Publié dans Travaux de logique 19, 73-113, 2008,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DE LA DÉFINITION CHEZ PASCAL AUX DÉFINITIONS EN LOGIQUE COMBINATOIRE

Jean-Pierre DESCLÉS

1. Définition de la définition par Pascal

Dans l'approche traditionnelle, la définition est un discours qui expose la nature de la chose ou la signification du terme : *Oratio naturam rei aut significationem termini exponens*. Elle comporte en général deux éléments : le genre (par exemple, la classe à laquelle l'objet appartient) et au moins une différence spécifique (qui détermine l'espèce et la distingue de toute autre espèce). Ainsi, nous pouvons définir « le rectangle » par une identification :

(1) [Rectangle $=_{def}$ quadrilatère à angles droits].

La logique classique a classé les définitions : (i) définitions essentielles par genre et différence spécifique ; (ii) définitions descriptives par les propriétés ; (iii) définitions extrinsèques par ses causes efficientes ou génétiques ; (iv) définitions (nominales) par étymologie ou par des mots plus connus.

Blaise Pascal, dans *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, retient la définition nominale pour expliquer le rôle des définitions dans la méthode géométrique :

> Cette véritable méthode [la méthode géométrique] (...) consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliquer nettement le sens ; l'autre de n'avancer

> jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. Mais pour suivre l'ordre même que j'explique, il faut que je déclare ce que j'entends par définition.
> On ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de noms aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus ; et je ne parle que de celles-là seulement.
> Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours, en exprimant par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement.
> En voici un exemple : (...) j'appelle tout nombre divisible en deux également, nombre pair.
> Voilà une définition géométrique : parce qu'après avoir clairement désigné une chose, savoir tout nombre divisible en deux également, on lui donne un nom que l'on destitue de tout autre sens, s'il en a, pour lui donner celui de la chose désignée. (*Œuvres complètes*, 577)

La définition est libre, elle abrège les discours mais il ne faut cependant pas abuser de cette liberté :

> D'où il paraît que les définitions sont très libres, et qu'elles ne sont jamais sujettes à être contredites; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. Il faut cependant prendre garde qu'on abuse de la liberté d'imposer des noms en donnant le même à deux choses différentes.
> (...) Mais si l'on tombe dans ce vice, on peut lui opposer un remède très sûr et infaillible : c'est de substituer mentalement la définition à la place du défini (...) car les géomètres et tous ceux qui agissent méthodiquement, n'imposent des noms aux choses que pour abréger le discours, et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discourent. Et ils prétendent que l'esprit supplée toujours la définition entière aux termes courts, qu'ils n'emploient que pour éviter la confusion que la multitude des paroles apporte. (*Œuvres complètes*, 578)

Cependant, Pascal pose une question fondamentale : « Peut-on (et doit-on) tout définir ? »

> [...] Aussi, en poussant les recherches de plus en plus on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. (*Œuvres complètes*, 578)

L'ordre géométrique ne définit pas tout :

> [l'ordre géométrique] ne définit pas tout et ne prouve pas tout. [...] il ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours. Cet ordre, le plus parfait entre les hommes, consiste non pas à tout définir ou à ne rien démontrer, mais à se tenir dans ce milieu de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres [...]. Contre cet ordre pèchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout prouver et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes d'elles-mêmes.
> C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables [...] parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction. Car il n'y a rien de plus faible que le discours de ceux qui veulent définir ces mots primitifs. Quelle nécessité y a-t-il, par exemple, d'expliquer ce qu'on entend par le mot *homme* ? (*Œuvres complètes*, 579)

Ainsi, pour Pascal « l'idée d'homme » devrait être considérée comme une primitive. Aussi ironise-t-il sur la définition, à la manière de Platon, par genre et différences spécifiques :

[Homme $=_{def}$ animal bipède et sans plumes][1] :

> L'idée [d'homme] que j'en ai naturellement, et que je ne puis exprimer, n'était pas plus nette et plus sûre que celle qu'il me donne par son explication inutile et même ridicule : puisqu'un homme ne perd pas son humanité en perdant ses deux jambes, et qu'un chapon ne l'acquiert pas en perdant ses plumes. (*Œuvres complètes*, 579)

La présentation usuelle de la mathématique actuelle repose sur la théorie naïve des ensembles, laquelle ne définit pas directement la notion d'ensemble qui est une sorte d'indéfinissable, parce que reprenant Pascal, ce terme-là « désigne si naturellement les choses qu'il signifie, à ceux qui entendent la langue »[2]. Certes, pour éviter des difficultés qui apparaissent lorsqu'on approfondit la construction et la définition de certains ensembles particuliers, on doit préciser des propriétés axiomatiques qui vont restreindre l'utilisation même d'ensemble (par exemple, « l'ensemble de tous les ensembles » n'a pas d'existence !), comme étant une partie d'un Univers (au sens de Gödel); la relation d'appartenance '$\in$' à une classe est posée comme une relation primitive à partir de laquelle on peut définir d'autres relations, dont l'inclusion '$\subseteq$' et l'égalité entre classes, puis les fonctions définies comme des ensembles de couples... En revanche, dans l'approche de Curry, sur laquelle nous allons revenir, « l'opération d'application d'un opérateur à un opérande » est considérée comme une opération primitive ; à partir de laquelle on peut alors définir les notions de fonction, pensée cette fois comme « une procédure opératoire », appelée plutôt

1 Il est bien difficile de se mettre d'accord sur ce qui serait une définition de l'homme même si nous sommes tous capables de différencier ce qui est homme de ce qui ne l'est pas.

2 La théorie des ensembles définit les propriétés des ensembles, notamment en montrant que les ensembles et les applications entre ensembles forment une catégorie particulière (une catégorie cartésienne fermée).

opérateur[3], puis définir la notion de proposition, puis les opérateurs logiques (« les constantes logiques » : connecteurs, quantificateurs...), puis les nombres, puis les fonctions récursives....

Ainsi, une définition, selon *l'Esprit géométrique*, est : (i) nominale ; (ii) elle éclaircit et abrège le discours ; (iii) elle est libre mais non sujette à contradiction ; (iv) elle est soumise à la substituabilité dans tous les contextes ; (iv) elle admet des termes non définis (des primitives) ; (vi) elle est distincte des définitions de choses, qui sont des propositions, sujettes à contradiction.

2. Comment définir ?

La linguistique structurale et un grand nombre de modèles formels des langues naturelles proposent des définitions d'unités sémantiques par des listes de traits[4], ce qui revient souvent à appréhender les définitions des termes sous la forme de vecteurs booléens dans un espace plus ou moins structuré de sèmes (classificatoires, fonctionnels, spécifiques). Reprenons l'exemple historique de B. Pottier (1955) (figure 1)

3 En prenant pour base la notion d'ensemble, une fonction f : X –> Y est définie comme étant un ensemble particulier, appelé « le graphe de f », c'est-à-dire comme un ensemble de couples <x,y> tels que pour chaque x de X (un argument de f), il existe un unique y de Y (l'image de x par f), d'où la notation : <y = f(x)>

4 La psychologie cognitive aborde souvent la sémantique par la description sous forme de traits (Voir, par exemple Jean-Frnaçois Le Ny 2005). Il en est de même de nombreux modèles du Traitement Automatique des Langues et de l'Intelligence Artificielle qui ramènent la sémantique aux seules descriptions par des traits (ou valeurs booléennes).

