Publié dans Travaux de logique 18, 83-101, 2007,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

Logicisme combinatoire et théorie de la définition

Jean-Pierre Ginisti

Le logicisme auquel on s'adressera pour le questionner sera compris comme la thèse suivante: on peut n'utiliser que des termes logiques et des procédures logiques de preuve pour reformuler l'ensemble des mathématiques. Bien sûr, un point central porte sur ce qu'il faut entendre par «logique».

Par commodité d'expression, on dira «mathématiques» pour désigner les mathématiques extralogiques, c'est-à-dire tout ce qui en mathématiques n'appartient pas à ce qu'on nomme «la logique mathématique».

Le problème posé par le logicisme doit être distingué de ce qui semble être un faux problème: il ne s'agit pas de se demander si dans les mathématiques, élaborées ou lues, on ne trouve directement que des lois ou des règles logiques (des détachements, des contrapositions de l'implication, etc.). Il est trop évident que ce n'est pas le cas.

Soit, par exemple, à démontrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ont la même puissance. On effectue un certain va-et-vient entre les éléments de $\mathbb{Z}$ et les éléments de $\mathbb{N}$ qui les apparie. Le logicisme n'entend pas nécessairement remplacer le va-et-vient par des procédures logiques; il entend après reconstruction de la théorie en système logique dépasser le va-et-vient par les moyens logiques d'avoir le théorème «$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ont la même puissance». Il en irait de même pour des procédés anciens comme le crible d'Ératosthène qui obtient la suite des nombres premiers en écrivant la suite des entiers et en y barrant successivement tous les multiples de 2, de 3, de 5, etc.

Ainsi ne peut-on pas dire que dans toute preuve mathématique une partie des moyens mis en oeuvre peut être logique (comme la portion par l'absurde de la procédure diagonale, par exemple, pour établir que l'intervalle [0, 1] de $\mathbb{R}$ n'a pas la puissance de $\mathbb{N}$), mais que la partie décisive et spécifique échappe à la logique (ici le type de parcours effectué selon la diagonale, justement). Le logicisme ne soutient pas que toutes les procédures qui interviennent *de facto* dans une démonstration mathématique seraient à valider par une traduction juxtalinéaire qui en donnerait des correspondants logiques. Il veut refondre la théorie. Il veut transcrire toute opération portant sur des objets (fussent ils les éléments de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{N}$) et qui permet d'établir sur eux une certaine propriété formulée par un énoncé B, en opérations logiques portant sur un énoncé A et en obtenant le même énoncé B. Jean-Louis Gardies observe que derrière les procédures et les constructions, ou derrière les mots qui «se réfèrent à une activité humaine» (mener une parallèle, prolonger un segment), «se dissimulent de simples reconnaissances d'existence» (il existe une parallèle), ou des actes qui s'évitent, par exemple en changeant de primitifs (non plus le segment de droite à prolonger, mais la droite illimitée). On le voit clairement dans la reprise des procédures chez Hilbert et Bernays «sur le mode théorique» et qui suffit à constituer les démonstrations des théorèmes [3].

Autrement dit, le va-et-vient est remplacé par «il existe une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$» qu'on donne et qui établit le théorème sur l'équipotence de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, sans qu'on ait rien d'autre à mentionner. L'heuristique est essentielle, mais à d'autres égards.

Même l'intuitionnisme pourrait accepter un tel logicisme. Il exigerait seulement que la reprise théorique soit conforme à des procédures d'un type agréé (exemplification d'un cas, notamment). Cette condition supplémentaire, judicieuse ou non, n'interdit pas le logicisme, mais lui donne une certaine forme.

«Presque tout le dissentiment [...] au sujet du logicisme [...], remarque Dominique Dubarle, tient à ce fait que, dans le sujet qui fait des mathématiques, l'activité vivante et créatrice domine et déborde inévitablement l'activité dite et fixée dans l'instrumentation du langage» [2]. C'est alors une mauvaise querelle car un logicisme n'entend pas reproduire toutes les activités humaines déployées dans la preuve originale. Il aurait, sinon, ce défaut rédhibitoire de laisser croire qu'il ne faut pas deviner, expérimenter, avant de prouver, mais à tout moment respecter des canons. Le logicisme serait inadéquat en logique elle-même s'il soutenait qu'on ne peut y chercher un résultat qu'en appliquant des règles logiques disponibles, ou de nouvelles règles logiques. Church par exemple indique quelles lignes effacer dans la table d'un certain foncteur ternaire pour obtenir plusieurs définissants [1].

Si le logicisme ne retrouve pas un résultat qui semblait acquis ce n'est pas toujours que la logique n'a pas réussi à rejoindre la pensée vivante, comme on le dit souvent un peu vite, notamment quand l'infini intervient. Cela peut être aussi parce que la pensée vivante s'est leurrée. Il convient de rester circonspect contre la tendance actuelle qui jauge une entreprise formelle à sa proximité de la pensée vivante.

