de los intercambios interpersonales (Perret-Clermont, 1979; Perret-Clermont y Schubauer-Leoni, 1981; Doise y Mugny, 1981).

2) Un segundo enfoque que se ha constituido a partir de un cierto número de reflexiones respecto a las relaciones entre la psicología genética y la enseñanza de las matemáticas (Brun y Conne, 1979).

En el marco del primer enfoque, el análisis de los efectos de la interacción social sobre las competencias cognitivas de los niños nos ha llevado a prestar una atención especial a las características sociales de las situaciones de test y de aprendizaje. En efecto, los niveles de conducta operatoria, de los sujetos se han mostrado muy sensibles no sólo al contenido nocional de las tareas presentadas, sino también a las particularidades de «escenificación» de la tarea y a las modalidades de las relaciones interpersonales invocadas (Perret-Clermont *et al.*, 1982). Se ha mostrado igualmente que las variaciones intergrupales de los niveles de rendimiento dependen del contexto cultural de origen de los sujetos: el «desarrollo intelectual» aparece, incluso en su definición operatoria, como fruto de un proceso de aculturación en el cual el niño no sería el autor sino el «co-autor».

Para captar esta dinámica cognitiva y social del desarrollo del pensamiento, creemos que es necesario ir más allá de los signos de una competencia operatoria, restituyéndolos de entrada a su contexto de elaboración.

Este procedimiento teórico por el que se tiene en cuenta el contexto de producción de las respuestas del niño se deriva de una objetivación que se sitúa a dos niveles:

— El primero trata de tener en cuenta el etnocentrismo (cultural y profesional) del experimentador adulto, a fin de no atribuir a ciertos signos de competencia del alumno la relación científica que mantiene el observador con el objeto de conocimiento. Gracias a este primer trabajo de objetivación, el experimentador puede entonces captar cómo el alumno se representa el problema planteado: ¿qué tipo de codificación realiza el alumno de la cuestión para que tenga un sentido para él? ¿Qué tipo de interpretación elabora de la escenificación organizada para lograr representar un papel, que no conoce de entrada y que debe aprender a identificar (es decir, el del sujeto-que-responde-adecuadamente-a-las-cuestiones-planteadas)?

— El segundo nivel de objetivación analiza sistemáticamente la dialéctica social y cognitiva implicada en toda relación de cuestionamiento y respuesta; dialéctica que puede adquirir formas muy diferentes. Dependerá principalmente de la percepción que desarrolle el alumno de la relación social en la cual está implicado y cuya asimetría traiciona una distancia social (de clase y/o de estatus) más o menos «superable» (formalmente) a sus ojos.

Entonces proponemos interpretar los rendimientos de los alumnos en tanto que procedentes de meta-contratos que permiten que se establezca, *hic et nunc*, la intersubjetividad entre los partenaires, pasando esto por fases de confrontación con una realidad social sólo parcialmente compartida, que puede desencadenar conflictos sociocognitivos. El niño alcanzará un estado satisfactorio de intersubjetividad con el partenaire a través de un surtido, a veces bastante complejo, de regulaciones sociales y cognitivas. Este estado le permitirá emprender un trabajo de verdadera elaboración cognitiva respecto al objeto-problema que le ha planteado el adulto. Si ya nos pareció muy importante que se deban integrar explícitamente esos procesos en las teorizaciones clásicas de los procesos operatorios en el sentido piagetiano del término, ahora esto se revela tanto más necesario cuando abordamos nociones más complejas y sin duda más marcadas culturalmente, tal y como es el caso de las matemáticas enseñadas en la escuela. A pesar de ello, nuestra perspectiva no es la del matemático, en el sentido en que las matemáticas que nos interesan aquí son claramente las matemáticas enseñadas en la escuela y no las matemáticas tal y como las han inventado los matemáticos. Entre un contexto y otro se encuentra todo el trabajo y extensión de la «transposición didáctica» (Verret, 1975; Chevallard, 1980; Conne, 1981). Además, en el campo escolar tenemos que enfrentarnos con diversos agentes sociales que elaboran representaciones sociales específicas del objeto de enseñanza que es de este modo «des- y re-contextualizado» (Perret-Clermont *et al.*, 1984). Así pues, pensamos que es reduccionista sustituir formalmente un objeto (un saber escolar matemático X) por otro (una noción operatoria piagetiana) y sostener que intervendrían los mismos mecanismos cuando en realidad se trata de objetos diferentes.

Todo intento de «prolongamiento» de los estudios sobre la construcción social de la inteligencia a través de la simple sustitución del objeto en los paradigmas experimentales eficaces a otro nivel, sin repensar el marco teórico —por parcial y provisional que sea— apto para dar cuenta de la complejidad del esquema experimental recién creado, presentará un doble riesgo: por una parte, llevaría a subestimar paradójicamente el alcance de los resultados obtenidos anteriormente; y, por otra, a sobregeneralizar esos resultados a otros objetos, lo que con toda probabilidad corre el riesgo de mostrarse ineficaz en la perspectiva de la didáctica de las matemáticas (Brun, 1981). ¿Cuál es entonces la especificidad de los contenidos matemáticos?

