UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL - FACULTÉ DES SCIENCES

Résolution de problèmes aux limites au moyen de transformations fonctionnelles

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences
par

PAUL BURGAT
licencié ès sciences

Lausanne
Multi-Office Machtzum
1950

La Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de MM. les professeurs Ch. Blanc, F. Fiala et Ed. Guyot, autorise l'impression de la présente thèse :

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AUX LIMITES
AU MOYEN
DE TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES

sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 21 mars 1950

Le Doyen :

F. Fiala

Le sujet de cette thèse m'a été proposé par Monsieur Charles Blanc, Professeur à l'Université de Lausanne.

Je remercie vivement Monsieur Blanc de ses conseils et lui exprime ma gratitude pour l'intérêt qu'il n'a cessé de me témoigner durant l'élaboration de ce travail.

I.- INTRODUCTION

On sait qu'il existe, pour intégrer les équations différentielles dont la solution est déterminée par des conditions initiales, une méthode fondée sur la transformation de Laplace (1). L'importence de cette transformation est très grande aussi dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Pour résoudre certains problèmes aux limites, MM. G. Doetsch et H. Kniess (2) ont fait usage d'une autre opération fonctionnelle, la transformation (finie) de Fourier.

Dans le même ordre d'idées, M. Ch.Blanc a montré que les séries de Fourier se prêtent parfaitement à la résolution de ces problèmes (3)

Enfin, dans sa thèse (4), Mme Roettinger signale que la transformation

$$T\left\{F(x)\right\} = \int_0^{\pi} F(x)\varphi_{k_n}(x)dx ,$$

(1) Voir, par exemple, [1], [2], [4], [6] (*).

(2) [7] et [12] . Dans sa thèse M.H.Kniess note qu'il n'existait, avant 1935 (abstraction faite d'un cas spécial), aucune méthode, reposant sur la théorie des transformations fonctionnelles, propre à la résolution des problèmes aux limites.

(3) [1] , p. 118 à 129 ; [3] .

(4) [14] .

(*) Les numéros entre crochets renvoient à la liste des ouvrages cités p. 71 et 72.

où les φ_{k_n} sont les fonctions propres du problème

$$y'' + k^2 y = 0$$
$$a_1 y(o) + a_2 y'(o) + a_3 y(\pi) + a_4 y'(\pi) = 0$$
$$b_1 y(o) + b_2 y'(o) + b_3 y(\pi) + b_4 y'(\pi) = 0 ,$$

permet d'intégrer l'équation

$$\sum_{r=o}^{m} A_{2r} \frac{d^{2r}F(x)}{dx^{2r}} = G(x)$$

lorsque les quantités

$$a_1 F^{(2r-2s-2)}(o) + a_2 F^{(2r-2s-1)}(o) + a_3 F^{(2r-2s-2)}(\pi) + a_4 F^{(2r-2s-1)}(\pi)$$

$$b_1 F^{(2r-2s-2)}(o) + b_2 F^{(2r-2s-1)}(o) + b_3 F^{(2r-2s-2)}(\pi) + b_4 F^{(2r-2s-1)}(\pi)$$

sont données $(s = 0, 1, \ldots, r-1)$; les A_{2r} sont des constantes et les coefficients a_i, b_i $(i = 1, \ldots, 4)$ doivent être tels que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} .$$

On remarquera que cette transformation n'est pas applicable quand les coefficients de l'équation proposés dépendent de x ; de plus, elle ne convient, dès que l'ordre est supérieur à 2, qu'à des problèmes dont les conditions aux limites sont particulières.

Je me suis proposé, dans ce travail, non de prendre pour point de départ une transformation et de déterminer son champ d'application relativement à la résolution des problèmes aux limites, mais de rechercher systématiquement un opérateur adapté à la question.

Je donne au chapitre II une méthode permettant d'associer, à tout problème (1) tel que le problème homogène correspondant (2)

(1) Pour autant que le problème associé admette des valeurs propres (voir [15], p. 291) et que le système des fonctions propres correspondantes soit complet. La méthode s'applique également à d'autres problèmes aux limites (v. le chap. VI).

(2) C'est-à-dire le problème que l'on obtient en remplaçant tous les seconds membres par zéro.

soit self-adjoint [1] une transformation ou, ce qui revient au même, un type de série approprié.

La formule de Green (pour les fonctions d'une variable) joue un rôle fondamental en ces matières [2]; je pars de cette relation et

1°) je transforme son second membre de façon qu'il devienne une fonction connue des quantités données; j'obtiens ainsi des conditions aux limites homogènes auxquelles doit satisfaire le noyau de l'opérateur intégral ;

2°) pour achever de définir la transformation, j'adjoins à ces conditions une équation différentielle homogène renfermant un paramètre.

Le choix de l'équation n'est pas arbitraire; il est déterminé par les exigences suivantes :

a) les noyaux doivent former une suite de fonctions orthogonales;
b) le premier membre de la formule de Green doit être une fonction linéaire de la transformée.

J'appelle "problème associé" le problème auquel je suis conduit.

Dans les chapitres III et IV, j'étudie en détail les problèmes du second ordre [3], en particulier l'importante question du signe des valeurs propres.

Au chapitre III, les conditions sont de 3^e espèce. La résolution des problèmes dans lesquels l'équation est à coefficients constants forme une application importante de la méthode; elle fait l'objet des paragraphes 7 et 8. Je donne deux exemples d'équation à coefficients variables. Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à un cas singulier.

Dans le chapitre V, j'envisage quelques problèmes du 4^e ordre, puis, à titre d'exemple, un problème d'élasticité (équation aux dérivées partielles), et je donne une condition nécessaire pour qu'un pro-

---

(1) Pour la définition, voir p.16.

(2) Voir [13], p. 746.

(3) J'appelle problème du $n^{\text{ième}}$ ordre tout problème constitué par une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre et par n conditions aux limites du type de celles de la p. 11.

blème du 4^{e}ordre [1] soit self-adjoint.

Je montre, dans un dernier chapitre, que la méthode permet encore d'obtenir le développement, en série de fonctions propres, de la solution de problèmes aux limites linéaires pour lesquels le problème homogène correspondant n'est plus self-adjoint.

---

(1) Cette condition se généralise immédiatement aux problèmes d'ordre 2n .

II.- PROBLEME et METHODE de RESOLUTION

1.- Formule de Green.-

Représentons par L l'opérateur différentiel linéaire du $n^{ième}$ ordre qui transforme $u(x)$ en

$$(\alpha) \qquad p_0 u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_n u \ ;$$

les p_i sont des fonctions réelles de x, continues sur le segment (a,b); on suppose, de plus, que les $(n-i)$ premières dérivées de p_i existent et sont continues sur (a,b) et que p_0 est différent de zéro sur ce segment.

Désignons par L^* l'opérateur qui fait passer de $u(x)$ à l'expression différentielle adjointe de l'expression (α) c'est-à-dire posons

$$L^*u = (-1)^n (p_0 u)^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1 u)^{(n-1)} + \dots - (p_{n-1}u)' + p_n u.$$

On a l'identité (de Lagrange)

$$v.Lu - u.L^*v = \frac{d}{dx} B(u,v) \quad ,$$

$B(u,v)$ étant une forme bilinéaire des deux suites de variables :

$$u,\ u',\ \dots,\ u^{(n-1)} \ ;$$
$$v,\ v',\ \dots,\ v^{(n-1)} \ .$$

En intégrant chaque membre de l'identité de Lagrange de a à b et en désignant par (f,g) le <u>produit intérieur</u> des fonctions réelles et intégrables f et g,

$$(f,g) = \int_a^b fg \, dx \ ,$$

on obtient la formule de Green (pour les fonctions d'une variable) :

$$(Lu,v) - (u,L^*v) = \Big[B(u,v) \Big]_a^b .$$

Soient maintenant :

$\vec{U}$ le vecteur de composantes $u(a)$, $u'(a)$, ..., $u^{(n-1)}(a)$, $u(b)$, $u'(b)$, ..., $u^{(n-1)}(b)$,

$\vec{V}$ le vecteur $\left[v(a), \ldots, v^{(n-1)}(a), v(b), \ldots, v^{(n-1)}(b)\right]$,

$(\vec{U},\vec{V})$ le <u>produit intérieur</u> des deux vecteurs précédents et A la matrice à $2n$ lignes et $2n$ colonnes

$$\begin{pmatrix}
\cdots & & & & (-1)^n p_0(a) & & & & & \\
\cdots & & & (-1)^{n-1} p_0(a) & 0 & & & & & \\
\cdots & & & & & & & 0 & & \\
\cdots & p_0(a) & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
-p_0(a) & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & (-1)^{n-1} p_0(b) \\
 & & & & & \cdots & & & (-1)^{n-2} p_0(b) & 0 \\
 & & 0 & & & \cdots & & & & \\
 & & & & & \cdots & -p_0(b) & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & p_0(b) & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Nous n'avons écrit que les éléments utiles au calcul de la valeur du déterminant de A ; les éléments qui se trouvent au-dessous des diagonales sont tous nuls.

Comme

$$\begin{aligned}
B(u,v) &= u^{(n-1)}(p_0 v) - u^{(n-2)}(p_0 v)' + \ldots + (-1)^{n-1} u (p_0 v)^{(n-1)} \\
&+ u^{(n-2)}(p_1 v) - u^{(n-3)}(p_1 v)' + \ldots + (-1)^{n-2} u (p_1 v)^{(n-2)}
\end{aligned}$$

$+ \ldots$

$+ u'(p_{n-2}v)-u(p_{n-2}v)'$

$+ u(p_{n-1}v),$

la formule de Green s'écrit :

$$(Lu,v) - (u,L^*v) = (\vec{U},A\vec{V}) = A(\vec{U},\vec{V}) \quad (1)$$

2.- Problème.-

Considérons l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(II_1) \qquad Ly + ry = f(x)$$

et les conditions aux limites, supposées linéairement indépendantes,

$$(II_2) \qquad \begin{aligned} L_i(y) = \alpha_1^{(i)}y(a) + \alpha_2^{(i)}y'(a) + \ldots + \alpha_n^{(i)}y^{(n-1)}(a) \\ + \alpha_{n+1}^{(i)}y(b) + \ldots + \alpha_{2n}^{(i)}y^{(n-1)}(b) = \alpha^{(i)} \quad ; \end{aligned}$$

r et les $\alpha_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont des constantes réelles; L est l'opérateur défini dans le paragraphe précédent et $f(x)$ une fonction généralement continue sur (a,b), c'est-à-dire

a) qu'il est possible de partager (a,b) en un nombre fini de segments partiels à l'intérieur de chacun desquels $f(x)$ est définie et continue,

b) qu'aux extrémités de ces segments intérieures à (a,b), la fonction a des discontinuités qui sont toutes de première espèce,

c) que $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ existent.

Le problème aux limites constitué par l'équation (II_1) et les conditions (II_2) (2) n'est pas toujours possible.

---

(1) Notation de D. Hilbert; voir [10], p. 110.

(2) Le problème consiste dans la recherche d'une fonction qui satisfasse à l'équation (II_1) et aux conditions (II_2); nous dirons simplement : problème $(II_1 + II_2)$. Dans les ouvrages anglo-saxons, on dit : "système" $(II_1 + II_2)$.

Si l'équation homogène

(II_1^h) $$Ly + ry = 0$$

accompagnée des conditions homogènes

(II_2^h) $$L_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n'admet que la solution $y = 0$, le problème est déterminé. En revanche, si r est égal à l'une des valeurs propres du problème

$$Ly + \lambda y = 0$$

$$L_i(y) = 0 \quad ,$$

il n'y a en général aucune solution (théorème de l'alternative).

Nous supposerons toujours que r ne coïncide pas avec une valeur propre.

Nous nous proposons de trouver, lorsque le problème $(II_1^h + II_2^h)$ est self-adjoint (1), une série de fonctions orthogonales qui représente, dans l'intervalle ou sur le segment (a,b) (2), la fonction y définie par l'équation (II_1) et les conditions (II_2).

3.- Méthode.-

Soient y la solution du problème (II_1+II_2), v une fonction que l'on va définir et $\vec{Y}$ le vecteur de composantes $y(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)$ $y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$.

On a la relation (formule de Green)

$$(Ly + ry,\ v) - (y,\ L^* v + rv) = A\ (\vec{Y},\vec{V})$$

ou

(II_3) $$\underline{(y,\ L^* v + rv) = (f,v) - A\ (\vec{Y},\vec{V}).}$$

Dans les questions où l'on utilise la formule de Green, on cherche d'ordinaire à déterminer v de manière que $A\ (\vec{Y},\vec{V})$ soit

---

(1) Pour la définition , voir p.16 ; voir aussi le chap. VI.

(2) Intervalle (a,b): ensemble des points x tels que $a<x<b$. Nous dirons qu'une série représente la fonction $F(x)$ dans un intervalle (sur un segment) lorsque cette série converge et a pour somme $F(x)$ en tout point de l'intervalle (du segment).

nul; nous choisirons au contraire v de façon que cette expression soit une fonction connue des quantités $\alpha^{(i)}$.

Ce choix est possible.

En effet, transformons d'abord le second membre de la formule de Green par un changement de variables.

M et N étant deux matrices régulières quelconques, à $2n$ lignes et $2n$ colonnes, posons

$$\vec{\mathcal{Y}} = M\vec{Y}, \qquad \vec{\mathcal{V}} = N\vec{V} ;$$

nous aurons alors

$$(Ly,v) - (y,L^*v) = A(\vec{Y},\vec{V}) = B(\vec{\mathcal{Y}},\vec{\mathcal{V}}) .$$

Il existe entre les matrices A, B, M et N la relation

$$B = (M^{-1})'AN^{-1} \; (1) .$$

Si la matrice M est donnée, nous pouvons choisir N de façon que B soit la matrice unité. Nous devrons avoir

$$E = (M^{-1})'AN^{-1}$$

d'où

$$N = (M^{-1})'A .$$

Après le changement de variables, le second membre de la formule de Green a la forme (dite canonique)

$$E(\vec{\mathcal{Y}},\vec{\mathcal{V}}) = \sum_{1}^{2n} \mathcal{Y}_k(y)\, \mathcal{V}_k(v) ,$$

les $\mathcal{Y}_k(y)$ et les $\mathcal{V}_k(v)$ étant respectivement les composantes des vecteurs $\vec{\mathcal{Y}}$ et $\vec{\mathcal{V}}$; on a, en désignant par $m_{k\ell}$ les éléments de la matrice M :

---

(1) On a $A(\vec{Y},\vec{V}) = Y'AV = (M^{-1}\mathcal{Y})'AN^{-1}\mathcal{V} = \mathcal{Y}'(M^{-1})'AN^{-1}\mathcal{V}$

$$= (M^{-1})'\,AN^{-1}\,(\vec{\mathcal{Y}},\vec{\mathcal{V}}) .$$

Y', par exemple, est la matrice transposée de Y, matrice à une colonne. Remarquons que la valeur absolue du déterminant de A est $[p_0(a)p_0(b)]^n$; cette matrice est donc régulière.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \ldots & m_{1,2n} \\ n_{21} & m_{22} \cdots & m_{2,2n} \\ \ldots & & \\ m_{2n,1} & m_{2n,2} & m_{2n,2n} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Y}_k(y) = m_{k,1}y(a)+\ldots+m_{k,n}y^{(n-1)}(a)+m_{k,n+1}y(b)+\ldots+m_{k,2n}y^{(n-1)}(b).$$

Jusqu'à présent, la matrice M était quelconque (régulière); nous poserons désormais

$$m_{k\ell} = \alpha_\ell^{(k)} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad \ell = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)\ ,$$

autrement dit, les n premières lignes de M seront constituées par les coefficients qui figurent dans les conditions aux limites (II_2); nous aurons

$$A(\vec{Y},\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)}\mathcal{V}_i(v) + \sum_{j=n+1}^{2n} \mathcal{Y}_j(y)\mathcal{V}_j(v)\ .$$

Nous prendrons en outre, pour v, une fonction satisfaisant aux conditions

$$\mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n)\ ;$$

$A(\vec{Y},\vec{V})$ deviendra une fonction connue des $\alpha^{(i)}$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$.