Il arrive qu'on objecte au logicisme que les erreurs dans les démonstrations mathématiques sont rarement des paralogismes, mais proviennent d'une supposition implicite fausse, comme c'est le cas dans la démonstration erronée par Schröder du théorème dit de Cantor-Bernstein [6]. Mais justement, c'est l'obligation de traquer l'implicite en cherchant à donner une *demonstratio ad oculos*, comme on le dit parfois – une exactitude qui saute aux yeux – qui fait l'un des prix du logicisme.

Au demeurant, celui-ci pose d'ailleurs deux grands sous-problèmes: 1) Peut-on définir (ou plutôt redéfinir) les termes mathématiques en primitifs logiques? 2) Peut-on démontrer (ou plutôt re-démontrer) les théorèmes mathématiques à partir des seules règles logiques et sans utiliser de prémisses extralogiques?

La définissabilité des termes mathématiques en primitifs logiques est une condition nécessaire, sans doute, mais non suffisante du logicisme. Pourtant, on ne s'intéressera à peu près qu'à elle ici puisqu'un problème crucial du logicisme est de savoir ce que sont les termes logiques qui peuvent constituer des définissants des termes mathématiques. On ne dira que quelques mots du deuxième sous-problème.

Peut-on se passer de prémisses extralogiques, proprement mathématiques? Ce point est d'autant plus important que le logicisme a tendance à réduire les primitifs, même s'il faut des axiomes plus nombreux ou plus complexes, ce que la réduction des primitifs entraîne souvent. La substance mathématique peut donc s'y réfugier mieux encore. Cela a constitué une objection historiquement importante, par exemple à l'égard de l'axiome «il existe au moins un ensemble infini» qui n'est pas une loi logique. Mais il y a une parade logiciste: Soit $A_1, \ldots, A_n$ les axiomes logiques d'un système et B un axiome propre extralogique, alors pour tout théorème C tel que $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$, on a $A_1, \ldots, A_n \vdash (B \supset C)$, par le métathéorème de la déduction, dès qu'on donne au système les moyens logiques d'obtenir celui-ci. On n'a plus à affirmer la vérité factuelle de B. Rappelons que Bourbaki, malgré son hostilité à la logique, fait usage sans réticence de ce type de preuve.

Une autre opposition au logicisme vient des résultats gödeliens sur l'indécidabilité. Ils ne condamneraient le logicisme, pourtant, que si quelque autre approche, et bien sûr *à niveau égal d'exigences*, évitait l'indécidable. Or, ce n'est pas le cas. Soit HC l'hypothèse du continu. La vérité que HC est indécidable dans le système Zermelo-Fraenkel est beaucoup plus solide que la prétendue vérité de HC dans une théorie intuitive qu'on lui opposerait dérisoirement et qui triomphe à la Pyrrhus. Quant au fait qu'un système suffisamment fort ne peut pas établir sa propre consistance, la situation ne serait pas meilleure s'il pouvait l'établir car le système serait juge et partie.

Nous ne poserons le problème de la définissabilité qui va être le nôtre que dans les termes classiques (en bref, une définition est un énoncé métalangagier, non créateur et où le défini abrège un définissant, même s'il y a des raisons inexprimées et importantes de s'y intéresser). La définition au sens de Leśniewski ne sera pas considérée, car la logique combinatoire qui va intervenir devrait être adaptée à cette conception, ce qui supposerait antérieurement une autre investigation.

D'une façon sommaire, les termes logiques (comme 'non', 'donc') sont ceux qui peuvent constituer l'armature d'une inférence, ceux *par* lesquels on raisonne, les termes non logiques (comme 'cosinus') ceux *sur* lesquels on raisonne. Certes, on peut raisonner aussi sur un terme logique mais c'est alors «en seconde intention». Il est naturel que le vocabulaire logique se manifeste d'abord par son antériorité historique d'emploi dans le langage courant.

Beaucoup d'auteurs s'accordent néanmoins pour dire que le lexique des termes logiques ne peut pas être donné sans quelque arbitraire. Certains y admettront par exemple les opérateurs modaux, d'autres les excluront. Certains admettront seulement pour logique le premier ordre, etc. Il pourrait donc sembler que le problème de savoir si la logique peut réexprimer les mathématiques va demeurer indéterminé. Pourtant, s'il y a des notions suffisantes pour récrire les mathématiques qui sont admises largement comme étant logiques, le problème retrouve un sens, même s'il manque un vrai critère pour effectuer un tri dans beaucoup d'autres cas.

Au moins est-il généralement reconnu que les foncteurs et les quantificateurs sont des termes logiques, puisqu'ils ont un rôle stratégique dans l'identification d'une inférence.

Toutefois, si on voulait utiliser la logique naïve pour reformuler les mathématiques, l'entreprise serait perdue d'avance. Au moins faut-il une logique très affinée. Or, on brouille inévitablement le problème soulevé par le logicisme en étant contraint d'employer des concepts qui étaient logiques mais qui doivent désormais «appartenir à la logique», comme 'cosinus' appartient à la trigonométrie. Il n'est pas possible de dire que la distinction se maintient entre logique et trigonométrie quelle que soit la formalisation pour l'une et l'autre: qu'une notion formelle recouvre exactement ce qui constituait la notion informelle d'appel n'a pas de sens. Il n'est pas possible non plus de dire qu'un traitement très affiné d'un terme qui fut logique le fait passer de son lieu naturel vers les mathématiques, ne traite plus que d'un homonyme, que le traitement plurivalent de la négation par exemple n'est plus qu'une algèbre, car il va être difficile de dire à partir de quel niveau de finesse les notions logiques deviennent des transfuges.

