Publié dans Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 63, 35-49, 1995,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

L'ANALYSE ENTRE RAISONNEMENT ET CALCUL

Jean-Louis GARDIES

Je ne traiterai ici, en fait de *raisonnement*, que du raisonnement *déductif*; les démarches proprement déductives sont en effet les seules dont le calcul puisse avoir la prétention de fournir une sorte d'équivalent direct.

J'admettrai en outre, sans m'y attarder davantage pour ne pas me noyer dans les considérations préliminaires, la thèse d'inspiration fregéenne selon laquelle le raisonnement déductif, procédant, sinon de vérité en vérité, du moins de ce qui est supposé vrai aux autres suppositions de vérité qui en découlent, repose sur l'exploitation de fonctions; fonctions qui peuvent avoir des arguments nominaux, comme la plupart des classiques fonctions mathématiques, ou des arguments propositionnels, comme on en rencontre en logique. Mais que le raisonnement déductif soit de nature fonctionnelle ne signifie évidemment pas qu'il soit pour autant décisoire. Le contraire est à peu près sûr: il est difficilement contestable que le *calcul des prédicats* est un des nombreux ressorts du raisonnement déductif; or chacun sait que, bien qu'il soit fonctionnel (vérifonctionnel), il n'existe aucune procédure algorithmique générale qui permette de déterminer si chacun des ses énoncés est valide ou non.

Quant au mot *calcul*, son usage me semble grevé d'une certaine ambiguïté; car il lui arrive de recevoir au moins deux acceptions sensiblement différentes:

1) les uns caractérisent le *calcul* par le fait de substituer aux *raisonnements sur les choses* des *opérations sur les signes*; ces signes peuvent être des objets matériels comme les boules du boulier, les touches de la calculatrice ou de l'ordinateur, qu'il suffit de manipuler selon certaines règles, ou, plus classique-

ment, les signes scripturaires du calcul tel qu'on l'enseigne à l'école primaire;

2) d'autres entendent par *calcul* le fait de disposer d'une *procédure décisoire*, comme on dit, d'un *algorithme*, qui nous garantit que nous parviendrons au résultat cherché au terme d'un nombre fini de pas.

La confusion de ces deux acceptions se trouve facilitée par le fait que ces deux caractéristiques peuvent très bien se cumuler. Par exemple, la technique de l'addition ou celle de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers, étayée par des tables, est calcul dans les deux sens puisqu'elle est à la fois opération sur des signes et procédure décisoire. On pourrait en dire autant de la classique vérification de la validité d'une expression du *calcul des propositions* par table de vérité.

Certains de ces algorithmes couplés à des procédures opératoires peuvent avoir un caractère spectaculaire, qui manifeste l'ingéniosité dont ont fait preuve leurs inventeurs. Cette ingéniosité sans doute a presque cessé de nous être sensible pour la reconnaissance, dans la tradition islamo-arabe, de l'équivalence entre $x^m \times x^n$ et x^{m+n}, tant celle-ci nous est devenue familière. Nous la percevons déjà davantage pour la «merveilleuse abréviation des supputations arithmétiques» (pour reprendre l'expression de Neper) issue des logarithmes, pour toutes les facilités consécutives au simple rapprochement d'une progression géométrique commençant par l'unité et d'une progression arithmétique commençant par zéro, et pour les règles qu'on en tire concernant le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs, celui d'un quotient, celui d'une puissance ou d'une racine de nombre, etc.

On a même l'impression que certains auteurs réservent l'usage du mot *calcul* à cette alliance, à ce cumul d'une *opération sur les signes* et d'une *procédure décisoire*. Mais de ce que ces deux caractéristiques peuvent aussi être dissociées l'usage du mot *calcul* se trouve beaucoup moins univoque.

Une procédure algorithmique peut en effet s'accommoder d'une absence d'opérations sur les signes. Par exemple, ce qu'on nomme *l'algorithme d'Euclide* est une *méthode décisoire*, qui, appliquée aux entiers naturels, permet de déterminer la plus grande commune mesure de deux d'entre eux. Euclide donne donc cet algorithme non seulement pour les *entiers* (aux propositions 1 et 2 du livre VII de ses *Eléments*), mais aussi pour ce qu'il appelle les «grandeurs commensurables» et que nous appelons *les rationnels* (à la proposition 3 du livre X). Or, dans les propos d'Euclide, jamais une opération sur des signes ne se substitue au raisonnement. Pour prendre un exemple cette fois moderne, on enseigne aujourd'hui encore aux lycéens une méthode de solution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues, qui est parfaitement décisoire, bien qu'elle ne se réduise pas à une opération sur des signes, même si l'on s'y autorise à utiliser au passage, en cours de raisonnement, certaines opérations.