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Si v est une fonction qui satisfait aux conditions

$$\mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = n+1,\ \ldots,\ 2n)\ ,$$

la forme $A(\vec{Y},\vec{V})$ est égale à

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha^{(i)}\mathcal{V}_i(v).$$

Les $\mathcal{V}_k(v)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$ sont les composantes du vecteur $\vec{\mathcal{V}}$, défini par l'égalité $\vec{\mathcal{V}} = N\vec{V} = (M^{-1})'A\vec{V}$; M est une matrice dont les éléments des n premières lignes sont les coefficients qui figurent dans les conditions aux limites (II_2); les autres éléments sont arbitraires, sous la seule réserve que la matrice soit régulière.

Remarque : Si le problème est, dans le cas où $n = 2$,

$$(p(x)y')' + q(x)y + ry = f(x)\ ,$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha\ ,$$

$$\beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \beta\ ,$$

on peut trouver très simplement les conditions auxquelles v doit satisfaire.

En effet, il suffit de prendre une fonction v telle que

$$v(a) = h\alpha_2 \ , \ v'(a) = -h\alpha_1 \ ,$$

$$v(b) = k\beta_4 \ , \ v'(b) = -k\beta_3 \ ,$$

h et k étant des constantes arbitraires, différentes de zéro ; on voit sans peine que la forme $A(\vec{Y},\vec{V})$ est égale à $kp(b)\beta - hp(a)\alpha$ puisque $A\vec{V}$ est le vecteur $(-hp(a)\alpha_1, -hp(a)\alpha_2, kp(b)\beta_3, kp(b)\beta_4)$.

Les conditions précédentes peuvent être remplacées par les conditions équivalentes

$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 \ ,$$

$$\beta_3 v(b) + \beta_4 v'(b) = 0$$

que nous obtiendrons, par la méthode générale, au chapitre III.

*

Pour achever de déterminer v , reprenons la formule (II_3). Soient $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots$ un système complet [1] de fonctions orthonormées et

$$\sum_1^{\infty} A_k^* \varphi_k$$

le développement [2] de la fonction $f(x)$, second membre de l'équation (II_1), selon ce système.

---

(1) Nous dirons qu'un système de fonctions orthonormées sur (a,b): $\varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots$, est complet si, pour toute fonction généralement continue f , la suite

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge en moyenne vers f c'est-à-dire si

$$\lim_{n\to\infty} N(f - f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f - f_n)^2 dx = 0.$$

(2) Si A_1^* , A_2^* , ... sont les composantes de $f(x)$ par rapport au système orthonormé complet $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ on appelle développement de $f(x)$ dans ce système la série $\sum A_k^* \varphi_k$, que cette série converge ou non (elle converge en moyenne vers $f(x)$). Les A_k^* sont les "coefficients de Fourier" de $f(x)$ sur (a,b) par rapport au système considéré.

Le terme (f, φ_k) de la relation (II_3), dans laquelle on a remplacé v par φ_k, est égal à A_k^*.

Remarquons aussi que si l'on avait $L^*\varphi_k = -\lambda_k \varphi_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$, les λ_k étant des constantes, le premier membre de (II_3), quand on substitue φ_k à v, serait au facteur $r - \lambda_k$ près le coefficient de φ_k dans le développement de la solution du problème $(II_1 + II_2)$.

Les considérations précédentes nous conduisent à définir la fonction v par l'équation différentielle

$$(II_4) \qquad L^*v + \lambda v = 0$$

et les conditions aux limites

$$(II_5) \qquad \mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = n+1, \ldots, 2n) .$$

On sait (1) que l'équation (II_4), jointe aux conditions (II_5), détermine précisément une suite de fonctions ortbogonales si

1° $$L^* = L$$

2° les $\mathcal{V}_j(v)$ sont des combinaisons linéaires des $L_i(v)$ $(i = 1, 2, \ldots, n \ ; \ j = n+1, n+2, \ldots, 2n)$:

$$\mathcal{V}_j(v) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}L_i(v) \ , \quad |c_{ij}| \neq 0 \ ,$$

c'est-à-dire quand le problème $(II_4 + II_5)$ est self-adjoint (2).

Or, si le problème $(II_1^h + II_2^b)$ est self-adjoint, le problème $(II_4 + II_5)$ l'est également (et réciproquement).

En effet, l'équation $Ly + ry = 0$ étant self-adjointe, l'équation $L^*v + \lambda v = 0$ l'est aussi. De plus, les conditions (II_5)

(1) [9], p. 238.

(2) Le problème adjoint du problème $(II_4 + II_5)$ est :

$$Lu + \lambda u = 0 \quad , \quad L_i(u) = 0.$$

Ce problème et $(II_4 + II_5)$ admettent les mêmes valeurs propres, chacune avec le même ordre de multiplicité; voir [9], p. 213. Pour tout ce qui concerne les problèmes adjoints, voir [9], p. 210 à 212 ou M. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm, Gauthier-Villars, Paris 1917, ou encore [15].

sont celles du problème adjoint de $(II_1^h + II_2^h)$; leurs premiers mem-membres sont donc, par hypothèse, des combinaisons linéaires des $L_i(v)$.

La transformation fonctionnelle T que nous cherchions est donc définie par l'égalité

$$T\left\{f(x)\right\} = \int_a^b f(x).v_k(x)dx$$

dans laquelle les v_k sont les fonctions propres du problème

$$\begin{aligned} Lv + \lambda v &= 0 , \\ \mathcal{V}_j(v) &= 0 \qquad (j = n+1, n+2, \ldots, 2n) \end{aligned}$$

ou du problème équivalent

$$\begin{aligned} Lv + \lambda v &= 0 \\ L_i(v) &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Nous appellerons le problème précédent (ou un problème équivalent) "problème associé" du problème $(II_1 + II_2)$.

Nous venons de montrer que les conditions aux limites qu'il faut prendre pour le problème associé, quand le problème homogène $(II_1^h + II_2^h)$ est self-adjoint, sont celles de ce problème $(II_1^h+II_2^h)$ (ou des conditions équivalentes).

Remarques.

I) On aurait pu envisager une transformation fonctionnelle définie par l'égalité

$$z_k = \int_a^b v_k(x)y(x)dx \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

et chercher à déterminer son noyau, $v_k(x)$, en vue de la résolution du problème $(II_1 + II_2)$.

A cet effet, appliquons l'opérateur à Ly ; nous obtenons

$$\int_a^b v_k Ly dx = A(\vec{Y},\vec{V}_k) + \int_a^b yL^* v_k dx ,$$

$\vec{V}_k$ étant le vecteur de composantes $v_k(a), v'_k(a), \ldots, v_k^{(n-1)}(a)$, $v_k(b), v'_k(b), \ldots, v_k^{(n-1)}(b)$.

Il s'agit de choisir v_k de telle sorte que le premier terme du second membre soit une fonction connue des $\alpha^{(i)}$ et le second terme une fonction linéaire de z_k.

On y parvient à l'aide du problème $(II_4 + II_5)$:

$$L^* v = - \lambda v,$$

$$\mathcal{V}_j(v) = 0. \qquad (j = n+1, \ldots, 2n).$$

On obtient, en désignant par λ_k les valeur propres et par v_k les fonctions propres correspondantes,

$$\int_a^b v_k L y dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} \mathcal{V}_i(v_k) - \lambda_k z_k .$$

<u>L'opérateur qu'on vient de définir transformera l'équation différentielle (II_1) en une équation algébrique linéaire dans laquelle figureront les quantités connues $\alpha^{(i)}$.</u>

II) On pourrait substituer à (II_4) l'équation

$$Lv + rv + \lambda g v = 0 \qquad (L^* = L),$$

g étant une fonction continue et positive sur (a,b).

On aurait, par la relation (II_3), λ_k étant une valeur propre et v_k la fonction propre correspondante,

$$\lambda_k a_k N_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} \mathcal{V}_i(v_k) - A_k N_k$$

où

$$N_k = (gv_k, v_k) \quad , \quad a_k N_k = (y, gv_k) \quad \text{et} \quad A_k N_k = (f/g, gv_k).$$

Nous n'utiliserons pas cette équation.

III.- EQUATION du SECOND ORDRE
CONDITIONS de 3e ESPECE

1.- Problème.- Soit y la fonction qui satisfait à l'équation

$$(III_1) \qquad (p(x)y')' + q(x)y + ry = f(x) \quad {}^{(1)}$$

et aux conditions

$$(III_2) \qquad \begin{array}{l} L_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha \\ L_2(y) = \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \beta \end{array} \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_3^2 + \beta_4^2) \neq 0 \ ;$$

$p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues sur (a,b) ; $f(x)$ est une fonction généralement continue (2) sur ce segment et r une constante; on suppose en outre que $p(x)$ est positive et qu'elle admet une dérivée première continue (sur (a,b)).

Nous allons chercher une série de fonctions propres qui représente y.

L'opérateur différentiel L est défini, ici, par l'égalité

$$Ly = L^* y = (p(x)y')' + q(x)y \ ,$$

et

$$(III_3) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & p(a) & 0 & 0 \\ -p(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(b) \\ 0 & 0 & p(b) & 0 \end{pmatrix} .$$

---

(1) On sait que l'équation générale du 2e ordre,
$$p_o(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x) \ ,$$
prend la forme (III_1) quand on la multiplie par $\frac{1}{p_o} e^{\int \frac{p_1}{p_o} dx}$

(2) Pour la définition, voir p. 11.

Nous pouvons prendre pour M la matrice (régulière puisque son déterminant vaut $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_3^2+\beta_4^2)$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_4 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant les matrices $(M^{-1})'$ et N; en désignant par Δ le déterminant de M et par M_{ij} le mineur(1) relatif à l'élément appartenant à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne, nous obtenons :

$$(M^{-1})' = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_3^2+\beta_4^2)}\begin{pmatrix} \alpha_1(\beta_3^2+\beta_4^2) & \alpha_2(\beta_3^2+\beta_4^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2) & \beta_4(\alpha_1^2+\alpha_2^2) \\ \alpha_2(\beta_3^2+\beta_4^2) & -\alpha_1(\beta_3^2+\beta_4^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_4(\alpha_1^2+\alpha_2^2) & \beta_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2) \end{pmatrix}$$

et

$$N = (M^{-1})'A = \begin{pmatrix} -p(e)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} & p(e)\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(b)\frac{\beta_4}{\beta_3^2+\beta_4^2} & -p(b)\frac{\beta_3}{\beta_3^2+\beta_4^2} \\ p(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} & p(a)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(b)\frac{\beta_3}{\beta_3^2+\beta_4^2} & p(b)\frac{\beta_4}{\beta_3^2+\beta_4^2} \end{pmatrix}$$

(1) Mineur: produit par $(-1)^{i+j}$ du déterminant que l'on obtient en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne; certains auteurs appellent mineur le déterminant obtenu en biffant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Donc

$$\mathcal{V}_1(v) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,p(a)v(a) + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,p(a)v'(a)\ ,$$

$$\mathcal{V}_2(v) = \frac{\beta_4}{\beta_3^2+\beta_4^2}\,p(b)v(b) - \frac{\beta_3}{\beta_3^2+\beta_4^2}\,p(b)v'(b)\ ,$$

$$\mathcal{V}_3(v) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,p(a)v(a) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,p(a)v'(a)\ ,$$

$$\mathcal{V}_4(v) = \frac{\beta_3}{\beta_3^2+\beta_4^2}\,p(b)v(b) + \frac{\beta_4}{\beta_3^2+\beta_4^2}\,p(b)v'(b)\ .$$

2.- <u>Problème associé</u>.- Le problème qu'il convient d'associer à $(III_1 + III_2)$ est donc :

(III_1^a) $$(p(x)v')' + q(x)v + \lambda v = 0;$$

(III_2^a) $$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0, \qquad \beta_3 v(b) + \beta_4 v'(b) = 0. \quad (1)$$

C'est le problème de Sturm-Liouville.

Ce problème est adjoint à lui-même; ce fait a d'importantes conséquences :

a) le noyau de l'équation intégrale équivalente est symétrique; les valeurs propres -elles forment un ensemble infini dénombrable (2)- sont donc <u>réelles</u>;

b) les fonctions propres sont <u>orthogonales</u> deux à deux ; elles constituent un système complet (2);

c) il existe des <u>théorèmes d'équiconvergence</u>.

On démontre l'orthogonalité au moyen de la formule de Green. C'est aussi grâce à cette relation qu'on peut affirmer, sans recourir à la fonction de Green et à la théorie des équations intégrales, que les valeurs propres sont réelles. En effet, on a

$$(Ly,\bar{v}) - (y,L\bar{v}) = \sum_1^4 \mathcal{Y}_i(y)\,\mathcal{V}_i(\bar{v})\ ;$$

$\bar{v}$ représente la quantité conjuguée de v. Si y et v sont des

---

(1) Voir p. 14 et 15 où nous avons déjà trouvé ces conditions.
(2) [5] , p. 251.

fonctions qui satisfont aux conditions $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, donc aussi aux conditions $\mathcal{V}_3 = 0$, $\mathcal{V}_4 = 0$, le second membre est nul. Le problème $(III_1^a + III_2^a)$ est donc hermitien (1) d'où il résulte que ses valeurs propres sont réelles.

Les valeurs propres et les coefficients de l'équation et des conditions aux limites sont réels; on peut donc supposer, sans restreindre la généralité, que les fonctions propres sont réelles.

Soient $v_1, v_2, \dots$ la suite infinie des fonctions propres du problème $(III_1^a + III_2^a)$ et $f(x)$ une fonction intégrable.

On donne à la série $\sum_1^{\infty} A_k v_k$, où l'on a posé $A_k N_k = (f, v_k)$, $N_k = (v_k, v_k)$, le nom de <u>développement</u> de $f(x)$ selon le système orthogonal complet v_k, qu'il y ait convergence ponctuelle ou non.

Sous certaines hypothèses, le développement précédent représente (2), sur le segment (a,b) ou dans l'intervalle (a,b), la fonction dont il est issu. Il existe à ce sujet divers théorèmes (3); les hypothèses dépendent du point de vue auquel on se place et aussi des moyens auxquels on fait appel dans la démonstration.

Supposons $p(x) \equiv 1$.

Nous énoncerons seulement un <u>théorème d'équiconvergence</u> dû à Haar (4) et que nous utiliserons plus loin :

Si la fonction $q(x)$ est continue et à variation bornée sur (a,b) et si $\alpha_2 \beta_4 \neq 0$, le développement d'une fonction $f(x)$, définie et intégrable L dans (a,b), en série de Fourier en cosinus et le développement

$$f(x) \sim \sum A_k v_k$$

sont uniformément équiconvergents sur le <u>segment</u> (a,b), c'est-à-dire que la différence des sommes des n premiers termes de chacune de ces séries (convergentes ou non au sens habituel du mot) tend uni-

---

(1) Pour la définition, voir [1], p. 130.