Los contenidos de los conocimientos matemáticos no son reductibles a las nociones operatorias en el sentido piagetiano

Y sin embargo, tales transposiciones tan generales, sin verificaciones sistemáticas suficientes, ya han sido emprendidas repetidas veces: las relaciones entre la psicología genética y la enseñanza de las matemáticas a menudo han sido concebidas en un sentido que desnaturaliza la concepción epistemológica que era considerada como su fundamento. Así, al estudiar los desarrollos recientes de la pedagogía, se puede descubrir toda una serie de experimentos que, deseando inspirarse de los trabajos recientes de la psicología, lo que en realidad han hecho es desembocar en una reificación de los conceptos piagetianos, reificación que va hasta transformar en ejercicios escolares el dispositivo experimental utilizado para poner de manifiesto el desarrollo. Quizás el ejemplo más sorprendente a este nivel lo constituya el destino dado a la noción del número. Algunos manuales han comenzado a hablar de la «construcción del número», refiriéndose a la concepción —convertida en definición— piagetiana según la cual el número es la síntesis de la seriación e inclusión de clases. Creyendo basarse fielmente en los trabajos de Piaget, lo que esos manuales proponen en realidad es que los alumnos construyan el número a través de ejercicios escolares de seriación por un lado y de clasificación por otro. De hecho se trata de una positivización del enfoque epistemológico que le hace perder su verdadero sentido: termina por encerrar al niño en actividades que dejan de lado las experiencias que él puede tener del número y de la cuantificación, bajo el pretexto de apoyarse en «lo que es» el número (Brun y Schubauer-Leoni, 1981).

La articulación que existe entre la elaboración de conocimientos matemáticos y los instrumentos generales del pensamiento ya ha sido parcialmente explorada (Brun, 1975; Vergnaud, 1980). Esos trabajos muestran ya que las relaciones son bastante más complejas de lo que se preveía. También en uno de nuestros estudios (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980) pudimos constatar que las supuestas relaciones de dependencia entre algunas estructuras operatorias y los contenidos concretos del conocimiento matemático no son tan directas como lo habíamos imaginado. En efecto, esperábamos que cuanto más avanzado estuviese el niño a nivel operatorio en una prueba de composición aditiva del número, más capaz sería de completar correctamente ecuaciones incompletas de tipo «$a + ... = c$» o «$a + b = ...$».

De igual modo, habíamos formulado la hipótesis de que si los niños han acabado la construcción operatoria de esos significados (bajo la forma de la composición aditiva del número), entonces recurrirían más fácilmente a la codificación ecuacional enseñada en la escuela. Por el contrario, los resultados nos muestran que el estadio más avanzado en la prueba piagetiana elegida no es ni una condición necesaria, ni una condición suficiente para resolver las ecuaciones incompletas propuestas. Tampoco la construcción operatoria parece ser una condición suficiente para que el alumno recurra al formalismo matemático usual en una codificación.

Estos estudios muestran ya cómo, a nivel de los procesos de adquisición, el objeto de conocimiento constituido por las matemáticas presenta una especificidad. De hecho esta no se sitúa sólo a ese nivel. ¿Es necesario recordar que, cuando se habla de matemáticas, se trata de contenidos históricamente situados, culturalmente marcados y que, además, son enseñadas en un contexto socialmente definido y organizado como lo es la escuela? Las matemáticas (como por otra parte la lengua) están formados de objetos codificados y ordenados en función de un sistema elaborado con anterioridad y exterioridad al niño. No los inventa él solo espontáneamente: eventualmente se apropia de ellos.

La formulación de la escritura simbólica: estudios experimentales

Hemos abordado el estudio de los procesos de apropiación de los contenidos matemáticos comenzando por la problemática de la formulación y nos hemos propuesto estudiar el impacto del contexto interpersonal en el cual se desarrolla una actividad de formulación de un problema aditivo. Paralelamente, otra cuestión que nos planteamos se centra en las eventuales relaciones que construye el niño entre diferentes actividades que hacen intervenir la escritura simbólica. Tomemos el caso de un alumno que dispone de una experiencia escolar bastante amplia sobre actividades de escritura aritmética de este tipo $5 + 3 - 2 = ...$, y que se le pide que represente por escrito una operación aditiva (sin mencionarle explícitamente el recurso del registro matemático): ¿cómo va a representar el problema y su solución?

Con esta perspectiva deseamos captar el conocimiento matemático en acción: nuestro problema se sitúa en dar cuenta de la relación que existe entre las características cognitivas, materiales y relacionales de la situación y de la actualización de los conocimientos, poniendo de manifiesto al mismo tiempo el papel mediador de los procesos y de las representaciones.

Los estudios a los que nos referiremos aquí han sido realizados con alumnos de 7-8 años del cantón de Ginebra y se han efectuado siguiendo un esquema experimental en 4, y a veces 5, tiempos sucesivos.

TIEMPO 1: el alumno resuelve solo en el contexto habitual de la clase una prueba papel-lápiz del mismo tipo que las habituales en los cursos de segundo (escuela primaria de Ginebra) (tipo $a + b - c = x$, $a + x = b$, etc.).

No se trata del mismo experimentador en esta fase del test papel-lápiz y en otros tiempos posteriores a fin de no inducir, a través de una relación con la misma persona, la utilización de la escritura ecuacional durante las subsecuentes tareas de formulación.

TIEMPO 2: un nuevo experimentador presenta al niño (in dividualmente fuera de la clase o «colectivamente» dentro de la clase en función de distintas condiciones experimentales) una situación que hace intervenir operaciones de adición y de sustracción, y le pide que formule por escrito lo que había pasado. El experimentador efectúa la manipulación delante de los alumnos. En el primer experimento (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980) la manipulación fue la siguiente: el adulto introduce en dos ocasiones unos bombones en una bolsita, a continuación retira algunos y finalmente pregunta al niño si es posible saber «cuántos bombones hay al final en la bolsita». En otro experimento (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) se trata de un juego con tres dados (2 rojos y 1 verde) y la regla es la siguiente: «voy a tirar los dados todos juntos. Se ganan los puntos de los dados rojos y se pierden los puntos del dado verde». Se lanzan los dados ante los niños y estos deben apuntar sobre una hoja «todo lo que ocurre con los puntos durante el juego y los puntos que hay al final del juego, cuándo se ha ganado o perdido». Es importante subrayar que en este caso la formulación escrita interviene sin que se pida al niño previamente que explicite verbalmente la composición exhaustiva de los datos del problema.