On peut, en revanche, opérer sur des signes, sans disposer pour autant d'une procédure décisoire. Ainsi arrive-t-il au mathématicien de transformer et de manipuler ses équations, avec l'espoir de se rapprocher d'un résultat, mais sans savoir si ses opérations n'aboutiront pas à une impasse. Les opérations sont ouvertes aux tâtonnements et, sinon aux expérimentations, du moins aux essais et aux échecs.

Après cette mise au point terminologique, je voudrais essayer de caractériser ce qui a changé, dans le rapport entre raisonnement et calcul, de l'époque classique des mathématiques grecques à ce XVIIe siècle où l'analyse a connu son essor.

L'idée d'édifier les mathématiques comme système hypothético-déductif a commencé à se manifester en Grèce, c'est-à-dire dans une société qui avait été probablement la première à disposer d'une écriture intégralement phonétique. Sans doute, bien avant les Grecs, certaines civilisations du moyen Orient s'étaient-elles progressivement éloignées, non seulement de l'écriture idéographique, mais d'une écriture syllabique et avaient-elles imaginé une notation phonétique des consonnes. Il semble cependant que les Grecs aient été les premiers à avoir appliqué certains signes à la désignation directe des voyelles; ces signes, qu'ils avaient d'ailleurs empruntés aux Sémites, et qui avaient désigné chez ceux-ci des phonèmes qui n'existaient pas en grec, se trouvaient, dans ces conditions, du point du vue d'un Grec, en quelque sorte disponibles pour un nouvel usage. Avec l'écriture grecque, le système de notation phonétique atteint ainsi un degré de perfection, qui permet de faire à peu près totalement l'économie d'idéogrammes. Ainsi les mathématiques grecques vont-elles se distinguer, aussi bien de celles qui les ont précédées que de celles qui les suivront, par cette absence de recours à toute notation idéographique.

Les seuls idéogrammes en usage dans les textes classiques de mathématiques grecques sont les symboles des nombres entiers, pour lesquels les Grecs, ayant besoin de 27 signes pour désigner les unités, les dizaines et les centaines de leur numération décimale, ont simplement ajouté trois lettres archaïques d'origine sémitique aux 24 lettres de leur propre alphabet. Encore ces symboles n'apparaissent-ils pas chez Euclide et ne font-ils chez Archimède que des apparitions épisodiques (par exemple, dans *La mesure du cercle* ou *L'arénaire*), si du moins je ne comptabilise pas l'usage méta-linguistique des nombres pour numéroter les propositions. Ainsi une des caractéristiques fondamentales des mathématiques grecques classiques est-elle de s'astreindre à s'exprimer au moyen d'une écriture intégralement phonétique, sans le moindre recours à des procédures opératoires, que seul l'usage de certains idéogrammes eût rendues possibles.

Ceci ne signifie pas que les Grecs aient ignoré le calcul. Car ils distinguaient strictement d'une part l'*arithmétique*, qui, comme la géométrie est une science, et d'autre part l'*art logistique* (λογιστικὴ τέχνη), technique de calcul, qui pouvait servir au commerce et dont il est vraisemblable qu'elle ait impliqué quelque manipulation d'idéogrammes. Mais la science mathématique grecque ne comporte guère elle-même d'opérations sur les signes.

Au surplus, j'ai fait allusion précédemment à l'*algorithme d'Euclide*, preuve que cette science grecque n'était pas dépourvue d'algorithmes. La réponse à la question de savoir si les mathématiques grecques font place au calcul dépend donc de la manière dont on définit ce terme de *calcul*. Elle sera positive ou négative selon qu'on désigne par *calculs* des raisonnements appuyés sur des algorithmes ou des opérations sur des signes.

Cette situation des mathématiques grecques contraste fortement avec celle des mathématiques du XVII[e] siècle. Laissant de côté l'apport islamo-arabe, je rappelle que, depuis la fin du XV[e] siècle au moins, on assiste en Europe à un retour des idéogrammes, dont la *Géométrie* de Descartes proposera une sorte de synthèse, douée d'avantages suffisants pour s'imposer à l'Europe savante.