(2) Pour la définition, voir p. 12, note (2).

(3) [4], p. 259 ; [5], p. 371 et 372 ; [8], p. 570; [9], p. 275 à 278 ; [16], p. 379 ; [17], p. 12.

(4) [19], p. 254 et 255.

formément vers zéro sur (a,b) quand $n \to \infty$.

La série de Fourier en cosinus de $f(x)$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{2}{b-a}\sum_1^{\infty} \cos\left(k\pi\frac{x-a}{b-a}\right).\int_a^b \cos\left(k\pi\frac{t-a}{b-a}\right) f(t)dt \;;$$

elle correspond au problème

$$v'' + \lambda v = 0 \;;\quad v'(a) = 0 \;,\quad v'(b) = 0 \;.$$

Si les coefficients α_2 et β_4 ne sont pas tous deux différents de zéro, on a des théorèmes analogues (1).

Si $p(x)$ n'est pas identique à 1 mais possède une dérivée seconde continue, le changement de variables :

$$t = \frac{1}{\ell}\int_a^x p^{-\frac{1}{2}}dx + a \;,\; \ell = \frac{1}{b-a}\int_a^b p^{-\frac{1}{2}}dx \;,\; z = y\sqrt[4]{p}$$

permet d'écrire l'équation (III_1^a) sous la forme

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Q\,(t)z + \ell^2\lambda z = 0$$

avec

$$Q(t) = \ell^2\psi(t) - \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} \;,\quad \varphi(t) \text{ et } \psi(t)$$

étant respectivement $\sqrt[4]{p}$ et q où x a été remplacé par son expression en fonction de t.

Le résultat des opérations arithmétiques sur des fonctions à variation bornée est à variation bornée et une fonction dérivable sur un segment (dérivée bornée) est à variation bornée sur ce segment (2). Donc, si p'' et q sont à variation bornée, Q le sera également de sorte que le théorème de Haar s'appliquera.

Dans le paragraphe 9, nous considérerons un cas singulier, le développement de Fourier-Bessel de la solution d'un problème aux limites. Là encore, il existe un théorème d'équiconvergence (3).

---

(1) [19] ; p. 255

(2) [18] , p. 74 et 78 .

(3) [17] , p. 73 ; [20] , p. 98 ; [4] , p. 259.

3.- Signe des valeurs propres.- La question du signe des valeurs propres est importante dans certains problèmes aux limites, en particulier dans le suivant :

$$(III_4) \qquad \begin{aligned} &v'' + \lambda v = 0 \quad ; \\ &\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 \quad , \\ &\beta_3 v(b) + \beta_4 v'(b) = 0 \quad . \end{aligned}$$

En effet, si toutes les valeurs propres sont positives, les fonctions propres sont des combinaisons linéaires de sinus et cosinus réels alors que s'il existe des valeurs propres négatives, les fonctions correspondantes sont des exponentielles; en négligeant, dans ce dernier cas, les valeurs propres négatives, on obtiendrait un système orthogonal incomplet.

Nous allons démontrer à ce sujet les théorèmes suivants :

Théorème I : Si l'on a $\alpha_1 \alpha_2 \leqslant 0$, $\beta_3 \beta_4 \geqslant 0$ et $q(x) \leqslant 0$, les valeurs propres du problème $(III_1^a + III_2^a)$ sont positives, sauf si $\alpha_1 = \beta_3 = 0$ et $q(x) \equiv 0$ (sur (a,b)); dans ce cas, la plus petite valeur propre est 0 .

En effet, λ_k étant une valeur propre et v_k la fonction propre correspondante, on a

$$\int_a^b v_k(Lv_k + \lambda_k v_k)dx = 0$$

ou

$$(\beta) \qquad \Big[p v_k v'_k \Big]_a^b - \int_a^b \Big[p v_k'^2 - q v_k^2 \Big] dx = - \lambda_k \int_a^b v_k^2 dx \ .$$

Le premier terme du premier membre s'écrit, compte tenu des conditions aux limites (III_2^a) ,

$$- \frac{\beta_3}{\beta_4} p(b) \Big[v_k(b) \Big]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) \Big[v_k(a) \Big]^2$$

ou

$$- \frac{\beta_3}{\beta_4} p(b) \Big[v_k(b) \Big]^2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} p(a) \Big[v_k'(a) \Big]^2$$

ou encore

$$- \frac{\beta_4}{\beta_3} p(b) \Big[v_k'(b) \Big]^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) \Big[v_k(a) \Big]^2$$

ou enfin

$$-\frac{\beta_4}{\beta_3}\,p(b)\left[v_k'(b)\right]^2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,p(a)\left[v_k'(a)\right]^2 .$$

Comme $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_3^2+\beta_4^2)\neq 0$, l'une au moins de ces expressions a un sens et, en vertu des hypothèses $\alpha_1\alpha_2\leq 0$, $\beta_3\beta_4\geq 0$, elle est inférieure ou égale à zéro (on a supposé $p(x)$ positif); le premier membre de (β) est donc négatif ou nul. Il en résulte que λ_k est positif ou nul.

Si v_k n'est pas constant, v_k' n'est pas nul et le premier membre est négatif; λ_k est positif.

Il ne peut exister de <u>fonction propre constante</u> que si $\alpha_1=\beta_3=0$; dans ce cas, $\lambda=0$ est valeur propre à condition que la fonction <u>continue</u> $q(x)$ soit identiquement nulle sur (a,b) .

Le théorème est démontré.

Plaçons-nous dans le cas du problème (III_4). On peut donner une autre démonstration.

Supposons $\lambda<0$.

Introduisons la solution générale de l'équation de (III_4) , $v=C_1e^{x\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}$, dans les conditions aux limites; il vient :

$$(\alpha_1e^{a\sqrt{-\lambda}}+\alpha_2\sqrt{-\lambda}\,e^{a\sqrt{-\lambda}})C_1+(\alpha_1e^{-a\sqrt{-\lambda}}-\alpha_2\sqrt{-\lambda}\,e^{-a\sqrt{-\lambda}})\,C_2=0 ,$$

$$(\beta_3e^{b\sqrt{-\lambda}}+\beta_4\sqrt{-\lambda}\,e^{b\sqrt{-\lambda}})C_1+(\beta_3e^{-b\sqrt{-\lambda}}-\beta_4\sqrt{-\lambda}\,e^{-b\sqrt{-\lambda}})\,C_2=0 .$$

En exprimant que ces équations sont compatibles, nous obtenons <u>l'équation caractéristique</u> du problème :

$$D=\begin{vmatrix}(\alpha_1+\alpha_2\sqrt{-\lambda})\,e^{a\sqrt{-\lambda}} & (\alpha_1-\alpha_2\sqrt{-\lambda})\,e^{-a\sqrt{-\lambda}}\\ (\beta_3+\beta_4\sqrt{-\lambda})\,e^{b\sqrt{-\lambda}} & (\beta_3-\beta_4\sqrt{-\lambda})\,e^{-b\sqrt{-\lambda}}\end{vmatrix}=0$$

ou

$$(III_5)\qquad e^{2(b-a)\sqrt{-\lambda}}=\frac{(\alpha_1+\alpha_2\sqrt{-\lambda})(\beta_3-\beta_4\sqrt{-\lambda})}{(\alpha_1-\alpha_2\sqrt{-\lambda})(\beta_3+\beta_4\sqrt{-\lambda})} .$$

Pour $\lambda<0$, le premier membre est supérieur à 1 $(b>a)$, le second est inférieur ou égal en valeur absolue au même nombre [1]. Cette équation n'a donc, dans les hypothèses faites, aucune racine négative.

$\lambda = 0$ est valeur propre si $\alpha_1 = \beta_3 = 0$ et dans ce cas seulement, on le voit aisément.

Si les conditions du théorème I ne sont pas remplies, il peut y avoir des valeurs propres négatives [2].

<u>Exemple</u> : L'équation $v'' + \lambda v = 0$, accompagnée des conditions

$$2v(o) + v'(o) = 0$$

$$3(5-e^{6\pi})v(\pi) + (5+e^{6\pi})v'(\pi) = 0$$

(e, base des logarithmes népériens), admet la valeur propre -9 ; la solution correspondante est $v = e^{3x} + 5e^{-3x}$.

Ici, $\alpha_1\alpha_2 = 2 > 0$, $\beta_3\,\beta_4 = 3(25 - e^{12\pi}) < 0$.

<u>Théorème II</u> : Dans le cas de l'équation $v'' + \lambda v = 0$, si $\alpha_1\alpha_2 > 0$ et $\beta_3\beta_4 < 0$, <u>il y a au moins une valeur propre négative!</u>

En effet, l'équation (III_5) peut s'écrire, en posant $r_1 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (>0 , par hypothèse) , $r_2 = \dfrac{\beta_3}{\beta_4}$ (<0) , $t = \sqrt{-\lambda}$ ($\lambda \leq 0$) :

$$e^{2(b-a)t} = \frac{(t + r_1)(t - r_2)}{(t - r_1)(t + r_2)} .$$

On voit facilement que la courbe représentative du second membre coupe au moins une fois la courbe $y = e^{2(b-a)t}$.

4.- <u>Calcul des "coefficients de Fourier" de la solution du problème</u> $(III_1 + III_2)$.- Rappelons que la fonction $f(x)$ qui

---

(1) $\left|\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-\lambda}}{\alpha_1 - \alpha_2\sqrt{-\lambda}}\right| \leq 1$, $\left|\dfrac{\beta_3 - \beta_4\sqrt{-\lambda}}{\beta_3 + \beta_4\sqrt{-\lambda}}\right| \leq 1$;

(2) Ces conditions ne sont pas mentionnées dans tous les ouvrages qui s'occupent de cette question. Nous ne les avons trouvées ni dans Frank et von Mises (t.I, p. 340, 347, 573), ni dans Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, collect. Göschen, 1926.

constitue le second membre de l'équation différentielle (III_1) est, par hypothèse, une fonction généralement continue (pour la définition voir p.11) .

Nous avons déjà dit que, si r n'est pas égal à une valeur propre du problème homogène correspondant, le problème $(III_1 + III_2)$ est déterminé c'est-à-dire qu'il existe une fonction, y , admettant une dérivée première continue et une dérivée seconde et satisfaisant à l'équation (III_1) et aux conditions (III_2). La dérivée y' est continue, y est donc à variation bornée; par suite, y est représentable, dans l'intervalle (a,b) , par sa série de Fourier.

Il s'ensuit, grâce aux théorèmes d'équiconvergence (1), que y est aussi représentée, dans (a,b), par son développement à l'aide des fonctions v_k (on suppose que $p(x)$ et $q(x)$ satisfont aux hypothèses de ces théorèmes) .

Calculons maintenant les coefficients a_k de ce développement.

Posons, comme plus haut ,

$$N_k = (v_k,v_k) \quad \text{et} \quad A_k = \frac{1}{N_k}(f,v_k) \quad .$$

Partons de la relation (II_3), pour $n=2$, dans laquelle nous faisons $v = v_k$; nous obtenons, en désignant par $\vec{V}_k$ le vecteur de composantes $v_k(a)$, $v'_k(a)$, $v_k(b)$, $v'_k(b)$,

$$(y, Lv_k + rv_k) = (f,v_k) - A(\vec{Y},\vec{V}_k)$$

ou, puisque les v_k sont les fonctions propres du problème $(III_1^a+III_2^a)$ et en vertu du théorème de la page 14 ,

$$(y, -\lambda_k v_k + rv_k) = A_k N_k - (\alpha\, \mathcal{V}_1(v_k) + \beta\, \mathcal{V}_2(v_k)) \ .$$

Le premier membre est égal à $(r - \lambda_k)(y,v_k)$ ou $(r-\lambda_k)a_k N_k$; on a donc

$$(\lambda_k - r)a_k N_k = \alpha\, \mathcal{V}_1(v_k) + \beta\, \mathcal{V}_2(v_k) - A_k N_k$$

---

(1) Si $\alpha_2 \beta_4 \neq 0$, la fonction est égale à son développement sur le segment (a,b) (théorème de Haar) .

ou, en introduisant dans cette relation les expressions qu'on a trouvées pour les $\mathcal{V}_1(v)$ et en résolvant par rapport à a_k.

$$(III_6)\quad \boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left\{\frac{1}{N_k}\left[\alpha p(a)\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}v_k(a) + \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}v'_k(a)\right) + \beta p(b)\left(\frac{\beta_4}{\beta_3^2+\beta_4^2}v_k(b) - \frac{\beta_3}{\beta_3^2+\beta_4^2}v'_k(b)\right)\right] - A_k\right\}.}$$

Soient $g(x,\lambda)$ et $h(x,\lambda)$ deux solutions de l'équation (III_1^a) qui constituent un système fondamental et telles que

$$g'(a,\lambda) = 0 \quad , \qquad h(a,\lambda) = 0 \quad , \text{ quel que soit } \lambda \; .$$

Posons

$$g(a,\lambda) = c(\lambda) \quad \text{et} \quad h'(a,\lambda) = d(\lambda) \; .$$

En introduisant l'intégrale générale, $v = C_1 g(x,\lambda) + C_2 h(x,\lambda)$, dans les conditions aux limites (III_2^a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 c(\lambda).C_1 && \alpha_2 d(\lambda).C_2 &&= 0 \quad , \\ &\left(\beta_3 g(b,\lambda) + \beta_4 g'(b,\lambda)\right) C_1 &&+ \left\{\beta_3 h(b,\lambda) + \beta_4 h'(b,\lambda)\right\} C_2 &&= 0 \quad ; \end{aligned}$$

les valeurs propres sont les zéros du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 c(\lambda) & \alpha_2 d(\lambda) \\ \beta_3 g(b,\lambda) + \beta_4 g'(b,\lambda) & \beta_3 h(b,\lambda) + \beta_4 h'(b,\lambda) \end{vmatrix}$$

et l'on peut prendre pour fonctions propres

$$\underline{v_k(x) = \alpha_1 c(\lambda_k)\; h(x,\lambda_k) - \alpha_2 d(\lambda_k)\; g(x,\lambda_k) \; .}$$

L'équation caractéristique $D = 0$ s'écrit :

$$\frac{\alpha_1 c(\lambda)}{\beta_3 g(b,\lambda) + \beta_4 g'(b,\lambda)} = \frac{\alpha_2 d(\lambda)}{\beta_3 h(b,\lambda) + \beta_4 h'(b,\lambda)} \; .$$

Désignons par ρ_k la valeur commune de ces rapports, pour $\lambda = \lambda_k$; amplifions le premier rapport par $\beta_4 h(b,\lambda_k)$ puis par $-\beta_3 h'(b,\lambda_k)$, le second par $-\beta_4 g(b,\lambda_k)$ puis par $\beta_3 g'(b,\lambda_k)$ et divisons la somme des numérateurs des rapports ainsi obtenus par la somme de leurs dénominateurs ; il vient

$$\rho_k = \frac{\alpha_1 c(\lambda_k)}{\beta_3 g(b,\lambda_k) + \beta_4 g'(b,\lambda_k)} = \frac{\alpha_2 d(\lambda_k)}{\beta_3 h(b,\lambda_k) + \beta_4 h'(b,\lambda_k)}$$

$$= \frac{\beta_4 v_k(b) - \beta_3 v_k'(b)}{(\beta_3^2 + \beta_4^2)\,\big(g'(b,\lambda_k)\, h(b,\lambda_k) - g(b,\lambda_k)\, h'(b,\lambda_k)\big)} .$$

Les fonctions $g(x,\lambda)$ et $h(x,\lambda)$ satisfont à l'équation (III_1^a) ; il en résulte que

$$(ph')'g - (pg')'h = 0 \qquad (a \leq x \leq b) ;$$

l'expression $ph'g = pg'h$ ne dépend donc pas de x ; elle est égale à $p(a)h'(a,\lambda)g(a,\lambda) - p(a)g'(a,\lambda)h(a,\lambda)$ c'est-à-dire à $c(\lambda)d(\lambda)p(a)$.