Si par reprise logique des mathématiques on veut dire par des concepts restés naïvement logiques, on ne laisse aucune chance au logicisme. Si, inversement, on a recours à la logique d'aujourd'hui, par exemple pour valider la récurrence, et à supposer qu'on y parvienne, le logicisme risque fort de tomber sous l'objection suivante telle que la formule Dubarle: le calcul des propositions lui-même n'est qu'une algèbre à structure d'anneau et il ne devient une logique que par l'interprétation. «La mathématique [...] fait de l'une de ses théories particulières une canonique à portée générale de sa propre activité pensante» [2].

Bref, réduire les mathématiques à la logique ancienne ou commune est une cause perdue, et réduire les mathématiques à la logique mathématique est un faux-semblant.

Pourtant, peut-on dire que la structure d'anneau ne dépend en rien de la logique? En ce qu'elle doit employer, notamment, les quantificateurs, elle poursuit évidemment le «tout B est A», «A appartient à tout B» des traités logiques d'Aristote. On ne peut pas parler, cependant, d'importation, mais d'interaction, car il est bien connu que les quantificateurs modernes ont bénéficié de leur analogie avec les notions arithmétiques de somme et de produit, comme cela est resté longtemps apparent dans leurs symboles Σ, Π. Les disciplines s'hybrident, et utilement, au cours de leur histoire.

Notre investigation partira d'une situation bien connue: les *foncteurs propositionnels*, les *quantificateurs* et l'*appartenance* peuvent «remplacer, comme dit Quine, toutes les notions de l'arithmétique, de l'algèbre, du calcul différentiel et intégral, ainsi que des branches des mathématiques dérivées» [8]. Nous ne chercherons pas comment cette construction est effectuée, mais seulement s'il s'agit de notions logiques. Les procédures de définition y sont directement en cause, mais il n'est pas si facile de voir ce qu'on peut attendre de manière générale d'une définition.

Peut-on considérer que les définitions sont inutiles ou impossibles, comme l'ont dit les Sceptiques, inutiles si on connaît le défini puisqu'il est disponible et impossibles si on l'ignore puisqu'on ne peut pas alors lui donner un définissant adéquat [10]? On peut répondre que celui qui donne la définition doit évidemment connaître le défini et le définissant, mais que c'est à un tiers que la définition est utile, et pour lui enseigner comment comprendre un terme, qui va être le défini, et qu'il pourra rencontrer par ailleurs, alors qu'il ne connaît que les termes du définissant. «Les définitions sont des règles pour la traduction d'une langue dans une autre», dit Wittgenstein [11]. Certes, les Sceptiques objectent aussi à l'usage didactique des définitions: on peut apprendre sans définition, disent-ils, puisque le premier individu qui a eu accès à un terme l'a compris sans définition, ce qui est vrai mais ne retire pas à la définition la rapidité d'accès et la conceptualisation qu'elle est seule à donner. Ils objectent d'autre part que s'il faut remplacer le défini par son définissant pour le comprendre, la phrase devient au contraire inintelligible. On répondra qu'on n'a pas à remplacer, par exemple, tous les '$\supset$' d'un énoncé par un '$|$', selon la définition de '$\supset$' en système '$|$', $(p \supset q) =_{\mathrm{df}} (p \mid (q \mid q))$, et que '$\supset$' est disponible dès la première traduction qu'on en donne puisqu'elle le fait comprendre une fois pour toutes. Pourrait-on même dire (ce que ne font pas les Sceptiques) que les termes d'un définissant peuvent être compris sans que le définissant, s'il est complexe, le soit? Non, car on est censé comprendre toutes les formules qui sont composées d'éléments individuellement compris. Dans le cas contraire, en effet, il en irait de même pour une formule complexe n'employant que des termes directement compris: $((p \supset (q \supset m)) \supset q) \supset n$ ne serait pas non plus intelligible, malgré l'accès supposé direct à '$\supset$'. Le problème ici porte sur la longueur et la complexité d'une expression et non sur la composition d'un définissant en primitifs, et ce problème est résolu partout de la même façon, à savoir en comprenant souvent pas à pas les sous-formules plutôt que la formule globale. Peano déclare lui-même, pour un autre langage, que ses trois «concetti primitivi» (0, nombre, successeur de) sont «posés comme connus» («posti come noti») [7].

Ainsi analysées, les définitions servent à faire intervenir les termes qui ont le moins besoin d'être définis pour être employés et donc constituent les meilleurs primitifs, dans une optique donnée, parce que cette optique leur accorde la plus grande intelligibilité.

