Publié dans Travaux de logique 13, 43-62, 1999,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DOMAINES DE QUANTIFICATION ET CATÉGORIES SYNTAXICO-SÉMANTIQUES

Pierre JORAY

D'un point de vue syntaxique, il est possible de caractériser les quantificateurs d'un langage formel par l'ensemble des règles qui leur sont associées et comme une famille d'opérateurs permettant de lier des variables apparaissant dans les expressions ouvertes auxquelles ils s'appliquent. Dans les pages qui suivent, nous porterons cependant notre attention plus spécifiquement sur les aspects sémantiques de la quantification. Il est bien connu qu'une même syntaxe peut recevoir diverses interprétations et ceci en particulier en ce qui concerne les quantificateurs. Donner une interprétation d'un certain langage consiste pour l'essentiel à spécifier les conditions de satisfaction – généralement les conditions de vérité – des expressions bien formées de ce langage. Lorsque celles-ci sont quantifiées, ces conditions dépendent essentiellement de l'ensemble des valeurs qui peuvent être associées aux variables que lie le quantificateur. En d'autres termes, toute interprétation des quantificateurs conduit à s'interroger quant à la nature d'un *domaine de quantification*.

Dans le cadre de la logique standard, et surtout depuis les travaux de Quine, la quantification a été généralement retenue sinon comme l'unique instrument, du moins comme l'outil privilégié de l'accès à la référence. Les quantificateurs ont alors reçu une interprétation dite *référentielle* ou *objectuelle*, dont la caractéristique principale consiste à prendre pour domaine de quantification le domaine d'objets lui-même, autrement dit l'univers du discours. Si une telle interprétation nous est aujourd'hui familière, il convient de rappeler qu'elle est à l'origine de certaines limitations bien connues de la logique standard. Tout d'abord, et comme l'a montré Quine lui-même, elle n'autorise

pas sans d'importantes difficultés ontologiques, le langage formel à s'émanciper du premier ordre. Enfin, la logique classique des prédicats avec identité admet à titre de thèse l'expression suivante:

(1) $(\exists x)x = x$

Qu'une telle formule soit dérivable sur la seule base des principes logiques ne fait en somme qu'expliciter le fait que l'interprétation du quantificateur existentiel nécessite un domaine de quantification et que celui-ci doit être non vide. Une interprétation sur un domaine vide serait en effet absurde dans la mesure où elle conduirait à admettre les variables comme des symboles dénués de signification. La thèse (1) revêt cependant une importance bien différente dès lors que l'on admet comme domaine de quantification l'univers du discours. Elle endosse en effet une affirmation à caractère ontologique: de la nécessité d'un domaine non vide de quantification, on passe alors à celle de l'existence d'au moins un objet dans l'univers d'interprétation.

Certes, on peut soutenir qu'une telle présupposition ontologique est en somme tout à fait minimale et qu'il est assurément raisonnable, dans toute perspective d'application de la logique à un domaine spécifique, de devoir s'engager, quelque peu que ce soit, quant à la réalité des objets dont il sera question. La nature extra-logique de la thèse (1) conduit cependant à un manque d'universalité de la logique. Russell déjà en admettait le caractère problématique lorsqu'il affirmait que «Parmi les mondes possibles, au sens leibnizien, il y en aura ayant un, deux, trois,... individus» et qu'il ajoutait «Il n'apparaît même pas de *nécessité logique* pour qu'il doive y avoir même un individu pour que le monde puisse exister» (1970: 241-242; nous soulignons).

Si les limitations mentionnées sont des conséquences effectives de l'interprétation objectuelle des quantificateurs, il convient de remarquer que celle-ci n'est pas la seule interprétation possible. Après avoir rappelé brièvement en quoi consiste l'interprétation objectuelle, nous examinerons ici, sur la base d'une caractérisation syntaxique similaire, deux autres types d'interprétation. La première est bien connu et remonte aux travaux de Ruth Barcan Marcus. Il s'agit de l'interprétation dite

«substitutionnelle». La seconde, enfin, est inspirée de l'Ecole de Varsovie et le rôle central qu'y joue la théorie des catégories syntaxico-sémantiques nous incite à en parler comme de l'interprétation «catégorielle» de la quantification.

Ajoutons qu'il nous paraît vain, en l'absence de considérations concernant les visées de la formalisation, de se demander si l'une ou l'autre des interprétations doit être considérée comme la «meilleure». Nous montrerons cependant que la version catégorielle confère au langage logique une force expressive au moins aussi forte que celle de la version classique tout en conservant certains des avantages de la version substitutionnelle[1].

1. La quantification objectuelle

Reprenant les propos de P. Engel, nous caractérisons l'interprétation classique de la quantification par deux de ses principaux traits.

> (a) Les variables de quantification apparaissent seulement à des places susceptibles d'être occupée par des *noms* du langage considéré (...).
>
> (b) Les phrases quantifiées sont vraies en vertu de l'existence d'*objets* qui satisfont les phrases ouvertes et les prédicats correspondants. Les séquences sont en effet des ensembles d'objets du monde. Une phrase «(∃x)Fx» est vraie si et seulement si un certain *objet* est F (1989: 84).