On a donc $\displaystyle \rho_k = - \frac{p(b)}{c(\lambda_k)d(\lambda_k)p(a)} \; \frac{\beta_4 v_k(b) - \beta_3 v_k'(b)}{\beta_3^2 + \beta_4^2}$.

En tenant compte de tout ce qui précède, on met (III_6) sous la forme

$$(III_7) \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left\{\frac{c(\lambda_k)d(\lambda_k)p(a)}{N_k}\big[\alpha - \rho_k\beta\big] - A_k\right\}} ;$$

λ_k : valeurs propres ,

$c(\lambda) = g(a,\lambda)$, $d(\lambda) = h'(a,\lambda)$: g et h sont deux solutions strictement linéairement indépendantes de l'équation (III_1^a) telles que

$$g'(a,\lambda) = h(a,\lambda) = 0 \quad .$$

$$N_k = (v_k, v_k) \; ; A_k N_k = (f, v_k) \; ;$$

$$\rho_k = \frac{\alpha_1 c(\lambda_k)}{\beta_3 g(b,\lambda_k) + \beta_4 g'(b,\lambda_k)} = \frac{\alpha_2 d(\lambda_k)}{\beta_3 h(b,\lambda_k) + \beta_4 h'(b,\lambda_k)} .$$

Les fonctions propres sont :

$$v_k(x) = \alpha_1 c(\lambda_k)\, h(x,\lambda_k) - \alpha_2 d(\lambda_k)\, g(x,\lambda_k) .$$

5.- Premier exemple.-

Soit le problème

$$\left[x^2y'\right]' + ry = f(x) \quad ,$$
$$y(a) = \alpha , \qquad y(b) = \beta \qquad (b>a>0).$$

Le problème associé est :

$$\left[x^2v'\right]' + \lambda v = 0 \quad ,$$
$$v(a) = 0 \quad , \quad v(b) = 0 \quad .$$

Les valeurs propres sont positives ~~puis~~que $\alpha_1\alpha_2 = \beta_3\beta_4 = 0$ et $\alpha_1\beta_3 \neq 0$.

Rappelons que les fonctions propres sont réelles.

La solution générale de l'équation (équation d'Euler) du problème associé est donc

$$v = C_1 x^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln x\right) + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln x\right) .$$

On a pour équation caractéristique :

$$D = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln a\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln a\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln b\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln b\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln b\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2} \ln a\right)$$

d'où

$$4\lambda_k = 1 + k^2\ell^2 \quad (k = 1, 2, \ldots) ,$$

formule qui donne les valeurs propres et dans laquelle

$$\ell = \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}}$$

Les fonctions propres correspondantes sont :

$$v_k = x^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2} \ln a\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2} \ln x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2} \ln a\right) \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2} \ln x\right)\right]$$
$$= x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2} \ln \frac{x}{a}\right) ;$$

on a $v_k(a) = 0$, $v_k(b) = 0$, $v_k'(a) = \dfrac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2}\, a^{-\frac{3}{2}}$ et
$v_k'(b) = (-1)^k \dfrac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2}\, b^{-\frac{3}{2}}$.

Substituons dans la formule (III_6) et résolvons par rapport à a_k ; il vient

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left\{\frac{\sqrt{4\lambda_k-1}}{2N_k}\left[a^{\frac{1}{2}}\alpha - (-1)^k b^{\frac{1}{2}}\beta\right] - A_k\right\}} .$$

$$N_k = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

$$4\lambda_k = 1 + k^2\ell^2 \; ; \quad \ell = \frac{2\pi}{\ln\frac{b}{a}}$$

6.- Second exemple.-

Envisageons le problème

$$y'' - \frac{x^2}{4}y + ry = f(x) \quad ;$$
$$\alpha_1 y(o) + \alpha_2 y'(o) = \alpha \quad ,$$
$$\beta_3 y(1) + \beta_4 y'(1) = \beta \quad .$$

Nous lui associons l'équation et les conditions suivantes :

$$v'' - \frac{x^2}{4}v + (\lambda + \tfrac{1}{2})v = 0 \quad ,$$
$$\alpha_1 v(o) + \alpha_2 v'(o) = 0 \quad ,$$
$$\beta_3 v(1) + \beta_4 v'(1) = 0 \quad .$$

L'équation de ce dernier problème est connue sous le nom d'équation de Weber ; elle admet les deux solutions particulières linéairement indépendantes (1)

$$g(x,\lambda) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left[1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}x^6 + \dots\right] ,$$
$$h(x,\lambda) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left[x - \frac{\lambda-1}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \dots\right] .$$

On a $c(\lambda) = g(o,\lambda) = 1$, $g'(o,\lambda) = 0$,
$h(o,\lambda) = 0$, $d(\lambda) = h'(o,\lambda) = 1$.

(1) Séries convergentes pour toute valeur de x.

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_3 g(1,\lambda) + \beta_4 g'(1,\lambda) & \beta_3 h(1,\lambda) + \beta_4 h'(1,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Enfin les fonctions propres sont :

$$\underline{v_k(x) = \alpha_1 h(x,\lambda_k) - \alpha_2 g(x,\lambda_k)} \ .$$

La formule (III_7) devient ici

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k + \frac{1}{2} - r}\left[\frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k \beta) - A_k\right] \ .}$$

7.- Equation à coefficients constants.-

Considérons l'équation

$$(III_1') \qquad y'' + ry = f(x)$$

et les conditions aux limites

$$(III_2') \qquad \begin{aligned} L_1(y) &= \alpha_1 y(o) + \alpha_2 y'(o) = \alpha \ , \\ L_2(y) &= \beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) = \beta \ . \end{aligned}$$

Nous supposerons que les coefficients de L_1 et de L_2 satisfont aux inégalités $\alpha_1\alpha_2 \leqslant 0$, $\beta_3\beta_4 \geqslant 0$.

Dans ces conditions, nous savons que les valeurs propres du problème associé

$$v'' + \lambda v = 0 \ ,$$
$$L_1(v) = 0 \ , \ L_2(v) = 0$$

ne sont pas négatives.

Posons $\omega = \sqrt{\lambda}$; la solution générale de l'équation $v'' + \lambda v = 0$ est $(\lambda > 0)$:

$$v = C_1 \, g(x,\lambda) + C_2 \, h(x,\lambda) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x \ .$$

et l'on a

$$c(\lambda) = g(o,\lambda) = 1 \ , \qquad d(\lambda) = h'(o,\lambda) = \omega \ .$$

Les fonctions propres sont

$$\underline{v_k = \alpha_1 \sin\omega_k x - \alpha_2 \omega_k \cos\omega_k x} \ ,$$

les ω_k étant les racines positives de l'équation caractéristique

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2\omega \\ \beta_3\cos\omega\pi - \beta_4\omega\sin\omega\pi & \beta_3\sin\omega\pi + \beta_4\omega\cos\omega\pi \end{vmatrix} = 0 .$$

Cette équation peut s'écrire

$$\underline{\operatorname{cotg}\omega\pi = \frac{\alpha_2\beta_4}{\alpha_2\beta_3 - \alpha_1\beta_4}\,\omega + \frac{\alpha_1\beta_3}{\alpha_2\beta_3 - \alpha_1\beta_4}\,\frac{1}{\omega}} .$$

La formule qui permet de calculer les coefficients de la série représentant la solution du problème, dans l'intervalle ou sur le segment $(0,\pi)$, s'obtient en particularisant la formule (III_7) ; elle est

$$(III_7') \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left[\frac{\omega_k}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta) - A_k\right]}$$

où

$$N_k = (v_k,v_k) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2\omega_k^2)\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_2^2\omega_k^2 - \alpha_1^2}{4\omega_k}\sin 2\omega_k\pi - \alpha_1\alpha_2\sin^2\omega_k\pi .$$

Rappelons que l'on a

$$\rho_k = \frac{\alpha_1}{\beta_3\cos\omega_k\pi - \beta_4\omega_k\sin\omega_k\pi} = \frac{\alpha_2\omega_k}{\beta_3\sin\omega_k\pi + \beta_4\omega_k\cos\omega_k\pi} \quad (1)$$

et $A_k N_k = (f,v_k)$.

Remarque.- $\lambda = 0$ est valeur propre si les conditions aux limites (III_2') sont $y'(o) = \alpha$, $y'(\pi) = \beta$, et dans ce cas seulement. Alors $\lambda_o = 0$, $v_o = 1$ et

$$\boxed{a_o = \frac{1}{r}\left[\frac{\alpha-\beta}{\pi} + A_o\right] .}$$

---

(1) Il est utile de remarquer que l'on a $v_k(\pi) = -\beta_4\rho_k\omega_k$ et $v_k'(\pi) = \beta_3\rho_k\omega_k$.

Le tableau suivant donne l'expression des coefficients de la série dans quelques cas particuliers :

Equstion $y'' + ry = f(x)$.

Conditions	Eq. caract.	$\lambda_k = \omega_k^2$	v_k	a_k
$y(o) = \alpha$; $y(\pi) = \beta$	$\mathrm{tg}\,\omega\pi = 0$	k^2 $(k = 1,2,\ldots)$	$\sin kx$	$\frac{1}{k^2 - r}\left[\frac{2k}{\pi}\left(\alpha - (-1)^k\beta\right) - A_k\right]$ (1)
$y'(o) = \alpha$; $y'(\pi) = \beta$	$\mathrm{tg}\,\omega\pi = 0$	k^2 $(k = 0,1,2,\ldots,)$	$\cos kx$	$a_o = \frac{1}{r}\left[\frac{\alpha - \beta}{\pi} + A_o\right]$ $\frac{-1}{k^2 - r}\left[\frac{2}{\pi}\left(\alpha - (-1)^k\beta\right) + A_k\right]$ (1) $(k \neq 0)$
$y'(o) = \alpha$; $y(\pi) = \beta$	$\mathrm{cotg}\,\omega\pi = 0$	$(k - \frac{1}{2})^2$	$\cos(k - \frac{1}{2})x$	$\frac{-1}{(k-\frac{1}{2})^2 - r}\left[\frac{1}{\pi}\left(2\alpha + (-1)^k(2k-1)\beta\right) + A_k\right]$
$y(o) = \alpha$; $y'(\pi) = \beta$	$\mathrm{cotg}\,\omega\pi = 0$	$(k - \frac{1}{2})^2$	$\sin(k - \frac{1}{2})x$	$\frac{1}{(k-\frac{1}{2})^2 - r}\left[\frac{1}{\pi}\left((2k-1)\alpha - (-1)^k 2\beta\right) - A_k\right]$
(2) $\alpha_1 y(o) + \alpha_2 y'(o) = \alpha$ $\alpha_1 y(\pi) + \alpha_2 y'(\pi) = \beta$ $(\alpha_1 \neq 0)$	$\mathrm{tg}\,\omega\pi = 0$	k^2 $(k = 1,2,\ldots)$	$\alpha_1 \sin kx - \alpha_2 k \cos kx$	$\frac{1}{k^2 - r}\left[\frac{2k}{(\alpha_1^2 + k^2\alpha_2^2)\pi}\left(\alpha - (-1)^k\beta\right) - A_k\right]$

(1) Ces formules ont déjà été établies; voir [1] , p. 125 et 126, et [3].

(2) Les valeurs propres sont positives (v. l'équstion III_5).

8.- Dérivée de la solution du problème $(III'_1 + III'_2)$.-

Supposons $\alpha_2\beta_4 \neq 0$.

Nous avons obtenu

$$y = \sum a_k v_k =$$

$$= \sum \frac{1}{\lambda_k - r}\left[\frac{\omega_k}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta) - A_k\right](\alpha_1 \sin\omega_k x - \alpha_2\omega_k\cos\omega_k x) .$$

Il résulte immédiatement du théorème de l'équiconvergence (uniforme) que la série

$$\sum a_k v_k$$

est uniformément convergente sur le segment $(0,\pi)$.

On peut aussi démontrer la convergence uniforme indépendamment du théorème de l'équiconvergence; il suffit de remarquer que

$$|a_k v_k| = O(\omega_k^{-2}) = O(k^{-2})$$

(ρ_k est borné de même que $(f,v_k)/\omega_k$) .

Si nous dérivons $\sum a_k v_k$ terme à terme, nous obtenons une série de laquelle nous ne pouvons rien dire, du point de vue de la convergence. Pour obtenir une série qui représente y' , nous partirons de la dérivée seconde.

Démontrons d'abord qu'on a l'identité

$$\sum \frac{1}{N_k\omega_k}(\alpha - \rho_k\beta)v_k(x) \equiv \left[\frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1\sum\frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta)\right] . x$$

$$- \alpha_2\sum\frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta) .$$

En effet, si $z(x)$ est la solution du problème aux limites(1)

$$z'' = 0 , \quad \begin{array}{l}\alpha_1 z(o) + \alpha_2 z'(o) = \alpha \\ \beta_3 z(\pi) + \beta_4 z'(\pi) = \beta \quad (\alpha_2\beta_4 \neq 0) ,\end{array}$$

on a, d'une part, $z(x) = z'(o).x + z(o)$,

(1) Si $\alpha_1 = \beta_3 = 0$, le problème n'a en général pas de solution; dans ce cas, il est aisé de passer de la série qui représente y' à celle qui a y pour somme.

d'autre part ,

$$z(x) = \sum a_k v_k = \sum \frac{1}{N_k \omega_k} (\alpha - \rho_k \beta) \cdot v_k(x)$$

et par conséquent $z(o) = -\alpha_2 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha - \rho_k \beta)$.

Tirons $z'(o)$ de la première des conditions aux limites ; il vient

$$z'(o) = \frac{\alpha}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} z(o) = \frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha - \rho_k \beta) .$$

En égalant les deux expressions de $z(x)$, on obtient

$$\sum \frac{1}{N_k \omega_k} (\alpha - \rho_k \beta) v_k(x) \equiv \left[\frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha - \rho_k \beta) \right] x - \alpha_2 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha - \rho_k \beta) ,$$

c'est-à-dire l'identité que l'on voulait établir.

Donnons encore la série en v_k qui est égale à 1 en tout point du segment $(0,\pi)$; nous l'utiliserons plus loin.

La fonction $z(x) = 1$ est la solution du problème

$$z'' = 0 ,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 z(o) + \alpha_2 z'(o) &= \alpha_1 , \\ \beta_3 z(\pi) + \beta_4 z'(\pi) &= \beta_3 . \end{aligned} \qquad (\alpha_2 \beta_4 \neq 0)$$

Donc

$$z(x) = 1 = \sum a_k v_k = \sum \frac{1}{N_k \omega_k} (\alpha_1 - \rho_k \beta_3) v_k(x) .$$

Pour $x = 0$, $1 = -\alpha_2 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha_1 - \rho_k \beta_3)$.