Or, Bolzano, notamment, refuse l'idée que les primitifs seraient choisis pour leur intelligibilité (ou leur plus grande intelligibilité), exactement comme il refuse l'idée que les axiomes seraient choisis pour leur clarté intrinsèque. Les primitifs sont seulement des éléments qui ne sont pas définis dans le système, comme les axiomes sont seulement des vérités non déduites dans le système. Assurément, un ensemble de primitifs ne peut pas être choisi parce qu'il correspondrait à la manière dont tout le monde pense – et même si c'est en pensant le vrai – car ce serait là un psychologisme, mais chacun des ensembles complet de primitifs correspond pourtant à un type possible d'intelligibilité (un système '|' est censé compris par un certain esprit à existence théorique). Il n'y a rien à reprocher à une logique qui déploie toutes les manières possibles dans un cas donné, au moins *ceteris paribus*, d'accéder à la vérité.

L'analogie avec les axiomes est d'ailleurs à poursuivre puisque Bolzano a contesté aussi l'idée que le choix des axiomes ne serait déterminé que par leur fécondité déductive. Pour lui, la partition des axiomes et des théorèmes devrait correspondre à la manière dont le domaine des propositions vraies se structure (si difficile soit-il de la concevoir). L'ensemble des objets d'un domaine peut donc aussi se structurer mieux par tels primitifs que par tels autres, si on ajoute qu'un jugement humain se trouve toujours en jeu dans l'appréciation d'une structuration dite objective. On ne voit pas, en effet, comment expliquer quelque chose pourrait différer de *s'expliquer* cette chose, se trouver satisfait par un traitement, même s'il faut reculer souvent ce qui serait jugé éclairant à trop courte vue. L'objectivité atteinte par une analyse est toujours relative à l'objectif de l'analyste, à une certaine marge humaine de manoeuvre. Quine a insisté avec raison sur la sous-détermination des théories par les données objectives.

Si on devait renoncer en logique à la catégorie (psychologique, si l'on veut) de l'intelligible, on devrait renoncer aussi à tout logicisme puisque celui-ci accorde un primat à un certain type de notions, dites «logiques».

Il n'en demeure pas moins que le choix des primitifs ne répond pas seulement à l'intelligibilité immédiate qu'on leur attribue. Church [1] souligne l'intérêt de disposer par exemple d'un système autodual de primitifs indépendants, mais aussi de renoncer à telles ou telles propriétés, et justement selon ce qu'on veut rendre intelligible encore à d'autres égards. Un primitif unique et suffisant comme '|' (jugé souvent peu naturel) applique au moins d'une manière drastique le principe intelligible de parcimonie, et même s'il y a des conflits de normes dans la vie mathématique comme il y en a dans la vie morale.

Ajoutons qu'on ne peut obtenir, sans doute, que des systèmes sans *liste* des primitifs (employés dans les formules), et non des système sans primitifs, au sens où il y a des systèmes sans axiomes. On a au plus des systèmes sans primitifs redondants (par une méthode venue de Padoa).

Il arrive qu'on définisse le logicisme, comme Lalande, par le rejet de toute «intervention de la psychologie», ce qui trouve évidemment un écho dans les textes où Frege condamne l'analyse du nombre comme image mentale. Cependant, sans la catégorie de l'intelligible, le recours à des termes logiques pour élucider les termes mathématiques reste arbitraire. Chacun des ensembles complets de primitifs est convoqué tacitement à titre d'un esprit fictif qui comprendrait mieux cet ensemble de primitifs que tel autre (ou ne comprendrait que lui), et donc au nom d'un psychologisme généralisé et ainsi désamorcé. Une partie des vues contemporaines sur le logicisme peut dépendre de la manière dont on a su récemment réévaluer ce qui a été nommé «psychologisme». L'idée de base du logicisme, dès lors, est que les notions logiques forment le meilleur fondement, car le plus intelligible (par exemple que l'on comprend mieux «nier une proposition» que «dériver une fonction»). En ce sens, il constitue une certaine hypothèse sur des données psychologiques associables et non seulement une thèse sur les mathématiques. Sans un minimum de renvoi vraisemblable ou supposé au caractère intelligible ou plus intelligible d'une certaine construction, il n'y a pas de logicisme possible.

Or, (en réservant pour le moment le cas de l'appartenance), bien qu'on ait admis le caractère logique des foncteurs et des quantificateurs, on peut contester qu'ils soient les termes logiques les plus basaux. Nous sommes conduits ainsi à la partie la plus ambitieuse du programme de la logique combinatoire: remplacer toutes les constantes (implication, addition, cosinus, etc.) par des combinateurs, c'est-à-dire les constantes propres à sa théorie. Ce programme a connu une réussite: il existe déjà plusieurs versions combinatoires de l'arithmétique dans lesquelles les nombres et les opérations sont des combinateurs.

