Publié dans Travaux de logique 14, 95-113, 2001,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DES TÊTES ET DES HOMMES

Nadine GESSLER

Donc si j'ai bien compris, dis-je, les barbicelles sont des composants des barbules, les barbules des composants des barbes, les barbes des composants des plumes, et les plumes des composants des oiseaux? (Patricia Cornwell)

1. Difficultés

Force est de reconnaître que la logique extensionnelle moderne, telle qu'elle s'est constituée et a évolué depuis la fin du XIX^{e} siècle, a joué un mauvais tour à la relation de partie à tout. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les deux arguments suivants.

1) Socrate est un homme.
Donc La tête de Socrate est la tête d'un homme.

2) Tout homme est un animal.
Donc Toute tête d'homme est une tête d'animal.

Le second argument est le célèbre argument que De Morgan cita à titre d'inférence qui n'entre pas dans le cadre de la syllogistique aristotélicienne. (De Morgan 1847: 114; 1966: 29). Souvent mentionné dans les ouvrages de présentation de la logique classique des prédicats, il se traduit comme suit.

Pour a =df être un homme; b =df être un animal; r =df être la tête de.

$$(\forall x)(ax \supset bx)$$

$$(\forall y)((\exists x)(ax \wedge ryx) \supset (\exists x)(bx \wedge ryx))$$

Montrer la validité formelle de cet argument (tout comme du premier) dans le cadre de la logique des prédicats ne soulève aucune difficulté. En revanche, il est impossible d'associer à la procédure de validation syntaxique un modèle susceptible de rendre compte de la relation de partie à tout, *en tant que telle,* qui est en cause dans ces arguments.

En effet, sous une telle interprétation (à supposer qu'elle soit possible), le premier est valide si et seulement si Socrate appartient à la classe de Socrate; le second si et seulement si la classe des têtes des hommes est incluse dans celle des hommes. Or, les individus composant une classe distributive sont des éléments fondamentaux, atomiques, qui ne peuvent pas être abordés à un niveau de complexité ingrédentielle. Aussi Socrate est-il le seul élément de la classe composée de Socrate. De même, l'appartenance d'un objet à la classe des hommes étant univoquement déterminée par le concept «homme», les têtes des hommes n'appartiennent pas à la classe des hommes. De là il est impossible de former, à partir de l'extension composant la classe des hommes, une classe qui serait celle des têtes des hommes et, à ce titre, incluse dans la classe des hommes.

Ces arguments posent donc, fondamentalement, la question d'élargir à la relation de partie à tout le champ de l'extensionnel, délimité dans le cadre de la sémantique extensionnelle classique par les relations usuelles ensemblistes d'appartenance et d'inclusion.

On peut certes valider ces arguments dans le cadre de la sémantique distributive. Seulement, toute interprétation distributive est condamnée à traiter une propriété telle que «être la tête d'un homme» comme une relation entre deux classes, la classe des têtes et la classe des hommes. Mais, en représentant les têtes des hommes, on ne représente en aucune manière les têtes des hommes, au sens de parties ou d'ingrédients constitutifs des touts que sont les hommes. La classe des têtes des hommes, relativement à l'interprétation méréologique faite de la relation «être la tête de», ne peut pas être représentée.

Mon propos est donc clair. Je ne conteste pas que ces arguments puissent trouver une réalisation ensembliste dans le cadre de la sémantique distributive. Je conteste que cette réalisation soit satisfaisante, compte tenu de la relation de partie à tout qui intervient dans ces démarches déductives. À partir de là, l'objectif à atteindre est celui d'une procédure de validation avec laquelle on puisse réellement interpréter la relation en cause comme une relation méréologique.

Pour ce faire, il est donc nécessaire de renoncer au modèle ensembliste au profit d'un modèle de type méréologique, capable d'offrir une autre définition de la classe et une définition de la relation de partie à tout. J'adopterai ici la méréologie de Lesniewski, appelée aussi théorie des classes collectives. C'est la première théorie formelle de la relation de partie à tout à avoir été construite, durant la deuxième décennie du siècle passé. Elle présente le grand mérite d'être logiquement fondée. Ses fondations logiques sont composées de deux théories: l'ontologie et la protothétique[1]. L'axiomatique de la méréologie s'ancre dans celle de l'ontologie, elle-même ancrée dans celle de la protothétique. De la protothétique, qui est un calcul propositionnel quantifié, je ne dirai rien dans le cadre de cet article. Par contre, je serai amenée à dire quelques mots de l'ontologie, pour la simple raison que c'est avec elle que se joue, moyennant les axiomes propres de la méréologie, la possibilité d'articuler ensemble les niveaux distributif et collectif.