TIEMPO 3: durante el tiempo 3 los alumnos son repartidos en diversas condiciones experimentales en función de diferentes contextos relacionales:

— *Condición experimental 1*: los niños producen su formulación de dos en dos y exponen su mensaje a otro niño semejante a ellos que es un decodificador que estuvo ausente durante la codificación.

— *Condición experimental 2*: la codificación es realizada por los partenaires que formulan el mensaje para un tercero ausente, el cual en realidad no procederá a la decodificación (comunicación invocada). En esta condición experimental se introdujeron las siguientes variantes en la situación: o bien los niños producen un código común sobre la misma hoja (2*a*), o bien cada niño codifica a su turno y verifica la formulación del compañero (2*b*).

— *Condición experimental 3*: el alumno codifica solo y comunica a continuación el mensaje a otro niño semejante que es un decodificador.

— *Condición experimental 4*: el alumno codifica solo (como en la situación clásica de los test psicológicos).

— *Condición control*: no se somete a ninguna tarea experimental durante el tiempo 3 a los alumnos de esta condición.

En los casos en que hay formulación en interacción (condiciones experimentales 1 y 2) hemos formado parejas de codificadores con la intención de favorecer las confrontaciones sociocognitivas: dado que se trata sistemáticamente de alumnos que no han recurrido a la escritura ecuacional durante el tiempo 2, hemos formado parejas que recurrieron previamente a un registro de naturaleza diferente para señalar las operaciones en juego. Así, por ejemplo, en el primer experimento (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980) colocamos: un niño que codificaba en lenguaje natural con otro que más bien utilizaba el dibujo u otros esquemas e índices perceptivos. En el experimento en el que los niños deben codificar la composición de las ganancias y pérdidas en el juego de dados, se formaron las parejas en función de la composición que llevaron a cabo en el tiempo 2 (ej.: un niño que describe las ganancias y pérdidas sin componerlas, con un niño que realiza al menos una composición parcial de los datos; *cf.* Brun y Schubauer-Leoni, 1981).

Las tareas realizadas en el tiempo 3 son del mismo género que las propuestas en el tiempo 2: idénticas en cuanto a las composiciones en juego ($a + b - c = x$) y diferentes en cuanto a la «indumentaria» de la tarea y material manipulado.

TIEMPO 4: se pasaron una vez más los tests a los alumnos con los mismos procedimientos y contexto relacional que en el tiempo 2.

TIEMPO 5: (sólo en un experimento) se propuso al alumno el test papel-lápiz idéntico al tiempo 1.

En las diferentes condiciones en las que el niño debe producir una formulación escrita, el análisis en términos cognitivos del problema muestra que para encontrar una solución, el niño debe proseguir ya una adición y una sustracción y dar con el balance final: $a + b - c = x$, o bien realizar un balance intermedio: $a + b = x1$, $x1 - c = x2$. Escribir tal operación mental exige que se recurra a dos tipos de signos: los que representan las *cantidades* y los que representan las *operaciones* sobre esas cantidades.

El encadenamiento de dos tipos de signos puede corresponder al desarrollo en el tiempo del cálculo efectuado por el alumno. Pero también puede ser diferente cuando la escritura de la igualdad representa las relaciones que entran en juego entre las cantidades y su balance, y no incluye el procedimiento de cálculo. Si, como señala Bresson (1978), se puede representar un cálculo sin representar las operaciones (este es el caso, por ejemplo, cuando se utiliza para el cálculo un ábaco, el cual nos indica los resultados y no las operaciones efectuadas), en cambio la expresión aritmética $a + b - c = x$ representa una función doble porque expresa los resultados y las operaciones. En efecto, el que la produce utiliza los signos para guardar el rastro de su cálculo (o de la relación que representa) y el que la lee utiliza los signos como las órdenes para efectuar las operaciones.

Dada esta doble función de los signos, nuestra hipótesis es que las situaciones experimentales que exigen explícitamente la interacción y la comunicación serán especialmente pertinentes para favorecer la producción y evolución de la escritura simbólica y aritmética (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980; Brun y Schubauer-Leoni, 1981).

Las situaciones en las que dos niños producen juntos un código para exponerlo a continuación a un tercero, el decodificador, son, pues, las que nos parecen más aptas para suscitar a lo largo de la micro-historia experimental los progresos en la escritura, en la medida en que se producirán confrontaciones cognitivas entre los partenaires en el momento de la codificación y entre los codificadores y los decodificadores en el momento de decodificar el mensaje. Utilizamos aquí «progreso» en el sentido de elaboración de un código cuya formulación es cada vez más explícita e inteligible para el otro: evoluciona en el sentido de una composición de los datos del problema de más en más pertinente, y probablemente también se recurra más sistemáticamente al formalismo ecuacional aprendido en clase.