Définitions par vecteurs booléens de sèmes

Lexèmes	SEMES				
	fonctionnel	classificatoire	spécifiques		
	« pour s'asseoir »	« meuble »	« avec bras »	« avec dossier »	« avec pieds »
Fauteuil	+	+	+	+	+
Chaise	+	+	-	+	+
Tabouret	+	+	-	-	+
Pouf	+	+	-	-	-

Figure 1 : Un exemple classique d'analyse structurale

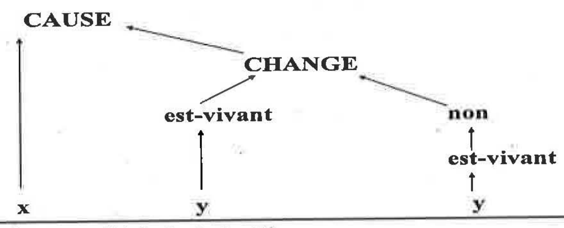
Remarquons immédiatement que les sèmes choisis pourraient apparaître comme des éléments primitifs de description. Pourtant, ce ne sont pas des « primitifs » au sens de Pascal, car ils sont déterminés dans un domaine lexical[5] où il est possible d'opposer simplement des termes lexicaux deux à deux par des attributions (ou non attributions) de sèmes différenciateurs : les sèmes permettent seulement d'expliquer les différences sémantiques entre des termes[6]. Si l'analyse sémantique par sèmes ou par traits est évidemment très utile pour décrire les oppositions sémantiques entre des termes lexicaux d'un même domaine d'expérience, elle s'avère cependant vite assez limitée pour décrire, entre autres, la polysémie verbale ou la polysémie des prépositions et, plus généralement, les systèmes des significations des marqueurs des catégories grammaticales (comme le temps, l'aspect, les modalités, les diathèses...).

Il est intéressant de noter que la linguistique actuelle, en passant de la linguistique structurale à une linguistique cognitive, cherche à dépasser les analyses purement sémiques pour proposer des schèmes, définis comme des représentations structurées de significations. Par exemple B. Pottier (2000), comme d'autres

5 En fait un « micro-domaine » ou comme l'explique B. Pottier « un domaine d'expérience ».
6 Cette méthode par oppositions est héritée de la phonologie.

linguistes[7], chacun avec des formalismes plus ou moins opératoires, proposent maintenant des descriptions au moyen de schèmes et de moins en moins au moyen de sèmes. Pour notre part, nous développons des analyses sémantiques sous la forme de schèmes sémantico-cognitifs[8]. Pour reprendre un exemple célèbre de Mc Cawley, le prédicat binaire « tuer (x,y) » est définissable, comme un prédicat complexe, dont l'analyse sémantique est effectuée à l'aide de prédicats plus élémentaires : « est-vivant », « CAUSE», « CHANGE » et de l'opérateur de négation propositionnelle « non ». Cette analyse est souvent représentée par un arbre ou par une expression bien parenthésée (voir la figure 2).

Analyse sémantique de « tue (x,y) »



Expression parenthésée équivalente :

« x CAUSE ((y est-vivant) CHANGE (non (y est-vivant))) »

dont l'interprétation est : « l'actant 'x' cause un changement qui fait passer l'actant 'y' de l'état 'y est vivant' à l'état 'il n'est pas vrai que y est vivant' ».

Figure 2 : Une analyse sémantique de « tue », d'après Mc Cawley

Comme on le voit avec cette représentation formelle, l'analyse sémantique ne peut plus se ramener à une simple description

7 Par exemple dans le courant de la sémantique cognitive : R. Jackendoff, L. Talmy, R. Langacker ...

8 Voir, entre autres Desclés (1990) et les thèses soutenues décrivant des réseaux sémantiques très précis de schèmes sémantico-cognitifs dans différentes langues (français, russe, bulgare, grec, coréen ...).

booléenne ou des sèmes, ou des traits, seraient activés ou non activés[9] ; il s'agit ici d'une organisation plus structurée où des propositions sont les arguments d'autres prédicats[10]. Une telle description en termes de prédicats ne permet cependant pas de montrer exactement comment se construit le prédicat transitif « tue (x,y) » à partir de composantes plus élémentaires ; en d'autres termes il faut être capable de décrire *un processus d'intégration* par des modes de composition des prédicats élémentaires[11] entre eux, de façon à dégager les deux places 'x' et 'y' des arguments qui sont des places d'actants[12].

Les langues naturelles font apparaître de nombreux exemples de « prédicats complexes » construits à partir de prédicats verbaux (jugés « plus profonds » ou plus primitifs) et de marqueurs linguistiques d'opérations langagières, par exemples d'opérations grammaticales, certains de ces marqueurs sont clairement identifiés comme par exemple des préfixes verbaux[13]. Ces marqueurs sont les traces d'opérateurs qui viennent, par

---

9 La psychologie cognitive (par exemple Le Ny, 2005) fait souvent appel pour ses descriptions et représentations du lexique à des activations (ou inhibition) de traits.

10 Nous reviendrons sur l'analyse sémantique de « tue(x,y) » en proposant une représentation formelle mieux fondée car intégrée dans le formalisme logique du λ-calcul typé et de la Logique Combinatoire. En effet, la représentation par un arbre selon Mc Cawley ne permet pas toujours de bien indiquer les différents types des constituants : Quels sont les types fonctionnels des prédicats ? Comment cette structure formelle se synthétise en une nouvelle unité prédicative autonome ?

11 Rappelons, que depuis G. Frege, les prédicats sont devenus des êtres mathématiques qui expriment des concepts sous la forme de fonctions entre des domaines (par exemple des domaines déterminés dans un Univers de discours au sens de Peirce) et l'ensemble {le-vrai, le-faux} ; d'une façon plus abstraite, les concepts sont donc des opérateurs d'un certain type ; étant des opérateurs, ils sont donc *a priori* composables. Nous allons voir comment dans la suite du texte.

12 Nous allons reprendre cette analyse en précisant le processus d'intégration sous la forme d'un opérateur qui exprime un programme compositionnel.

13 Les marqueurs casuels, dans les langues à cas, les marques de genre et de nombre, les suffixes de conjugaison sont également des traces d'opérations sémantiques. Les préverbes jouent un grand rôle dans les langues slaves pour indiquer des valeurs aspectuelles de perfectivisation (prise en compte d'un achèvement). Sur les traces d'opérateurs métalinguistiques, voir Desclés (2006a).

exemple, modifier la valence et la signification des prédicats lexicaux qui en sont les opérandes comme dans : *se-laver, se-lever, se-quereller-avec ; en-dormir, sur-veiller, sur-passer, entre-poser, dé-poser, ex-poser, par-venir, re-venir ; faire dormir, faire danser, faire manger, faire mourir, faire tuer, être instruit, devenir instruit*... Certains de ces préfixes sont reconnus comme des préverbes associés étroitement à des prépositions[14] (*en, sur, entre, par*...), d'autres marqueurs sont des verbes support (*faire, devenir* ;...). En se composant formellement avec des prédicats lexicaux, ces opérateurs traduisent-ils des mécanismes de composition de significations plus élémentaires ? Certains linguistes répondent, par exemple, que les préfixes et les verbes support tendent à être « vides de toute sémantique » pour jouer un rôle purement formel ; d'autres linguistes soutiennent plutôt que les préverbes et les verbes support, en se composant sur le plan morphologique avec des lexèmes verbaux, construisent d'autres significations verbales dérivées qui gardent des liens sémantiques profonds avec d'un côté, les significations des prépositions initiales et d'un autre côté, les significations des verbes ingrédients. Autrement dit, la composition morphologique exprimerait-elle une certaine composition sémantique ? Pour argumenter en faveur de la compositionnalité, il est cependant nécessaire de dégager d'une part, les significations abstraites des éléments composés (sous forme de schèmes) et d'autre part de préciser exactement les modes de composition des opérateurs qui effectuent la composition. La compositionnalité se ramène-t-elle à de simples compositions de valeurs booléennes comme dans l'approche structurale ou bien à une composition ensembliste des fonctions associées aux prédi-

14 La diachronie confirme une relation entre préverbes, prépositions et adverbes.

cats[15] ? Si non, comment construire les prédicats complexes ? Au moyen de quelles opérations explicites ?