Mais dans un premier temps, j'inscrirai les deux arguments dans une problématique plus générale liée à la catégorie du nom. Ce détour nous conduira directement aux deux interprétations distributive et collective des classes qui, jusqu'à Lesniewski, furent mutuellement exclusives l'une de l'autre.

---

1 Sur la protothétique, *cf.* Lesniewski 1992: 441-605, Miéville 1984: 43-254).
Sur l'ontologie, *cf.* Lesniewski 1992: 606-648; 1989: 101-114; Lejewski: 104-119 in Srzednicki 1984; Miéville 1984: 267-373; Joray 1999: 155-172.

2. Distributif *versus* collectif

Tout d'abord, une précision s'impose sur l'emploi que je fais ici du terme «nom». J'entends par «nom» toute expression nominale, simple ou complexe, visant à désigner, référer à un individu particulier. Autrement dit tout terme singulier, mais au sens grammatical. Les divergences de point de vue des logiciens ou philosophes qui ont accompagné les définitions du nom logique n'entrent pas dans mon propos. Seul le critère linguistique est retenu. Par conséquent, parmi les noms, on trouve aussi bien «Orion», «Socrate», «le verrou de la porte de l'entrée de l'aile ouest du château» que «la collection de mes timbres» ou encore «la classe des hommes».

Pourquoi parler du nom singulier? Tout simplement parce que derrière la question du nom, comme désignateur référentiel, se projette celle de l'objet *en tant que tel*, au cœur même de la problématique méréologique. Le constat qui va suivre est banal, mais c'est bien le nœud à défaire, si l'on veut résoudre le problème sémantique posé par les arguments. De par sa fonction référentielle, le nom nous met face à deux modes d'analyse sémantique des objets. En ce qui concerne le premier, c'est l'acte de prédication distributive qui en est le dépositaire. En tant que capturé par un nom, l'objet se présente comme une entité individuelle et peut, à ce titre, être rangé parmi d'autres sous un concept distinctif. Quant au second mode d'analyse, c'est celui de l'objet *en tant que tel*, nommé par un nom. L'objet est un tout collectif, l'unité effective des parties qui le constituent, au sens littéral du terme «constituer».

Ainsi les noms «Socrate» et «Orion» désignent-ils chacun un objet particulier qui se révèle être, sur le plan purement référentiel, une entité collective de parties ou d'ingrédients particuliers. Que l'un soit un continuum spatio-temporel et l'autre pas est sans importance du point de vue nominal adopté.

J'ai placé, parmi les exemples de noms singuliers, deux expressions nominales de classe: «la collection de mes timbres» et «la classe des hommes»[2]. Du point de vue grammatical adopté, ce

2 Le nom complexe «le verrou de la porte de l'entrée de l'aile ouest du château» est un simple clin d'œil à la préposition «de», modalité omniprésente et souveraine de la langue

sont des noms singuliers. Se pose donc, à leur propos, la question du statut et de la nature de l'objet qu'ils dénotent. Deux réponses à cette question sont possibles, selon la lecture distributive ou collective qui est faite des expressions de classe. Ces lectures ou interprétations ne sont que le prolongement des deux modes d'analyse sémantique évoqués précédemment avec Orion et Socrate, exemples choisis parmi d'autres d'objets singuliers de ce monde.

La première lecture est celle qui, dans la lignée de Cantor, a été exclusivement privilégiée par la logique de tradition fregéo-russellienne. Comme nous l'avons vu précédemment, les limites, par rapport à une problématique de type méréologique, en découlent immédiatement. Les individus composant une classe, en tant que collection d'objets distincts, en sont les éléments fondamentaux. Une telle appréhension de la notion de classe (ou d'ensemble) fixe immédiatement la signification de la relation d'appartenance d'un individu à une classe. Si un objet est élément de la classe des a, autrement dit s'il appartient à l'extension des a, cet objet est nécessairement a. Dire par exemple que Socrate est élément de la classe des hommes revient à dire que Socrate est un parmi l'extension du concept «homme», c'est-à-dire que Socrate est un homme.

Deux points sont à souligner, en ce qui concerne la théorisation de cette notion de classe dans les théories classiques. Le premier concerne la classe vide et la classe singulière. Le second, quant à lui, touche à la question de la nature et de l'existence des classes.