Notons d'abord que les combinateurs expriment des opérations logiques (ou prélogiques) très élémentaires. On peut le voir sur l'ensemble standard des cinq combinateurs primitifs **I**, **K** **W**, **C**, **B**, caractérisés par des règles (transitives) dites *de réduction* qui indiquent l'effet de chacun sur une certaine suite (dite *suite initiale*):

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}x_1 &\rightarrow x_1\\
\mathbf{K}x_1x_2 &\rightarrow x_1\\
\mathbf{W}x_1x_2 &\rightarrow x_1x_2x_2\\
\mathbf{C}x_1x_2x_3 &\rightarrow x_1x_3x_2\\
\mathbf{B}x_1x_2x_3 &\rightarrow x_1(x_2x_3)
\end{aligned}$$

Les métavariables x_1, x_2, x_3 désignent n'importe quel élément différent de '$\rightarrow$' (on dira *objet*) placé dans l'alphabet du langage (une variable, une constante quelconque, logique ou non, et même un combinateur), ou une molécule acceptée selon la règle de formation: si x_1, x_2 sont des objets, (x_1x_2) est un objet. $x_1 \rightarrow x_2$ peut se lire «il suffit d'avoir x_1 pour avoir x_2» (x_2 est dit *résultante*). Les parenthèses groupent deux ou n objets pour en former un seul.

Les transformations effectuées sont simples: **K** élimine le second de deux objets, **W** le répète, **C** permute les deux derniers de trois objets, **B** les regroupe en un seul. **I** reproduit un objet en fac-similé.

Les combinateurs expriment des opérations très précoces, mises en oeuvre dans les jeux d'enfant, notamment, et ne présupposant même pas le langage: éliminer un caillou d'une rangée, y permuter deux cailloux, grouper deux cailloux en les espaçant par exemple des autres cailloux, répéter le bruit fait par un caillou donné qu'on frappe sur une boîte, etc.

La raison principale du privilège accordé aux combinateurs vient de ce que beaucoup des constantes usuelles (comme l'implication) n'ont pas la teneur directement intelligible des combinateurs.

Plus généralement, un combinateur (propre) **X** est une constante telle que

$$\mathbf{X}x_1x_2 \ldots x_n \to Q$$

où Q ne diffère de $x_1x_2 \ldots x_n$ que par l'ordre, le nombre d'occurrences ou le groupement (par des parenthèses) de ses éléments, ou reproduit $x_1x_2 \ldots x_n$ à l'identique. Combiner, en effet, c'est modifier sans ajouter de nouveaux objets (même l'objet devenu unique (x_2x_3) reste bien distinct d'un objet seul nouveau qui serait x_4). On admet:

- si **X**, **Y** sont des combinateurs (**XY**) est un combinateur.
- une expression comme $\mathbf{K}x_1x_2x_3$ (où x_3 est surnuméraire) se réduit à x_1x_3.
- une expression comme $x_1(\mathbf{C}x_2x_3x_4)$ se réduit à $x_1(x_2x_4x_3)$, mais $x_1\mathbf{C}x_2x_3x_4$ ne se réduit pas.

L'objectif le plus apparent de la logique combinatoire est d'éliminer les variables liées dans tous les formalismes. En effet, les propriétés remarquables (comme la commutativité) concernent les constantes et non les variables, même si on emploie des variables pour les énoncer. La possibilité repose sur la proposition suivante (dont la preuve est beaucoup trop longue pour être donnée ici):

P_1: a) Pour toute formule F d'un langage formel, il existe un combinateur **X** du système standard tel que

$$\mathbf{X}\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2\ldots\mathrm{c}_n v_1 v_2 \ldots v_m \to \mathrm{F}$$

où $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n, v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont, en une seule occurrence, respectivement les constantes (dans un ordre quelconque) et les variables de F, et tel que **X** exige exactement un nombre $n + m$ d'éléments pour s'effectuer;

b) $\mathbf{X}\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2\ldots\mathrm{c}_n$ exprime alors F sans variable.

Soit à exprimer Dpp sans variable (où D est '|' en notation préfixée). Il vient selon a) **WD**$p \to$ Dpp, puis de là **WD**, selon b).

On doit distinguer une expression comme $\mathbf{K}x_1$ qui, telle qu'elle est formulée, ne se réduit pas, et cette expression pourvue de x_2 qui s'effectue mais qui paraît complétée par un sujet humain. En réalité, celui-ci n'est que l'exécutant d'une mesure mathématique. Après **K**, x_1x_2 sont déjà présents, comme une parallèle est présente dans un cas où on dit la mener. C'est pourquoi:

> P_2: Un combinateur **X** qui exige exactement n objets pour qu'on puisse l'effectuer introduit les n objets qu'il lui faut, ou pour une expression $\mathbf{X}x_1x_2 \ldots x_k$ $n-k$ objets.

Soit $\mathbf{X}^n$ le combinateur **X** qui appliqué à une suite (suffisante) obtient une résultante à laquelle on applique à nouveau **X**, et cela n fois. On établit notamment que $\mathbf{B}^2\mathbf{I}$ exige (et donc introduit) $x_1x_2x_3$, et donc $\mathbf{B}^2\mathbf{I}$D exige et introduit x_1x_2 (qui, étant des objets quelconques, peuvent être choisis comme p et q). $\mathbf{B}^2\mathbf{I}$D exprime Dpq (sa résultante) sans variables. Bien sûr, on sous-entend les variables, mais parce qu'on a réussi à mettre les expressions dans une forme où cela est devenu possible.