Ainsi, que ce soit en linguistique, mais également en logique, comme nous allons le voir avec quelques exemples, ou encore en informatique, nous avons besoin de définir des prédicats et des opérateurs complexes en montrant comment ils se construisent à partir de prédicats et d'opérateurs plus élémentaires. Mais si de tels prédicats et opérateurs sont composables entre eux, il nous faut alors préciser explicitement les modes de composition. Comment alors définir des modes plus généraux de composition que la simple composition ensembliste ? Sous la forme d'opérateurs abstraits ? Quelles sont alors les propriétés minimales que ces opérateurs de composition doivent posséder ? Nous allons tenter de donner quelques éléments de réponse à ces diverses questions.

3. Une théorie fonctionnelle des définitions

En suivant Pascal, la définition revient à établir une relation entre un *definiendum* et un *definiens* où le *definiens* contient soit des termes primitifs (des termes non définis), soit des termes déjà définis. La relation peut être très simple comme dans le cas des vecteurs booléens qui affirment la présence ou l'absence d'un trait définitoire, accepté comme primitif, ou plus complexe car mettant en jeu des relations emboîtées ou intriquées. S'inspirant directement de *l'Esprit de géométrie*, nous souhaitons rendre plus opératoire cette approche en faisant appel aux outils des logiques actuelles[16]. Dans notre approche, les compo-

15 On rappelle que pour nous, en suivant Frege, un prédicat est, en première approximation, une fonction d'un domaine dans {vrai, faux}. La composition ensembliste de deux fonctions 'f' et 'g' composables est telle que l'on a : (f 0 g) (x) = f(g(x)).

16 La notion de fonction, et celle corrélative et plus abstraite d'opérateur (Desclés 1981), n'est pas encore bien dégager dans l'Analyse mathématique naissante au temps de B. Pascal. Il

santes constitutives, ou ingrédients sémantiques, $C_1, C_2,\ldots, C_n$ d'un *definiens* doivent être composées entre elles par « un opérateur » '**X**', ce qui revient à poser alors une identification :

(0) [*definiendum* $=_{def}$ **X** $C_1\, C_2 \ldots Cn$]

Cet opérateur '**X**' exprime en fait une fonction procédurale (appelée « opérateur ») destinée à « composer entre eux » les éléments constitutifs de la définition du terme que l'on souhaite définir.

Prenons un exemple très simple et illustratif. Le prédicat unaire « être-pair » peut être ramené à la conjonction de deux prédicats plus élémentaires. Cependant, la définition n'est pas directe mais est présentée par une relation d'équivalence entre deux formes propositionnelles quantifiées universellement :

(1) (∀x) [être-pair(x) $=_{def}$ être-divisible (x) & être-en-deux-parties (x)][17]

Par cette définition, le *definiendum* est exprimé par une combinaison booléenne de deux formes propositionnelles du *definiens.* Elle doit utiliser une variable 'x' (liée par le quantificateur), ce qui impose alors la définition préalable d'un domaine de parcours de cette variable (entiers naturels, nombres réels,...), appelé souvent « univers de discours » ou domaine de référence. Peut-on définir des relations entre un *definiendum* et son *definiens,* qui transcenderaient des domaines particuliers ? Par exemple, peut-on définir un opérateur d'addition à partir d'opérateurs plus élémentaires, aussi bien pour l'addition

faudra plus d'un siècle et demi pour que la notion générale de « fonction » commence à se dégager avec Cauchy pour aboutir à la notion encore plus générale d'opérateur avec la Logique Combinatoire de Curry (1958), en passant par l'extension, effectuée par Frege (1893), des fonctions aux domaines non numériques, en particulier à l'analyse de la logique.

17 Comme nous le verrons plus loin, la définition du concept « être-pair » s'exprime à l'aide d'un certain opérateur de composition, désigné par 'Φ, qui « intrique » entre eux les deux prédicats avec un opérateur de conjonction
[être-pair $=_{def}$ Φ & (être-divisible) (être-en-deux-parties)]

d'entiers, l'addition de nombres réels, l'addition de vecteurs, l'addition de matrices, l'addition d'opérateurs fonctionnels dans un espace de Hilbert... ?

Dans l'exemple de la définition (1), la combinaison des deux composantes est très simple puisqu'elle fait appel à une conjonction (à l'aide du connecteur de conjonction '&') de deux formes propositionnelles. Or, les modes de combinaison nécessaires dans un grand nombre de définitions, en particulier en mathématiques ou en logique lorsqu'on analyse les concepts ou encore, comme nous l'avons vu, en linguistique, ne peuvent pas se ramener à de simples combinaisons booléennes de formes propositionnelles. Il nous faut donc généraliser les modes de composition. Nous allons exprimer des processus de composition (en fait des programmes de composition) sous la forme d'opérateurs abstraits. Les « combinateurs » de la Logique Combinatoire de Curry (1958) jouent justement ce rôle :

- Dans le cadre de la Logique Combinatoire, on peut exprimer non seulement des termes (renvoyant à des « objets ») mais aussi des opérateurs, des relations, des prédicats qui se composent entre eux au moyen d'opérateurs abstraits, appelés « combinateurs ».
- Les combinateurs expriment des opérateurs abstraits, qui construisent des fonctions mathématiques, plus ou moins complexes, qui en s'appliquant aux composantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ d'un *definiens*, déterminent la signification d'un *definiendum* à partir des significations (déjà construites ou acceptées comme primitives) des composantes du *definiens*.

4. Logique Combinatoire (LC) de Curry

Nous renvoyons aux ouvrages qui présentent le formalisme : la Logique Combinatoire de Curry (1958, 1972) et celui du λ-calcul de Church (1941)[18], qui lui est en partie apparenté. L'appellation « Logique Combinatoire » peut conduire à des interprétations trop réductrices, voire erronées, car il ne s'agit pas d'un formalisme de manipulations syntagmatiques des positions de symboles mais plutôt d'une logique de compositions intrinsèques[19] d'opérateurs (en considérant, pour la généralité de la formulation, que les opérandes absolus sont également des opérateurs, mais des opérateurs zéro-aires). Lorsqu'un combinateur, en tant qu'opérateur, s'applique à une seule composante, il n'y a pas à proprement parler, composition car il construit une composante dérivée, qui est alors la valeur d'une fonction à un seul argument[20]. L'opération primitive de ce formalisme est *l'opération d'application*, désignée par '@', selon le *schème applicatif*[21] :

(2) $[\omega \ @ \ \xi_0 \ \Rightarrow \ \xi_1]$

18 Voir les références données dans la bibliographie, par exemple : Fitch (1974), Barendregt (1980), Hindley et Seldin (1986). Pour des applications à la linguistique, voir Grize (1971), Shaumyan (1987), Desclés (1990).

19 Nous allons expliquer cette notion fondamentale de « composition intrinsèque ». Voir aussi Desclés (1981, 1990) ; Desclés et Cheong (2006).

20 Prenons une relation binaire définie sur le domaine des nombres, par exemple, la relation '$>$'. La converse '$<$' de cette relation est dérivée de '$>$'. Pour exprimer cette conversion, on fait appel à un combinateur 'C', dont l'action opératoire est définie comme suit :
$CXyx \rightarrow Xxy$; nous pouvons donc écrire : $[< \ =_{def} \ C >]$.