Le premier de ces traits spécifie la quantification classique comme une quantification confinée au premier ordre. Le second lui donne sa dimension proprement objectuelle. C'est également celui-ci qui nous autorise à parler de «∃» comme du quantificateur *existentiel* et qui conduit la réflexion logique à lier indéfectiblement les problèmes de la référentiation et de l'existence à la

---

1 Afin d'éviter toute confusion entre les différentes versions, nous insérerons les quantificateurs dans des parenthèses de formes différentes: (...), [...] et ⌊...⌋ seront utilisées respectivement pour les interprétations objectuelle, substitutionnelle et catégorielle.

théorie de la quantification (d'où le fameux aphorisme de Quine «To be is to be the value of a bound variable»).

2. La quantification substitutionnelle

Si comme nous l'avons dit, la version objectuelle est aujourd'hui la plus répandue, elle ne revêt cependant pas un caractère obligatoire. Il est en effet possible de construire une interprétation en rejetant à la fois les traits classiques (a) et (b), L'interprétation dite «substitutionnelle» se caractérise tout d'abord par le fait qu'elle sépare strictement domaine de quantification et domaine d'objets. L'évaluation d'une formule comme «[∃x]A(x)» ne dépend alors plus de l'existence d'un certain *objet* qui satisfait la fonction A, mais de la possibilité de disposer d'une *expression* au moins qui, lorsqu'elle est substituée à «x» dans «A(x)», engendre une formule vraie. Le domaine de quantification n'est alors plus le domaine d'*objets* mais un ensemble d'*expressions* qu'il s'agit de déterminer.

Il existe bien entendu de nombreuses versions de l'interprétation substitutionnelle. Nous examinerons ici l'une d'entre elles, qui est due à Kripke (1976). Dans cette version, la construction d'un *langage substitutionnel* L suppose celle d'un *prélangage* que Kripke nomme L_0. A fin de brièveté, nous nous bornerons dans ces pages à considérer une exemple élémentaire d'une telle construction. Commençons ainsi par spécifier la *syntaxe* du prélangage.

Prélangage L_0

(a) *Un alphabet*: $\mathcal{A}_{L_0} = \{a, b, P_1, P_2, (,)\}$

(b) *Définition 1*, les *termes:*

1. a et b sont des termes.
2. Si A et B sont des termes, alors AB est un terme.
3. Rien sinon par ce qui précède n'est un terme.

Exemples de termes: a, b, aba, aaba, etc.

(c) *Définition 2*, les Ebf_{L_0}:

1. Si A et B sont des termes, alors $P_1(A, B)$ et $P_2(A, B)$ sont des Ebf_{L_0}.
2. Rien sinon par ce qui précède n'est une Ebf_{L_0}.

Exemples d'Ebf_{L_0}:
P_1(a, aaba), P_1(aba, aba), P_2(aa, aaba), P_2(aba, aba), etc.

Sur cette base nous pouvons construire la syntaxe du langage suivant:

Langage L

(d) *Un alphabet*:

$\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{L_0} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{\wedge, \sim\} \cup \{\forall\} \cup \{[,]\}$

(e) *Définition 3*, les *formules atomiques* (FA):

1. Une Ebf_{L_0} est une FA.
2. Si E(t) est une FA contenant le terme t, alors E' est une FA, où E' = $E(t/x_i)$ (l'expression E(t) où quelque occurrence de t est remplacée par une occurrence d'une variable x_i).
3. Rien sinon par ce qui précède n'est une FA.

Exemples de FA:
P_1(a, aaba), $P_1(x_2$, aaba), $P_2(x_2, x_1$ba), $P_2(ax_2, x_2$a), $P_2(x_1, x_2)$, etc.

(f) *Définition 4*, les *formules*:

1. Une FA est une formule.
2. Si A et B sont des formules, alors ~A, (A $\wedge$ B) et $[\forall x_i]$A sont des formules.
3. Rien sinon par ce qui précède n'est une formule.

(g) *Définition 5*, les Ebf_L:

1. Une formule fermée est une Ebf_L.
2. Rien sinon par ce qui précède n'est une Ebf_L.

Remarque: toute Ebf_{L_0} est une FA (Déf. 3.1) et, comme elle ne contient aucune variable, elle est trivialement fermée, par conséquent elle est une Ebf_L.

Quant à l'*interprétation de L*, le travail se fait également en deux étapes. On montre tout d'abord comment évaluer les Ebf_L qui sont également des Ebf_{L_0} et, dans un second temps, on évalue toutes les Ebf_L.