La lecture de Descartes montre que l'intérêt de ces idéogrammes est moins de nous dispenser de raisonner que de faciliter le raisonnement en avivant notre intuition de tous les éléments dont celui-ci doit tenir compte. La meilleure preuve en est qu'il y a de bons et de mauvais idéogrammes (l'histoire se chargera en fin de compte d'éliminer ces derniers), selon qu'ils suggèrent plus ou moins bien la réalité mathématique et secondent plus ou moins bien notre raisonnement.

Laissons même de côté, parce qu'elle appellerait ici une trop longue analyse, la comparaison qui s'imposerait entre la notation newtonienne et la notation leibnizienne du calcul infinitésimal et l'examen des raisons pour lesquelles la seconde a finalement éliminé la première. Contentons-nous d'un exemple beaucoup plus simple. Là où Euclide écrivait, en bon grec, que quatre grandeurs (désignons-les par *a*, *b*, *c* et *d*) «sont en même raison, la première à la deuxième et la troisième à la quatrième», le XVII[e] siècle hésitera entre deux notations idéographiques, celle d'abord qui ne dit rien d'autre que ce que disait déjà l'expression grecque:

ab :: cd,

laquelle se transmettra jusqu'au XIX[e] siècle au moins (on la retrouve encore notamment dans les manuels de Lacroix), et d'autre part la notation qu'utilise la *Géométrie* de Descartes:

$$\frac{a}{b} \infty \frac{c}{d}$$

où seul le signe de l'égalité est à changer pour que nous y retrouvions notre notation moderne. Cette notation cartésienne doit suggérer immédiatement l'égalité de deux segments, ceux qu'on obtient par une construction géométrique, que l'auteur de la *Géométrie* a pris la peine de nous indiquer une fois pour toutes au début du livre I, en nous montrant qu'ils étaient équivalents au résultat d'une division de a par b et de c par d. De telles divisions d'un segment par un segment ne procèdent pas d'une opération sur des signes, mais d'une construction à la règle et au compas, construction pour laquelle Descartes nous fournit donc un algorithme, qui reste d'un bout à l'autre raisonnement.

Tous les propos de Descartes montrent que la fonction qu'il assigne aux idéogrammes n'est nullement de permettre de remplacer les raisonnements par des opérations sur les signes, mais au contraire de maintenir la continuité du pouvoir de l'intuition à travers les différentes étapes du raisonnement. Cette fonction de maintenir la présence à l'intuition de ce que le recours exclusif au langage vernaculaire risquerait de laisser perdre s'obtient en réalité d'au moins trois manières.

Descartes (1953: 108) lui-même explique, à la fin des *Regulae*, que, loin que sa notation algébrique ait une fonction opératoire, elle a pour but de permettre de *ne pas* effectuer les opérations, «pour que les parties du sujet, qui constituent la nature de la difficulté, demeurent toujours distinctes».

> Ainsi, par exemple, continue Descartes, si on cherche la base d'un triangle rectangle, dont les côtés donnés sont 9 et 12, le calculateur dira qu'elle est $\sqrt{225}$ ou 15; mais nous, au lieu de 9 et 12, nous poserons a et b, et nous trouverons que la base est $\sqrt{a^2 + b^2}$: ainsi les deux parties a^2 et b^2, qui dans le nombre sont confuses, demeureront distinctes.

De cette façon l'algèbre permet d'écrire l'équation ou le système d'équations qui rassemble sous le même regard toutes les données du problème, sans qu'aucune de ces données ait pu être effacée par effectuation de la moindre opération.

Ce souci de confier à la notation algébrique le soin de conserver l'intuition de toutes les données du problème explique l'attitude assez complexe de Descartes face à la règle d'homogénéité, sur laquelle avait insisté François Viète.

Rappelons d'abord ce que Viète (Vaulézard 1986: 22-23) appelle la *loi des homogènes*:

> Les grandeurs de même genre peuvent seules être ajoutées ensemble. Une grandeur ne peut ajouter une grandeur à elle hétérogène, comme la ligne tant grande soit-elle ne peut augmenter la superficie [...] de même la superficie n'ajoute rien au solide.

Ainsi Viète aurait-il désapprouvé notre manière post-cartésienne d'écrire l'équation du second degré:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

puisque le premier membre apparemment y additionne trois grandeurs ayant respectivement trois, deux et une dimension.