21 Nous exprimons également cette opération d'application soit par un arbre applicatif :

$$\frac{\omega \qquad \xi_0}{\xi_1}$$

soit par une simple notation linéaire 'ω @ ξ_0' ou plus simplement par '$\omega\xi_0$', en omettant de noter explicitement l'opération d'application '@' et avec des conventions sur le parenthésage. Prenons le combinateur 'C' de la note précédente, nous avons, par exemple, l'expression applicative '(((C @ X) @ y) @ x)' qui s'écrit de façon plus simple 'CXyx'. Remarquons cependant que l'expression 'ω @ ξ_0' qui exprime le programme applicatif de l'application de 'ω' à 'ξ_0' *avant son exécution* et le résultat 'ξ_1' qui en résulte *après l'exécution* de l'opération d'application, ne sont pas co-extensifs car ils diffèrent dans le temps.

où 'ω' est la place d'un opérateur qui en s'appliquant à un opérande dont la place est 'ξ_0' doit construire un résultat dont la place est 'ξ_1'. Le résultat construit pourra fonctionner dans un autre contexte d'emploi, comme un opérateur ou comme un opérande (d'un autre opérateur, éventuellement de lui-même, un opérateur pouvant s'appliquer à lui-même). Ce formalisme engendre des *expressions applicatives* (*ou combinatoires*) à partir d'atomes. Les expressions applicatives sont interprétées comme des opérateurs applicables à des opérandes ou comme des opérandes absolus (des opérateurs zéro-aires) ne pouvant alors jamais jouer le rôle d'un opérateur dans un schéma applicatif.

Comme nous l'avons déjà dit, la Logique Combinatoire de Curry introduit des opérateurs abstraits, appelés combinateurs, qui opèrent sur d'autres opérateurs, y compris sur eux-mêmes, pour les composer selon un certain mode de composition ; ce mode de composition est en fait une fonction[22] destinée à construire des opérateurs (ou des programmes informatiques[23]) plus complexes à partir d'opérateurs plus élémentaires.

Donnons quelques exemples de modes de composition exprimés par des combinateurs : Les règles (d'introduction et d'élimination) d'action des combinateurs sont associées à

22 Nous ne partageons pas entièrement l'interprétation générale de Jean-Pierre Ginisti (1997), pour qui la Logique Combinatoire serait un formalisme de manipulation « d'objets quelconques », dont l'ontologie serait différée. Pour nous, les entités appréhendées par la Logique Combinatoire qui est, par nature, un système applicatif, sont nécessairement des opérateurs composables entre eux ou des opérandes absolus qui ne sont alors jamais des opérateurs. Les combinateurs sont nécessairement des opérateurs. Nous ne sommes pas d'accord non plus avec la remarque de Jean-Yves Girard (2006 : 117), pour qui la Logique Combinatoire resterait « globalement inférieure au λ-calcul » en prenant pour argument que le λ-calcul est en étroite relation avec la déduction naturelle. Or, également on peut relier étroitement Logique Combinatoire et déduction naturelle de Gentzen, ce qui affaiblit l'argument de Girard.

23 Dans la programmation applicative ou fonctionnelle, les programmes sont des expressions applicatives mettant en jeu des opérateurs appliqués à des opérandes. Les programmes élémentaires sont composés entre eux par des combinateurs pour engendrer des programmes applicatifs plus complexes.

chaque combinateur (dans le style de Gentzen) ; ces règles engendrent des relations, appelées techniquement des β-réductions, entre l'expression applicative qui exprime « le programme d'action du combinateur » (la partie gauche de la relation) et le résultat de l'action du combinateur (la partie droite de la relation). Les symboles 'X', 'Y', 'Z', 'U' et 'V' exprimant des expressions applicatives quelconques, les règles d'élimination et les β-réductions associées des combinateurs élémentaires sont présentées dans le tableau de la figure 3.

Nom du combinateur	Règles (d'élimination)	Relations de réduction
B (composition fonctionnelle)	BXYZ /- X(YZ)	BXYZ ≥ X(YZ)
I (identité)	IX /-X	IX ≥ X
C (conversion)	CXYZ /- XZY	CXYZ ≥ XZY
W (diagonalisation)	WXY /- XYY	WXY ≥ XYY
Φ (intrication)	ΦXYZU /- X(YU)(ZU)	ΦXYZU ≥ X(YU)(ZU)
S (fusionneur)	SXYZ /- XZ(YZ)	SXYZ ≥ XZ(YZ)
K (éliminateur / introducteur d'opérande fictif	KXY /-X	KXY ≥ X
C* transposition Opérande / opérateur	C* XY /- YX	C*XY ≥ YX

Figure 3 : Règles d'élimination et β-réductions des combinateurs élémentaires

Une composition d'opérateurs est considérée comme *intrinsèque* lorsqu'elle est *indépendante des domaines des opérateurs composés* (donc de leurs interprétations extensionnelles). La Logique Combinatoire est une *logique des processus opéra-*

toires effectués au moyen de compositions exprimées par les combinateurs qui expriment des modes intrinsèques[24] de composition d'opérateurs. Pour faire comprendre cette notion de « composition intrinsèque », partons d'un exemple simple. Dans un espace fonctionnel d'opérateurs, par exemple dans un espace de Hilbert, la multiplication d'opérateurs fonctionnels est définie de façon informelle, par l'équivalence entre des valeurs déterminées sur un domaine :

(3) ($\forall$x) [(g multiplié-par f) (x) $=_{def}$ multiplication-de (g(x)) par (f(x))]

Le *definiens* (positionné à droite de '$=_{def}$') 'multiplication-de(g(x)) par (f(x))' peut être évalué dans le co-domaine des deux opérateurs 'f' et 'g' puisque 'f(x)' et 'g(x)' possèdent des valeurs calculables dans ce co-domaine. En Logique Combinatoire, la composition des deux opérateurs 'f' et 'g' par l'opérateur binaire « multiplier » est exprimée au moyen d'un combinateur de composition par intrication, désigné par '**Φ**'; ce combinateur '**Φ**' construit l'opérateur complexe '« multiplier »fg', à partir de l'opérateur binaire « multiplication-de-par » et des opérateurs composés 'f' et 'g'. L'action de cet opérateur complexe sur un opérande quelconque, désigné par 'x', est déterminée à partir de l'action du combinateur '**Φ**' sur ses opérandes successifs '« multiplication-de-par »', 'f' et 'g'. En utilisant une notation applicative préfixée (où l'opérateur est toujours positionné devant son opérande), nous obtenons :

(4) [(« multiplier »fg) @ x = (((**Φ** « multiplication-de-par ») @ f) @ g) @ x]

Nous en déduisons alors la signification du *definiendum* « multiplier » (deux opérateurs) par un *definiens*, cette signification

24 Dans la théorie des catégories, un certain nombre d'opérations (par exemple les transformations naturelles) sont également intrinsèques (voir Desclés,1981).

est exprimée sous la forme d'une équivalence entre deux opérateurs :

(5) [« multiplier » $=_{def}$ $\boldsymbol{\Phi}$ « multiplication-de-par »]

L'opérateur binaire « multiplier » compose des opérateurs, alors que l'opérateur « multiplication-de-par » opère sur les valeurs des opérateurs composés. Plus précisément, nous avons la déduction formelle :

1.	((« multiplier »)fg) (x)	
2.	[« multiplier » $=_{def}$ $\boldsymbol{\Phi}$ « multiplication-de-par »]	def.
3.	(($\boldsymbol{\Phi}$ « multiplication-de-par »)fg) (x)	rempl.
4.	« multiplication-de-par » (f(x)) (g(x))	élim. $\boldsymbol{\Phi}$

La composition par intrication, opérée par le combinateur '$\boldsymbol{\Phi}$', est ici *intrinsèque* puisque l'interprétation des opérateurs composés n'intervient pas.

Prenons un autre exemple en reprenant le combinateur '**C**'. L'opérateur converse 'C+' dérivé d'un opérateur binaire '+' d'addition, est construit de façon intrinsèque[25]. On exprime ainsi intrinsèquement la commutativité de l'opérateur '+' par l'équivalence entre opérateurs :

(6) [C+ = +]

Cette propriété de commutativité de l'addition est valable pour différents domaines : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes, vecteurs, matrices...