Pour construire la sémantique, on pose:

$\mathcal{V} = \{V, F\}$ un ensemble de valeurs

Val: $\{Ebf_L\} \rightarrow \mathcal{V}$ une application de l'ensemble des Ebf_L dans l'ensemble des valeurs, définie comme suit:

(i) Si E est une Ebf_{L_0}, sa forme est soit $P_1(A, B)$ soit $P_2(A, B)$ (où A et B sont des termes) et Val(E) se définit:

(1) $Val(P_1(A, B)) = V$ *ssi* A et B sont le même terme.

(2) $Val(P_2(A, B)) = V$ *ssi* A et B sont des termes «en miroir» (par exemple: aab et baa).

(ii) Si E est Ebf_L, mais pas Ebf_{L_0}, alors Val(E) se définit en fonction des formes possibles de E:

(3) $Val(\sim A) = V$ *ssi* $Val(A) = F$.

(4) $Val((A \wedge B)) = V$ *ssi* $Val(A) = V$ et $Val(B) = V$.

(5) $Val([\forall x_i]A) = V$ *ssi*, quel que soit le terme t, $Val(A') = V$, où A' est obtenu par la substitution dans A de t à *toutes* les occurrences libres de x_i.

(iii) Enfin, quel que soit E, une Ebf_L, nous avons:

(6) $Val(E) = F$ *ssi* $Val(E) \neq V$

Il est bien entendu possible d'introduire le quantificateur «$\exists$» par le biais de la définition conventionnelle classique:

$$[\exists x]A =df \sim[\forall x]\sim A$$

A partir de (5) et (3), on peut alors disposer d'une clause dérivée (5'), spécifique à «$\exists$»:

(5') Val([$\exists x_i$]A) = V *ssi*, il y a au moins un terme t tel que Val(A') = V, où A' est obtenu par la substitution dans A de t à *toutes* les occurrences libres de x_i.

Le caractère substitutionnel de l'interprétation est explicité par les clauses (5) et (5'), où l'on voit que le domaine de quantification est effectivement un ensemble d'*expressions de L_0*: les termes. On a une universelle vraie dans L lorsque toutes les substitutions que l'on peut opérer avec les termes de L_0 donnent une expression vraie. Une *particulière*[2] est vraie lorsque au moins une de ces substitutions donne une expression vraie.

Bien entendu, l'exemple choisi est un peu particulier, car la caractérisation de la vérité y est uniquement syntaxique. La notion classique de satisfaction en est totalement absente et la question de la dénotation des termes n'y est pas pertinente. En fait, ces derniers sont simplement des successions de symboles «a» et «b» dont il n'est rien dit d'une quelconque relation à un domaine d'objets.

Notre exemple illustre cependant la thèse générale démontrée par Kripke: si l'on possède une caractérisation de la vérité pour les ebf d'un prélangage L_0 et que celui-ci ne possède pas déjà une quantification de la même espèce que celle introduite dans L, alors les clauses (3)-(5) suffisent à caractériser la vérité pour les ebf de L et ceci sans faire appel à la notion classique de satisfaction. Kripke dit avec plus de précision:

> Given *any* set of sentences of L_0 which we take to be the set of "true" sentences of L_0, there is a *unique* set of S' (of thruths for all of L) satisfying [(3)-(5)] and coinciding with S on L_0 (1976: 330).

L'usage d'une quantification substitutionnelle ne garantit pas *à lui seul* l'absence d'engagement sur l'existence d'objets. Mais comme le montre encore Kripke, ce qui importe est que

> the clauses [(3)-(5)] can be staded without mentioning entities other than expressions *and the entities mentioned in characterizing truth for*

2 Le terme usuel d'*existentielle* ne saurait en effet s'appliquer dans une telle interprétation non objectuelle.

> L_0. If other entities are mentioned in characterizing truth for L_0, they still are used when the notion is extended to L (1976: 333).

L'exemple que nous avons choisi présente précisément un prélangage L_0 dont la caractérisation de la vérité ne présuppose l'existence d'aucune entité. Le langage L est ontologiquement neutre dans la mesure où les seules entités sur lesquelles on s'engage sont des *expressions* de L_0.

Cela dit, qu'avons-nous montré jusqu'ici? Tout d'abord notre exemple montre que le trait caractéristique (b) de la quantification classique n'est pas nécessaire. La quantification dans L n'a en effet rien à voir avec la question de la dénotation d'objets par les termes quantifiés.

Quant au trait (a), s'il ne semble pas remis en question dans L, il est aisé de montrer qu'il n'est pas non plus nécessaire. La quantification substitutionnelle a en effet vocation à être une quantification d'ordre supérieur. Et si nous avons parlé dans les clauses (5) et (5') d'une substitution de *termes*, rien n'indique qu'il doit s'agir de termes au sens des langages classiques. Comme le dit Kripke:

> we do not assume that *terms* are to "denote" any objects [mais il ajoute encore] nor do we assume that they even be *syntactically* similar to the terms of a referential langage. Terms could be any class of expression of L_0 (1976: 329).