Tout d'abord, les classes ne peuvent pas être abordées de manière purement extensionnelle. En effet, si on considère que ce sont les objets qui font la classe, conformément à la conception «naïve» qu'une classe en tant que collection d'objets est composée de ces objets, on ne peut avoir qu'une conception agréga-

---

française par laquelle s'établit la relation de partie à tout. Ce nom pose la question de l'analyse logique des expressions nominales dénotantes construites sur la base de relations sémantiques de type méréologique. Cette question n'est pas traitée dans le cadre de cet exposé où la priorité est accordée au rôle joué par la relation de partie à tout dans certaines démarches déductives. Je renvoie le lecteur à l'étude de P Joray, *La subordination logique, une étude du nom complexe dans l'Ontologie de S. Lesniewski*, dans laquelle on trouve une analyse du relatif «dont».

tive des classes. Ainsi, en faisant fond sur une notion d'extension définie comme un tout formé de parties, on ne peut disposer légitimement de la classe vide qui n'a pas d'éléments du tout. De plus, cette appréhension de la classe conduit à identifier les classes à un seul élément avec leur élément. Je cite à ce sujet Russell:

> Nous ne pouvons pas prendre les classes de manière *purement* extensionnelle comme étant simplement des tas, ou conglomérats.*[heaps or conglomerations]* Si nous voulions essayer de le faire, nous trouverions impossible de comprendre où peut bien se trouver une classe comme la classe vide, laquelle n'a pas d'éléments du tout et ne peut pas être tenue pour un «tas», il nous serait aussi très difficile de comprendre qu'une classe qui n'a qu'un élément ne soit pas identique à celui-ci. Je n'ai pas l'intention d'affirmer ou de nier qu'il y ait des entités telles que les "tas". En tant que logicien mathématique, je ne suis pas appelé à avoir une opinion à ce sujet. Tout ce que je maintiens, c'est que, s'il existe quelque chose comme des tas, alors nous ne pouvons pas les identifier aux classes composées de leurs constituants. (Russell 1920: 183; cité in Lesniewski 1989: 65)

Ce commentaire fait à propos du rejet d'une conception purement extensionnelle des classes, par les théories fregéo-russelliennes, j'en viens au second point. On aborde avec lui ce que fut le problème fondamental des théories des ensembles ou des classes héritières de la définition cantorienne. Je rappelle donc cette définition, sous deux formulations:

> Par ensemble, nous entendons n'importe quel rassemblement en un tout *M* d'objets bien définis et distincts *m* de notre intuition ou de notre pensée; ces objets étant appelés les «éléments» de *M*. (Cantor 1932: 282)

Ou encore:

> Chaque ensemble de choses distinctes peut être considéré *en lui-même comme une seule chose* dont les choses en question sont les parties constituantes ou les éléments constitutifs. (Cantor 1887: 83; cité in Lesniewski 1989: 53)

Le problème en cause, c'est le vieux problème de l'un et du multiple. Comment parler d'unité *et* de multiplicité au sujet des classes? Mais sur cette question, comme on le sait, le paradoxe de Russell a tranché. Une théorie dans laquelle les classes seraient multiples, en tant qu'ayant plusieurs éléments, et une, en tant qu'entités, serait soumise au paradoxe.

Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead résolvent le problème en opérant une réduction des classes aux fonctions propositionnelles qui les déterminent. Cette réduction, condition nécessaire de la théorie des types, est opérée par la «no class theory». Les symboles de classe sont rangés parmi les symboles incomplets: «leurs usages sont définis, mais eux-mêmes sont supposés ne rien vouloir dire du tout». Ainsi, grâce à la définition contextuelle de la classe, les symboles de classe sont éliminables de la théorie. Par conséquent, la question du statut ontologique de l'objet qu'ils semblaient dénoter – objet manifestement paradoxal – n'a tout simplement pas à être posée. Les classes sont devenues des «fictions logiques», de simples «façons de parler».

> Aussi les classes, dans la mesure où elles sont introduites, ne le sont que comme des commodités purement symboliques ou linguistiques, et non comme des objets authentiques tels que le sont leurs membres lorsque ce sont des individus. (Whitehead & Russell 1910: 72-73; 1989: 317)

Ainsi fait-on, dans les *Principia Mathematica* le deuil total des classes comme entités de même type que les individus les composant. Comme l'écrivit Russell, les classes ne font pas partie de l'ameublement dernier du monde.

J'insiste sur le nominalisme instrumentaliste élaboré par Whitehead et Russell pour dompter l'antinomie et concilier les dimensions unitaire et multiple des classes pour deux raisons. La première est qu'il est aux antipodes du nominalisme caractérisant la conception collective des classes, telle qu'elle se trouve systématisée dans la méréologie de Lesniewski. La deuxième est que la naissance de la méréologie s'inscrit dans le contexte bien précis des travaux des fondements des mathématiques, marqué par l'antinomie de Russell. Lesniewski montra en effet qu'une résolution, *stricto sensu,* de l'antinomie nécessitait l'abandon de la définition cantorienne de l'ensemble ou de la classe au profit d'une définition méréologique.

