Publié dans Travaux de logique 16, 1-7, 2005,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

Introduction

Penser ensemble la logique et les mathématiques pour en montrer l'identité essentielle, telle est la thèse que l'histoire a rangée sous le terme de *logicisme.* Cette thèse fut celle de Frege et de Russell, ses représentants typiques. Elle fut systématisée dans les *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell, synthèse culminante du mouvement logiciste qui allait orienter pour de nombreuses décennies la méthode et l'esprit des techniques de recherche sur la question des fondements des mathématiques. Résumant la philosophie logiciste dans deux propositions solidaires, Russell écrit:

> [...] all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts, and [...] all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles. (1903: xv).

C'est là une conviction philosophique fondamentale que Russell ne remettra jamais en question, en dépit des difficultés considérables que rencontra l'entreprise logiciste. Concernant la dimension conceptuelle de la première proposition, nombreuses de ces difficultés tournèrent autour de l'antinomie dite de Russell et – pour dire les choses rapidement – la présence obscure d'une logique d'ordre supérieur, troublée par les enjeux ontologiques de la quantification. Quant à la seconde affirmation, postulant la logicité pure des principes fondamentaux, elle se heurta à la nécessité de recourir, dans les *Principia Mathematica*, aux axiomes non logiques que sont les axiomes de l'infini, de réductibilité et multiplicatif.

La définition logiciste du nombre cardinal – défini comme une classe de classes équinumériques –, fit l'objet de nombreuses objections, en grande partie liées à deux difficultés majeures qu'il lui fallut surmonter. La première est celle portée par le concept paradoxal de «classe de toutes les classes», nécessitant, pour préserver la construction logiciste, de procéder à une répartition des classes en types. La seconde concerne le problème posé par le recours à la définition par abstraction, rouage de la réduction de l'arithmétique à la logique, mais soumise à une objection de créativité. Ces critiques, trouvant leurs propres arguments dans la possibilité de parvenir à une définition du nombre cardinal par d'autres voies et moyens, furent assorties d'une relativisation de la conception logiciste. Et, de manière générale, les développements ultérieurs de la logique et des mathématiques, marqués par diverses doctrines fondationnelles et un pluralisme logique, détournèrent l'intérêt de la communauté scientifique du projet logiciste.

Cependant ce constat ne ruine pas pour autant la conception logiciste ni ne la réduit au silence, comme un fait d'histoire! Au contraire, par-delà les limites internes au logicisme des *Principia Mathematica*, la philosophie russellienne continue encore et toujours à alimenter de nombreux débats. Quant au logicisme de Frege, il connaît un renouveau contemporain, avec les travaux de l'école néo-frégéenne dont G. Boolos, C. Wright et B. Hale sont les représentants les plus éminents. Mais ce n'est pas tout! Le logicisme ne se réduit pas seulement à ces deux héritages. On peut en effet répondre à la question d'une définition logique des nombres, ouverte avec Frege, dans le cadre d'un paradigme logique autre que celui de la tradition frégéo-russellienne.

Le paradigme adopté ici est celui de l'Ontologie, théorie logique développée au début du XXème siècle par le logicien polonais Stanisław Leśniewski. L'Ontologie, qui est un calcul des noms d'ordre supérieur, fut conçue dans le but de résoudre *strictu sensu* l'antinomie de Russell et de venir suppléer à la peu naturelle et peu élégante théorie des types des *Principia Mathematica*. L'Ontologie n'appartient pas au réseau marqué par la conception de la logique et de l'analyse des mathématiques frégéo-russellienne. Elle s'en distingue profondément, tant par ses conceptions logiques sous-jacentes que par les modes formels qui la gouvernent.

Nous montrons que l'Ontologie permet de construire l'arithmétique de Peano, en faisant appel à un axiome de l'infini comme seul axiome propre, et sans que cette construction soit entâchée des difficultés immanentes aux démarches logicistes ouvertes par Frege et Russell, ces difficultés s'y trouvant pleinement résolues. Nous nous attacherons à expliciter certains des éléments moteurs et à en élucider le rôle dans la réalisation d'un tel projet.