Principales resultados

Examinaremos las producciones de los niños que han participado en estos experimentos en función de diferentes prismas de lectura. En un primer momento analizaremos el recurso a la escritura ecuacional (*a*) en función de las condiciones experimentales y en función de los resultados del test papel-lápiz de las ecuaciones incompletas (experimentos Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980, y Brun y Schubauer-Leoni, 1981). Extraeremos a continuación los principales resultados del experimento con los bombones (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980) en función del grado de explicitación de las producciones (*b*). El segundo experimento (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) será analizado teniendo en cuenta las formulaciones de las operaciones sobre las cantidades (*c*). La sección siguiente (*d*) versará sobre la relación entre esos dos últimos criterios de análisis de las producciones (*b* y *c*).

a) El recurso a la escritura ecuacional convencional

Los alumnos tienen cierta práctica escolar con el simbolismo matemático y manifiestan en el test papel-lápiz del tiempo 1 un cierto «dominio» de las igualdades aritméticas elementales; sin embargo, cuando en el tiempo 2 la consigna exige al niño (solo) que produzca un código para señalar las cantidades y las operaciones sobre esas cantidades, hemos constatado que el recurso al código convencional de la escritura de igualdades es raro.

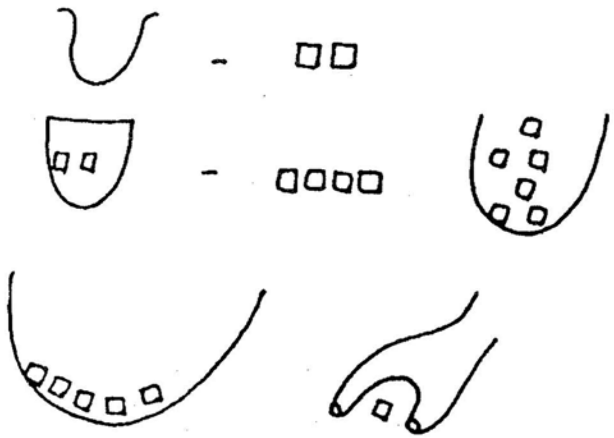
En el segundo experimento con el material formado por los bombones (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980), en el que el experimentador limita en la mayor medida posible sus propias verbalizaciones durante las manipulaciones, sólo 9 sobre los 89 alumnos examinados recurrieron al código ecuacional usual de forma correcta ($a + b - c = x$ o $a + b = x1$, $x1 - c = x2$). Por otra parte, esos alumnos como máximo sólo cometieron una falta en el test papel-lápiz. 64 alumnos, de entre los cuales 31 habían resuelto el test papel-lápiz cometiendo como máximo sólo una falta, recurrieron ahora a una escritura *no* ecuacional.

En el experimento del juego de dados (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) el recurso al formalismo aún es menor: en la primera codificación (tiempo 2) sólo 1 niño, de entre los 44 interrogados en dos clases escolares, recurrió a un código de tipo $a + b - c = x$. Otros tres alumnos de la misma clase formularon un código con un primer indicio de ecuación (ejemplo: $4 + 5 - 2 = 7$). Todos los restantes niños utilizaron el lenguaje natural, esquemas u otros índices perceptivos; y esto a pesar de que 18 de los 44 niños tuvieron cero o como máximo una falta en el test de la ecuación incompleta del tiempo 1. *Actualizar una escritura convencional de las igualdades parece pues derivarse de otro tipo de competencia distinto de la capacidad para completar correctamente las ecuaciones incompletas.*

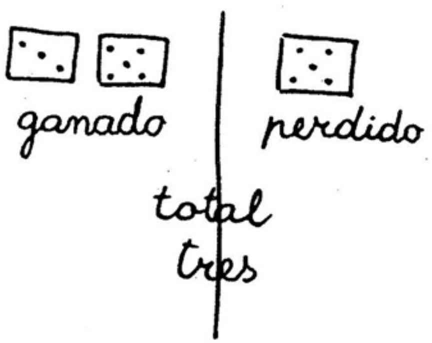
Después de una sesión de interacción y de comunicación entre iguales (condición experimental 1), individualmente en el tiempo 4 el recurso al formalismo ecuacional se manifiesta bastante flojo; y sin embargo, son los alumnos de esta condición los que más recurren al código ecuacional (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980).

La cuestión que se plantea es la siguiente: si el niño no actualiza el código aritmético, ¿quiere esto decir que ese registro «no está» a disposición en tanto que registro posible para señalar la operación en juego? ¿O bien ese niño ha atribuido a la consigna un sentido diferente al pensado por el experimentador? Es cierto que el niño dispone de toda una panoplia de posibles respuestas (de tipo escolar u otro) para esta situación en la que debe mostrar que «sabe» algo (pero, ¿qué exactamente?): ¿por qué hemos de juzgar «ilegítima» la comprensión de esta situación en la que se da una prueba de *capacidades gráficas*, dibujando «*cuidadosamente*» una bolsita y los bombones?

He aquí un ejemplo de una formulación gráfica que describe la operación $2 + 4 = 6 \quad 6 - 1 = 5$:



¿En base a qué criterio podemos decidir que tal representación no es legítima porque no se corresponde con la consigna («marcar todo lo que ha pasado con los bombones para que al final haya 5 en la bolsita»)? Y también, ¿por qué juzgar inadecuada la conducta de este otro niño que recuerda *«diligentemente»* la consigna distinguiendo bien los dados de color y los puntos que se gana y que se pierde?



Henos aquí en el centro de la problemática: ¿cuál es la *interpretación* que efectúa el niño de la situación y de las cuestiones que se le plantean? ¿Cuál es la significación social que atribuye a la escenificación que orienta sus respuestas y que le permite identificar los conocimientos en juego? Se comprenderá que el niño construye con sus instrumentos cognitivos, a través de su experiencia, mediante su interpretación de la consigna, la significación social de la situación, y que esta significación puede que difiera de la que el experimentador había proyectado.