Examinons, sur notre exemple, la portée d'une telle affirmation. Sur le modèle de la quantification sur les termes, on peut introduire dans L une quantification sur les symboles de prédicats. Le domaine en serait l'ensemble $\{P_1, P_2\}$. Après avoir introduit dans l'alphabet de L des variables de prédicats (par exemple y_1, y_2,...), on pourrait considérer – moyennant quelques ajustements des définitions – une Ebf_L comme:

$$[\forall y_1]\ y_1(\text{aba, aba})$$

La clause (5) de l'interprétation serait complétée par une clause (5*) où «terme» serait simplement remplacé par «symbole de prédicat». On obtiendrait alors, dans la sémantique:

$$\text{Val}([\forall y_1]\ y_1(\text{aba, aba})) = \text{V}$$

Les deux instances de substitution à considérer sont en effet des ebf vraies:

$$\mathrm{Val}(P_1(\mathrm{aba}, \mathrm{aba})) = V$$
$$\mathrm{Val}(P_2(\mathrm{aba}, \mathrm{aba})) = V$$

Par contre nous aurions:

$$\mathrm{Val}([\forall y_1]\ y_1(\mathrm{ab}, \mathrm{ab})) = F$$

Une des instances obtenues est en effet une ebf fausse:

$$\mathrm{Val}(P_1(\mathrm{ab}, \mathrm{ab})) = V$$
$$\mathrm{Val}(P_2(\mathrm{ab}, \mathrm{ab})) = F$$

Pourtant, il n'est pas possible, comme semble le penser Kripke, de quantifier sur «any class of expressions of L_0». Prenons pour le montrer, le cas des symboles de parenthèses. On aurait pour domaine de quantification l'ensemble {(,)}.

Moyennant un ensemble de variables de parenthèses (par exemple z_1, z_2,...) et quelques modifications dans les définitions, nous pourrions obtenir une Ebf_L comme:

$$[\forall z_1]\ P_1\ z_1\mathrm{aba}, \mathrm{aba})$$

où z_1 figure à une place de parenthèse. Une telle ebf resterait cependant inévaluable puisque, des deux instances de substitution que nous aurions alors à examiner, l'une n'est pas une ebf:

P_1(aba, aba)

P_1)aba, aba) inévaluable

Pour former un domaine de quantification, une classe d'expressions doit en effet satisfaire deux conditions:

(i) Il doit s'agir d'une classe d'expressions du prélangage L_0.

(ii) Les expressions en question doivent toutes ressortir d'une même catégorie.

La condition (i), comme l'a montré Kripke, est essentielle si l'on veut éviter que les évaluations dans L puissent faire cercle. La condition (ii), dont Kripke ne dit rien, ne l'est pourtant pas moins. Elle nous montre que, si l'on veut étendre la quantification aux ordres supérieurs, il est nécessaire de disposer d'une

bonne description catégorielle du langage en question. La condition (ii) nous assure que toute substitution les uns par les autres d'éléments du domaine de quantification dans une ebf conserve à celle-ci le statut d'ebf.

Sur un modèle de grammaire catégorielle tel qu'on le trouve chez Ajdukiewicz (1935), on peut décrire la structure catégorielle du prélangage L_0.

> Les catégories de base sont au nombre de deux: N pour la catégorie des *termes*, d'une part, et S pour celle des *ebf*, de l'autre.
>
> Enfin l'ensemble des catégories est donné par la définition inductive suivante:
>
> (a) N et S sont des catégories.
> (b) Si c, c_1, c_2,... c_n sont des catégories, alors $(c/c_1c_2,\ldots c_n)$ est une catégorie.
> (c) Rien n'est une catégorie sinon par ce qui précède.

Remarquons que, dans le langage L_0 considéré dans notre exemple, l'unique catégorie dérivée qui soit représentée est S/NN, celle des prédicats formateurs d'ebf dont les deux arguments sont des termes. En bref, les seules catégories présentes dans L_0 sont au nombre limité des trois. Celles-ci correspondent alors aux trois degrés possibles de quantification dans l'extension L de L_0: une quantification sur les termes (N), sur les ebf (S) et enfin sur les prédicats (S/NN) de L_0.

3. La quantification catégorielle

La version catégorielle a ceci de commun avec celle de Kripke qu'elle permet une quantification d'ordre supérieur. En effet, dès qu'une catégorie est présente dans le langage formel, il devient possible de quantifier sur des variables de cette catégorie. La différence majeure réside dans le fait qu'aucune distinction n'y est opérée entre le *langage quantifié* et un *prélangage* d'où sont issus les domaines de quantification.

En l'absence d'une telle distinction, il devient pourtant impossible d'adopter comme domaine de quantification pour

une catégorie donnée c l'ensemble des *expressions* de cette catégorie.

Afin d'illustrer cette impossibilité, considérons à titre d'exemple un certain langage propositionnel P dont l'unique catégorie de base est S et dans lequel nous disposons des opérateurs propositionnels classiques. Donnons nous enfin la possibilité d'appliquer une quantification sur la catégorie S des propositions.