Sans doute convient-il de dire quelques mots de l'Ontologie. Logique universelle, libre et d'ordre supérieur, l'Ontologie est libérée du souci de l'imprédicativité. Elle intègre une théorie des catégories sémantiques à travers laquelle l'antinomie de Russell est écartée, sans amendement des principes logiques tirés de l'analyse du principe du cercle vicieux. C'est une logique purement extensionnelle, non chargée de toutes les difficultés rencontrées par les logicistes classiques pour assurer l'extensionnalité de la logique. Expression formelle de la position nominaliste première de son auteur – celle du rejet des entités abstraites –, l'Ontologie est une théorie logique libre de tout engagement ou implication ontologique. Là où il est question de catégories sémantiques, il n'est nullement question de catégories ontologiques. Dans ces conditions, l'Ontologie n'endosse pas les problèmes portés par la théorie des types, ou son parallèle frégéen de la distinction entre objets et fonctions de différents niveaux. En particulier, le projet logiciste échappe au poids du réalisme dogmatique de Frege et des difficultés du nominalisme instrumental des *Principia Mathematica* – où, pour sauver le programme universaliste, les classes et fonctions sont tournées en fictions logiques.

A la base de cette réussite, trois points essentiels configurant ce paradigme logique sont à relever. Tout d'abord, la quantification est ontologiquement neutre. Ensuite, l'interprétation de la structure de la proposition n'est pas corrélative du modèle mathématique et de la distinction entre fonction et argument. Aucune dichotomie radicale n'est instaurée entre sujet et prédicat. La proposition élémentaire de l'Ontologie, qui est de la forme «a est b», est composée de deux noms, reliés par la copule, celle-ci ayant statut de foncteur primitif. Dans ce cadre d'analyse, il n'est alors nullement question de classe – ou d'ensemble –, mais simplement d'extension attachée à un nom, celle-ci pouvant être vide, singulière ou plurielle. Enfin, le troisième point, trait saillant de l'Ontologie, est sa générativité, ou constructivité. Celle-ci est portée par une procédure inférentielle définitoire par laquelle les définitions sont insérées comme thèses dans le langage lui-même, et non pas traitées comme des conventions linguistiques. Partant des seuls foncteurs et catégories sémantiques primitives inscrites par les axiomes, cette procédure assure au langage une constructivité catégorielle potentiellement infinie, en contrôlant pas à pas la construction, et permettant de déployer la base axiomatique en diverses Ontologies. Notre construction de l'arithmétique est l'une de ces Ontologies possibles.

C'est dans ce cadre logique que nous avons donc remis en chantier le programme logiciste. Il convient de préciser que notre démarche n'est pas sans précédent. Leśniewski, le premier, s'était engagé dans le projet fondationnel de l'arithmétique sur la base de l'Ontologie. Sa démarche est réputée avoir été menée à bien, mais il est difficile aujourd'hui d'en mesurer la pertinence, ses recherches dans ce domaine ayant en effet pour la plupart disparues en 1944, dans l'incendie de Varsovie. Par la suite, d'autres travaux furent engagés dans cette même direction. Les résultats les plus remarquables sont dus à Canty et sont énoncés dans sa thèse de doctorat de 1967. Cependant, ces résultats souffrent d'un défaut qui les rend en partie inaptes à étayer pleinement la force et la pertinence du paradigme leśniewskien. S'ils attestent la possibilité d'une construction de l'arithmétique prenant appui sur l'axiomatique de l'Ontologie, en revanche leur construction s'élabore et se déroule en plagiant la démarche logiciste et le développement propre aux *Principia Mathematica*. C'est la raison pour laquelle ils manquent à cerner et à surprendre ce qu'il y a d'original et de significatif dans l'esprit méthodique et la «machine» à définir propre à la théorie des catégories sémantiques de l'Ontologie.

Aussi nos recherches ont-elles été commandées par l'objectif d'une construction effective de l'arithmétique, qui soit fidèle au cadre formel et à l'esprit catégoriel et constructif de la théorie leśniewskienne.

La construction effective de l'édifice arithmétique à laquelle nous sommes parvenus est présentée en fin d'ouvrage, accompagnée d'un court commentaire introductif visant à en faciliter la lecture et la consultation. Parmi les aspects originaux de cette construction, on retiendra les suivants. Les termes primitifs de Peano – zéro, nombre naturel, succcesseur – sont définis sans s'appuyer sur la notion de classe – ou d'ensemble –, même à titre de commodité linguistique. Les preuves des cinq propositions de Peano sont simplifiées et font intervenir un axiome de l'infini comme seul axiome propre, ce qui permet de clarifier la dépendance des propositions de Peano vis à vis de cet axiome. Quant à la version proposée de l'axiome de l'infini, elle présente l'avantage de ne contenir comme seules constantes logiques que les termes primitifs de l'Ontologie. Cela constitue, à notre connaissance, le seul exemple d'un tel axiome dépourvu de constante définie. L'importance de cette caractéristique est cruciale, dans la mesure où énoncer des axiomes à l'aide de termes définis peut conduire à une créativité cachée et illicite des définitions concernées.