Toute la réflexion de Lesniewski fut basée sur la présupposition que les expressions de classes sont des expressions dénotantes. C'est ce que révèle, écrit-il:

> la manière habituelle d'employer les mots "classe" et "ensemble" dans le langage courant des hommes qui ne se sont occupés d'aucune "théorie des classes" ni d'aucune "théorie des ensembles". (Lesniewski 1992: 207; 1989: 53)

Parler de classe a donc une signification opérationnelle évidente en tant qu'acte de désignation d'un objet de même nature que les objets le composant. L'objet dénoté par une expression de classe doit être compté comme un, au sens de l'agrégat ou du tas des entités qui tombent sous le concept distinctif.

À partir de là, la rupture est totale avec les théories classiques. Tout d'abord, sous une approche collective des classes, la condition indispensable de l'existence d'un objet «classe des a» est qu'il existe au moins un a. Autrement dit, la classe vide est récusée.

> Étant d'avis que si un objet est la classe de tels et tels *a* (des hommes pas exemple, des points, des cercles carrés), alors il se compose de ces *a*, j'ai toujours rejeté [...] l'existence de monstres théoriques dans le genre de la classe des cercles carrés, comprenant bien que rien ne peut être composé de ce qui n'existe pas. (Lesniewski 1992: 214; 1989: 58)

Ensuite, tout objet est identique à la classe de lui-même et, *a fortiori,* avec la classe de la classe de lui-même. Le paradoxe de Russell se trouve donc résolue. Puisque toute classe est élément d'elle-même, aucune classe ne peut être la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. Autrement dit, la classe collective de Russell n'existe pas.

Lesniewski renoue donc avec la conception purement extensionnelle des classes, celle-la même que combattaient les tenants du logicisme. Cependant, interprétant les expressions de classe d'un point de vue *réellement* collectif, il fait un pas de plus, tout à fait décisif. Lorsque Russell, dans le passage rapporté ci-dessus, parle de la «classe des *a*» comme «le tas des *a*», il ne voit comme éléments composant la classe que les *a*, conformément à une lecture cantorienne de la classe. Par contre, pour Lesniewski, si une classe comme agrégat ou tas est conçue comme une unité constituée d'éléments ou de parties, c'est au sens littéral du terme «constituer». L'agrégat ou le tas des *a* n'est pas simplement la juxtaposition des *a*, il en est la totalité effective, conformément cette fois à l'usage ordinaire de ces termes. Interprétant ainsi les expressions de classes, Lesniewski peut alors soutenir que sa position est fidèle à la définition de Cantor.

> Ainsi chacun des sons, dont une pièce de musique est l'ensemble, est, conformément à la position de Cantor, une partie constitutive de cet ensemble et la pièce de musique elle-même est composée des sons dont elle est l'ensemble, *tout comme le tableau est composé de telles ou telles parties bien choisies dont il constitue l'ensemble.* (Lesniewski 1992: 207-208; 1989: 53)

La conséquence majeure de cette lecture méréologique concerne la notion d'élément. Une classe collective de *a*, en tant que tout composé des *a*, peut être analysée *ad infinitum* et ne nécessite pas d'éléments atomiques. Par exemple, si A est la classe collective des hommes et B est un élément de A, B peut certes être un homme, mais il peut également être la tête de Socrate ou toute collection arbitraire d'hommes ou de leurs parties. En un mot, si un objet est un élément de la classe collective des *a*, cet objet n'est pas nécessairement *a*. Il peut être un ingrédient quelconque de la classe.

Par conséquent, le principe d'extensionalité caractéristique de la sémantique distributive est faux dans la méréologie. Si un objet est la classe collective des a et également la classe collective des b, la classe des a est identique à la classe des b, mais il n'en résulte pas que les objets a soient les mêmes que les objets b. Par exemple, bien qu'une paire de chaussure ne soit pas une chaussure, la classe de mes paires de chaussure est le même objet que la classe de mes chaussures. Dans les deux cas, on a en effet affaire au même «tas». Ce qui, soit dit en passant, est assez conforme à une certaine réalité.