Si se recurre o no a una escritura ecuacional es un criterio importante para examinar las conductas del niño con respecto al tipo de situación (cognitiva y relacional) que lo ha engendrado. Pero también pretendimos disponer de los medios para realizar otras lecturas de las producciones de los alumnos que no se redujesen únicamente a una *conformidad* con el formalismo aritmético convencional.

Los estudios presentados aquí permitieron también elaborar otros instrumentos de análisis y de categorización de las producciones escritas por los alumnos. Así, en un primer momento, hemos explorado sobre todo el grado de explicitación de las producciones (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980); a continuación pusimos de manifiesto los procedimientos de las representaciones de las operaciones de $a + b - c = x$ (Brun y Schubauer-Leoni, 1981). Esto es lo que vamos a presentar ahora.

b) Grado de explicitación de las producciones

Hemos construido un esquema de análisis de las producciones escritas que tiene en cuenta las tres siguientes dimensiones del código:

— formulación de las *cantidades* en juego y del *balance final*,
— formulación de las *operaciones* (añadir, quitar, en total),
— *desarrollo temporal* de las operaciones efectuadas.

Así, las codificaciones de los alumnos han sido contadas atribuyendo 1 punto a toda formulación que designe las cantidades siguientes (a, b, c, $x1$, $x2$: 5 puntos), las operaciones (+, –, =: 3 puntos) y las etapas del desarrollo temporal (5 puntos). Por lo tanto, el niño que produce una codificación que se adapta al conjunto de esas características obtiene un total de 13 puntos (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980). La puntuación total de cada alumno será considerada como una medida del grado de explicitación de las producciones.

A través de este instrumento de análisis hemos podido verificar que independientemente de la condición experimental, los alumnos evolucionan entre el tiempo 2 y el tiempo 4, pero que los niños que más progresan son los que participaron en el tiempo 3 en una situación de interacción y de comunicación (condición experimental 1).

En este mismo experimento (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980), los alumnos de la condición experimental 2 (interacción con comunicación invocada) también progresaron, aunque en menor grado. Por el contrario, los alumnos que hicieron la codificación solos y que sometieron a continuación su mensaje a un decodificador (condición experimental 3) no evolucionaron de modo significativo entre el tiempo 2 y el 4, si bien ninguno de estos niños manifestó en el tiempo 4 un código de tipo «regresivo», es decir, que fuera menos explícito que el del tiempo 2.

Ahora bien, este es el caso de 2 de los 7 alumnos que durante los tres tiempos de la codificación (tiempos 2, 3 y 4) estuvieron confrontados a la actitud supuestamente «neutra» del adulto experimentador. Los otros 5 niños de esta condición progresaron: la confrontación implícita con el adulto parece pues que no deja indiferente a ningún alumno: o bien se da una progreso, o bien una «regresión» en la explicitación (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980). Veremos que el problema de la explicitación deberá ser profundizado más adelante en función de un análisis de las operaciones efectuadas mentalmente y que a continuación son representadas por escrito.

c) Las operaciones sobre las cantidades y sus formulaciones

El experimento con el juego de los tres dados (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) nos ha permitido extraer tres categorías de operaciones:

1) *Ausencia de composición entre los números*
— descripción parcial o total (A)

ejemplo de producción: 4 5 punto para los rojo 2 para el verde
(operación a efectuar: $5 + 4 - 2 = x$)

2) *Composición parcial* con balance parcial:
— adición de dos ganancias o transformación de la pérdida en ganancia y adición a otra ganancia (B)

ejemplo de producción:

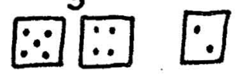
ganao punto	perdido punto
9	2

(operación a efectuar: $5 + 4 - 2 = x$)

— resta de la pérdida de una ganancia (C)

(operación a efectuar: $5 + 4 - 2 = x$)

3



3) *Composición completa* y balance
— *transformación de la pérdida en ganancia y composición de las 3 ganancias (D)*

ejemplo de producción:

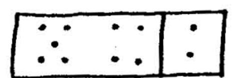
dadosrojo	dado azul
11	2

13 resultao

(operación a efectuar: $5 + 6 - 2 = x$)

— *adición de dos ganancias comparadas con la pérdida (E)*

ejemplo de producción 1:
(operación a efectuar: $5 + 4 - 2 = x$)



gana pierde

ejemplo de producción 2:
7 gana
1 + 4 - 2 = 3

Al notificar estas operaciones hemos podido constatar que los niños también en este estudio hacen referencia a *tres registros*:

— Esquemas y otros índices perceptivos (color, disposición espacial, etc.).

— Lenguaje natural (ganado-perdido, aún más-menos, etc.).

— Escritura aritmética (+, –, =).

Gracias a este tipo de análisis, hemos constatado que los alumnos pueden *recurrir a diferentes registros para notificar una misma categoría de operaciones* y esto en los diferentes tiempos del experimento.

Así, por ejemplo, el alumno ha podido muy bien efectuar la composición completa y pertinente de las cantidades y, no obstante, representar las operaciones por medio de un dibujo. En este experimento que contiene, como se recordará, dos condiciones experimentales (2*a* y 2*b*) con interacción social entre dos niños y una condición control (sin intervención por nuestra parte en el tiempo 3), no hemos constatado ningún procedimiento de tipo A (sin composición de los datos) durante la fase de interacción. En el momento experimental consecutivo a la situación de interacción (tiempo 4), hemos observado los siguientes efectos en el niño que trabaja solo: la evolución manifestada por los alumnos que participaron en la fase de interacción (condición experimental 2*a* o 2*b*) es claramente superior a la observada en la condición control en situación individual en la clase (consigna dada colectivamente y respuesta individual y escrita del alumno). Por evolución entendemos todo cambio que va en el sentido de la siguiente sucesión: Descripción sin composición (A), Composición parcial (B o C), Composición completa pero no pertinente (D), Composición completa y pertinente (E).