Or on dit souvent que Descartes, comme déjà Harriot avant lui, s'est affranchi de la condition d'homogénéité. Il est vrai qu'il explique, au début de sa *Géométrie*, pour quelle raison et dans quelle mesure il peut s'en affranchir: car enfin la multiplication d'un segment de droite par un segment de droite, telle que lui-même la présente, ne donne pas un rectangle (comme c'était encore le cas à la fin des *Regulae*), mais un autre segment de droite.

En revanche, quand Descartes se propose le traitement général d'un problème, par exemple quand il élabore une méthode de solution du *problème de Pappus* à quatre droites, quelle que soit la position de ces quatre droites, *il semble* qu'il respecte scrupuleusement la *loi des homogènes*. La formule à laquelle il aboutit est en effet une équation dans laquelle le terme du second degré y^2 est égal à une fraction qui est elle-même intégralement homogène, puisque son numérateur est constitué de termes additionnés ou soustraits qui sont tous du sixième degré, tandis que les termes constitutifs du dénominateur ne peuvent donc être tous que du quatrième.

Si Descartes respecte ici apparemment la condition d'homogénéité avec tant de soin, c'est qu'il prétend nous donner une méthode qui soit décisoire, quelle que soit la position relative des quatre droites, et qu'il faut à cet effet conserver distinctement toutes les données du problème et par conséquent se garder d'effectuer la moindre opération. Dans la mesure où l'équation qu'il obtient ainsi est du second degré, à une seule inconnue (si du moins on se contente de construire la courbe point par point), et où la solution d'une telle équation du second degré ne fait appel qu'aux cinq opérations (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée) dont il nous a donné dès le début la construction géométrique équivalente, sa méthode est un algorithme au sens plein, bien qu'elle n'ait rien d'une mécanique opératoire.

Si j'ai évoqué ici cette première manière dont la notation idéographique assure la présence à l'intuition de toutes les données du problème, telle que Descartes a pris la peine de l'expliquer, ce n'est pas seulement pour souligner les origines mathématiques de sa philosophie de l'intuition, bien qu'elles me paraissent assez manifestes, mais parce que lui-même se trouve avoir magnifiquement analysé le lien de sa notation idéographique, qu'il a tout de même léguée aux modernes, avec l'ensemble de sa méthode.

Il y a un deuxième usage de la notation idéographique, toujours au service de la transparence à l'intuition, sur lequel il ne semble pas que Descartes ait pris soin explicitement d'attirer l'attention. Car enfin cette notation permet non seulement de conserver toutes les données du problème, mais elle permet aussi de se débarrasser des redondances indissociables d'une représentation géométrique, qui ne peuvent que parasiter notre intuition des données fondamentales.

On s'en aperçoit quand on transpose en notation algébrique certaines démonstrations grecques, en les dépouillant des évocations géométriques dont les accompagnait l'auteur initial, et dont on découvre ainsi qu'elles n'avaient pour celui-ci d'autre fonction que de fixer l'attention sur les diverses entités que son lecteur devait garder toutes présentes à l'esprit, à défaut d'une véritable notation qui eût permis de désigner ces objets directement. Cette transposition algébrique, même si elle s'efforce de suivre le cheminement de l'auteur grec, ne peut s'empêcher de le simplifier, d'y introduire des raccourcis, parce qu'elle est amenée, par exemple, à laisser tomber telle égalité entre deux segments ou entre deux surfaces, dont cet auteur grec devait faire état parce que les segments ou surfaces étaient donnés comme distincts sur la figure, alors que, de par la seule désignation des grandeurs égales par la même lettre, ce rappel d'égalité devenait tout simplement sans objet. Ainsi le recours à l'écriture algébrique peut-il avoir pour effet de rendre immédiatement intuitives certaines étapes de la démonstration que l'évocation de la figure géométrique rendait inutilement discursives. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle, quand on met en forme algébrique telle démonstration d'Euclide, on peut avoir la surprise de la voir se dépouiller, parce que les égalités dont le raisonnement géométrique est tenu de faire explicitement état, une fois transcrites en algèbre, ne méritent plus toujours d'être mentionnées pour elles-mêmes.