Je ferai encore un dernier commentaire concernant la terminologie de «classe singulière» dans le cadre de la méréologie. Tout objet est identique à la classe de lui-même. Néanmoins, cela n'entraîne pas qu'il en est l'unique élément. Socrate, par exemple, est un objet singulier valant comme élément ou partie de lui-même et il est également l'ensemble de ses parties constitutives. Souvenons-nous de l'exemple du tableau donné par Lesniewski. On ne pourra donc parler de classe singulière que dans le cas où l'élément en question est un élément atomique, au sens méréologique, c'est-à-dire non composé de parties.

Pour conclure cette partie, je rapporte le commentaire de Lesniewski sur les propos de Russell au sujet de la classe en tant que tas.

> [...] conformément à l'emploi que je fais des termes "ensemble" et "classe" ainsi que compte tenu de la manière de se servir du terme "tas" dans le langage courant (M. Russell ne détermine pas le sens du terme "heap" de façon explicite, mais il emprunte ce terme au langage courant dans l'état où il se trouve, donc tout "cru"), je peux toujours dire du "tas" de n'importe quel *a* qu'il est un ensemble de *a*, et du "tas" des *a* composé de tous les *a*, qu'il est la classe des *a*. (Lesniewski 1992: 225; 1989: 65-66)

Cet «échange» sur la notion de tas éclaire magnifiquement le conflit de points de vue. D'un côté, le rejet d'une conception purement extensionnelle des classes que l'on refuse pour n'être pas fondée logiquement. De l'autre, la primauté accordée à cette même conception et dont on déroule les conséquences méréologiques jusqu'au bout, rompant ainsi avec toute la tradition ensembliste.

Cette confrontation faite des interprétations distributive et collective des classes, j'en viens maintenant à une brève présentation de l'ontologie.

3. L’ontologie

L’ontologie règle le niveau purement extensionnel, mais sans classes. Il s’agit d’un calcul extensionnel des noms basé sur un seul axiome. Cet axiome formalise l’usage du «est», noté «ε», dans la proposition singulière du type «a est b», soit symboliquement «a ε b».

L’epsilon, qui connecte deux noms, est un foncteur propositionnel à deux arguments nominaux, de la catégorie S/NN. Contrairement à la logique standard où les constantes et les variables doivent être singulières dans toutes les interprétations, les noms dans l’ontologie peuvent être vides, singuliers ou pluriels. Tout nom, qu’il soit vide, pluriel ou singulier joue le même rôle grammatical. L’ontologie ne nécessite en effet pas de distinction de catégorie entre un sujet et un prédicat.

La proposition «a ε b» se lit «a est un parmi les b». Autrement dit «a est un parmi l’extension du nom b». Mais il n’y a ici aucune interprétation de l’expression «l’extension du nom b» en termes de classe distributive. Les significations nominales ne sont pas des classes. En d’autres termes, le nom pluriel b possède une extension, mais il n’est pas le nom de cette extension.

L’axiome est le suivant:

Axiome:

$$
\begin{aligned}
\lfloor ab \rfloor \lceil a\, \varepsilon\, b \;\equiv .\; & \lfloor \exists c \rfloor \lceil c\, \varepsilon\, a \rceil \wedge \\
& \lfloor d\, \varepsilon\, c \rfloor \lceil (c\, \varepsilon\, a \wedge d\, \varepsilon\, a) \supset d\, \varepsilon\, c \rceil \wedge \\
& \lfloor c \rfloor \lceil c\, \varepsilon a \supset c\, \varepsilon\, b \rceil \rceil
\end{aligned}
$$

Ainsi, trois conditions sont associées à la vérité d’une proposition singulière «a ε b».

1) a n’est pas un nom vide	Condition d’existence
2) a n’est pas un nom pluriel	Condition d’unicité
3) Ce que désigne le nom a est également désigné pas le nom b	Condition de convergence

Si l’on applique cet axiome, par exemple, à «Orion est une constellation», on obtient:

Orion est une constellation si et seulement si:
1) il existe un c qui est Orion;
2) pour tout objet c et d, si c est Orion et d est Orion alors c est d;
3) pour tout c, si c est Orion alors c est une constellation.

Relevons que ces conditions de vérité étaient présentes dans la résolution de l'antinomie de Russell. Puisque l'expression «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes» ne dénote aucun objet, c'est-à-dire est un nom vide, les deux propositions conduisant à l'antinomie, à savoir «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes est élément d'elle-même» et «la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes n'est pas élément d'elle-même» sont fausses. Par conséquent l'antinomie ne pouvant pas être construite, il n'y a tout simplement plus d'antinomie (Lesniewski 1992: 202-205; 1989: 49-51).