Toutes les compositions d'opérateurs ne sont cependant pas définissables de façon entièrement intrinsèque. Prenons un

[25] Etant donné un opérateur 'X' quelconque, il ne possède pas en génral la propriété de commutativité puisque, par exemple le prédicat « aime » n'est pas équivalent à son converse « C aime » (*Falco aime Esméralda* mais malheureusement, *Esméralda n'aime pas Falco*). Chaque opérateur binaire 'X' a un opérateur converse 'CX' construit par le combinateur C , par exemple : [< = C>].

exemple. Toujours dans un espace fonctionnel d'opérateurs, prenons la « division » de deux opérateurs que l'on définit informellement comme suit :

(7) [(g divisé par f)(x) $=_{def}$ division-de g(x) par f(x)
si f(x) ≠ 0
et sinon non définie]

La définition de l'opérateur binaire « divisé-par » portant sur des opérateurs fonctionnels n'est pas entièrement intrinsèque car elle dépend de l'interprétation extensionnelle des composantes, en particulier du co-domaine de 'f'.

D'une façon générale, les combinateurs sont des opérateurs qui expriment des programmes de composition d'opérateurs plus élémentaires. Ils sont donc utilisés pour « construire des opérateurs complexes » à partir d'un certain nombre d'opérandes (opérateurs ou opérandes absolus[26]). A titre illustratif, précisons, le rôle opératoire du combinateur '**B**' dont l'action formalise la composition fonctionnelle (ou ensembliste) de deux opérateurs 'f' et 'g', en posant :

(8) [f o g $=_{def}$ **B**fg]

Cette notation 'f o g' exprime exactement dans le cadre ensembliste, la composition fonctionnelle ordinaire de deux fonctions (opérateurs) puisque nous avons :

(8') (f o g)(x)	
[f o g $=_{def}$ **B**fg]	def. 0
(**B**fg)(x)	rempl.
f(g(x))	élim. **B**

26 Par exemple, X étant un opérande absolu, le combinateur '**K**' construit à partir de X, un opérateur dérivé '**K**X' qui est une fonction constante puisque '**K**XY' ≥ X'. De même, si 'X' est opérande d'un opérateur 'Y', le combinateur '**C***' appliqué à 'X' construit un opérateur '**C***X' dont 'Y' est devenu opérande : '(**C***X)Y ≥ YX'

On peut vérifier facilement que la composition fonctionnelle vérifie la propriété d'associativité:

$$(8'') \quad f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Les autres combinateurs élémentaires servent à exprimer des modes de composition plus complexes. Par exemple, le combinateur '**Φ**' exprime l'intrication[27] des opérateurs 'Y' et 'Z' qui opèrent « en parallèle et simultanément » sur le même opérande 'U', les deux résultats étant deux opérandes de l'opérateur 'X', d'où : **Φ**XYZU = X(YU)(ZU).

4.1. Propriétés remarquables des combinateurs

- Les combinateurs sont composables entre eux par l'opération d'application.
- Les combinateurs ne sont pas indépendants, certains combinateurs peuvent être pris comme des combinateurs élémentaires qui permettent de construire des combinateurs dérivés[28] : *un combinateur* est une expression applicative *qui ne contient que des occurrences* de combinateurs (élémentaires ou dérivés).
- Certains combinateurs élémentaires peuvent être pris comme des combinateurs primitifs à partir desquels on peut définir tous les autres combinateurs ; on peut démontrer que les combinateurs '**S**' et '**K**' sont génériques : ils peuvent être utilisés pour définir tous les autres combinateurs élémentaires et tous les combinateurs qui en sont dérivés.
- Les combinateurs s'organisent dans une structure algébrique : l'ensemble des expressions combinatoires a une structure de

27 Nous avons, dans le cadre des catégories cartésiennes fermées, étudié les propriétés algébriques des deux opérateurs de composition « la greffe » et « l'intrication » sur les arbres, ces deux opérateurs étant en étroite relation avec les combinateurs '**B**' et '**Φ**'.

28 Par exemple : [**I** $=_{def}$ **SKK**]; [**BCC** $=_{def}$ **I**] ; [**C*** $=_{def}$ **CI**].

monoïde où '**B**' joue le rôle de la composition (associative) et '**I**' le rôle de l'élément neutre.

- Pour certains combinateurs (appelés combinateurs réguliers), les constructions s'expriment dans une « algèbre d'arbres ».
- L'action des combinateurs est intrinsèque, c'est-à-dire indépendantes des domaines d'interprétation des opérateurs composés.
- Les combinateurs ont des actions opératoires qui s'expriment par des règles sans faire intervenir des variables liées. La Logique Combinatoire est ainsi un formalisme applicatif « sans variables liées », ce qui simplifie les calculs, en particulier évite les mécanismes de substitution avec une gestion formelle des variables liées par un nécessaire « renommage » de variables, pour éviter, dans certains cas, les télescopages[29].

4.2. Propriétés philosophico-logiques des combinateurs

Mentionnons quelques propriétés plus philosophiques des combinateurs[30] :

- *Les combinateurs* expriment sous forme d'opérateurs internes au formalisme *des modes de composition intrinsèques*.
- Les combinateurs sont des "processus opératoires" réalisés sous forme d'opérations élémentaires composées entre elles et effectuables par des machines informatiques ; ces processus opératoires sont *abstraits, généraux et indépendants de toute interprétation dans un domaine particulier* (comme les nombres, les propositions, les constantes logiques, les opérateurs fonctionnels d'un espace de Hilbert, les opérateurs to-

29 Ces télescopages évités par un « renommage » des variables est une des difficultés formelles dans l'automatisation informatique du Calcul des prédicats.

30 On peut se reporter à un exemple d'analyse d'un concept philosophique par la Logique combinatoire dans Desclés (1991). Pour certains aspects philosophiques de la Logique Combinatoire voir aussi Dana Scott (1975).

pologiques de Kuratowski, les opérateurs grammaticaux des langues…).

- Ces processus opératoires expriment des « actes élémentaires de pensée », indépendants de tout support matériel et abstraits de tout objet sur lesquels ils sont susceptibles d'agir[31]. Ces *actes opératoires* s'actualisent lorsqu'ils se concrétisent dans des actes particuliers qui opèrent sur des objets spécifiques (des nombres, des fonctions, des concepts, des propositions…).
- Ces "actes élémentaires de pensée" ne sont pas indépendants entre eux; certains peuvent être pris comme des « actes de base », les autres en étant « dérivées ».
- Ces actes élémentaires permettent de définir de nouveaux « actes opératoires » auxquels on associe des règles spécifiques d'action.

Selon Curry, la Logique Combinatoire apparaît comme étant une « prélogique » à la base d'autres logiques non typées ou typées (logique des compositions de programmes applicatifs élémentaires, logiques propositionnelles et modales, logiques des prédicats et de la quantification, logiques paraconsistantes, logique des objets plus ou moins déterminés[32]…). Aux combinateurs accompagnés de leurs propriétés spécifiques (règles d'élimination et d'introduction qui engendrent les règles de β-réduction), on adjoint *des atomes spécifiques à la logique inférentielle*, à savoir les « constantes logiques » usuelles (opérateurs propositionnels et opérateurs de quantification avec leurs règles d'élimination et d'introduction) et des prédicats ; il est alors possible de construire, dans le cadre de la Logique Combinatoire une logique dite « illative » (ou inférentielle), c'est-à-

31 Reprenant une caractérisation de Jean Ladrière (1970, 1973), les combinateurs expriment des « formes opératoires pures ».

32 Il s'agit de la LDO qu'Anca Pascu et moi-même construisons pour prendre en compte des objets plus ou moins déterminés, plus ou moins typiques et atypiques. Voir Desclés (1993, 2002), Pascu (1999, 2006) et Desclés et Pascu (2006)…

dire une logique des prédicats et des quantificateurs (frégéens), *sans faire appel à des variables liées.* En y adjoignant des *opérateurs spécifiques à un domaine,* par exemple des opérateurs logico-grammaticaux déterminés par des définitions mettant en œuvre des opérateurs grammaticaux primitifs, et, éventuellement, des opérandes absolus (dénotant alors des objets d'un domaine), on construit des formalismes opératoires qui les prennent en charge, ce qui permet d'en dégager les propriétés les plus spécifiques d'un domaine étudié (domaine de l'analyse syntaxique par les Grammaires Catégorielles étendues (Desclés & Birkri (1995), du grammatical (Desclés 1990), domaines de fonctions, de nombres, de vecteurs, de matrices, domaines des logiques...).