Sachant que toute expression de la forme «□⊃□» est une tautologie, il apparaît souhaitable que l'expression T suivante soit un théorème de P et qu'elle soit également logiquement valide:

T: $\llcorner\forall p\lrcorner(p \supset p)$

Une interprétation substitutionnelle consisterait à dire qu'une telle expression est vraie en vertu du fait que, quelle que soit l'*expression* A de catégorie S, la formule «A ⊃ A», où A a été substituée aux occurrences de la variable propositionnelle «p», est une expression vraie. Cependant, en l'absence d'un prélangage non quantifié, une telle interprétation conduit à une évaluation circulaire. Pour évaluer une formule comme T, il faut en effet vérifier que toutes les substitutions possibles dans la catégorie S mènent bien à des expressions vraies. Or, il y a une au moins de ces substitutions dont le résultat est une expression inévaluable. On peut en effet substituer à «p» l'expression quantifiée T elle-même. La formule à évaluer est alors:

E: $\llcorner\forall p\lrcorner(p \supset p) \supset \llcorner\forall p\lrcorner(p \supset p)$

Il va de soi que celle-ci demeure inévaluable en l'absence d'une évaluation préalable de l'expression T de départ. Il y a donc cercle.

Pourtant, si le cercle est indéniable, on peut être tenté de raisonner comme suit: y a-t-il nécessité pour évaluer E de connaître le résultat de l'évaluation de T? Car enfin, puisque T est une proposition, son évaluation ne peut aboutir qu'à l'une des *valeurs* ou *significations propositionnelles*: dans un cadre biva-

lent, le vrai ou le faux. Et dans les deux cas, l'expression E sera vraie.

L'interprétation catégorielle de la quantification s'appuie précisément sur une procédure de ce genre. Elle consiste à lire une expression comme T de la manière suivante: *quelle que soit la* signification *qui peut être associée à une expression de la catégorie S, si p reçoit cette signification, alors l'expression «p ⊃ p» a pour valeur le vrai*. Lorsque le quantificateur lie des variables propositionnels, le *domaine de quantification* est l'ensemble des significations susceptibles d'être associées à un quelconque élément de la catégorie S.

Bien entendu, pour qu'une telle quantification puisse être appliquée à des variables de n'importe quelle catégorie syntaxico-sémantique, il faut être en mesure de préciser un domaine de significations pour chacune des catégories.

Ainsi, en plus d'une description catégorielle du langage formel telle que celle mentionnée dans la version substitutionnelle, il nous faut désormais disposer d'une procédure qui associe à chaque catégorie – de base ou dérivée – un ensemble propre de significations. En termes plus précis, il s'agit de compléter la grammaire catégorielle en question par l'adjonction d'une *sémantique catégorielle*: ce travail consiste en deux étapes:

1. Associer à chacune des catégories de base un ensemble de significations élémentaires.

2. Expliciter une procédure permettant de déterminer les ensembles associés aux catégories dérivées à partir de ceux associés en 1. aux catégories de bases.

Prenons un exemple. Soit L un langage formel qui se caractérise par la présence d'éléments des catégories suivantes:

Deux catégories de bases:

N: pour les noms
S: pour les propositions

Trois catégories dérivées:

S/S: pour les opérateurs unaires
S/SS: pour les opérateurs binaires
S/N: pour les prédicats unaires

La première étape consiste à interpréter les symboles de catégories de base. Soit Ψ une application qui associe à chacun d'entre eux un ensemble de significations:

$$\Psi(S) = \{V, F\}$$
$$\Psi(N) = E = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$$

L'ensemble {V, F}, associé à la catégorie des propositions, traduit ici le choix de la bivalence. L'ensemble E associé à la catégorie des noms est un ensemble de significations nominales dont la nature n'est pour l'instant pas précisée.

Enfin, la seconde étape consiste à évaluer les différents symboles catégoriels en leur associant, par la procédure suivante, un *domaine spécifique*:

(1) $Dom(c) = \Psi(c)$ *ssi* c est une catégorie de base.

(2) $Dom(c/c_1\ c_2 \ldots\ c_n) =$
$\{\varphi | \varphi: Dom(c_1) \times Dom(c_2) \times \ldots \times Dom(c_n) \rightarrow Dom(c)\}$
où $(c/c_1\ c_2 \ldots\ c_n)$ est une catégorie dérivée de foncteurs formateurs d'éléments de catégorie c et dont les n arguments sont des catégories respectives $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Contrairement aux catégories de base, les catégories dérivées se voient associées comme domaines non pas des ensembles de significations primitives, mais des ensembles d'applications φ. Par l'écriture:

$$\{\varphi | \varphi: Dom(c_1) \times Dom(c_2) \times \ldots \times Dom(c_n) \rightarrow Dom(c)\}$$

nous entendons l'ensemble de toutes les applications qui prennent pour *ensemble de départ* le produit cartésien des domaines respectifs associés aux arguments $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et pour ensemble d'arrivée le domaine associé à c, la catégorie du résultat. Mais tout ceci se comprendra mieux sur notre exemple. Le résultat de l'évaluation des cinq catégories de notre langage L est en effet le suivant:

$Dom(N) = E = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ (clause 1)
$Dom(S) = \{V, F\}$ (clause 1)
$Dom(S/S) = \{\varphi | \varphi: \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}\}$ (clause 2)

$\mathrm{Dom}(S/SS) = \{\varphi | \varphi: \{V, F\} \times \{V, F\} \rightarrow \{V, F\}\}$ (clause 2)
$\mathrm{Dom}(S/N) = \{\varphi | \varphi: E \rightarrow \{V, F\}\}$ (clause 2)

Nous disposons désormais, pour chaque catégorie de L, d'un domaine de quantification. Le domaine d'une catégorie donnée est à chaque fois constitué des significations extensionnelles que peut recevoir un élément quelconque de cette catégorie.

Remarquons encore que, sous le voile d'une écriture peu familière, les domaines associés aux catégories dérivées contiennent des éléments bien connus. Dom(S/S) est un ensemble de quatre applications qui correspondent exactement aux quatre opérateurs unaires de la logique classique. De même, Dom(S/SS) contient seize applications qui correspondent aux seize opérateurs binaires habituels. Enfin, Dom(S/N) contient des applications qui expriment les interprétations possibles d'un prédicat (ces interprétations étant habituellement données comme des parties de E, l'ensemble des significations nominales).

Sur la base des domaines de quantification ainsi déterminés, nous pouvons désormais proposer les clauses d'évaluation suivantes relatives à l'interprétation catégorielle des quantificateurs dans la sémantique du langage L:

(i) $\mathrm{Val}(\llcorner \forall x \lrcorner A(x)) = V$ *ssi*
$\mathrm{Val}(A(x)) = V$ quelle que soit la *signification* $\alpha(x)$ qui peut être assignée à x, conformément à sa catégorie c (i.e. $\alpha(x) \in \mathrm{Dom}(c)$).

(ii) $\mathrm{Val}(\llcorner \exists x \lrcorner A(x)) = V$ *ssi*
$\mathrm{Val}(A(x)) = V$ pour l'une au moins des *significations* $\alpha(x)$ qui peuvent être assignées à x, conformément à sa catégorie c (i.e. $\alpha(x) \in \mathrm{Dom}(c)$).

Le symbole «x» désigne ici une variable d'une quelconque catégorie présente dans L. L'interprétation catégorielle permet donc une quantification d'ordre supérieur. Ajoutons qu'une telle interprétation est compatible avec une caractérisation syntaxique standard des quantificateurs, c'est-à-dire avec les règles classiques que sont l'*instanciation universelle* et la *généralisation existentielle*. Les schémas suivants restent en effet valides sous

l'interprétation proposée et cela quelle que soit la catégorie choisie pour les deux variables x et y:

$$\llcorner\forall y\lrcorner\,(\llcorner\forall x\lrcorner\,A(x) \supset A(y))$$
$$\llcorner\forall y\lrcorner\,(A(y) \supset \llcorner\exists x\lrcorner\,A(x))$$

4. Où il est question d'interprétation des termes

Si nous avons jusqu'ici montré comment concevoir une quantification catégorielle d'ordre supérieur, nous n'avons rien dit quant à l'interprétation des termes. Il manque encore à notre description une spécification précise de l'ensemble E des significations nominales. En posant:

$$\mathrm{Dom}(N) = E = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$$

nous n'avons en effet pas précisé en quoi consiste la nature des significations nominales s_i. Une description structurelle de la quantification catégorielle ne nécessite en fait pas une telle spécification et nous allons voir que plusieurs choix sont possibles. Ceux-ci dépendent essentiellement de la manière de concevoir les termes ou, comme on dit aussi, les noms logiques.

Dans la conception classique – issue principalement des travaux de Russell et de Quine – le nom logique se distingue radicalement du nom dans sa conception usuelle par le fait qu'il est soumis aux deux conditions suivantes:

1. Un nom logique doit nécessairement faire référence à une certain dénotation.
2. Un nom logique est nécessairement un *nom propre*. Autrement dit, il ne peut en aucun cas faire référence à plus d'un objet ou à plus d'un individu.

Cette conception, comme on le sait, conduit le logicien à ne considérer qu'une infime partie des noms usuels comme de véritables noms logiques. Savoir si un nom donné dénote effectivement un objet ou un individu est largement une question empirique; elle dépend, d'un point de vue logique, du choix d'un univers particulier dans l'interprétation.

Prenons pour simplifier l'exemple d'un univers fini Ω ne contenant que deux objets:

$$\Omega = \{o_1, o_2\}$$

Dans la perspective classique, seules deux familles d'interprétations sont ici envisageables pour les termes. Soit *a* et *b* deux termes tels que:

$$\mathrm{Val}(a) = o_1 \text{ et } \mathrm{Val}(b) = o_2$$

Tout autre terme sera alors nécessairement un synonyme soit de *a* soit de *b*. Le domaine de quantification associé aux termes dans la conception classique ne peut être que Ω lui-même et les significations nominales les objets de cet univers.

$$\mathrm{Dom}(N) = \Omega$$

Une version catégorielle de la quantification peut fort bien être conçue sur la base d'un tel choix. En ce qui concerne les termes, pourtant, elle ne se distinguerait alors en rien de la quantification objectuelle.