La evolución de los alumnos de las dos condiciones experimentales 2*a* y 2*b* ha sido la misma: en estas dos condiciones los sujetos interactúan o bien produciendo un código común, o bien controlándose mutuamente las dos producciones. Estos datos surgidos de la situación del juego de dados (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) confirman, pues, la hipótesis de la superioridad de los grupos que pasaron por una fase de interacción.

d) Grado de explicitación y nivel de composición de las cantidades.

Ahora nos parece que es interesante conjugar los dos análisis realizados hasta aquí, es decir, los cambios que intervienen (entre el tiempo 2 y el 4) tanto a nivel de la explicitación de las cantidades como a nivel de la composición de esas cantidades (véanse los puntos *b* y *c*).

Hemos pensado que no era suficiente razonar solamente en términos del número de cantidades explicitadas y que era necesario también analizar *qué* cantidades son designadas por el niño. En caso de que se produzca un cambio durante las fases experimentales, habrá que localizar *cuál* de las cantidades en juego ha sido añadida o abandonada y, eventualmente, en beneficio de qué otra.

El cuadro 13.1. indica los diferentes cambios operados entre el tiempo 2 y el 4 en las condiciones experimentales y en la condición control.

CUADRO 13.1. *Cambios acontecidos entre el tiempo 2 y el 4 en los alumnos de las condiciones experimentales 2 (con interacción en el tiempo 3) y control (sin haber pasado el tiempo 3) en el experimento* del juego de dados (Brun y Schubauer-Leoni, 1981)*

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*número total de alumnos*
condiciones experimentales	0	0	4	2	7	7	20
condición control	2	1	10	2	3	3	21

* I: El niño produce en el tiempo 4 un código de tipo «regresivo» tanto desde el punto de vista de la explicitación de las cantidades como de la composición de los datos.

II: El niño se estabiliza sobre una de las dimensiones y «regresa» en la otra.

III: Estabilización en los dos niveles estudiados.

IV: El niño evoluciona en la composición de los datos y «regresa» en la explicación de las cantidades, o bien progresa en la explicitación y regresa en la composición de las cantidades.

V: El niño no evoluciona en la composición de las cantidades.

VI: El niño evoluciona a la vez en los dos niveles.

La superioridad de las condiciones que tuvieron una fase de interacción en el tiempo 3 es neta en el experimento del juego de dados (Brun y Schubauer-Leoni, 1981): ninguna «regresión», pocas conductas estables y sobre todo mayores progresos sobre los dos planos a la vez (composición *y* explicitación de las cantidades).

Hemos repetido este análisis con los datos del primer estudio con los bombones (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980). La superioridad de la condición experimental 1 (interacción y comunicación a un compañero decodificador) únicamente se había establecido hasta aquí en base a la explicitación más importante de los datos. Vamos a pasar a ver ahora lo que sucede en las cuatro condiciones experimentales si tenemos en cuenta la dimensión de la composición de las cantidades del problema.

El cuadro 13.2 nos confirma la superioridad de la condición (I) en la que los alumnos participaron en el tiempo 3 en un trabajo de interacción y comunicación con un tercer niño.

CUADRO 13.2. *Cambios* acontecidos entre el tiempo 2 y el 4 en los alumnos de las cuatro condiciones experimentales del experimento de los bombones (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1980)*

condiciones	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*número total de alumnos*
1	0	0	0	0	4+1=5	9	14
2	1	1	3	1	4	2	12
3	0	1+1=2	2	0	2	0	6
4	0	1+1=2	0	0	2	3	7

* La explicación de los rótulos véase en el cuadro 13.1.
Condición 1: condición experimental con codificación en interacción y comunicación a un semejante decodificador.
Condición 2: condición experimental con codificación en interacción y comunicación sólo invocada.
Condición 3: condición experimental con codificación individual y comunicación a un semejante decodificador.
Condición 4: condición experimental con codificación individual y comunicación a un semejante sólo invocado.

e) Algunos comentarios sobre los registros utilizados en la formulación de las operaciones

Hasta ahora sólo hemos analizado los cambios observados en las diferentes situaciones experimentales y control desde el punto de vista de la composición y de la explicitación de las cantidades, pero todavía no hemos resaltado la relación eventual entre las modificaciones observadas y los registros utilizados por los alumnos para notificar las operaciones. Si se vuelve a hacer una lectura de los resultados referidos a las conductas de explicitación y de composición teniendo en cuenta los registros utilizados para notificar las operaciones, aparece en este experimento un nuevo elemento: en el tiempo 3 el niño llega a ser capaz de proporcionar producciones más explícitas y compone de forma más pertinente los datos del problema, incluso en los registros de formulación que no se apoyan en la escritura aritmética usual.

Los niños de la condición control, sobre los cuales no hubo una intervención por nuestra parte en el tiempo 3, parecen fijados en el primer registro utilizado; algunos «regresan» y la mayor parte no modifica su formulación del tiempo 2, pero los que progresan más (en composición y en explicitación) lo hacen adoptando los signos de la escritura aritmética: ¿se puede decir que, dada la ausencia de una confrontación con el punto de vista de algún otro que no sea el experimentador, se han orientado hacia el lenguaje «normativizado» de la escuela?