> Combinatory logic is a branch of mathematical logic which concerns itself with the ultime foundations. Its purpose is the analysis of certain notions of such basic character that they are ordinarily taken for granted. They include the process of substitution, usually indicated by the use of variables; and also the classification of the entities constructed by these processes into types or categories, which in many systems has to done intuitively before the theory can applied. It has been observed that these notions, although generally presupposed, are not simple; they constitute a prelogic, so to speak, whose analysis is by no means trivial. (Curry 1958, 1)

> This combinatory logic will be capable of serving as a foundation for abstract theory of all logic and mathematics, including functions (predicates, relations) or arbitrarily many variables. (Curry 1929, Seldin, 13)

5. Différents opérateurs de quantification

A titre d'exemple, nous allons donner les règles relatives à la définition du « quantificateur universel restreint » (à partir de l'implication matérielle de Russell), sous la forme de deux règles, l'une d'élimination, l'autre d'introduction du quantificateur universel restreint, désigné par 'Π_2'. Dans ces règles, 'P' et 'Q' désignent des prédicats unaires quelconques. On remarquera que la formulation de ces règles ne fait pas appel à la notion de variable liée. L'introduction des constantes logiques dans le cadre de la Logique Combinatoire conduit à une branche particulière, celle de la « logique illative » (inférentielle) (Curry 1958 1972)[33].

Règles (d'élimination et d'introduction des quantificateurs illatifs)

$$\frac{\Pi_1\, Q}{Qx}\,[\text{elim. } \Pi_1] \qquad \frac{[t : x],\, Qx}{\Pi_1\, Q}\,[\text{intr. } \Pi_1]$$

$$\frac{\Pi_2\, Q\, P, \quad Q(x)}{P(x)}\,[\text{elim. } \Pi_2] \qquad \frac{Q(x) \,/\!-\, P(x)}{\Pi_2\, Q\, P}\,[\text{intr. } \Pi_2]$$

L'expression 'Π_1 Q' se lit « tous sont Q » (tous sont des hommes) et l'expression 'Π_1 Q' se lit « tous les Q sont P » (tous les hommes sont mortels). Le quantificateur illatif universel restreint Π_2 peut être défini à partir du quantificateur universel Π_1 et du connecteur '=>'.entre deux propositions. L'introduction du

33 Voir aussi Desclés (1990). Pour une approche assez comparable dans l'esprit de ce que nous développons autour de la définition voir l'article de Denis Miéville (2006) à propos de la quantification.

combinateur 'Φ' permet de construire, par abstraction, un opérateur d'implication 'Φ =>' entre deux prédicats, puis l'introduction du quantificateur 'Π_1' permet de s'abstraire de l'opérande. En introduisant le combinateur '$\mathbf{B}^2$'(dont la règle d'élimination est '$\mathbf{B}^2 XYZU \rightarrow X(YZU)$'), on compose cet opérateur 'Π_1' de quantification avec l'opérateur 'Φ =>'. Nous en déduisons la définition du quantificateur 'Π_2' en fonction de composantes déjà définies ou considérées comme des primitives illatives :

(1) $[\Pi_2 =_{def} \mathbf{B(CB^2)\Phi} \Rightarrow \Pi_1]$

Nous avons ainsi la déduction :

1.	Π_2 Q P	hyp.
2.	$[\Pi_2 =_{def} \mathbf{B(CB^2)\Phi} \Rightarrow \Pi_1]$	def. Π_2
3.	$\mathbf{B(CB^2)\Phi} \Rightarrow \Pi_1$ Q P	rempl.
4.	$\mathbf{(CB^2)}(\Phi \Rightarrow)\Pi_1$ Q P	
5.	$\mathbf{B}^2 \Pi_1 (\Phi \Rightarrow)$ Q P	
6.	$\Pi_1 (\Phi \Rightarrow$ Q P)	

Il s'ensuit que la règle d'élimination de Π_2 est déduite de la règle d'élimination de Π_1 :

1.	$\Pi_1 (\Phi \Rightarrow Q\ P)$	hyp.
2.	$Q(x)$	hyp.
3.	$(\Phi \Rightarrow Q\ P)(x)$	elim. Π_1
4.	$\Rightarrow (Q(x))\ (P(x))$	elim. Φ
5.	$P(x)$	*modus ponens*

Ainsi, comme on le sait, l'énoncé *Chaque homme <u>s'aime</u>* ne signifie pas que *Chaque homme aime chaque homme* ; autrement dit, le marqueur *se* n'est pas un pronom objet qui serait un simple substitut formel du sujet ; ce marqueur *se* est un clitique qui exprime une réflexivité, il construit le prédicat complexe intransitif « s'aime » à partir du prédicat transitif « aime ». Ce prédicat complexe est défini à l'aide du combinateur (de diagonalisation) '**W**', de façon à rendre compte de l'inférence suivante :

> *Si chaque homme s'aime, et si Socrate est un homme alors Socrate aime Socrate.*

Nous avons ainsi la déduction

1.	(chaque homme)(s'aime)		
2.	Π_2 (est-homme) (s'aime)		
3.	3.1.	(est-homme)(Socrate)	hyp.
	3.2.	Π_2 (est-homme) (s'aime)	rappel 2.
	3.3.	(s'aime)(Socrate)	elim. Π_2
	3.4.	[s'aime $=_{def}$ $\mathbf{REFL_1}$ aime]	def. *s'aime*
	3.5.	$\mathbf{REFL_1}$ aime Socrate	
	3.6.	[$\mathbf{REFL_1}$ $=_{def}$ $\mathbf{W}$]	def. $\mathbf{REFL_1}$
	3.7.	$\mathbf{W}$ aime Socrate	
	3.8.	aime Socrate Socrate	elim. $\mathbf{W}$

Nous en déduisons, par une voie analogue, la définition du quantificateur existentiel restreint 'Σ_2' en fonction du quantificateur 'Σ_1' plus primitif et de la constante logique '&' de conjonction :

(2) [Σ_2 $=_{def}$ $\mathbf{B(CB^2)\Phi}$ & Σ_1]

Nous avons défini[34], par ailleurs, d'autres quantificateurs, 'Π*' et 'Σ*', appelés « quantificateurs stars » (respectivement « quantificateur universel star » et « quantificateur existentiel star »), pour formaliser des quantifications relatives seulement aux seules instances typiques d'un prédicat[35] et les distinguer de

34 Voir Desclés et Guentcheva (2000) et Desclés (2006).

35 Ainsi, *un alsacien boit de la bière* ne peut pas être analysé par une quantification universelle car cet énoncé affirme seulement que ce sont « les alsaciens typiques » qui boivent de la bière mais pas nécessairement « tous les alsaciens », fait qui serait exprimé alors par *tous les*

celles (quelconques ou indéterminées) qui appartiennent, sans restriction, à son extension. Ces quantificateurs sont conçus comme des opérateurs de détermination qui opèrent sur des termes nominaux en venant ainsi préciser leur « extensité ». Comme nous l'avons montré, ces quantificateurs stars apparaissent comme étant plus primitifs que les quantificateurs illatifs frégéens, introduits ci-dessus, puisque, comme nous l'avons démontré, nous définissons les seconds en fonction des premiers :

(3) $[\Pi_2 =_{def} \mathbf{BC^*\Pi^*}]$

(4) $[\Sigma_2 =_{def} \mathbf{BC^*\Sigma^*}]$

Ces définitions nous permettent de construire des relations comme :

(3') $\Pi_2\, Q\, P \rightarrow P\,(\Pi^*Q)$

(4') $\Sigma_2\, Q\, P \rightarrow P\,(\Sigma^*Q)$

La première relation (3') signifie :

> Si tous les Q sont P, il s'ensuit (nécessairement) que les Q *typiques* sont P (mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai).