Pour $x = \pi$, $1 = -\beta_4 \sum \frac{\rho_k}{N_k} (\alpha_1 - \rho_k \beta_3)$, car $v_k(\pi) = -\beta_4 \rho_k \omega_k$ (1).

Cherchons maintenant un développement en série de y'; si la série $\sum A_k v_k$ converge uniformément sur le segment $(0,\pi)$ - il est nécessaire pour cela que la fonction $f(x)$ soit continue-, on a

$$y'' \equiv f - ry = \sum (A_k - r a_k) v_k(x) .$$

La série précédente est uniformément convergente puisqu'elle est la différence de deux telles séries; on obtient en intégrant ter-

(1) Voir p. 33, note.

me à terme

$$y'(x) = y'(o) - \sum \frac{A_k - ra_k}{\omega_k^2} \left(v_k'(x) - v_k'(o)\right)$$

ou, en tenant compte de la formule (III_7') et de la première des conditions aux limites,

$$y'(x) = \frac{\alpha}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sum a_k v_k(o) - \sum\left\{\left[\frac{1}{N_k\omega_k}(\alpha - \rho_k\beta) - a_k\right]\left[v_k'(x) - v_k'(o)\right]\right\}$$

ou encore, en remarquant que la série $\sum \frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta)$ converge (voir p. 37),

$$y'(x) = \frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1 \sum \frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta) - \sum \left[\frac{1}{N_k\omega_k}(\alpha - \rho_k\beta) - a_k\right] v_k'(x) .$$

Il est intéressant de montrer comment on passe de cette série à la série $y(x) = \sum a_k v_k$ et de vérifier que les conditions aux limites sont satisfaites.

Une intégration terme à terme (la série est uniformément convergente) donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum a_k v_k(o) + \left[\frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1 \sum \frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta)\right] x \\ &\quad - \sum\left\{\left[\frac{1}{N_k\omega_k}(\alpha - \rho_k\beta) - a_k\right]\left[v_k(x) - v_k(o)\right]\right\} \\ &= \left[\frac{\alpha}{\alpha_2} + \alpha_1 \sum \frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta)\right] x - \sum\left[\frac{1}{N_k\omega_k}(\alpha - \rho_k\beta)\right] v_k(x) \\ &\quad - \alpha_2 \sum \frac{1}{N_k}(\alpha - \rho_k\beta) + \sum a_k v_k(x) \ (1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de l'identité de la page 36,

$$y(x) = \sum a_k v_k(x) \quad ,$$

ce que l'on voulait établir.

Il résulte de la manière même dont nous avons calculé $y'(o)$ que les fonctions y et y' satisfont à la première des conditions aux limites. Montrons que la seconde est vérifiée.

---

(1) Les séries convergent (voir p.37).

On a

$$\beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) = \beta_3 \sum a_k v_k(\pi)$$

$$+ \frac{\alpha\beta_4}{\alpha_2} + \alpha_1\beta_4 \sum \frac{1}{N_k} (\alpha - \rho_k\beta) - \beta_4 \sum \left[\frac{1}{N_k\omega_k} (\alpha - \rho_k\beta) - a_k \right] v_k'(\pi) .$$

Mais $v_k(\pi) = -\beta_4\rho_k\omega_k$, $v_k'(\pi) = \beta_3\rho_k\omega_k$ (p.33, note) ; par suite,

$$\beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) = \frac{\alpha\beta_4}{\alpha_2} - \sum \left\{ \beta\beta_4 \frac{\rho_k}{N_k} (\alpha_1 - \rho_k\beta_3) - \frac{\alpha\beta_4}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{N_k} (\alpha_1 - \rho_k\beta_3) \right\}.$$

Les sériss $\quad -\beta_4 \sum \frac{\rho_k}{N_k} (\alpha_1 - \rho_k\beta_3)$ et $-\alpha_2 \sum \frac{1}{N_k}(\alpha_1 - \rho_k\beta_3)$ sont convergentes et la somme de chacune d'elles, nous l'avons montré, est égale à 1 . Donc

$$\beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) = \frac{\alpha\beta_4}{\alpha_2} + \beta - \frac{\alpha\beta_4}{\alpha_2} = \beta.$$

c.q.f.d.

Nous avons supposé que la série $\sum A_k v_k$ convergeait uniformément sur le segment $(0,\pi)$. S'il n'en est pas ainsi, il est tout de même légitime d'intégrer terms à terme ls séris $\sum (A_k - ra_k)v_k(x)$ (1) ; on obtient une série qui représente y' .

9.- Application à un cas singulier.- Si l'équation

$$y'' - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y + ry = f(x) \quad \text{(n, nombre naturel)}$$

admet une solution y telle que

a) $|y| < A$, nombre fixe, pour $0 \leq x \leq 1$,
b) $\beta_3 y(1) + \beta_4 y'(1) = \beta$,

nous obtiendrons les coefficients a_k de la façon suivante :

Prenons pour problème associé

$$v'' - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} v + \lambda v = 0 \quad ,$$

$$\alpha_1 v(o) + \alpha_2 v'(o) = 0 \quad ,$$

$$\beta_3 v(1) + \beta_4 v'(1) = 0 \quad .$$

(1) On le montre facilement au moyen de l'égalité de Parseval.

Les fonctions propres sont

$$\underline{v_k = \sqrt{x}\, J_n(\omega_k x)} \qquad\qquad (\omega_k = \sqrt{\lambda_k}) \quad ;$$

les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\beta_3 J_n(\sqrt{\lambda}) + \beta_4 \left[\frac{dJ_n(\sqrt{\lambda}\, x)}{dx}\right]_{x=1} + \frac{1}{2}\ \beta_4 J_n(\sqrt{\lambda}) = 0 \ .$$

Il existe ici encore, on l'a déjà signalé, un théorème d'équiconvergence.

La formule (III_6) donne, si l'on tient compte de l'équation caractéristique,

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left[\frac{1}{N_k}\frac{\beta}{\beta_4} J_n(\omega_k) - A_k\right]}$$

de sorte que

$$\sum a_k v_k = \sum \frac{1}{\lambda_k - r}\left[\frac{1}{N_k}\frac{\beta}{\beta_4} J_n\ (\omega_k) - A_k\right] \sqrt{x} J_n(\omega_k\, x) \ .$$

IV.- EQUATION du SECOND ORDRE
CONDITIONS GENERALES

1.- <u>Problème.-</u> Considérons l'équation différentielle

$$(IV_1) \qquad (p(x)y')' + q(x)y + ry = f(x)$$ [1]

et les conditions aux limites

$$(IV_2) \quad \begin{aligned} L_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \alpha \ , \\ L_2(y) &= \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) + \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \beta \ . \end{aligned}$$

Les hypothèses relatives à $p(x)$, $q(x)$ et $f(x)$ sont celles du paragraphe 1 du chapitre III ; l'opérateur L et la matrice A sont identiques à ceux du même chapitre. On suppose que les formes L_1 et L_2 sont <u>linéairement indépendantes.</u>

Nous nous proposons de trouver une série de fonctions orthogonales propre à représenter la solution du problème $(IV_1 + IV_2)$.

Les deux premières lignes de la matrice M sont formées des coefficients des L_i ; les éléments des deux dernières peuvent être choisis arbitrairement à condition, toutefois, que la matrice soit régulière.

En désignant comme plus haut par Δ le déterminant de M et par $M_{k\ell}$ le mineur de l'élément $m_{k\ell}$, nous avons

---

(1) Voir note (1), p. 19.

$$\Delta \cdot N = \begin{pmatrix} -p(a)M_{12} & p(a)M_{11} & p(b)M_{14} & -p(b)M_{13} \\ -p(a)M_{22} & p(a)M_{21} & p(b)M_{24} & -p(b)M_{23} \\ -p(a)M_{32} & p(a)M_{31} & p(b)M_{34} & -p(b)M_{33} \\ -p(a)M_{42} & p(a)M_{41} & p(b)M_{44} & -p(b)M_{43} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\Delta \mathcal{V}_k(v) = - M_{k2}p(a)v(a) + M_{k1}p(a)v'(a) + M_{k4}p(b)v(b) - M_{k3}p(b)v'(b)$$
$$(k = 1, \ldots, 4).$$

Le problème associé est :

(IV_1^a) $$Lv + \lambda v = 0 \quad ,$$

(IV_2^a) $$\mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = 3, 4).$$

Ce problème est <u>self-adjoint</u> si

(IV_3) $$\underline{p(b)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = p(a)\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix}}$$

et réciproquement.

En effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème

(IV_1^h) $$Ly + ry = 0 \quad ,$$

(IV_2^h) $$L_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

soit adjoint à lui-même (1) et les problèmes $(IV_1^a + IV_2^a)$ et $(IV_1^h + IV_2^h)$ sont simultanément self-adjoints ou non.

Nous supposerons toujours dans ce chapitre, que les coefficients des L_i satisfont à la relation (IV_3) qui s'écrit aussi

$$\underline{(\vec{Z}_1, (A^{-1})'\vec{Z}_2) = 0} \ ,$$

$\vec{Z}_1$ et $\vec{Z}_2$ étant respectivement les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Le problème associé étant alors self-adjoint, on a les mêmes conséquences qu'au paragraphe 2 du chapitre précédent; en particulier, si l'on remplace l'hypothèse $\alpha_2\beta_4 \neq 0$ par la condition

---

(1) [9] , p. 217.

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_4 \end{vmatrix} \neq 0 \;,$$

le théorème de Haar subsiste (1). Si cette condition n'est pas remplie, il existe néanmoins des théorèmes d'équiconvergence (1).

Il faut noter toutefois une différence entre les valeurs propres du problème $(III_1^a + III_2^a)$ et celles du problème $(IV_1^a + IV_2^a)$. Les premières sont simples, c'est-à-dire qu'à chacune d'elles correspond, à un facteur constant près, une seule fonction propre tandis que les secondes peuvent être doubles (toutes ou certaines d'entre elles): toutes les solutions s'expriment linéairement en fonction de deux d'entre elles qu'il est loisible de supposer orthogonales.

2.- Problème associé.- Posons

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix}, \; (i < j).$$

Les conditions aux limites sont linéairement indépendantes ; il en résulte que l'un au moins des 6 déterminants Δ_{ij} est différent de zéro.

Nous pourrions prendre pour M la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ \beta_2 & -\beta_1 & -\beta_4 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est égal à $2\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}^2 + \Delta_{14}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2$ ou, en vertu de la relation (IV_3), à $2\,\frac{p(b)}{p(a)}\,\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{14}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2$, quantité non nulle. Nous préférons, afin d'obtenir des expressions moins lourdes pour les $\mathcal{V}_k(v)$, distinguer deux cas.

1er cas : $\Delta_{12} = \Delta_{34} = 0$.

(1) [19] , p. 272 et 279.

Les conditions (IV_h^2), donc aussi les conditions (IV_a^2), sont équivalentes à des conditions de 3^e espèce; on est ramené au problème considéré dans le chapitre précédent.

<u>2^e cas</u> : $\Delta_{12} \neq 0$ ($\Delta_{34} \neq 0$).

Faisons

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\Delta = \Delta_{12} \neq 0).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &M_{11} = \beta_2 , && M_{12} = -\beta_1 , && M_{13} = 0 , && M_{14} = 0 , \\ &M_{21} = -\alpha_2 , && M_{22} = \alpha_1 , && M_{23} = 0 , && M_{24} = 0 , \\ &M_{31} = \Delta_{23} , && M_{32} = -\Delta_{13} , && M_{33} = \Delta_{12} , && M_{34} = 0 , \\ &M_{41} = \Delta_{24} , && M_{42} = -\Delta_{14} , && M_{43} = 0 , && M_{44} = \Delta_{12} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\Delta_{12}.N = \begin{pmatrix} p(a)\beta_1 & p(a)\beta_2 & 0 & 0 \\ -p(a)\alpha_1 & -p(a)\alpha_2 & 0 & 0 \\ p(a)\Delta_{13} & p(a)\Delta_{23} & 0 & -p(b)\Delta_{12} \\ p(a)\Delta_{14} & p(a)\Delta_{24} & p(b)\Delta_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le problème associé est donc

$$(IV_4) \qquad Lv + \lambda v = 0 ,$$

$$(IV_5) \quad \begin{cases} \Delta_{13}p(a)v(a) + \Delta_{23}p(a)v'(a) - \Delta_{12}p(b)v'(b) = 0 , \\ \Delta_{14}p(a)v(a) + \Delta_{24}p(a)v'(a) + \Delta_{12}p(b)v(b) = 0 . \end{cases}$$

<u>Remarque.</u>- On obtient directement des expressions plus simples pour les fonctions propres et pour les coefficients a_k à partir du problème $(IV_4 + IV_5)$ qu'avec le problème équivalent :

$$\begin{aligned} Lv + \lambda v &= 0 , \\ L_i(v) &= 0 \qquad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

3.- Signe des valeurs propres.-

Théorème : Si

$$(IV_6) \qquad \Delta_{13}\Delta_{14} > 0,\ \Delta_{13}\Delta_{24} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad q(x) \leqslant 0$$
$$\text{ou si} \quad \Delta_{13} = 0,\ \Delta_{23}\Delta_{24} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad q(x) \leqslant 0 \ ,$$

le problème $(IV_4 + IV_5)$ n'admet pas de valeurs propres négatives. (Rappel : $p(b)\Delta_{12} = p(a)\Delta_{34}$; $\Delta_{12} \neq 0$).

En effet, λ_k étant une valeur propre et v_k la fonction propre correspondante, on a

$$\int_a^b v_k(Lv_k + \lambda_k v_k)dx = 0$$

ou

$$(\gamma) \qquad \Big[p v_k v_k' \Big]_a^b - \int_a^b (p v_k'^2 - q v_k^2)dx = -\lambda_k \int_a^b v_k^2 dx \ .$$

A l'aide des conditions aux limites (IV_5) , de la relation (IV_3) et de l'identité

$$(\delta) \qquad \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} \equiv \Delta_{13}\Delta_{24} \ ,$$

on met le 1[er] terme du premier membre de (γ) sous la forme

$$\frac{-p(a)}{\Delta_{12}\,\Delta_{34}} \Big[\Delta_{13}\,\Delta_{14} v_k^2 + 2\Delta_{13}\,\Delta_{24}\, v_k v_k' + \Delta_{23}\,\Delta_{24} v_k'^2 \Big]_{x=a} .$$

Si $\Delta_{13}\Delta_{14} > 0$ et $(\Delta_{13}\Delta_{24})^2 \leqslant \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{23}\Delta_{24}$

ou, en vertu de l'identité qu'on vient d'indiquer ,
si $\Delta_{13}\Delta_{14} > 0$ et $\Delta_{13}\Delta_{24} \leqslant 0$, la forme entre crochets n'est pas négative ; le 1[er] terme de (γ) est donc négatif ou nul ainsi que le premier membre, puisqu'on a supposé $q(x) \leqslant 0$. Il en résulte que λ_k n'est pas négatif.