Ante estos diversos resultados, los interrogantes que nos planteamos son los siguientes: ¿cuáles son las decodificaciones de la situación realizadas por los diferentes alumnos? ¿Qué explicaciones se dan los niños de la condición control o los de la condición experimental 4 (relación niño-experimentador) de esas escenificaciones repetidas que reformulan con algunos días entre medio las mismas preguntas respecto al mismo juego?

¿No están habituados los niños en la escuela a «repetir», «volver a comenzar», un trabajo cuando está mal hecho o cuando la respuesta dada en un primer momento es falsa? Así, incluso cuando el experimentador se abstiene de todo comentario durante la primera codificación, ¿no van a interpretar los alumnos la nueva aplicación («nueva» desde el punto de vista del desarrollo experimental pero prácticamente idéntica en contenido y forma) en tanto que una vía implícita para «mejorar» su primera solución? En efecto, es significativo poner de relieve que la mitad de los alumnos de la condición control modifican, en positivo o en negativo, su primera producción. ¿Cuál es, pues, el estatus (cognitivo y social) de esas modificaciones?

Del mismo modo, un estudio detallado de lo que ocurre durante las interacciones entre pares en la fase de la codificación, nos permitiría comprender mejor la significación atribuida por los alumnos a la tarea y el estatus de diferentes producciones: ¿qué es lo que viene a determinar su elección de los registros? ¿cuáles son los índices que orientan su producción? ¿negocian explícitamente entre ellos las elecciones que han de ser realizadas? Las observaciones efectuadas hasta el presente parecen mostrar que el intercambio raramente comienza con una discusión; habitualmente un niño toma la iniciativa diciendo: «yo escribo» o «yo hago un cálculo». A continuación los niños se corrigen mutuamente, y la mayor parte de las veces se limitan a cuidar la forma del mensaje, incluso la ortografía cuando se trata de un registro del lenguaje natural.

Plantear el problema en esos términos, preguntarse por el estatus de las producciones recogidas en las diferentes condiciones experimentales y control, interrogarse por la significación de las modificaciones obtenidas a lo largo de las microhistorias experimentales construidas, todo ello corresponde a repensar la articulación teórica entre «lo que nos esperábamos» y «lo que hemos encontrado». Así, si antes de lanzarnos por las vías experimentales descritas ya disponíamos de buenas razones para pensar que las situaciones relacionales de interacción y de comunicación entre pares serían particularmente susceptibles de desencadenar progresos (progresos que se han encontrado subsecuentemente en el individuo que efectuó solo una tarea similar), ahora proponemos que se tenga igualmente en cuenta, en «lo que se ha encontrado», no sólo la confirmación de la hipótesis principal en cuanto tal, sino además el conjunto de constataciones (referentes a la tarea, a la relación entre los partenaires, al tipo de cuestionario, a la actitud del niño mientras establece la intersubjetividad necesaria para la búsqueda de una solución, etc.) recogidas a lo largo de la realización de las pruebas en función de las diferentes modalidades previstas.

f) ¿Los progresos en la producción de una formulación escrita, pueden desencadenar progresos en la resolución de ecuaciones incompletas?

Hemos visto que el alumno que completa correctamente una página de ecuaciones incompletas no recurre automáticamente a ese tipo de código para notificar una operación efectuada material y mentalmente. Ahora bien, ¿qué es lo que sucede a lo largo de «una página de cálculos», después de dos o tres sesiones experimentales de trabajo sobre las formulaciones escritas? Dicho de otro modo, nos planteamos la cuestión siguiente: cuando el niño evoluciona en la formulación de la composición de los datos, ¿cometerá de pronto menos faltas en el test papel-lápiz recurriendo a operaciones del mismo tipo? Examinemos los resultados del tiempo 5 (test papel-lápiz) en función de las condiciones experimentales anteriores.

En función de nuestros análisis (Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1983), podemos afirmar que la evolución de la formulación de la composición de las cantidades no necesariamente va a la par de la resolución más correcta de las ecuaciones incompletas: los alumnos (condiciones experimentales 2*a* y 2*b*) que han trabajado específicamente en la formulación de la escritura simbólica y que evolucionan en la composición notificada de las cantidades, no sin cierta sorpresa, responden al test papel y lápiz en el tiempo 5 cometiendo a veces... más faltas que en el tiempo 1.

En los niños de esas condiciones experimentales, nos parece que se puede afirmar que se ha creado una nueva dinámica: si bien evolucionan en la tarea practicada específicamente en el tiempo 3, no obstante parece que manifiestan pseudo-regresiones en la resolución de las ecuaciones incompletas.

Por el contrario, los alumnos de la condición control, que no realizaron dicha actividad específica del tiempo 3, progresan sorprendentemente un poco más en la tarea de resolución de las ecuaciones incompletas, actividad que, recordémoslo, es más típica de la escuela.

Pero las evoluciones observadas en los procedimientos de simbolización no significan que los niños se hayan apropiado de las relaciones que están en juego en la ecuación $a + b - c = x$. Las formulaciones adoptadas describen en su mayoría los procedimientos del cálculo. Por ejemplo, en lenguaje natural el niño se expresa en términos como: «eso hace», «en total», etc. Incluso cuando recurre a los símbolos aritméticos, ciertos escritos por encadenación (de tipo $5 + 3 = 8 - 2 = 6$) testimonian igualmente su expresión de un procedimiento de cálculo.