En s'inspirant du calcul extensionnel des noms de S. Lesniewski[3], il est cependant possible de concevoir les noms logiques et leur domaine de quantification associé d'une manière différente. Sans modifier la nature de l'univers d'objets, il s'agit alors d'admettre, dans le langage symbolique, des noms logiques autres que les noms propres ou singuliers.

Reprenant notre exemple d'univers à deux objets, il s'agit d'introduire, aux côtés des noms propres tels que *a* et *b*, deux autres familles de noms logiques. La première est constituée de noms dits *pluriels*, faisant référence non pas à un seul objet, mais à plusieurs. Soit *c* un tel nom. Dans notre exemple, sa signification consiste dans le fait qu'il dénote à la fois les deux objets de Ω: o_1 et o_2. Enfin, la seconde famille est constituée de noms *vides*. Si *d* est un tel nom, sa signification doit être comprise comme l'*absence de dénotation*. En bref, sur la base de notre Ω à deux objets. il convient désormais de considérer non

3 Sur ce calcul, qui porte le nom d'*Ontologie*, cf. en particulier Lejewski (1958) et Miéville (1984).

pas deux familles d'interprétation possibles pour un nom ou un terme, mais quatre. C'est ce que montre le schéma suivant:

$$\Omega = \{o_1, o_2\}$$

a	o_1	c	o_1, o_2
b	o_2	d	

Le domaine de quantification E, associé aux termes, ne peut plus être ici l'univers lui-même. Il s'agit en fait de l'ensemble des quatre significations nominales construit sur la base de Ω. Nous le noterons comme suit[4]:

$$\mathrm{Dom}(N) = E = \{|o_1|, |o_2|, |o_1, o_2|, ||\}$$

Il convient ici de faire deux remarques. Premièrement, si la cardinalité de E est toujours différente de celle de l'univers Ω, celle-là est pourtant déterminée par celle-ci:

$$\mathrm{Card}(E) = 2^{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

Deuxièmement, nous avons comme corollaire un résultat important: quelle que soit la cardinalité n de Ω ($n \geq 0$), celle du domaine de quantification E ne peut jamais être nulle. Avec $\Omega = \emptyset$, nous avons en effet $\mathrm{Dom}(N) = \{||\}$, un *singleton* dont l'unique élément est la signification des noms vides. Ceci suffit à conserver un sens à toute expression quantifiée, même en cas d'absence d'objet dans l'univers.

5. Conclusion et perspectives

Ainsi, tout en conservant une structure syntaxique caractérisée par les règles standard de la quantification, l'interprétation catégorielle permet, avec cette seconde version, de concevoir une logique d'ordre supérieur qui admet les noms vides (c'est-à-dire une logique *libre*). De plus, comme dans le cas de la quanti-

4 Il va de soi que l'ensemble E se construit de la même manière que $\mathcal{P}(\Omega)$. Il s'en distingue pourtant dans la mesure où ses éléments ne sont pas des ensembles mais des extensions. La signification d'un nom pluriel n'est pas un ensemble d'objets – lui-même objet unique – mais la multiplicité des objets eux-mêmes. En termes traditionnels, le nom pluriel n'est pas à comprendre en *suppositio simplex* mais en *suppositio personalis*.

fication substitutionnelle, le langage obtenu est vierge de tout engagement ontologique, et ceci sans qu'il soit nécessaire d'abandonner toute source objectuelle dans l'interprétation des termes.

Pour terminer, nous reprendrons ici une réflexion qui est due à Lejewski et qui concerne les rapports qu'entretient la théorie standard avec une version catégorielle de la quantification[5]:

> the most important point is that whatever is said with the aid of the theory of restricted quantification, can be easily expressed in terms of the unrestrictred quantification provided we are allowed to use the notion of existence. (1954: 51)

Avant d'exposer la procédure simple qui permet d'exprimer les formules de la première théorie dans le langage de la seconde, considérons un instant le domaine associé, dans notre version catégorielle, à la catégorie S/N des prédicats unaires:

$$\Omega = \{o_1, o_2\}$$
$$\mathrm{Dom(N)} = \{|o_1|, |o_2|, |o_1, o_2|, ||\}$$
$$\mathrm{Dom(S/N)} = \{\varphi | \varphi\colon \mathrm{Dom(N)} \rightarrow \{V, F\}\}$$

Contrairement à la théorie classique, les significations possibles d'un prédicat S/N relatives à un univers à deux objets ne sont pas ici au nombre de quatre, mais au nombre de seize. L'interprétation d'un prédicat n'est pas donnée par un sous-ensemble de Ω, comme classiquement, mais par un sous-ensemble de Dom(N): celui qui contient les *significations nominales* satisfaisant ce prédicat.