Quant à la mise en perspective de ces résultats, elle s'est concentrée, ici, sur trois points centraux, à même d'éclairer les difficultés rencontrées dans le paradigme logiciste classique. Le premier est abordé par N. Gessler et a partie liée avec le problème de la production d'arithmétiques stratifiées, inhérent à la position logiciste classique. C'est à ce sujet que les *Principia Mathematica* recourent à la notion contreversée d'ambiguïté systématique, sur laquelle repose la théorie des types. C'est en effet l'ambiguïté typique de la théorie des types qui exige de distinguer entre termes, classes, classes de classes, etc. Ce faisant, on évite le paradoxe en respectant le principe du cercle vicieux. Dans l'Ontologie, ce problème de stratification est entièrement réglé par les modes formels du langage. Ceux-ci permettent en effet de reproduire l'Ontologie primitive, du premier niveau linguistique, aux niveaux supérieurs – ceci par la définition de copules d'ordre supérieur. Quant à l'analogie formelle de ces strates, elle est formellement contrôlée par les principes de formalisation attachés à la dimension développementale de l'Ontologie. Une conséquence majeure du principe de stratification est que les entités supérieures peuvent être traitées comme des noms, sans aucune réification. Sans doute n'est ce pas la moindre des réussites que de se libérer ainsi des conséquences fâcheuses de la doctrine frégéenne de la non saturation des fonctions, et qui prirent dans les *Principia Mathematica* la forme d'une réduction des fonctions à des fictions.

Le deuxième point, traité par P. Joray, est lié à la définition, force motrice de notre construction logiciste, et tombant sous une règle d'inférence permettant l'inscription de définitions explicites à titre de thèses. L'aspect discuté est celui de la créativité de certaines définitions, c'est-à-dire le fait que des définitions puissent s'avérer nécessaires à l'établissement de résultats exprimables, mais non prouvables sans ces définitions. Une réflexion montre que si les définitions abréviatives des *Principia Mathematica* sont effectivement et théoriquement éliminables et non créatives parce que officiellement externes au système, leur usage pratique, même à des niveaux élémentaires, est susceptible de receler une créativité non déclarée. Se tourner, comme nous le faisons vers des définitions réglées à l'interne du système, en leur donnant une position théorique forte, c'est faire le choix d'officialiser, de clarifier et surtout de régler formellement la créativité des définitions. Cette option a généralement été rejetée dans la communauté logicienne suite à la découverte par Łukasiewicz d'un exemple de créativité aux conséquences excessives. Nous montrons alors que cet exemple n'a aucune incidence sur les définitions leśniewskiennes dans la mesure où il constitue de manière voilée une définition non pas explicite, comme le sont les nôtres, mais une définition implicite.

Quant au dernier axe de réflexion, développé par C. Degrange, il se déploie autour de la notion d'imprédicativité, qui donna lieu au principe du cercle vicieux et fut à l'origine de l'éviction, dans les *Principia Mathematica*, de tout énoncé à caractère imprédicatif. Au contraire, l'analyse faite ici consiste à démontrer le caractère innoffensif de certains de ces énoncés imprédicatifs de manière à pouvoir admettre ceux-ci au sein du langage, malgré leur circularité. Cette analyse s'appuie sur le principe d'extensionnalité et débouche sur l'adoption d'une interprétation catégorielle des quantificateurs, ainsi que d'une sémantique dite combinatoire. Les théories extensionnelles leśniewskiennes permettent l'expression des conditions d'une telle solution et, à terme, d'en exhiber les enjeux.

Pour conclure, et retournant à la thèse logiciste rapportée dans les premières lignes, le logicisme que nous défendons ici connaît une forme modérée. La présence d'un axiome de l'infini s'avère incontournable, mais cette «concession» à la logicité pure, telle que l'avait rêvée Russell, ne saurait entamer la fécondité du paradigme catégoriel et développemental de l'Ontologie dans la perspective qui est la nôtre. Trait essentiel de ce logicisme catégoriel, l'arithmétique n'y est pas conçue comme littéralement *réductible* à la logique adoptée. Elle y est en revanche conçue – et c'est en cela que notre logicisme est modéré – comme une construction dont l'assise est logique et dont le développement est entièrement réglé par une logique qui en assure du coup la solidité structurelle et épistémique.

Nadine Gessler