Si $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{23}\Delta_{24} \geqslant 0$ et $q(x) \leqslant 0$,

on voit immédiatement que le premier membre de (γ) est négatif ou nul; λ_k est positif ou nul. Le théorème est démontré.

Remarque : I) Si $\lambda = 0$ est valeur propre, la fonction propre correspondante est constante (sinon v'_0 ne serait pas nul et le premier membre de (γ) serait négatif).

II) Si ni l'une ni l'autre des conditions (IV_6) n'est remplie, il peut y avoir des valeurs propres négatives; ainsi, le problème

$$v'' + \lambda v = 0 \quad ,$$
$$(e+1)v(o) + (e-1)v'(1) = 0 \; ,$$
$$(1-e)v'(o) + (e+1)v(1) = 0$$

admet la valeur propre -1 ; la fonction propre correspondante est $v = (e + e^{-1})e^{x} - (1 + e^{2})e^{-x}$.

4.- Calcul des "coefficients de Fourier" de la solution du problème $(IV_1 + IV_2 \; ; \; \Delta_{12} \neq 0, \; p(b)\Delta_{12} = p(a)\Delta_{34})$.-

Les considérations du début du paragraphe 4 du chapitre précédent sont encore valables ici à condition de remplacer le théorème de Haar et les théorèmes analogues par les théorèmes plus généraux démontrés par Zaanen.

On a (p.27)

$$(\lambda_k - r)a_k N_k = \alpha\, \mathcal{V}_1(v_k) + \beta\, \mathcal{V}_2(v_k) - A_k N_k$$

et (p.44, matrice N)

$$\Delta_{12}\, \mathcal{V}_1(v) = \beta_1 p(a)v(a) + \beta_2 p(a)v'(a)$$
$$\Delta_{12}\, \mathcal{V}_2(v) = -\alpha_1 p(a)v(a) - \alpha_2 p(a)v'(a) \quad ;$$

donc

$$(IV_7) \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left\{\frac{p(a)}{\Delta_{12}N_k}\left[(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)v_k(a) + (\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2)v'_k(a)\right] - A_k\right\}} .$$

5.- Equation à coefficients constants.- Considérons l'équation

$$(IV'_1) \qquad y'' + ry = f(x)$$

et les conditions aux limites

$$(IV'_2) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 y(o) + \alpha_2 y'(o) + \alpha_3 y(\pi) + \alpha_4 y'(\pi) &= \alpha \\ \beta_1 y(o) + \beta_2 y'(o) + \beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) &= \beta \end{aligned} \quad (\Delta_{12} = \Delta_{34} \neq 0).$$

Nous supposerons que l'une des deux hypothèses (IV_6) est vérifiée; il n'y a donc pas de valeurs propres négatives.

Le problème associé est (voir § 2) :

$$(IV_4') \qquad v'' + \lambda v = 0 \quad ,$$

$$(IV_5') \qquad \begin{aligned} &\Delta_{13}v(o) + \Delta_{23}v'(o) - \Delta_{12}v'(\pi) = 0 \quad , \\ &\Delta_{14}v(o) + \Delta_{24}v'(o) + \Delta_{12}v(\pi) = 0 \quad . \end{aligned}$$

On a pour équation caractéristique (si $\lambda > 0$)

$$D = \begin{vmatrix} \Delta_{13} + \Delta_{12}\,\omega \sin \omega\pi & \Delta_{23}\omega - \Delta_{12}\omega \cos \omega\pi \\ \Delta_{14} + \Delta_{12} \cdot \cos \omega\pi & \Delta_{24}\omega + \Delta_{12} \cdot \sin \omega\pi \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Si, pour $\lambda = \lambda_k = \omega_k^2$, le rang de la matrice dont les éléments sont ceux du déterminant D est égal à 1, la valeur propre λ_k est simple; si le rang est zéro, λ_k est double. Nous distinguerons donc deux cas :

a) les valeurs propres sont simples.

On prendra

$$\underline{v_k = (\Delta_{14} + \Delta_{12} \cos \omega_k\pi) \sin \omega_k x - (\Delta_{24}\,\omega_k + \Delta_{12} \sin \omega_k\pi) \cos \omega_k x} \ .$$

En substituant dans la formule (IV_7), on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} (IV_7') \quad a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\Big\{ \frac{1}{\Delta_{12}N_k}\Big[&\omega_k(\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2)(\Delta_{14} + \Delta_{12} \cos \omega_k \pi) \\ &-(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\Delta_{24}\omega_k + \Delta_{12} \sin \omega_k\pi)\Big] - A_k \Big\} \ ; \end{aligned}}$$

b) il y a des valeurs propres doubles.

Si $\lambda = \lambda_k = \omega_k^2$ est une valeur propre double, la formule (IV_7') n'est plus valable puisque les expressions $\Delta_{14} + \Delta_{12} \cos \omega_k\pi$ et $\Delta_{24}\,\omega_k + \Delta_{12} \sin \omega_k\pi$ sont nulles. On calculera les coefficients des deux fonctions propres orthogonales correspondant à $\lambda = \lambda_k$ par la formule (IV_7). Des exemples sont donnés plus loin.

<u>Remarque.</u>- Si $\lambda = 0$ est valeur propre, on pourra prendre, eu égard à la remarque I) du § 3 de ce chapitre, $v_o = 1$ et l'on aura

$$\boxed{a_o = \frac{1}{r}\left\{\frac{\beta\alpha_1 - \alpha\beta_1}{\Delta_{12}\pi} + A_o\right\} .}$$

Nous terminerons ce paragraphe par deux propositions sur l'ordre de multiplicité des valeurs propres.

> I) Si $\Delta_{24} \neq 0$, les valeurs propres du problème $(IV'_4 + IV'_5)$ sont simples à l'exception peut-être de l'une d'elles.

En effet, pour qu'une valeur propre non nulle (positive ou négative) soit double, il faut et il suffit que, pour cette valeur, le rang de la matrice dont les éléments sont ceux de D soit 0 .

Si $\lambda = \omega^2$ est une valeur propre double, on a donc

$$\Delta_{14} = - \Delta_{12} \cos\omega\pi \ , \qquad \Delta_{24}\omega = - \Delta_{12} \sin\omega\pi$$

et, par suite,

$$(\varepsilon) \qquad \Delta_{14}^2 + \Delta_{24}^2\omega^2 = \Delta_{12}^2 \ ;$$

il ne peut donc y avoir plus d'une valeur propre (non nulle) double.

Si $\lambda = 0$, l'intégrale générale de l'équation (IV'_4) est $v = Ax + B$. Introduisons cette solution dans les conditions (IV'_5) ; il vient :

$$(\Delta_{23} - \Delta_{12}).A + \Delta_{13}.B = 0 \ ,$$
$$(\Delta_{24} + \Delta_{12}\pi).A + (\Delta_{14} + \Delta_{12}).B = 0 \ .$$

Pour que $\lambda = 0$ soit une valeur propre double, il faut et il suffit que le rang de la matrice

$$(\zeta) \qquad \begin{pmatrix} \Delta_{23} - \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{24} + \Delta_{12}\pi & \Delta_{14} + \Delta_{12} \end{pmatrix}$$

soit égal à 0. Il faut donc que $\Delta_{14} = - \Delta_{12}$. Si ceci a lieu, la solution de l'équation (ε) est $\lambda = \omega^2 = 0$. Il ne peut donc y avoir plus d'une valeur propre double. c.q.f.d.

Qu'il existe, dans certains cas, une valeur propre double, c'est ce que montre l'exemple suivant :

$$v'' + \lambda v = 0$$
$$v(o) + 2v'(o) - v(\pi) + 2v'(\pi) = 0$$
$$v(o) + 2v'(\pi) = 0;$$

La valeur propre double est $\lambda = \omega^2 = \frac{1}{4}$; les fonctions propres $\sin \frac{1}{2} x$, $\cos \frac{1}{2} x$ ne sont pas orthogonales entre elles mais les solutions

$$\sin \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} x, \quad \sin \frac{1}{2} x - \cos \frac{1}{2} x \quad \text{le sont.}$$

Dans l'exemple

$$v'' + \lambda v = 0 \ ,$$

$$v(o) \qquad - v(\pi) + \pi v'(\pi) = 0 \ ,$$

$$v'(o) \qquad - v'(\pi) = 0 \ ,$$

$\lambda = 0$ est valeur propre double ; les fonctions propres orthogonales correspondantes sont 1 et $x - \frac{\pi}{2}$.

II) Si $\Delta_{24} = 0$, il faut et il suffit pour que le problème $(IV_4' + IV_5')$ admette des valeurs propres doubles que $\Delta_{13} = 0$ et que $\Delta_{14} = \pm \Delta_{12}$.

Les valeurs propres sont $\lambda_k = (2k-1)^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ou $\lambda_k = (2k)^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ selon que Δ_{12} et Δ_{14} sont de même signe ou non.

Toutes les valeurs propres sont <u>doubles</u>, excepté, dans le second cas, $\lambda_o = 0$.

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, si $\lambda_k = \omega_k^2 \neq 0$ est une valeur propre double, le rang, pour $\lambda = \lambda_k$, de la matrice dont les éléments sont ceux de D est 0 ; donc

$\Delta_{24}\omega_k + \Delta_{12}\sin \omega_k\pi = 0$, $\Delta_{13} + \Delta_{12}\omega_k \sin \omega_k\pi = 0$ et $\Delta_{14} + \Delta_{12}\cos \omega_k \pi = 0$, ce qui implique, Δ_{12} étant différent de zéro et Δ_{24} nul par hypothèse, $\sin \omega_k \pi = 0$ et, par suite, $\cos \omega_k \pi = \mp 1$, $\Delta_{13} = 0$ et $\Delta_{14} = \pm \Delta_{12}$.

La condition est <u>suffisante</u> car, si $\Delta_{24} = 0$, $\Delta_{13} = 0$ et $\Delta_{14} = \pm \Delta_{12}$, il résulte de l'identité (δ) que $\Delta_{23} = \mp \Delta_{12}$; l'équation caractéristique $D = 0$ fournit alors les valeurs propres

$\lambda_k = (2k-1)^2$ ou $\lambda_k = (2k)^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ selon que Δ_{12} et Δ_{14} sont de même signe ou non. Toutes ces valeurs propres sont doubles.

Si $\Delta_{24} = 0$, $\lambda = 0$ ne peut être valeur propre double puisque l'élément $\Delta_{24} + \Delta_{12}\pi$ de la matrice (ζ) n'est pas nul.

Le tableau suivant donne l'expression des coefficients de la série dans quelques cas particuliere.

Equation $y'' + ry = f(x)$

Conditions	$\lambda_k = \omega_k^2$	v_k	a_k
$y(o) - y(\pi) = \alpha$ $y'(o) - y'(\pi) = \beta$	$(2k)^2$ $(k = 0, 1, \dots)$	$\begin{cases} \sin 2kx \\ \cos 2kx \end{cases}$	$s_k = \frac{1}{4k^2 - r}\left[\frac{4k\alpha}{\pi} - S_k\right]$ $c_k = \frac{-1}{4k^2 - r}\left[\frac{2\beta}{\pi} + C_k\right] \quad (k \neq 0)$ $c_o = \frac{1}{r}\left[\frac{\beta}{\pi} + C_o\right]$
$y(o) + y(\pi) = \alpha$ $y'(o) + y'(\pi) = \beta$	$(2k-1)^2$	$\begin{cases} \sin(2k-1)x \\ \cos(2k-1)x \end{cases}$	$s_k = \frac{1}{(2k-1)^2 - r}\left[\frac{2(2k-1)\alpha}{\pi} - S_k\right]$ $c_k = \frac{-1}{(2k-1)^2 - r}\left[\frac{2\beta}{\pi} + C_k\right]$
$\alpha_1 y(o) - y(\pi) = \alpha$ $y'(o) - \alpha_1 y'(\pi) = \beta$ $(\alpha_1 \neq 0; \pm 1)$	$\cos \omega\pi = \frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + 1}$ $\omega_{2k} = \omega_o + 2k$ $(k = 0, 1, \dots)$ $\omega_{2k-1} = -\omega_o + 2k$ $(k = 1, 2, \dots)$ $0 < \omega_o < 1$	$v_{2k} = \cos\left[(2k + \omega_o)x + \varphi\right]$ (1) $v_{2k-1} = \cos\left[(2k - \omega_o)x - \varphi\right]$ $\operatorname{tg}\varphi = \alpha_1$, si $\lvert\alpha_1\rvert < 1$ $\operatorname{tg}\varphi = -\alpha_1$, si $\lvert\alpha_1\rvert > 1$ $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	$a_{2k} = \frac{-1}{(2k + \omega_o)^2 - r}\left\{\frac{2}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}(2k + \omega_o)\sin\varphi + \beta\cos\varphi\right] + A_{2k}\right\}$ $a_{2k-1} = \frac{1}{(2k - \omega_o)^2 - r}\left\{\frac{2}{\pi}\left[\frac{\alpha}{\alpha_1}(2k - \omega_o)\sin\varphi - \beta\cos\varphi\right] - A_{2k-1}\right\}$

(1) [11], p. 399.

V.- PROBLEMES du 4e ORDRE

1.- Problème général.- Dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre, l'opérateur différentiel L sera défini par l'égalité

$$Ly = (p_o(x)y'')'' + (p_1(x)y')' + p_2(x)y \quad ;$$

les fonctions p_o , p_1 et p_2 sont continues sur (a,b) par hypothèse; on suppose de plus que les dérivées p_o' , p_o'' et p_1' existent et sont continues sur ce segment et que p_o ne s'y annule pas.

On a $$L^*y = Ly$$
et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p_1(a) & p_o'(a) & p_o(a) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1(a) & 0 & -p_o(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_o'(a) & p_o(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_o(a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_1(b) & -p_o'(b) & -p_o(b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(b) & 0 & p_o(b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_o'(b) & -p_o(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_o(b) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit $f(x)$ une fonction généralement continue sur (a,b) ; nous considérerons le problème constitué par l'équation

(V_1) $$Ly + ry = f(x)$$

et les conditions aux limites linéairement indépendantes

$$L_1(y) = \alpha_1 y(a) + \dots + \alpha_4 y'''(a) + \alpha_5 y(b) + \dots + \alpha_8 y'''(b) = \alpha ,$$

(V_2) .....

$$L_4(y) = \delta_1 y(a) + \dots + \delta_4 y'''(a) + \delta_5 y(b) + \dots + \delta_8 y'''(b) = \delta .$$

Formons, comme on l'a expliqué au chapitre II, une matrice M et calculons N ; nous obtenons, en désignant par Δ le déterminant de M et par $M_{k\ell}$ le mineur relatif à l'élément $m_{k\ell}$,

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{V}_k(v) = &-\left[M_{k2}p_1(a) + M_{k3}p_o'(a) + M_{k4}p_o(a)\right] v(a) + \left[M_{k1}p_1(a)\right.\\ &\left.+ M_{k3}p_o(a)\right] v'(a) + \left[M_{k1}p_o'(a) - M_{k2}p_o(a)\right] v''(a) + M_{k1}p_o(a)v'''(a)\\ &+\left[M_{k6}p_1(b) + M_{k7}p_o'(b) + M_{k8}p_o(b)\right] v(b) - \left[M_{k5}p_1(b)\right.\\ &\left.+ M_{k7}p_o(b)\right]v'(b) - \left[M_{k5}p_o'(b) - M_{k6}p_o(b)\right] v''(b) - M_{k5}p_o(b)v'''(b) .\end{aligned}$$

Le problème associé est le suivant :

(V_1^a) $$Lv - \lambda v = 0 \quad ,$$

(V_2^a) $$\mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = 5, \dots, 8) .$$

2.- Problème self-adjoint.- Nous allons donner une condition nécessaire pour que le problème $(V_1^a + V_2^a)$ soit self-adjoint.