Malheureusement, il n'est pas possible dans les limites de cet article d'insister davantage sur l'ontologie ni sur le caractère propre des systèmes déductifs de Lesniewski. Je me contenterai d'insister sur le fait que l'ontologie est un calcul extensionnel des noms structurellement adéquat pour parler des objets concrets que sont les classes.

4. Une axiomatique de la méréologie

Je présenterai la première axiomatique construite par Lesniewski. Elle date de 1916 (Lesniewski 1992: 230-232; 1989: 79-80)[3].

Le terme primitif est «partie de», symboliquement «pt». Deux axiomes établissent les propriétés d'antisymétrie et de transitivité de cette relation de partie à tout. Ensuite, deux définitions introduisent les foncteurs «élément de», soit «el» et «classe de» soit «kl». Deux autres axiomes énoncent l'unicité de la classe et que s'il existe au moins un a, alors la classe des a existe.

3 Cette axiomatique fut revue par Lesniewski en 1918, 1920 et 1921. D'autres axiomatiques furent par la suite proposées par Sobocinski 1949-50; Lejewski 1954, et Clay.

Axiome 1:

$\lfloor AB \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ pt(B) \supset A \ \varepsilon \sim(pt(B)) \rceil$

Quels que soient A et B, si A est partie de B alors B n'est pas partie de A.

Axiome 2:

$\lfloor ABC \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ pt(B) \wedge B \ \varepsilon \ pt(C) \supset . \ A \ \varepsilon \ pt(C) \rceil$

Quels que soient A, B et C, si A est partie de B et B est partie de C, alors A est partie de C.

Définition 1:

$\lfloor AB \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ el(B) \equiv . \ A \ \varepsilon \ pt(B) \vee A = B \rceil$

Quels que soient A et B, A est un élément de B si et seulement si A est le même objet que B ou A est partie de B.

Définition 2:

$$\begin{aligned}&\lfloor Aa \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ Kl(a) \equiv . \ A \ \varepsilon \ A \wedge \lfloor \exists B \rfloor \lceil B \ \varepsilon \ a \rceil \wedge \\ &\qquad \lfloor B \rfloor \lceil B \ \varepsilon \ a \supset B \ \varepsilon \ el(A) \rceil \wedge \\ &\qquad \lfloor B \rfloor \lceil B \ \varepsilon el(A) \supset \lfloor \exists CD \rfloor \lceil C \ \varepsilon \ a \wedge D \ \varepsilon \ el(C) \wedge D \ \varepsilon \ el(B) \rceil \rceil \rceil\end{aligned}$$

Quels que soient A et a, A est la classe des a si et seulement si les trois conditions suivantes sont remplies:

1) A est un objet (c'est-à-dire A existe).
2) Chaque a est élément de A.
3) Si B est élément de A, alors il existe un élément de B qui est élément d'un a.

Axiome 3:

$\lfloor ABa \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ Kl(a) \wedge B \ \varepsilon \ Kl(a) \supset . \ A = B \rceil$

Quels que soient A, B et a, si A est la classe des a et B est la classe des a alors A est identique à B.

Axiome 4:

$\lfloor Aa \rfloor \lceil A \ \varepsilon \ a \ \supset \lfloor \exists B \rceil \lfloor B \ \varepsilon \ Kl(a) \rceil \rceil$

Quels que soient A et a, si A est un des a alors il existe B qui est la classe des a.

Quelques rapides commentaires sur cette axiomatique. Il en existe d'autres, mais celle-ci est la plus explicite, même si on peut lui reprocher l'utilisation des définitions dans les axiomes. Cette faiblesse est cependant sans conséquences puisqu'il a été démontré que les définitions ne sont pas créatives.

En premier lieu soulignons que les expressions de classe tombent sous la catégorie des noms. Les foncteurs «partie de», «élément de» et «classe de» sont des foncteurs nominaux de catégorie N/N.

On a donc l'analyse catégorielle suivante pour les énoncés ci-dessous:

A est la classe des a
N S/NN N/N N.

B est élément de la classe des a
N S/NN N/N N/N N.

Quant à la définition de la classe collective, je soulignerai les points suivants. «Kl» fonctionne comme un foncteur unificateur de rassemblement en un tout d'une multiplicité d'objets singuliers. C'est ce que révèle l'analyse catégorielle effectuée ci-dessus. S'il existe des objets quelconques, par exemple des baleines, «la classe des baleines» est un nom singulier qui désigne un objet concret, le tout se composant de toutes les baleines.

Le nom a n'est qu'un nom générique possible parmi d'autres. Souvenons-nous à ce propos des chaussures.