Soit φ_i l'application suivante, qui est l'une des seize de Dom(S/N):

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : \{|o_1|, |o_2|, |o_1, o_2|, ||\} & \rightarrow & \{V, F\} \\ |o_1| & \mapsto & V \\ |o_2| & \mapsto & V \\ |o_1, o_2| & \mapsto & F \\ || & \mapsto & F \end{array}$$

5 Ce que nous appelons ici *quantification standard* ou *objectuelle* est qualifié par Lejewski de *restricted quantification*. Par ailleurs ce qu'il nomme *unrestricted quantification* correspond à une quantification catégorielle confinée au premier ordre.

φ_i constitue, comme on le voit, la signification d'un prédicat S/N qui est satisfait uniquement par *les noms singuliers*. Un tel prédicat a pour particularité d'être satisfait par un nom *a* si et seulement si *a* fait référence à un et un seul objet ou, si l'on veut, lorsque la proposition «a existe» est vraie. Bien entendu, l'application φ_i est ici spécifique à l'univers Ω considéré, mais il est aisé de comprendre qu'une application équivalente fait partie des éléments de Dom(S/N), quelle que soit la cardinalité de Ω.

Par ces considérations sémantiques nous voulons simplement indiquer comment il est possible de disposer dans un langage à quantification catégorielle d'un *foncteur constant d'existence singulière*: Sin(x). Il faut bien entendu disposer d'une caractérisation syntaxique d'une telle constante logique. Celle-ci est parfaitement possible mais, à fin de brièveté, nous renvoyons à l'exposé qu'en donne Lejewski (1954: 54-58).

Cela dit, il ne reste désormais aucune difficulté pour énoncer le procédé de transcription du langage standard au langage à quantification catégorielle. La règle de Lejewski est la suivante:

> Toute expression quantifiée de la forme $(\forall x)A(x)$ respectivement $(\exists x)A(x)$ est transcrite en une expression de la forme $\llcorner\forall x\lrcorner\,(Sin(x) \supset A(x))$ respectivement $\llcorner\exists x\lrcorner\,(Sin(x) \wedge A(x))$ du nouveau langage.

L'intérêt d'une telle transcription réside dans le fait que les nouvelles expressions répondent rigoureusement aux mêmes conditions de vérité que leurs correspondantes classiques.

Reprenons enfin notre exemple de départ:

(1) $(\exists x)\ x = x$

Par ce qui précède, nous savons désormais que la bonne transcription de (1) est non pas (1') mais (1")

(1') $\llcorner\exists x\lrcorner\ x = x$
(1") $\llcorner\exists x\lrcorner\,(Sin(x) \wedge x = x)$

Que l'expression (1') soit un théorème du nouveau langage ne conduit à aucune difficulté ontologique car celle-ci est parfaitement valide sur un univers Ω vide. Si (1") possède les mêmes conditions de vérité que (1), elle s'en distingue pourtant par le fait qu'elle reste *interprétable* en l'absence d'objets dans l'uni-

vers; elle n'est pas dans un tel cas dénuée de sens mais tout simplement fausse et il n'y a aucune raison d'y voir un théorème.

Pour conclure, rappelons qu'une des avancées essentielles de la logique moderne a été dès le début la possibilité d'extraire du traitement des universelles le problème des présuppositions d'existence. Celui-ci paraissait pourtant dans la tradition lui être indéfectiblement lié. La réforme de la quantification participe à notre sens d'une même visée. En distinguant soigneusement domaine de quantification et domaine d'objets, la version substitutionnelle marque certainement un pas dans la bonne direction. Cependant, la quantification catégorielle va plu loin: non seulement elle conduit à une théorie de la quantification parfaitement neutre ontologiquement, mais elle permet également d'exprimer indépendament la notion formelle d'existence.

Séminaire de logique
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 NEUCHÂTEL

Références bibliographiques

AJDUKIEWICZ K. (1935). Die syntaktische Konnexität. *Studia Philosophica* 1, 1-27. Trad. ang. Mc Call S. (1967), 207-231.

ENGEL P. (1989). *La norme du vrai. Philosophie de la logique*. Paris: Gallimard.

KRIPKE S. (1976). Is there a problem about substitutionnal quantification? Dans Evans G., Mc Dowell J. (eds).*Truth and meaning. Essay s in semantics*. Oxford: Clarendon, 325-419.

LEJEWSKI C. (1954). Logic and existence. *The British Journal for the Philosophy of Science* 5, 104-119.

LEJEWSKI C. (1954). On Lesniewski's Ontology. *Ratio* 1, 150-176. Repris et cité dans Srzednicki *et alii* (1984). Lesniewski's Sytem. The Hague: Nijhoff, 123-148.

MIÉVILLE D. (1984). Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Lesniewski. Berne: Peter Lang.

RUSSELL B. (1970). *Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. Moreau G. Paris: Payot.