Notons qu'on peut éliminer toutes les variables qui sont en fin de suite initiale ou seulement la dernière ou les deux dernières, etc. Dpq exprimé sans q mais avec p serait $\mathbf{B}^2\mathbf{I}(\mathbf{B}^2\mathbf{I})Dp$, qui exige q et obtient Dpq.

La logique combinatoire, plutôt que de supprimer (au sens strict) les variables, veut éviter qu'elles aient le poids des constantes. Elle exige donc que les variables soient assignées dans leur nombre et leur place par des constantes dont ce soit le rôle, à savoir les combinateurs.

Montrons qu'on peut exprimer les foncteurs propositionnels en combinateurs. Il suffit de transcrire l'implication (notée ici de manière préfixée par P) et la négation (notée N) puisque P, N suffisent à définir tous les autres foncteurs[1].

[1] Nous avons déjà donné le résultat sur les foncteurs dans [5]. Un prolongement sur les quantificateurs sera présenté ici pour la première fois.

Or, les valeurs de vérité, 1, 0, sont souvent utilisées pour sélectionner l'un des termes, x_1 ou x_2 d'une alternative, notamment dans les langages de programmation, par une consigne comme

si p est vrai faire x_1,

si p est faux faire x_2.

On a x_1x_2 et le vrai sélectionne x_1, le faux sélectionne x_2, de là:

$\mathbf{1}x_1x_2 \rightarrow x_1$,

$\mathbf{0}x_1x_2 \rightarrow x_2$.

On est très loin d'exprimer ce que disent «vrai» et «faux», mais il suffit ici de s'adresser aux seules propriétés qui nous sont utiles.

Considérons le combinateur **H** tel que $\mathbf{H}x_1x_2x_3 \rightarrow x_2x_3x_1$ et les combinateurs **1**, **0**. P sera **H1** puisqu'on a

$$\mathbf{H1}pq \rightarrow pq\mathbf{1} \qquad \text{et donc}$$

pour $v(p) = 1, v(q) = 1$: $\mathbf{H111} \rightarrow \mathbf{111} \rightarrow \mathbf{1}$

pour $v(p) = 1, v(q) = 0$: $\mathbf{H110} \rightarrow \mathbf{101} \rightarrow \mathbf{0}$

pour $v(p) = 0, v(q) = 1$: $\mathbf{H101} \rightarrow \mathbf{011} \rightarrow \mathbf{1}$

pour $v(p) = 0, v(q) = 0$: $\mathbf{H100} \rightarrow \mathbf{001} \rightarrow \mathbf{1}$

D'autre part, on peut définir la négation. Comme Np $=_{\mathrm{df}}$ Pp0, il vient: $\mathbf{H1}p\mathbf{0}$. En effet:

$$\mathbf{H1}p\mathbf{0} \rightarrow p\mathbf{01}$$

pour $v(p) = 1$: $\mathbf{H110} \rightarrow \mathbf{101} \rightarrow \mathbf{0}$

pour $v(p) = 0$: $\mathbf{H100} \rightarrow \mathbf{001} \rightarrow \mathbf{1}$

Tous les foncteurs sont donc exprimables par les trois combinateurs **H**, **1**, **0**. Dpq, notamment, qui est définissable comme $p \supset \sim q$, c'est-à-dire Pp(Pq0) sera $\mathbf{H1}p(\mathbf{H1}q\mathbf{0})$, si du moins on remplace chaque occurrence de P par **H1** et en gardant les variables, comme nous le ferons par commodité, alors qu'il faudrait se donner le combinateur **X** (très complexe) qui sur **H10** exigerait deux variables *pq* et tel que **XH10**pq → **H1**p(**H1**q**0**).

- Les combinateurs **H** , **1** , **0** sont respectivement en système standard **CC**, **K** et **KI**. On a en effet:
  CC$x_1x_2x_3$ → **C**$x_2x_1x_3$ → $x_2x_3x_1$,
  Kx_1x_2 → x_1,
  KIx_1x_2 → **I**x_2 → x_2.

Montrons en esquisse qu'on peut aussi remplacer les quantificateurs par des combinateurs (ou plus exactement éviter les premiers au moyen des seconds). La méthode reprend des idées de Schönfinkel, mais s'en écarte significativement (principalement en ce qu'il n'utilisait pas exclusivement des combinateurs) [9].

- Seuls ∀et | (ou D) seront considérés, puisqu'ils forment un système symboliquement complet (en logique classique).

- Dans une formule donnée, on utilise des symboles différents pour les occurrences libres et les occurrences liées des variables.

- Récrivons avec Schönfinkel l'expression ∀x (fx | gx), qui va servir de modèle, comme $fx\ |^{x}\, gx$ (elle signifie: pour tous les objets notés x qui sont en cause dans l'incompatibilité). Notons T cette transformation.