Théorème : Pour que le problème homogène du 4^e ordre $Lv - \lambda v = 0$, $\mathcal{V}_j(v) = 0$ $(j = 5, \dots, 8)$ soit adjoint à lui-même, il faut que

$$(\overrightarrow{Z_p} , (A^{-1})'\overrightarrow{Z_q}) = 0 \text{ (1)} \qquad (p = 1, \dots, 4 ;\ q = 1, \dots, 4) ,$$

$\overrightarrow{Z_i}$ étant le vecteur dont les composantes sont les coefficients de L_i $(i = 1, \dots, 4)$.

En effet, soient Z_k la matrice à une colonne dont les éléments sont ceux de la $k^{\text{ième}}$ ligne de M , Z_k' la matrice transposée de Z_k , X_ℓ et T_ℓ des matrices à une colonne telles que

(1) Cette condition se généralise immédiatement aux problèmes d'ordre 2n.

$$Z'_k X_\ell = \delta_{k\ell} \quad , \qquad X'_\ell A = T'_\ell \qquad (\ell = 1, 2, \ldots, 8)$$

($\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker).

Les matrices M, $(M^{-1})'$ et N s'écrivent alors

$$M = \begin{pmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \\ \vdots \\ Z'_8 \end{pmatrix} ; \quad (M^{-1})' = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_8 \end{pmatrix} , \quad N = (M^{-1})'A = \begin{pmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ \vdots \\ T'_8 \end{pmatrix} .$$

Si le problème est self-adjoint, les Z'_q sont des combinaisons linéaires des T'_j $(j = 5, \ldots, 8)$:

$$Z'_q = \sum_{j=5}^{8} c_j^{(q)} T'_j$$

ou

$$Z'_q = \sum c_j^{(q)} X'_j A .$$

Multiplions à droite par la matrice A^{-1} ; on a

$$Z'_q A^{-1} = \sum c_j^{(q)} X'_j$$

d'où, en prenant le conjugué de chaque membre,

$$(A^{-1})' Z_q = \sum c_j^{(q)} X_j$$

et, en multipliant à gauche par Z'_p ,

$$Z'_p (A^{-1})' Z_q = \sum_{j=5}^{8} c_j^{(q)} Z'_p X_j .$$

Les produits scalaires du second membre sont tous nuls; donc

$$Z'_p (A^{-1})' Z_q = 0.$$

Cette condition nécessaire est aussi suffisante dans le cas particulier que nous allons envisager.

3.- Problème particulier.- Nous nous bornerons désormais à l'étude du problème

$$Ly + ry = y'' + q(x)y + ry = f(x) \quad ;$$

$$\begin{aligned}
L_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \ldots + \alpha_4 y'''(a) && = \alpha \,, \\
L_2(y) &= \beta_1 y(a) + \ldots + \beta_4 y'''(a) && = \beta \,, \\
L_3(y) &= && \gamma_5 y(b) + \ldots + \gamma_8 y'''(b) = \gamma \,, \\
L_4(y) &= && \delta_5 y(b) + \ldots + \delta_8 y'''(b) = \delta \,.
\end{aligned}$$

Nous supposerons que les coefficients satisfont aux relations:

$$\boxed{\Delta_{14} = \Delta_{23} \,, \quad \Delta'_{58} = \Delta'_{67} \,.}$$

où on a posé

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \;;\quad \Delta'_{ij} = \begin{vmatrix} \gamma_i & \gamma_j \\ \delta_i & \delta_j \end{vmatrix} \,.$$

Ce sont là des conditions nécessaires (v. le théorème du paragraphe précédent) pour que le problème associé soit <u>self-adjoint</u>; ces conditions sont aussi suffisantes (1).

Le problème associé étant adjoint à lui-même, on peut le remplacer par

$$Lv - \lambda v = 0 \,,$$

$$L_i(v) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

et on peut faire des remarques analogues à celles du § 2 du chapitre III et de la page 36; il existe notamment encore un théorème d'équiconvergence (2).

On prendra, pour matrice M ,

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 & \gamma_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 \\
\alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta_4 & -\beta_3 & \beta_2 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_8 & -\gamma_7 & \gamma_6 & -\gamma_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_8 & -\delta_7 & \delta_6 & -\delta_5
\end{pmatrix}.$$

La valeur du déterminant de M s'obtient aisément par la

(1) [11], p. 284.
(2) [16], p. 376 et 377 , [8], p. 456 .

règle de Laplace ; elle est égale à ss', si l'on tient compte des relations entre les coefficients des L_i et que l'on pose $s = \Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{14}^2 + \Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 + \Delta_{34}^2$ et $s' = \Delta'^2_{56} + \Delta'^2_{57} + \Delta'^2_{58} + \Delta'^2_{67} + \Delta'^2_{68} + \Delta'^2_{78}$. La matrice M est régulière puisque s et s' sont différents de zéro, les conditions aux limites étant linéairement indépendantes.

Calculons les mineurs puis formons la matrice N et les expressions des $\mathcal{V}_i(v)$ $(i = 1, \ldots, 4)$; il vient

$$\begin{aligned} s\,\mathcal{V}_1(v) = {} & \left[\beta_1\Delta_{23} + \beta_2\Delta_{24} + \beta_3\Delta_{34}\right]v(a) - \left[\beta_1\Delta_{13} + \beta_2\Delta_{14} - \beta_4\Delta_{34}\right]v'(a) \\ & + \left[\beta_1\Delta_{12} - \beta_3\Delta_{14} - \beta_4\Delta_{24}\right]v''(a) + \left[\beta_2\Delta_{12} + \beta_3\Delta_{13} + \beta_4\Delta_{23}\right]v'''(a) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s\,\mathcal{V}_2(v) = {} & -\left[\alpha_1\Delta_{23} + \alpha_2\Delta_{24} + \alpha_3\Delta_{34}\right]v(a) + \left[\alpha_1\Delta_{13} + \alpha_2\Delta_{14} - \alpha_4\Delta_{34}\right]v'(a) \\ & - \left[\alpha_1\Delta_{12} - \alpha_3\Delta_{14} - \alpha_4\Delta_{24}\right]v''(a) - \left[\alpha_2\Delta_{12} + \alpha_3\Delta_{13} + \alpha_4\Delta_{23}\right]v'''(a) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'\,\mathcal{V}_3(v) = {} & -\left[\delta_5\Delta'_{67} + \delta_6\Delta'_{68} + \delta_7\Delta'_{78}\right]v(b) + \left[\delta_5\Delta'_{57} + \delta_6\Delta'_{58} - \delta_8\Delta'_{78}\right]v'(b) \\ & - \left[\delta_5\Delta'_{56} - \delta_7\Delta'_{58} - \delta_8\Delta'_{68}\right]v''(b) - \left[\delta_6\Delta'_{56} + \delta_7\Delta'_{57} + \delta_8\Delta'_{67}\right]v'''(b) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'\,\mathcal{V}_4(v) = {} & \left[\gamma_5\Delta'_{67} + \gamma_6\Delta'_{68} + \gamma_7\Delta'_{78}\right]v(b) - \left[\gamma_5\Delta'_{57} + \gamma_6\Delta'_{58} - \gamma_8\Delta'_{78}\right]v'(b) \\ & + \left[\gamma_5\Delta'_{56} - \gamma_7\Delta'_{58} - \gamma_8\Delta'_{68}\right]v''(b) + \left[\gamma_6\Delta'_{56} + \gamma_7\Delta'_{57} + \gamma_8\Delta'_{67}\right]v'''(b) . \end{aligned}$$

Nous obtenons ensuite, par la relation (II_3) et le théorème de la page 14,

$$(\lambda_k + r)a_k N_k = A_k N_k - \left[\alpha\,\mathcal{V}_1(v_k) + \beta\,\mathcal{V}_2(v_k) + \gamma\,\mathcal{V}_3(v_k) + \delta\,\mathcal{V}_4(v_k)\right] .$$

Les coefficients du développement de la solution du problème aux limites sont, par suite,

$$\boxed{a_k = \frac{-1}{\lambda_k + r}\left\{\frac{1}{N_k}\left[\alpha\,\mathcal{V}_1(v_k) + \beta\,\mathcal{V}_2(v_k) + \gamma\,\mathcal{V}_3(v_k) + \delta\,\mathcal{V}_4(v_k)\right] + A_k\right\}}$$

où les $\mathcal{V}_i(v)$ sont donnés par les formules écrites plus haut.

4.- Exemples.- Les exemples choisis correspondent à la liste des problèmes homogènes self-adjoints établie par Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 2[e] éd., p. 526.

Equation :

Conditions	$\lambda_k = \omega_k^4$	v_k
$y(o)=\alpha;\ y'(o)=\beta$ $y(\pi)=\gamma;\ y'(\pi)=\delta$	$\cos\omega\pi\,\mathrm{ch}\,\omega\pi = 1$ $(\omega \neq 0)$	$(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi)(\mathrm{sh}\,\omega_k x - \sin\omega_k x)$ $-(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi)(\mathrm{ch}\,\omega_k x - \cos\omega_k x)$
$y(o)=\alpha;\ y'(o)=\beta$ $y(\pi)=\gamma;\ y''(\pi)=\delta$	$\mathrm{tg}\,\omega\pi = \mathrm{th}\,\omega\pi$ $(\omega \neq 0)$	$(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi)(\mathrm{sh}\,\omega_k x - \sin\omega_k x)$ $-(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi)(\mathrm{ch}\,\omega_k x - \cos\omega_k x)$
$y(o)=\alpha;\ y'(o)=\beta$ $y'(\pi)=\gamma;\ y'''(\pi)=\delta$	$\mathrm{tg}\,\omega\pi = -\,\mathrm{th}\,\omega\pi$ $(\omega \neq 0)$	$\cos\omega_k\pi\,(\mathrm{ch}\,\omega_k x - \cos\omega_k x)$ $+\sin\omega_k\pi\,(\mathrm{sh}\,\omega_k x - \sin\omega_k x)$
$y(o)=\alpha;\ y'(o)=\beta$ $y''(\pi)=\gamma;\ y'''(\pi)=\delta$	$\cos\omega\pi\,\mathrm{ch}\,\omega\pi = -1$	$(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \cos\omega_k\pi)(\mathrm{sh}\,\omega_k x - \sin\omega_k x)$ $-(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \sin\omega_k\pi)(\mathrm{ch}\,\omega_k x - \cos\omega_k x)$
$y(o)=\alpha;\ y''(o)=\beta$ $y(\pi)=\gamma;\ y''(\pi)=\delta$	$\lambda_k=\omega_k^4 = k^4$ $(k = 1,2,\ldots,)$	$\sin kx$
$y(o)=\alpha;\ y''(o)=\beta$ $y'(\pi)=\gamma;\ y'''(\pi)=\delta$	$\lambda_k=\left(\frac{2k-1}{2}\right)^4$ $(k,= 1,2,\ldots,)$	$\sin \frac{2k-1}{2}\, x$

$y^{IV} + ry = f(x)$

a_k
$\frac{-1}{\omega_k^4+r}\left\{\frac{2\omega_k^2}{N_k}\left[\alpha\omega_k(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi) + \beta(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi) - \gamma\omega_k \sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \delta(\sin\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi)\right] - A_k\right\}$
$\frac{-1}{\omega_k^4+r}\left\{\frac{2\omega_k}{N_k}\left[\alpha\omega_k^2(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi) + \beta\omega_k(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi) - \gamma\omega_k^2 \sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \delta(1 - \cos\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi)\right] - A_k\right\}$
$\frac{-1}{\omega_k^4+r}\left\{\frac{1}{N_k}\left[2\alpha\omega_k^3\sin\omega_k\pi - 2\beta\omega_k^2\cos\omega_k\pi + \gamma\omega_k^2(1 + \cos\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi) + \delta(\cos\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - 1)\right] - A_k\right\}$
$\frac{-1}{\omega_k^4+r}\left\{\frac{2}{N_k}\left[\alpha\omega_k^2(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \cos\omega_k\pi) + \beta\omega_k^2(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \sin\omega_k\pi) + \gamma\omega_k \sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \delta(\cos\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi)\right] - A_k\right\}$
$\frac{1}{k^4+r}\left\{\frac{2k}{\pi}\left[k^2\left(\alpha - (-1)^k\gamma\right) - \left(\beta - (-1)^k\delta\right)\right] + A_k\right\}$
$\frac{1}{(2k-1)^4+16r}\left\{\frac{4}{\pi}\left[(2k-1)^3\alpha - 4(2k-1)\beta - 2(2k-1)^2(-1)^k\gamma + 8(-1)^k\delta\right] + 16A_k\right\}$

Equation :

Conditions	$\lambda_k = \omega_k^4$	v_k
$y(o) = \alpha$; $y''(o) = \beta$ $y''(\pi) = \gamma$; $y'''(\pi) = \delta$	$\operatorname{tg}\omega\pi = \operatorname{th}\omega\pi$	$v_o = x$ $\sin\omega_k\pi\,\operatorname{sh}\omega_k x + \operatorname{sh}\omega_k\pi\sin\omega_k x$
$y'(o) = \alpha$; $y'''(o) = \beta$ $y'(\pi) = \gamma$; $y'''(\pi) = \delta$	$\lambda_k = k^4$ $(k = 0,1,\ldots)$	$\cos kx$
$y'(o) = \alpha$; $y'''(o) = \beta$ $y''(\pi) = \gamma$; $y'''(\pi) = \delta$	$\operatorname{tg}\omega\pi = -\operatorname{th}\omega\pi$	$v_o = 1$ $\cos\omega_k\pi\,\operatorname{ch}\omega_k x + \operatorname{ch}\omega_k\pi\cos\omega_k x$ $(\omega_k \neq 0)$
$y''(o) = \alpha$; $y'''(o) = \beta$ $y''(\pi) = \gamma$; $y'''(\pi) = \delta$	$\cos\omega\pi\,\operatorname{ch}\omega\pi = 1$	$v_{o1} = 1$; $v_{o2} = x - \frac{\pi}{2}$ $(\operatorname{sh}\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi)(\operatorname{ch}\omega_k x + \cos\omega_k x)$ $-(\operatorname{ch}\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi)(\operatorname{sh}\omega_k x + \sin\omega_k x)$

$y'' + ry = f(x)$

a_k
$a_o = \frac{-1}{r}\left\{\frac{3}{\pi^3}(\beta - \gamma + \pi\delta) - A_o\right\}$; $\frac{1}{\omega_k^4 + r}\left\{\frac{1}{N_k}\left[\alpha\omega_k^3(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi) - \beta\omega_k(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \sin\omega_k\pi) + \gamma\omega_k(\sin\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \cos\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi) - 2\delta\sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi\right] + A_k\right\}$ $N_k = \mathrm{sh}^2\omega_k\pi\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\frac{\sin 2\omega_k\pi}{\omega_k}\right] - \sin\omega_k^2\pi\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\frac{\mathrm{sh}\,2\omega_k\pi}{\omega_k}\right]$
$\frac{-1}{k^4 + r}\left\{\frac{2}{\pi}\left[k^2\left(\alpha - (-1)^k\gamma\right) - \left(\beta - (-1)^k\delta\right)\right] - A_k\right\}$
$a_o = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\pi}(\beta - \delta) + A_o\right\}$ $\frac{-1}{\omega_k^4 + r}\left\{\frac{1}{N_k}\left[\alpha\omega_k^2(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi) - \beta(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi + \cos\omega_k\pi) + \gamma\omega_k(\sin\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi) + 2\delta\cos\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi\right] - A_k\right\}$ $N_k = \mathrm{ch}^2\omega_k\pi\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\frac{\sin 2\omega_k\pi}{\omega_k}\right] + \cos^2\omega_k\pi\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{sh}\,2\omega_k\pi}{\omega_k}\right]$
$a_{o1} = \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\pi}(\beta - \delta) + A_{o1}\right\}$; $a_{o2} = \frac{1}{r}\left\{\frac{12}{\pi^3}\left[\gamma - \alpha - (\beta + \delta)\frac{\pi}{2}\right] + A_{o2}\right\}$ $\frac{1}{\omega_k^4 + r}\left\{\frac{2}{N_k}\left[\alpha\omega_k(\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi) + \beta(\mathrm{sh}\,\omega_k\pi - \sin\omega_k\pi) - \gamma\omega_k\sin\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi + \delta(\sin\omega_k\pi\,\mathrm{ch}\,\omega_k\pi - \cos\omega_k\pi\,\mathrm{sh}\,\omega_k\pi)\right] + A_k\right\}$

5.- Application à un problème d'élasticité : vibrations transversales d'une verge.- Considérons, dans un plan vertical, une verge AA' de masse spécifique constante ρ . les dimensions de la section droite, d'aire S , sont supposées petites par rapport à la longueur, égale à π . L'extrémité A est appuyée alors que A' effectue un mouvement harmonique simple, vertical, d'amplitude constante C et de pulsation ω ; le centre O' de ce mouvement se trouve dans le plan horizontal passant par A .