La clause 3 de la définition est celle qui permet de procéder à une analyse ingrédentielle des objets. Considérons par exemple un bol d'olives. Les olives contenues dans le bol peuvent être appréhendées comme une classe collective d'olives, soit A. Le noyau d'une olive quelconque est un élément de A. En effet, il existe un élément du noyau, par exemple son amande, qui est élément d'une olive, en l'occurrence l'olive à laquelle appartient le noyau. Cet élément pourrait être également le noyau lui-même, puisque la relation d'appartenance «être élément de» est réflexive. De même, la classe collective des noyaux des olives est un élément de A. Il existe bien un élément de cette classe, par exemple une amande quelconque, qui est élément d'une olive, soit l'olive à laquelle appartient l'amande en question. Cette illustration concrète suffit, je crois, à montrer de quelle manière la clause 3 donne à la classe collective sa dimension pluri-extensionnelle.

Pour terminer, je ferai en bref commentaire sur l'axiome 4. En substance, cet axiome dit que l'on peut engendrer, à partir de tout nom pluriel, autrement dit à partir de toute extension, l'entité collective constituée de cette extension. C'est dans la possibilité de ce passage du niveau purement extensionnel au niveau collectif que se résout le problème de l'un et du multiple pour les classes dans les systèmes de Lesniewski. En effet, l'objet dénoté par le terme «classe des a», c'est-à-dire engendré à partir de l'extension des a, peut être appréhendé comme un tout, l'agrégat des entités a qui le compose. L'entité collective et chacun de ses ingrédients est un objet de même nature dont les expressions qui les nomment appartiennent à la catégorie des noms singuliers.

J'en viens à la présentation des thèses de la méréologie validant les deux arguments.

5. Une solution formelle pour les arguments

La résolution du problème sémantique posé par les arguments se joue très précisément sur la distinction et l'articulation entre les niveaux distributif et collectif. Considérons tout d'abord le premier.

> Socrate est un homme.
>
> *Donc* la tête de Socrate est la tête d'un homme.

La thèse suivante est une thèse de la méréologie:

1) $\llcorner Aa \lrcorner \ulcorner A \varepsilon a \supset \llcorner B \lrcorner \ulcorner B \varepsilon el(A) \supset B \varepsilon el(Kl(a)) \urcorner \urcorner$

Elle peut se traduire ainsi:

> Quels que soient A et a, si A est un des a, alors tout élément de A est élément de la classe collective générée par les a.

Cette thèse valide donc le premier argument. Elle illustre clairement que tout objet singulier restreint, dans les théories classiques au statut d'objet atomique, peut ici être appréhendé comme la totalité des ingrédients ou parties qui le constituent.

Soit maintenant le deuxième argument:

Tout homme est animal

Donc toute tête d'un homme est une tête d'un animal.

La prémisse est une proposition universellement quantifiée. On considérera qu'elle exprime une quantification forte (inclusion forte) impliquant l'existence d'au moins un objet. Conformément aux conventions en usage et au langage informel qu'est celui de Lesniewski, la quantification forte se traduit par le terme «chaque». La quantification faible (inclusion faible), elle, n'impose aucun engagement existentiel et se traduit par «tous les». La prémisse «Tout homme est un animal» est donc de la forme «chaque a est b».

En premier lieu, il s'agit de la traduire dans la syntaxe de l'ontologie. Pour ce faire, il est nécessaire d'inscrire une définition pour le relateur de l'inclusion forte. Cette définition est la suivante:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a \subseteq b \equiv . \lfloor \exists C \rfloor \lceil C \,\varepsilon\, a \rceil \wedge \lfloor D \rfloor \lceil D \,\varepsilon\, a \supset D \,\varepsilon\, b \rceil \rceil$$ [4]

«$a \subseteq b$» traduit donc la forme verbale «chaque a est b».

Notons que l'inclusion, et tout relateur extensionnel, est définie pour des noms. On lira donc cette définition de la manière suivante: «Le nom a est fortement inclus dans le nom b c'est-à-dire l'extension du nom a est fortement incluse dans l'extension du nom b, si et seulement si il existe un objet qui est a et ce qui est dénoté par a est dénoté par b.

Les thèses suivantes sont des thèses de la méréologie.