P_3: Si on obtient une expression de forme '... $|^{x}$...' (au nom près de x) telle que les '...' ne comportent pas x, le x indicé devient vide et donc s'élimine. Notons V cette transformation.

Une ligne introduisant un combinateur doit reformuler une expression avec seulement en moins la variable qu'on va supprimer (s'il y a lieu) et que le combinateur doit supposer.

Exemple 1

1.	$\forall x\,(fx \mid fx)$	
2.	$fx \mid^{x} fx$	T
3.	$\mathbf{BI}f \mid^{x} \mathbf{BI}f$	P_1
4.	$\mathbf{BI}f \mid \mathbf{BI}f$	V
5.	$D(\mathbf{BI}f)(\mathbf{BI}f)$	en D
6.	$\mathbf{H1}(\mathbf{BI}f)(\mathbf{H1}(\mathbf{BI}f)\mathbf{0})$	selon **D**

En 3., fx devient $\mathbf{BI}f$ car $\mathbf{BI}f$ exige x et $\mathbf{BI}fx \rightarrow \mathbf{I}(fx) \rightarrow fx$. En 6., D est traduit en combinateur **D** en remplaçant les p, q de la formule $\mathbf{H1}p(\mathbf{H1}q\mathbf{0})$ par le premier argument de D et par le deuxième respectivement.

Exemple 2

1.	$\forall x \forall y\,(rxy \mid syx)$	
2.	$rxy \mid^{y} syx$	T pour $\forall y$
3.	$\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx \mid^{y} \mathbf{C}sx$	P_1
4.	$\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx \mid \mathbf{C}sx$	V
5.	$\forall x\,(\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx \mid \mathbf{C}sx)$	intervention de $\forall x$ resté en tête
6.	$\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx \mid^{x} \mathbf{C}sx$	T
7.	$\mathbf{B}^2\mathbf{I}(\mathbf{B}^2\mathbf{I})r \mid^{x} \mathbf{B}^2\mathbf{IC}s$	P_1
8.	$\mathbf{B}^2\mathbf{I}(\mathbf{B}^2\mathbf{I})r \mid \mathbf{B}^2\mathbf{IC}s$	V
9.	$D(\mathbf{B}^2\mathbf{I}(\mathbf{B}^2\mathbf{I})r)(\mathbf{B}^2\mathbf{IC}s)$	en D
10.	$\mathbf{H1}(\mathbf{B}^2\mathbf{I}(\mathbf{B}^2\mathbf{I})r)(\mathbf{H1}(\mathbf{B}^2\mathbf{IC}s)\mathbf{0})$	selon **D**

En 3., $\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx$ exprime rxy car $\mathbf{B}^2\mathbf{I}rx$ exige y et $\mathbf{B}^2\mathbf{I}rxy \rightarrow rxy$. $\mathbf{C}sx$ exprime syx car $\mathbf{C}sx$ exige y et $\mathbf{C}sxy \rightarrow syx$. Semblablement pour 7. et 6.

Exemple 3 $\forall x\,(fx \mid (fx \mid fx))$

On a $fx \mid^x (fx \mid fx)$, mais non $fx \mid^x (fx \mid^x fx)$ car '$\forall$' n'est pas distribuable; de là, en reprenant une idée de Schönfinkel:

1. $\forall x\,(fx \mid \forall y\,(fx \mid fx))$ — introd. d'un quantificateur vide
2. $fx \mid^x (fx \mid^y fx)$ — T
3. $fx \mid^x (\mathbf{BK}fxy \mid^y \mathbf{BK}fxy)$ — exprimé avec y. $\mathbf{BK}fxy \to \mathbf{K}(fx)y \to fx$
4. $fx \mid^x (\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx \mid^y \mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx)$ — P_1 à droite
5. $fx \mid^x (\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx \mid \mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx)$ — V
6. $fx \mid^x (\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx)(\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx))$ — en D à droite
7. $(\mathbf{BI}f) \mid^x (\mathbf{X}\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f)$ — P_1 sur les deux membres

   X est le combinateur complexe (que nous ne donnerons pas)
   tel que $\mathrm{X}\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f$ exige x
   et tel que $\mathrm{X}\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})fx \to \mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx)(\mathbf{B}^3\mathbf{I}(\mathbf{BK})fx)$.

8. $(\mathbf{BI}f) \mid (\mathbf{X}\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f)$ — V
9. $\mathrm{D}(\mathbf{BI}f)(\mathrm{X}\mathrm{D}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f)$ — en D
10. $\mathbf{D}(\mathbf{BI}f)(\mathbf{XD}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f)$ — en **D**
11. $\mathbf{H1}(\mathbf{BI}f)(\mathbf{H1}(\mathbf{XD}(\mathbf{B}^3\mathbf{I})(\mathbf{BK})f)\mathbf{0})$ — selon **D** à gauche

Notons qu'un combinateur peut être en situation d'opérateur (comme dans 10. le premier **D**) ou en situation d'opérande (comme le deuxième **D** sur lequel porte **X**).