Par exemple, *si tous les alsaciens sont français* alors *les alsaciens typiques sont également français* mais, en revanche, *si les alsaciens (typiques) boivent de la bière, il ne suit pas nécessairement que tous les alsaciens boivent de la bière.*

La seconde relation (4') signifie :

---

alsaciens boivent de la bière. De même, lorsqu'on dit les parisiens sont râleurs, cela ne signifie pas que « tous les parisiens » sont râleurs mais seulement que les parisiens typiques, eux, sont râleurs. La Logique de la Détermination des Objets (LDO) construit un formalisme pour prendre en compte ces notions.

S'il existe un *exemplaire typique* de Q qui est P alors *a fortiori* il existe un exemplaire de Q qui est P (mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai).

Nous en déduisons « un cube » des propositions quantifiées par les opérateurs de quantification 'Π_2', '$\Pi*$', 'Σ_2' et '$\Pi*$' ; ce cube généralise le « carré d'Aristote », restreint aux seuls quantificateurs 'Π_2' et 'Σ_2'.

6. Définition des nombres conçus comme des opérateurs

On peut définir les entiers naturels, l'opérateur de succession par des combinateurs et les axiomes de Peano par des relations entre opérateurs. Par exemple, le nombre '2' peut être défini comme étant l'intrication des deux opérateurs prédicatifs «est-premier » et « est-pair », ces prédicats pouvant être, à leur tour, définis à partir de la notion de divisibilité, qui, elle-même, sera définie à partir de l'opérateur de multiplication et du quantificateur existentiel.

(1) [2 $=_{\text{def}}$ **Φ** & (est-premier) (est-pair)]

Le même nombre '2' peut également être défini comme « le successeur du successeur de '0' ». En introduisant le combinateur '**WB**', nous obtenons une nouvelle définition de '2' :

(2) [2 $=_{\text{def}}$ **WB** (successeur-de) (0)]

puisque nous avons :

1.	successeur-de (successeur-de (0)	
2	**B** (successeur-de) (successeur-de) (0)	int. **B**
3.	**WB** successeur-de (0)	int. **W**
4.	[2 $=_{\text{def}}$ **WB** successeur-de (0)]	def. 2

6.1. Quelques combinateurs dérivés

Soit '**X**' un combinateur quelconque ; nous posons :

$$(3)\quad \begin{array}{lll} \mathbf{X}^0 & =_{def} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}^1 & =_{def} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^{n+1} & =_{def} & \mathbf{X} \circ \mathbf{X}^n \end{array}$$

Ainsi, nous avons par exemple : $[\mathbf{B}^1 = \mathbf{B}]$ et $[\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \circ \mathbf{B} = \mathbf{BBB}]$. Les symboles f, g, h désignant des opérateurs quelconques et x, y, z des opérandes quelconques de l'opérateur complexe construit par les combinateurs, nous en déduisons les actions (exprimées par des β–réductions) associées aux combinateurs dérivés des combinateurs élémentaires :

$$(3')\quad \begin{array}{lll} \mathbf{B}^n fg\, x_1x_2...g_n & \geq & f(gx_1x_2...x_n) \\ \mathbf{W}^n fgx & \geq & fxx...x \\ \mathbf{K}^n fx_1x_2...x_n & \geq & f \\ \mathbf{\Phi}^n fgh\, x_1x_2...x_n & \geq & f(gx_1x_2...x_n)(hx_1x_2...x_n) \end{array}$$

$$(3'')\quad \begin{array}{llllllll} \mathbf{B}^2 fxyz & \geq & \mathbf{B}(\mathbf{B}f)xyz & \geq & \mathbf{B}f(xy)z & \geq & f(xyz) \\ \mathbf{C}^2 fxy & \geq & \mathbf{C}(\mathbf{C}f)xy & \geq & \mathbf{C}fyx & \geq & fxy \\ \mathbf{W}^2 fx & \geq & \mathbf{W}(\mathbf{W}f)x & \geq & \mathbf{W}fxx & \geq & fxxx \\ \mathbf{K}^2 fxy & \geq & \mathbf{K}(\mathbf{K}f)xy & \geq & \mathbf{K}fy & \geq & y \end{array}$$

6.2. Numéraux de Church

Soit X une expression applicative combinatoire. Une suite de combinateurs $\mathbf{Z_0}, \mathbf{Z_1},..., \mathbf{Z_n},...$ appelés des itérateurs, peut être définie par[36]

$$(4)\quad [X_n =_{def} \mathbf{Zn}X]$$

Nous avons la récurrence suivante :

36 Voir Curry *et alii* (1972), Barendregt (1980).

(5) $[X_{n+1} =_{def} X \circ X_n = \mathbf{BXX_n} = \mathbf{BX(Z_nX)} = \mathbf{SBZ_nX}]$
$[X_{n+1} =_{def} \mathbf{Z_{n+1}X} = \mathbf{SBZ_nX}]$

Nous posons[37] :

(6) $[\mathbf{Z_0} =_{def} \mathbf{KI}]$ et $[\mathbf{Z_1} =_{def} \mathbf{SB(KI)}]$

Nous pouvons prendre comme numéraux (numéraux de Church) les combinateurs $\mathbf{Z_n}$. Dans ce cas, nous avons les opérateurs d'addition, de multiplication et de la fonction exponentielle, exprimés par des combinateurs :

(7) $[\mathbf{Z_{m+n}} =_{def} \mathbf{(\Phi B)\, Z_mZ_n}]$
$[\mathbf{Z_{mn}} =_{def} \mathbf{Z_m} \circ \mathbf{Z_n} = \mathbf{BZ_mZ_n}]$
$[\mathbf{Z_n}^{\mathbf{m}} =_{def} \mathbf{Z_mZ_n}]$

Ainsi, '0', l'opération de succession, les opérations d'addition, de multiplication sont représentées par respectivement par les combinateurs : **KI**, **SB**, **ΦB**, **B** ; quant à l'exponentielle, elle est représentée par l'opération d'application.

6.3. Combinateur de récursion

X, Y étant des expressions applicatives qui représentent des fonctions quelconques et k un nombre, Hindley, Lercher et Seldin (1972) donnent le combinateur de récursion **R** dont l'action est définie comme suit :

(8) $\mathbf{RXYZ_0} =_{def} X$
$\mathbf{RXYZ_{k+1}} =_{def} \mathbf{YZ_k(RXYZ_k)}$

Ce combinateur permet de donner une représentation applicative de chaque fonction récursive partielle dans le cadre de la Logique Combinatoire et finalement de développer dans ce cadre la théorie des fonctions récursives.

37 Il s'ensuit que : $\mathbf{Z_1\,ab = SB(KI)ab \geq Ba(KIa)b \geq BaIb \geq a(Ib) \geq ab}$

7. Analyse du paradoxe de Russell

« La non auto-applicativité est auto-applicative » est paradoxale seulement si on donne à cet « objet de pensée » construit le statut d'une proposition[38]. Pour voir cela, nous désignons par '**F**' le concept de « être non auto-applicatif », nous posons la définition :

(1) $[\mathbf{F} =_{def} \mathbf{BWB}\mathrm{N}]$

En effet, si 'f' désigne un opérateur quelconque et 'N' l'opérateur de la négation propositionnelle, nous avons :

(2) $\mathbf{F}(\mathrm{f}) = \mathbf{BWB}\mathrm{N}(\mathrm{f}) \rightarrow \mathbf{W}(\mathbf{B}\mathrm{N})(\mathrm{f}) \rightarrow \mathbf{B}\mathrm{Nff} \rightarrow \mathrm{N}(\mathrm{ff})$

Nous en déduisons que l'expression '**FF**' (dont la signification est « l'auto-applicativité de la non auto-applicativité » ou encore : « la non auto-applicativité est auto-applicative ») reçoit la formulation applicative suivante :