Choisissons pour origine des coordonnées le point A ; appelons Ox l'axe AO' et OY l'axe vertical orienté positivement vers le haut . On suppose qu'au temps $t = 0$ la verge est au repos le long de l'axe des x.

L'équation du mouvement est (1) :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = \Phi(x,t) \quad ;$$

E est le module d'Young, I le moment d'inertie de la section droite par rapport à la droite passant par l'intersection de la fibre neutre et de la section, et perpendiculaire au plan de la verge (voir Bruhat, Cours de mécanique physique, p. 630, Masson éd., Paris 1934).

$a^2 = \frac{EI}{\rho S}$,

$\Phi(x,t)$: force extérieure (à un facteur près).

Les conditions aux limites sont :

$$Y(o,t) = 0 \quad , \qquad Y_{xx}(o,t) = 0 \quad ,$$

$$Y(\pi,t) = C \sin\omega t, \quad Y_{xx}(\pi,t) = 0$$

et les conditions initiales :

$$Y(x,o) = 0 \quad , \qquad Y_t(x,o) = 0 \quad .$$

En appliquant la transformation de Laplace, on obtient le problème

$$a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + a^2 y = f(x,s) \quad ,$$

(1) voir [4] , p. 235.

$$y(o,s) = 0 , \quad y''(o,s) = 0 ,$$
$$y(\pi,s) = \frac{C\omega}{s^2+\omega^2}, \quad y''(\pi,s) = 0$$

où l'on a posé $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$ et $f(x,s) = \mathcal{L}\{\Phi(x,t)\}$

($y''(x,s)$ désigne la dérivée seconde par rapport à x).

On a (avant-dernier cas des pages 58 et 59)

$$y \sim \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^4 + (s/a)^2} \left\{ \frac{2k}{\pi}\left[- k^2(-1)^k \frac{C\omega}{s^2+\omega^2}\right] + \frac{A_k(s)}{a^2} \right\} \sin kx$$

$$= \sum \frac{s^2}{(ak^2)^2 + s^2} \left\{ (-1)^{k+1} . \frac{2k^3}{\pi} . \frac{C\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{A_k(s)}{a^2} \right\} \sin kx \quad ;$$

les $A_k(s)$ sont les coefficients de la série de Fourier en sinus de $f(x,s)$.

Or

$$\frac{1}{(ak^2)^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{(ak^2)^2 - \omega^2} \left[\frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{s^2 + (ak^2)^2} \right] ;$$

donc

$$\frac{1}{(ak^2)^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{(ak^2)^2 - \omega^2} \left[\frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin \omega t\} - \frac{1}{ak^2} \mathcal{L}\{\sin ak^2 t\} \right]$$

et

$$\frac{s^2}{(ak^2)^2 + s^2} \cdot \frac{C\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{aC}{k^2\left[(ak^2)^2 - \omega^2\right]} \mathcal{L}\left\{ ak^2 \sin\omega t - \omega \sin ak^2 t \right\} .$$

On obtient finalement

$$\boxed{\begin{aligned} Y(x,t) \sim \sum_1^{\infty} \Bigg\{ & (-1)^{k+1} . \frac{2aC.k}{\pi} . \frac{ak^2 \sin\omega t - \omega \sin(ak^2 t)}{(ak^2)^2 - \omega^2} \\ & + \frac{1}{ak^2} \int_0^t \sin(ak^2\tau) . \mathcal{A}_k(t-\tau) d\tau \Bigg\} \sin kx \end{aligned}}$$

où $\mathcal{A}_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\{A_k(s)\}$.

Comme $f(x,s) \sim \sum A_k(s) \sin kx$ et $f(x,s) = \mathcal{L}\{\Phi(x,t)\}$,

les $\mathcal{A}_k(t)$ sont les coefficients du développement de $\Phi(x,t)$ en série de Fourier en sinus.

Remarques : Nous avons choisi π pour longueur de la verge uniquement pour simplifier l'écriture.

Si on remplace la première des conditions initiales par $Y(x,o) = \varphi(x)$, la résolution du problème ne subit aucune modification essentielle.

VI.- GENERALISATION

Dans les chapitres précédents, nous avons supposé que le problème associé était self-adjoint. S'il ne l'est pas, on peut, dans certains cas et par la méthode dont on s'est servi jusqu'à présent, obtenir le développement en série de fonctions propres de la solution du problème non homogène correspondant.

Soient l'équation

$$(VI_1) \qquad Ly + ry = f(x)$$

et les conditions aux limites

$$(VI_2) \qquad L_i\,(y) = \alpha^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

L et les L_i étant définis de la même façon que dans le premier chapitre.

Le problème associé est

$$(VI_1^a) \qquad L^* v + \lambda v = 0 ,$$

$$(VI_2^a) \qquad \mathcal{V}_j(v) = 0 \qquad (j = n+1, \ldots, 2n).$$

Considérons encore le problème adjoint :

$$(VI_1^b) \qquad Lu + \lambda u = 0 ,$$

$$(VI_2^b) \qquad L_i(u) = 0 .$$

Les problèmes $(VI_1^a + VI_2^a)$ et $(VI_1^b + VI_2^b)$ admettent, on l'a déjà rappelé, les mêmes valeurs propres, chacune d'elles avec le même ordre de multiplicité. Si λ_k et λ_ℓ sont deux valeurs propres distinctes, on voit immédiatement, par la relation de Green, que $(u_k, v_\ell) = 0$.

En effet,

$$(Lu_k + \lambda_k u_k, v_\ell) - (L^* v_\ell + \lambda_\ell v_\ell, u_k)$$
$$= (Lu_k, v_\ell) - (L^* v_\ell, u_k) + (\lambda_k - \lambda_\ell)(u_k, v_\ell) = 0 .$$

Si l'on désigne par $\mathcal{U}_h(u_k)$, $h = 1, 2, \ldots, 2n$, les composantes du vecteur

$$\vec{\mathcal{U}}_k = M\vec{U}_k \quad ,$$

$\vec{U}_k$ étant le vecteur $\left(u_k(a), \ldots, u_k^{(n-1)}(a), u_k(b), \ldots, u_k^{(n-1)}(b)\right)$, on a

$$(Lu_k, v_\ell) - (L^* v_\ell, u_k) = \sum_1^{2n} \mathcal{U}_h(u_k)\mathcal{V}_h(v_\ell) = 0 \quad ;$$

donc

$$(u_k, v_\ell) = 0 .$$

Si λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité m , on peut lui faire correspondre deux suites de fonctions propres, u_1, $u_2, \ldots, u_m$; $v_1, v_2, \ldots, v_m$, telles que les fonctions d'une même suite soient linéairement indépendantes et que $(u_p, v_q) = 0$, pour $p \neq q$ $(p, q = 1, 2, \ldots, m)$.

Supposons que les valeurs propres constituent un ensemble infini dénombrable et que $(u_k, v_k) \neq 0$, quel que soit k ; nous dirons que la série $\sum_1^{\infty} A_k u_k$, où $A_k = \frac{1}{(u_k, v_k)} (f, v_k)$, constitue <u>le développement</u> de la fonction intégrable $f(x)$ selon le système $\{u_k\}$.

En reprenant la relation (II_3) et en tenant compte du théorème de la page 14, on obtient les coefficients du développement de la solution du problème $(VI_1 + VI_2)$ selon le système $\{u_k\}$:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\lambda_k - r}\left\{\frac{1}{N_k'} \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)} \mathcal{V}_i(v_k) - A_k\right\} \quad , \quad N_k' = (u_k, v_k) \quad .}$$

Exemple .- Soit le problème

$$(\mathrm{VI}'_1) \qquad y'' + ry = f(x) \ ;$$

$$(\mathrm{VI}'_2) \qquad \begin{aligned} y(o) + y'(o) - y(\pi) &= \alpha \ , \\ y'(o) + y'(\pi) &= \beta \ . \end{aligned}$$

Le problème

$$u'' + \lambda u = 0 \ ;$$
$$u(o) + u'(o) - u(\pi) = 0 \ ;$$
$$u'(o) + u'(\pi) = 0$$

admet les valeurs propres et les solutions correspondantes suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_o &= 0 & u_o &= 1 \\ \lambda_{2k-1} &= (2k-1)^2 & u_{2k-1} &= (2k-1)\cos(2k-1)x - 2\sin(2k-1)x \\ \lambda_{2k} &= (2k)^2 & u_{2k} &= \cos 2kx \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Nous choisirons pour M la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Alors

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Les fonctions propres du problème associé ,

$$v'' + \lambda v = 0 \ ;$$
$$v'(o) - v'(\pi) = 0 \ ,$$
$$v(o) + v'(o) + v'(\pi) = 0 \ ,$$

sont

$$v_o = 2x - (1 + \pi),$$
$$v_{2k-1} = \cos(2k-1)x \ ,$$
$$v_{2k} = k \cos 2kx - \sin 2kx \ .$$

Les coefficients a_i sont donnés par les formules suivantes

$$\boxed{\begin{aligned} a_o &= \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\pi}\left[\,2\alpha + (\pi-1)\beta\,\right] + A_o\right\}, \\ a_{2k-1} &= \frac{-1}{(2k-1)^2 - r}\left\{\frac{2\beta}{(2k-1)\pi} + A_{2k-1}\right\}, \\ a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)^2 - r}\left\{\frac{2}{\pi}\,(2\alpha-\beta) + A_{2k}\right\}. \end{aligned}}$$

Il y a encore, dans ce cas, un théorème d'équiconvergence (1). On peut obtenir la dérivée de la solution du problème $(VI_1' + VI_2')$ par des calculs analogues à ceux du § 8 du chapitre III.

(1) Voir [16] .

VII.- CONCLUSION

Tout problème aux limites complètement non homogène est réductible, on le sait, à un problème semi-homogène. L'intérêt des séries que nous avons obtenues réside dans le fait qu'elles donnent la solution des problèmes non homogènes sans qu'il soit nécessaire de faire cette réduction, ni de chercher l'intégrale générale de l'équation du problème considéré. Ces séries conviennent parfaitement bien à l'intégration des équations dont le second membre est une fonction généralement continue, équations qui se présentent fréquemment dans les applications.

La méthode fournit, comme cas particuliers, les développements en séries de Fourier en sinus et en cosinus qui figurent dans [1] et [3] .

Les opérateurs que nous avons définis transforment les équations différentielles en équations algébriques linéaires contenant les quantités $\alpha^{(i)}$, seconds membres des conditions aux limites.

Les coefficients des séries qui représentent le second membre de l'équation différentielle peuvent être trouvés par des procédés numériques, graphiques ou mécaniques; il existe aussi, pour certaines transformations que nous avons rencontrées, des tables de transformées.

Les exemples constituent une illustration de la méthode qui est aussi applicable à la résolution des systèmes d'équations joints à des conditions aux limites.

LISTE des OUVRAGES CITES

[1] BLANC, Ch. Les équations différentiellee de la technique, éd. du Griffon, Neuchâtel, 1947.

[2] " " Transformation de Laplace et équations différentielles; Bulletin technique de la Suisse romande, 6 II 43, N° 3, p. 25-30.

[3] " " Les sériss de Fourier et leur application à certaines intégrations; Bull. techniqus, 13 XI 43, N° 23, p. 297-302.

[4] CHURCHILL,R.V. Modern Operational Mathematics in Engineering, McGraw-Hill, New York 1944.

[5] COURANT, R & D. HILBERT : Methoden der mathematiechen Physik, tome I, 2e éd., Springer, Berlin 1931 (Interscience Publiehers, New York 1943).

[6] DOETSCR, G. Theorie und Anwendung der Laplace-Traneformation, Springer, Berlin 1937 (Dover Public.1944).

[7] " " Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Pourier Traneformation; Math.Ann.112 (1935), p. 52-68.

[8] FRANK, Ph. & R.v. MISES : Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, t. I, 2e éd., Vieweg, Braunschweig 1930. (M.S.Rosenberg Publisher, New York 1943).

[9] INCE, E.L. Ordinary Differential Equations, Dover Public., New York 1944.

[10] JULIA, G. Introduction Math. aux théoriee quantiques, prem. partie, Gauthier-Villars, Paris 1936.

[11] KAMKE, E. Differentialgleichungen; Lösungsmethoden und Lösungen I, Becker § Erler, Leipzig 1942.

[12] KNIESS, H. Lösung von Randwertproblemen bei Systemen gewöhn. Differentialgleichungen vermittels der endlichen Pourisr-Transformation; Math. Zeit., t. 44 (1939), p. 266-292.

[13] PICONE, M. Appunti di analisi superiore, Rondinella, Napoli 1940.

[14] ROETTINGER, Ida : A generalization of the finite Fourier transformation and applications; Quart.of appl. math., vol. V, N° 3 (1947), p. 298-319.

[15] SANSONE, G. Equazioni differenziali nel campo reale, parte prima, 2a éd., Zanichelli, Bologna 1948.

[16] TAMARKINE, J. Sur quelques points de la théorie des éq. diff. linéairee ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, Rend. di Palermo, 34 (1912), p. 345-82.

[17] TITCHMARSH, E.C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Clarendon Press, Oxford 1946.

[18] VALIRON, G. Cours d'Analyse mathématique, t. I, Masson, Paris 1942.

[19] ZAANEN, A.C. On some orthogonal systems of functions, Compositio Mathematica, vol 7 (1940), p. 253-82.

[20] ZYGMUND, A. Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux, I; Studia Math., t. II (1930), p. 97-170.

TABLE DES MATIERES