2) $\lfloor ab \rfloor \lceil a \subseteq b \supset \lfloor C \rfloor \lceil C \,\varepsilon\, a \supset \lfloor D \rfloor \lceil D \,\varepsilon\, el(C) \supset D \,\varepsilon\, el(Kl(b))) \rceil \rceil$

3) $\lfloor Aa \rfloor \lceil a \subseteq b \supset \lfloor C \rfloor \lceil C \,\varepsilon\, el(Kl(a)) \supset C \,\varepsilon\, el(Kl(b)) \rceil \rceil$

4) $\lfloor Aa \rfloor \lceil a \subseteq b \supset . \; el(Kl(a)) \subseteq el(Kl(b)) \rceil \rceil$

---

4 Les lettres majuscules sont utilisées pour désigner des noms singuliers. Cependant, les systèmes de Lesniewski ne nécessitent pas de marquer par la notation les noms singuliers.

Soient:

2) Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors pour tout objet C qui est a, si D est élément de C, alors D est élément de la classe collective générée par les b.
3) Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors tout élément de la classe collective générée par les a est élément de la classe collective générée par les b.
4) Si l'extension des objets a est fortement incluse dans l'extension des objets b, alors l'extension des éléments de la classe collective générée par les a est fortement incluse dans l'extension des éléments de la classe collective générée par les b.

Chacune de ces thèses valident l'argument. Néanmoins, on accordera une attention particulière à la thèse 4, eu égard aux commentaires tenus en début de cet article au sujet de cet argument. J'ai écrit que pour valider cet argument dans le cadre de la sémantique ensembliste sous l'angle d'analyse de la relation de partie à tout, ce qui bien entendu se révèle impossible, il faudrait que la classe des têtes des hommes fût incluse dans la classe des hommes. C'est ce rapport d'inclusion que traduit la thèse 4, entre les noms pluriels el(Kl(a)) et el(Kl(b)), traités comme des noms pluriels. Avec cette thèse, on lit parfaitement le passage du niveau extensionnel au niveau pluri-extensionnel qu'autorise la méréologie, ancrée syntaxiquement dans l'ontologie.

Pour clore cet article, j'évoquerai une remarque formulée par P. Simons lors du colloque, à la fin de mon exposé. M. Simons fit remarquer que l'on pouvait valider les arguments dans l'ontologie, signifiant ainsi que l'on pouvait se passer de la solution méréologique. Ma réponse à cette objection est claire. Que l'on puisse valider les arguments dans l'ontologie est une chose. Mais le cadre d'analyse demeure un cadre d'analyse distributif. Or l'objectif poursuivi est celui d'une solution qui traverse l'épreuve d'une sémantique descriptive et valide ces arguments en traitant les têtes, non pas comme des éléments atomiques tombant sous le nom générique tête, mais comme des parties des touts que sont les hommes. Par conséquent, l'objection de M. Simons n'affecte en rien la solution que je propose puisque, du point de vue adopté, elle est la seule satisfaisante.

6. Conclusion

Il s'agissait de réparer le mauvais tour joué à la relation de partie à tout par la logique moderne. Adepte ou non de la sémantique extensionnelle représentée par la théorie des ensembles, je crois que l'on peut admettre que l'objectif est atteint. Pour le reste c'est une affaire de point de vue ou de motivations. Mais il n'en demeure pas moins que lorsque l'on regarde passer un vol d'oiseaux, c'est bien le tout composé des oiseaux que l'on voit passer, avec ailes, plumes et barbicelles.

Institut de logique
Université de Neuchâtel
EspaceLouis-Agassiz 1
CH 2000 NEUCHATEL
e-mail: nadine.gessler@unine.ch

Références bibliographiques

DE MORGAN A. (1847). *Formal Logic or the Calculus of Inference, Necessary and Probable.* London: Tailor &Walton.

DE MORGAN A. (1966). *On the Syllogism and other Logical Writtings.* London: Routledge & Kegan.

LUSCHEI E.C. (1962). *The Logical Systems of Lesniewski.* Amsterdam: North Holland.

LESNIEWSKI S. (1989). *Sur les fondements de la mathématique. Fragments.* Paris: Hermès, trad. de G. Kalinowski.

LESNIEWSKI S. (1992). *Collected Works.* S.J. Surma, J.T. Srezednicki, D.I. Barnett (eds). Dordrecht: Kluwer, 2 vols.

MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de S. Lesniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie.* Berne: Lang.

SIMONS P.M. (1987). *Parts. A Study in Ontology.* Oxford: Clarendon.

SRZEDNICKI T.J., RICKEY V.F. & CZELAKOWSKI J. (1984). *Lesniewski's Systems. Ontology and Mereology.* The Hague: M. Nijhoff.

SOBOCINSKI B. (1949-50). L'analyse de l'antinomie russellienne par Lesniewski. *Methodos* 1.2, 220-228.

WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. (1910-1013). *Principia Mathematica.* Cambridge: CUP. 3 vols.