Mais il y a encore au moins une troisième raison pour laquelle l'usage des idéogrammes contribue à renforcer l'intuition que le mathématicien doit garder, tout au long de sa démonstration, des entités, et de toutes les entités, sur lesquelles celle-ci porte. Faut-il rappeler qu'une des initiatives les plus heureuses qu'ait prises François Viète n'est pas d'avoir simplement désigné les grandeurs, géométriques ou non, par des lettres, mais d'avoir systématiquement utilisé deux sortes de lettres, pour désigner d'une part les *paramètres* et d'autre part les *inconnues*? Peu importe ici que ces deux sortes de lettres aient été pour Viète respectivement les consonnes et les voyelles, alors qu'elles deviendront pour Descartes, d'abord les minuscules et les majuscules, au niveau des *Regulae*, puis, au niveau de la *Géométrie*, ce qu'elles sont encore aujourd'hui, à savoir les premières et les dernières lettres de l'alphabet.

Le mérite de cette double désignation n'est nullement d'ordre opératoire. Il est d'abord d'éclairer le raisonnement analytique, dont l'usage, à partir du XVII^e siècle, va de plus en plus se généraliser. Comme chacun sait, l'analyse consiste initialement à supposer le problème résolu; démarche sans doute déjà présente dans les raisonnements des géomètres grecs. Mais le géomètre grec qui raisonnait analytiquement sur sa figure devait conserver à l'esprit (ce que sa figure ne lui indiquait pas explicitement) que, parmi les entités qui s'y trouvaient représentées, certaines faisaient partie des *données* du problème tandis que d'autres étaient l'objet ou les objets *cherchés*, que les unes étaient effectivement connues et les autres seulement supposées connues, donc qu'il y avait entre elles une différence radicale, dont la perception ne pouvait se fonder que sur l'effort de son attention. La notation de Viète ou celle de Descartes dispensait de l'effort et garantissait, sur ce point encore, le maintien à l'intuition de caractères qui pour l'analyse étaient fondamentaux.

Mais ce mode de désignation avait un autre mérite, dont les effets n'éclateront qu'un peu plus tard, celui de rendre les fonctions perceptibles, visibles, en tant que telles. La distinction des inconnues et des paramètres permet de désigner la fonction elle-même, par exemple celle de x et de y, prise dans toute sa généralité, c'est-à-dire quelle que soit la valeur des paramètres, a, b, c, etc. Ainsi sera facilitée l'intuition directe de l'objet mathématique *fonction*, son érection en entité autonome, à laquelle le mathématicien, sans une telle notation, aurait pu plus difficilement accéder. Aussi n'y a-t-il pas lieu de s'étonner qu'en ce XVII[e] siècle la fonction devienne, chez des auteurs comme Fermat et Descartes, et plus qu'implicitement, objet mathématique, bien avant que Leibniz (celui-ci à la fin du siècle) s'avise de la baptiser de ce nom de *fonction*, qui lui est resté.

Ce que je viens de dire à propos de la notation distincte des *inconnues* et des *paramètres* se laisserait transposer pour la notation distincte, introduite à la fin du XIX[e] siècle avec l'élaboration du *calcul des prédicats*, des variables et des constantes, distinction qui seule permet de jeter une clarté satisfaisante dans la théorie de la quantification, et sans laquelle la généralisation du concept de prédicat au-delà des limites étroites que lui avait assignées la tradition aristotélicienne serait demeurée à elle seule tout à fait insuffisante.

Tous les exemples que j'ai ici proposés sous trois rubriques successives tendent à montrer que l'introduction des idéogrammes algébriques, à un stade relativement tardif de l'évolution des mathématiques n'a pas eu d'abord une fonction opératoire et calculatoire, mais que leur principal apport fut de livrer à l'intuition l'accès à des objets mathématiques nouveaux, la conscience directe de ces objets étant évidemment condition nécessaire pour qu'on pût raisonner sur eux.