Según Freudenthal (*Encyclopaedia Universalis*, 1968, en «Notation mathématique») tal concepción deriva de una «interpretación ingenua», y, refiriéndose al «sentido de las fórmulas algebraicas», precisa: «La interpretación ingenua de las fórmulas algebraicas consiste en una sucesión de operaciones y su resultado: $2 + 7$ se lee como una orden "a 2 añade 7", y la fórmula: $2 + 7 = 9$ como un relato "a 2 añade 7 y el resultado es 9". Esta interpretación ingenua explica tanto la estructura en orden lineal de las expresiones: $3 - 7 + 6 - 8 + 4$ como las de $2 + 7 = 9 + 7 = 16 + 7 = 23$... de los fascículos de cálculos aritméticos. De acuerdo con la interpretación aceptada en matemáticas, $2 + 7$ no constituye un problema, sino un número, y generalmente a+b es un número siempre que a y b sean números. Siguiendo esta interpretación, el signo igual se lee "es la misma cosa que". Un mismo objeto puede tener diversos nombres, así "París" y "la capital de Francia" designan el mismo objeto; el número 9 puede ser designado a través de una infinidad de expresiones, tales como: $2 + 7$, $10 - 1$, 3×3, 9×1, etc. Según esta interpretación el signo de igualdad no es un signo matemático, sino un signo semántico, que expresa que dos términos significan la misma cosa».

Dicha concepción también aparece en el adulto: N. Picard (1972), citado por Baruck (1973), señala: «Todos los adultos con los que yo he trabajado sabían muy bien hacer cálculos. Sin embargo, ninguno ha sido capaz de justificar la proposición "$4 + 3 = 5 + 2$" de otro modo que refiriéndose al "resultado" de la adición. Todos se han negado a que se considere "$4 + 3$" como *un* número. Por otra parte, la igualdad no les parecía un signo de identificación de dos designaciones (aquel que permite que se sustituya una designación por la otra cuando se quiera), sino un signo del resultado».

Conclusión

Al final del análisis de esos dos estudios nos parece que se puede afirmar que las situaciones que permiten al alumno confrontar su punto de vista, su idea de la formulación, con el punto de vista divergente de un compañero, pueden favorecer una composición y una explicitación más completa de los datos del problema. El niño en interacción con un semejante (condiciones 1 y 2 del tiempo 3) y a continuación solo, en el tiempo 4, puede llegar a elaborar una formulación del mensaje escrito (destinado a un tercero que lo leerá realmente o a un decodificador potencial) en el que explicita de modo detallado las cantidades y las operaciones efectuadas sobre esas cantidades; pero para hacerlo no utilizará necesariamente la escritura aritmética canónica.

Por otra parte, hemos visto que la capacidad para completar ecuaciones incompletas de tipo aditivo no va a la par del recurso a ese mismo código durante una formulación de operaciones efectuadas por el alumno; así, el ejercicio específico de la actividad de formulación no desencadena automáticamente progresos (menos faltas) durante la resolución de ecuaciones incompletas: esos dos tipos de competencias parece que se derivan de mecanismos (cognitivos, pero puede que también sea la representación social de la situación y de la tarea) de naturaleza diversa.

Respecto a la composición y explicitación de los datos, los alumnos de la condición experimental 3 (codificación individual y confrontación con la decodificación de un compañero) muestran menos evolución que los de las condiciones 1 y 2 (con interacción) y que los de la condición 4 (niño solo frente al adulto).

También hemos puesto de relieve que la dinámica activada por las situaciones de interacción se manifiesta también con cambios sobre el nivel de los registros utilizados: los alumnos de la condición control (Brun y Schubauer-Leoni, 1981) trabajan en mayor medida dentro de un mismo registro a la hora de notificar las operaciones de las fases del tiempo 2 y 4, mientras que los alumnos de la población experimental muestran mayor movilidad a ese respecto.

Finalmente, hemos observado que, para formular las operaciones en juego, el recurso al código ecuacional enseñado en clase es esporádico (un poco más frecuente en los niños de la condición 1: interacción y comunicación); nuestra pregunta a este respecto es *cómo* y en *qué circunstancias sociales* se apropia el alumno de ese código y juzga pertinente recurrir a él para notificar las operaciones aditivas. En otros términos, si el niño no recurre a la escritura ecuacional para notificar (según un modo que parece funcional para el adulto experimentador) las operaciones efectuadas: ¿de qué orden son los obstáculos encontrados por el alumno? La imbricación de las dimensiones cognitivas y sociales nos parece especialmente compleja; los elementos de comprensión y de explicitación del proceso podrían ser buscados en la confluencia de varios ejes de investigación entre los que los principales podrían ser los siguientes:

— En función del primer eje habría que desarrollar el estudio de los conocimientos matemáticos del alumno (solo con el adulto, con iguales, en situación de laboratorio y en su clase escolar), teniendo en cuenta las características de las situaciones y del contexto (cognitivo, relacional y material) en las cuales se actualizan y funcionan dichos conocimientos.

— El segundo eje de investigación, en aval del primero, debería captar las categorías del pensamiento del alumno y después del profesor, incluso del experimentador, a través de las cuales se representan las matemáticas en tanto que objeto que hay que aprender para unos y enseñar para otros. A través de las representaciones sociales que intervienen en el proceso enseñanza-apropiación (Perret-Clermont *et al.*, 1981), se deberían poder decodificar mejor los índices que permiten al alumno, que se encuentra frente a un problema (presentado o no como un problema de matemáticas), interpretar el *sentido* de la cuestión, así como elegir, dentro de todo un conjunto, las estrategias y las respuestas posibles que le parecen cognitivamente satisfactorias y pertinentes, incluso socialmente admisibles en el contexto particular en el que se encuentra.