Exemple 4 $\forall x\, fx$

On procède ainsi, selon une idée de Schönfinkel: $\forall x\,(fx \vee fx)$ par idempotence, puis $\forall x\,((fx \mid fx) \mid (fx \mid fx))$ par la définition de '$\vee$' en système '$\mid$', puis $(fx \mid^y fx) \mid^x (fx \mid^y fx)$, et on est ramené à une expression qu'on sait traiter.

Reste la question du statut de l'*appartenance*. Il s'agit de savoir, en somme, à qui appartient l'appartenance, ce qui met du piquant à la problématique générale: y a-t-il des notions primitives qui appartiennent au logicien et qui suffisent à récrire les mathématiques avec bénéfice? Y a-t-il des notions primitives qui appartiennent au mathématicien et qui suffisent à écrire les mathématiques sans médiation? Bloqué dans ces formulations, le débat reflète les normes économiques de sociétés marquées par le régime de la propriété privée. On a essayé de montrer que la recherche de l'intelligibilité l'emporte sur la défense des territoires.

Par sa présence dès les travaux logiques d'Aristote, où la notion d'appartenance est rapportée à la forme des syllogismes, cette notion a l'ancienneté et la généralité des notions logiques. Certes, «A appartient à B», chez Aristote n'est pas notre '∈', mais 'ὑπάρχει' est son ancêtre. Ce qui relève de la logique n'a pas à être immuable. Quine objecte que le logicisme considère '∈' comme une notion logique et donc «la théorie des ensembles comme de la logique», mais sans renforcer les mathématiques «car la théorie des ensembles est moins bien assise» que les mathématiques générales [8]. Bien sûr, admettre sans restriction $x \in \mathrm{F} =_{\mathrm{df}} fx$, où F est l'ensemble des individus qui satisfont f, conduit à des antinomies, et la rigueur logique ne doit pas en comporter. Mais Quine reconnaît qu'il y a par ailleurs un usage innocent de l'appartenance et que, pour les autres, il y a différents moyens d'éviter les antinomies (axiome de séparation, etc.). Or, même si le meilleur traitement reste en discussion (réduire au minimum les exceptions et les rendre nécessaires), on ne voit pas pourquoi un concept échapperait à la logique, dès qu'il reste à élucider. Que la théorie des ensembles emploie l'appartenance n'entraîne pas qu'elle soit une notion ensembliste ni que la logique doive inclure la théorie des ensembles, mais seulement qu'il y a un usage ensembliste de l'appartenance, et en effet risqué. Déclarer «logique» l'appartenance, ce que nous ferons, c'est surtout l'estimer plus intelligible que beaucoup des notions mathématiques qu'elle va contribuer à définir.

Ce qui vient d'être décrit comme un logicisme combinatoire a notamment pour intérêt de constituer une provocation à l'égard des courants les plus opposés à l'intervention de la logique en mathématiques, puisque supprimer les variables, retranscrire les constantes en combinateurs peut passer pour non productif et pour un programme d'esthète. À ce titre au moins, les positions peuvent être clairement repérées, grâce à la surenchère combinatoire.

Pourtant, que le logicisme soit stérile ou fécond en mathématiques est loin de constituer le tout du problème. L'intérêt des mathématiques n'est pas limité aux services qu'elles rendent dans leurs applications, mais l'intérêt de la logique en mathématiques n'est pas limité non plus aux services qu'elle devrait y rendre. Par une reprise logiciste – combinatoire ou non, complète ou partielle – on peut apprendre sur l'intelligible et le rationnel, plus que sur les nombres et les figures, mais d'une manière sans doute irremplaçable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHURCH A. (1956). *Introduction to mathematical logic*. Princeton University Press (*cf.* § 24).

[2] DUBARLE D. (1967). «Critique du réductionnisme», *Logique et connaissance scientifique*, dir. J. Piaget, Paris: Gallimard, La Pléiade (*cf.* p. 339-341).

[3] GARDIES J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique*. Paris: Vrin (*cf.* p. 121 *sq*).

[4] GINISTI J.-P. (1997). *La logique combinatoire*. Paris: PUF, coll. Que sais-je? n°3205.

[5] GINISTI J.-P. (2003). «La logique combinatoire: logique de l'objet quelconque ou logique de l'opérateur?», *Mathématiques et Sciences Humaines* 162 (*cf.* p. 67-71).

[6] KORSELT A. (1911). «Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes», *Mathematischen Annalen* 70. 294-296.

[7] PEANO G. (1902). *Aritmetica generale e algebra elementare.* Torino: Paravia (*cf.* p. 8).

[8] QUINE W. V. O. (1972). *Logique élémentaire*, (trad). Paris: A. Colin (*cf.* p. 191-193).

[9] SCHÖNFINKEL M. (1924). «Sur les éléments de construction de la logique mathématique», trad. G. Vandevelde, analyses et notes par J.-P. Ginisti, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* 112 (1990).
[10] SEXTUS EMPIRICUS. *Esquisses pyrrhoniennes*, éd. P. Pellegrin. Paris: Seuil, 1997 (*cf.* Livre II, 16).
[11] WITTGENSTEIN L. (1921). *Tractatus logico-philosophicus* (*cf.* 3.343).