Sans doute, ces objets une fois reconnus comme tels et intuitionnés, les mathématiciens (Descartes parmi les premiers) vont-ils inventer des procédures décisoires qui pourront s'y appliquer. Le génie d'auteurs comme Leibniz sera non seulement d'inventer de nouveaux algorithmes, mais encore de comprendre qu'on peut dans certains cas y substituer des opérations sur les signes; à ce moment-là, il ne s'agira plus d'un raisonnement, mais bien d'un calcul qu'on appellera *le calcul*, où le raisonnement se trouve en fin de compte réduit à un enchaînement d'opérations, qu'on peut à la limite être capable d'effectuer sans en comprendre le sens. Car, à partir du moment où un mathématicien met au point un algorithme, c'est-à-dire parvient à montrer qu'il existe une méthode décisoire de résoudre tel ou tel problème, il y a quelque vraisemblance pour qu'on réussisse un jour à en imaginer quelque transposition matérielle, ne serait-ce que scripturaire. Pour revenir à l'exemple de l'avantage de la notation introduite par Viète, qui fut notamment de permettre l'intuition directe de l'objet *fonction*, ce qui en a été dit n'empêche pas de convenir qu'on réussira ultérieurement à opérer, à calculer sur cette entité *fonction* elle-même, qu'il avait tout de même fallu préalablement reconnaître en tant que telle.

Ainsi toute une part de l'activité mathématique consiste-t-elle

— d'abord, à ériger en procédures décisoires des raisonnements ou types de raisonnements qui n'étaient pas comme tels identifiés,
— ensuite, à mettre sous forme de calcul scripturaire les algorithmes en question.

Qu'il soit bien entendu que la succession de ces deux moments est essentiellement d'ordre logique, donc qu'elle est souvent, mais n'est pas toujours, aussi d'ordre chronologique.

La plupart du temps, à certains fragments d'un raisonnement mathématique correspondent des algorithmes ou des calculs, dont l'existence permet de soulager l'intuition du mathématicien, qui peut alors se concentrer ailleurs, et d'alléger l'ensemble de la démonstration. Ainsi le mathématicien moderne, à la différence du géomètre grec, suit-il habituellement une procédure semi-algorithmique, voire semi-calculatoire, c'est-à-dire qu'il sait qu'il peut remplacer tels segments de son raisonnement global par des algorithmes partiels, qui prennent fréquemment la forme de calculs scripturaires.

Cette substitution de procédures calculatoires à certains segments de la démonstration mathématique va se trouver facilitée par le recours à l'analyse. Nous avons vu combien la double notation des inconnues et des paramètres avait au XVII[e] siècle projeté sur cette analyse une clarté nouvelle, à laquelle n'avait pu accéder la version proprement géométrique où s'étaient tenus les Grecs.

Faut-il rappeler que, pour la tradition grecque dont nous sommes à cet égard les héritiers, la démarche normale des mathématiques est la synthèse, procédure qui, partant des postulats ou axiomes, eux-mêmes admis sans démonstration, va progressivement édifier tout le reste, en s'appuyant à chaque niveau sur ce qui, à ce moment-là, aura été préalablement établi ? Or cette voie de la synthèse se suffit d'inférences simples, c'est-à-dire qui ne soient pas essentiellement réversibles; de telles inférences, si elles permettent de passer d'un ensemble de propositions déjà admis aux conséquences qu'on en peut tirer, n'autorisent pas pour autant la démarche réciproque, celle qui permettrait de remonter d'une proposition simplement conjecturée jusqu'aux justifications qui en feraient un théorème. L'analyse au contraire est cette démarche qui permet de remonter soit d'une proposition simplement conjecturée aux théorèmes déjà établis qui en conditionnent la validité, soit de la supposition du problème résolu aux conditions suffisantes de sa solution, dont on peut alors s'assurer qu'elles se trouvent déjà remplies. Le propre du raisonnement analytique, et ce qui le différencie radicalement du raisonnement synthétique, est qu'il ne s'achemine pas seulement vers des conditions nécessaires, mais qu'il faut que ces conditions soient en outre suffisantes. Ceci revient à dire que, là où la synthèse peut se contenter d'inférences simples, l'analyse doit procéder, explicitement ou implicitement, par voie d'équivalences.

Mais on a le droit de s'interroger sur les raisons qui ont pu amener les mathématiciens à faire appel à cette analyse, alors que celle-ci les obligeait à recourir à une forme d'inférence plus exigeante que celle dont pouvait se contenter la classique synthèse. Cette question peut recevoir plusieurs réponses concurrentes, dont certaines n'entrent pas dans le cadre de notre présent sujet. Je m'arrêterai ici à la seule raison qui ait sa place dans notre propos.

Nous venons d'observer que, l'auteur de l'analyse ayant généralement procédé par voie d'équivalences, rien ne lui interdit, une fois sa remontée effectuée, de retourner sa démarche, qui va donc devenir une classique démonstration de ce qui était inconnu, à partir de vérités connues. On peut être tenté de dire qu'un tel retournement d'un raisonnement qui procédait par équivalences donne un nouveau raisonnement qui ne peut être lui-même qu'*équivalent* à celui à partir duquel on l'a obtenu. Or il est vrai que les deux raisonnements inverses l'un de l'autre, procédant l'un et l'autre par équivalence, sont *sémantiquement* équivalents l'un à l'autre, dans la mesure où l'équivalence propositionnelle est évidemment symétrique. Mais les deux raisonnements peuvent très bien ne l'être pas du tout *pragmatiquement.*

Le maître qui aurait enseigné à ses élèves la manière dont on élimine d'une équation les expressions fractionnaires, les racines carrées, les facteurs communs, pour la réduire à sa forme la plus simple, aurait le droit d'estimer que ces élèves soient en possession de tous les algorithmes calculatoires suffisant à montrer que l'expression de la racine de l'équation du second degré équivaut bien à la formulation classique de l'équation elle-même, selon les six étapes suivantes[1]:

① $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

② $$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

1. A la condition, bien sûr, que $b^2 - 4ac \geq 0$.

③ $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

④ $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

⑤ $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

⑥ $ax^2 + bx + c = 0.$

Si le maître faisait observer à ses élèves que sa démarche de ① à ⑥ ne procède jamais que par une suite d'équivalences, il soulignerait qu'il aurait aussi bien pu partir de l'étape ⑥ pour aboutir à l'étape ①. Il n'en reste pas moins que les algorithmes calculatoires qu'il a enseignés à ses élèves leur suffisaient pour obtenir successivement toutes les étapes de ① à ⑥, qu'ils suffisent encore à justifier toutes les étapes de ⑥ à ①, mais qu'ils ne suffiraient plus s'il s'agissait de les trouver.

Ainsi l'effort, que l'analyse impose, de procéder par équivalences est-il payé de cette compensation qu'il permet à l'auteur du raisonnement de choisir, entre deux démarches sémantiquement équivalentes, celle qui se prête le mieux aux algorithmes calculatoires, celle donc qui présentera pour lui le maximum de facilités[2]. Car enfin le succès dont jouit l'analyse, depuis le XVII^e^ siècle au moins, tient notamment à ce que, de deux démarches sémantiquement équivalentes, il est assez rare que l'une présente autant de facilités algorithmiques que l'autre;

2 Le présent exemple comporte cette faiblesse que l'enseignement classique de la solution de l'équation du second degré n'emprunte aucune des deux voies ici tracées. Il n'est d'ailleurs pas sans intérêt de se demander pourquoi. La démonstration classiquement enseignée correspond à une cote mal taillée, qui a l'avantage de procéder à partir de l'équation en direction de sa racine, quitte à se trouver dans l'obligation d'interpréter $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme une différence de deux carrés, interprétation qui, à première vue, ne s'impose pas plus que la voie suivant laquelle on pouvait, dans notre schéma, passer de ⑥ à ⑤ et de ⑤ à ④.

entre ces deux démarches, le mérite de l'analyse est de nous offrir le choix.

Ainsi semble-t-il que, derrière ce terme de *calcul*, se dissimulent des réalités extrêmement différentes, dont certaines n'ont pas grand chose à voir avec les procédures strictement opératoires, qui ne correspondent jamais qu'à l'une des acceptions du terme. À ces dernières, il serait abusif de réduire toute son attention pour la seule raison que leur caractère grossièrement paradoxal nous les rend si visibles que leur éclat risque de dissimuler le reste, d'autant que ce reste peut à son tour éclairer les ressorts de leur paradoxalité. Prenons garde aux confusions et amalgames, d'autant plus redoutables qu'ils confèrent à des concepts comme celui-ci des résonances, des échos, des reflets, des chatoiements, qui ne peuvent que contribuer à leur succès médiatique, aux dépens du respect de l'humble vérité.

Département de philosophie
Université de Nantes,
B.P. 1026, F-44035 Nantes

Références bibliographiques

DESCARTES R. (1953). *Œuvres et lettres*. Paris: Gallimard.

VAULÉZARD J.-L. (1986). *La nouvelle algèbre de M. Viète*, précédée de *Introduction en l'art analytique*. Paris: Corpus des œuvres de philosophie en langue française.