(3) $\mathbf{FF} = \mathbf{BWB}\mathrm{N}(\mathbf{BWB}\mathrm{N}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{BWB})(\mathbf{BWB})\mathrm{N} \rightarrow \mathbf{WS}(\mathbf{BWB})\mathrm{N}$

En définissant maintenant le combinateur, dit paradoxal, '**Y**' :

(4) $[\mathbf{Y} =_{def} \mathbf{WS}(\mathbf{BWB})]$

on peut vérifier que nous obtenons une situation de point fixe de l'opérateur 'N' de négation :

(5) $\mathbf{FF} = \mathbf{Y}\mathrm{N} = \mathrm{N}(\mathbf{Y}\mathrm{N}) = \mathrm{N}(\mathbf{FF})$

Ainsi, lorsque 'N' est la négation propositionnelle, l'expression '**FF**' est « un objet de pensée » *qui ne peut pas avoir le statut de proposition* car, si tel était le cas, nous aurions alors une contra-

38 L'analyse des paradoxes, en particulier celui de B. Russell est une des motivations de l'introduction par Curry (1958) de la logique combinatoire.

diction ; autrement dit, « *le concept de la non auto-applicativité est auto-applicatif* » *n'est pas une proposition* puisque, par définition de la proposition, elle est nécessairement soit vraie, soit fausse ; or, de par la situation (5) du point fixe de la négation, on a construit une expression qui est équivalente à sa propre négation. Il s'ensuit que cette expression ne peut pas être une proposition, bien qu'un objet de pensée. La définition d'un concept, celui de « la non auto-applicativité », conduit alors assez naturellement à des conséquences logiques qui font découvrir une nouvelle propriété : le point fixe de la négation et, plus généralement, fait apparaître le rôle du combinateur paradoxal dans la construction des situations de point fixe, situation fort banale en mathématiques. Ainsi, la définition d'un concept nous conduit à découvrir des situations nouvelles qui placent le paradoxe de Russell, avec sa formulation dans le cadre de la logique combinatoire, dans un paysage nouveau. Parlera-t-on à ce propos d'un rôle créatif de la définition ? Pour notre part, nous considérons que la réponse devrait être positive.

8. Exemples de définitions de « prédicats complexes » à l'aide des combinateurs

Comment se construisent les prédicats complexes à partir de prédicats plus élémentaires ? Nous allons prendre quelques exemples.

8.1. Définition du prédicat « est-homme »

Reprenons la définition du concept « est-homme » dont Blaise Pascal se moquait :

(1) $(\forall x)$: [est-homme (x) $=_{def}$ (est-animal)(x)
& (est-bipède)(x) & (est-sans-plumes)(x)]

Nous allons l'exprimer dans le formalisme de la Logique Combinatoire :

1. &(&(est-animal)(x) (est-bipède)(x))(est-sans-plumes)(x))
2. 2.1. & ((est-animal)(x))((est-bipède) (x))
   2.2. Φ&(est-animal) (est-bipède)(x) int. Φ
3. &(Φ&(est-animal)(est-bipède)(x))((est-sans-plumes)(x))
4. Φ&(Φ&(est-animal)(est-bipède))(est-sans-plumes)(x) int. Φ
5. $\mathbf{B}^2$(Φ&)(Φ&)(est-animal)(est-bipède)(est-sans-plumes)(x) int. $\mathbf{B}^2$
6. [est-homme $=_{def}$ $\mathbf{B}^2$(Φ&)(Φ&)(est-animal)(est-bipède)(est-sans-plumes)]
7. est-homme(x)

Sans faire usage de variables liées (astreintes à parcourir un domaine ou un univers de discours), nous posons une définition directe du prédicat en fonction d'autres prédicats jugés plus primitifs :

(2) [est-homme $=_{def}$ $\mathbf{B}^2$(Φ&)(Φ&)(est-animal)
(est-bipède)(est-sans-plumes)]

Si l'on se donne comme primitives sémantiques les notions « est-animal », « est-bipède », « est-sans-plume », le concept « est-homme » peut être défini à partir de ces primitives. Ce concept défini par (2) est le résultat d'une intégration des primitives qui en sont les ingrédients de signification.

8.2. Analyse du prédicat lexical « tue »

Reprenons la décomposition analytique du prédicat lexical « tue » que nous avons déjà présentée. En utilisant maintenant les notations applicatives préfixées, nous pouvons produire une déduction qui permet de montrer comment le prédicat lexical binaire « tue » devient *le résultat d'un processus intégratif* réalisé à l'aide de combinateurs élémentaires introduits progressivement dans la déduction. Ces combinateurs construisent un combinateur plus complexe qui permet de définir un mode de composition des primitives sémantico-cognitives choisies

CHANGE, CAUSE, de l'opérateur de négation 'NON' et du prédicat lexical unaire 'est-vivant' de façon à en déduire « un tout intégré », c'est-à-dire une nouvelle unité prédicative intégrant ses primitives constituantes comme ses ingrédients de signification[39] :

1.	CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (NON (est-vivant y))) x	hyp.
2.	2.1. NON (est-vivant y)	hyp.
	2.2. **B** NON est-vivant y	int. **B**
3.	CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (**B** NON est-vivant y)) x	rempl.
4.	4.1. CHANGE (est-vivant y) (**B** NON est-vivant y)	
	4.2. **Φ** CHANGE (est-vivant) (**B** NON est-vivant) y	int. **Φ**
	4.3. **S** (**Φ** CHANGE) (**B** NON) (est-vivant) y	int. **S**
	4.4. **B** (**S** (**Φ** CHANGE)) **B** NON est-vivant y	int. **B**
5.	CAUSE (**B** (**S** (**Φ** CHANGE)) **B** NON est-vivant y) x	rempl.
6.	$\mathbf{B}^3$ CAUSE (**B** (**S** (**Φ** CHANGE)) **B**) NON est-vivant y x	int. $\mathbf{B}^3$
7.	[tue $=_{def}$ $\mathbf{B}^3$ CAUSE (**B** (**S** (**Φ** CHANGE)) **B**) NON est-vivant]	def.
8.	tue y x	rempl.

Le prédicat transitif « tue » est le résultat d'une certaine composition des opérateurs CAUSE, CHANGE et 'NON' avec le prédicat lexical 'est-vivant', cette composition étant exprimée explicitement par les combinateurs :

(3) [tue $=_{def}$ $\mathbf{B}^3$ CAUSE (**B** (**S** (**Φ** CHANGE)) **B**)
NON est-vivant]

Pour être plus précis, *le processus d'intégration* est décrit par le combinateur '**X**', d'où la définition plus canonique du prédicat lexical « tue » :

(4) [tue $=_{def}$ **X** CAUSE CHANGE NON est-vivant]

(5) [X $=_{def}$ C (B B B^3) (C (B B (B S Φ)) B)]

39 C'est une « définition nominale » prise dans le sens de Pascal, mais avec un mode de composition structurant beaucoup plus complexe.

Ce combinateur '**X**' est un *programme applicatif*, composé uniquement d'occurrences de combinateurs élémentaires ; il décrit un agencement structuré des primitives. Lorsque ce programme est exécuté par application aux opérandes 'x' et 'y' (des variables d'actants), il construit une expression (cette fois, sans occurrence de combinateurs), appelée « forme normale », laquelle exprime, par une organisation applicative d'opérateurs et d'opérandes, la signification (« meaning ») du prédicat « tue » en fonction des primitives choisies.

La signification du *definiendum* « tue », dans (3) ou mieux dans (4), est alors entièrement décrite par son *definiens*, c'est-à-dire par une expression applicative qui agence les primitives retenues entre elles au moyen de l'opérateur '**X**' (un combinateur); ce dernier est un programme applicatif qui décrit une fonction. Le prédicat « tue » est le résultat d'un processus intégratif opératoire, c'est une nouvelle unité d'un autre niveau de représentation, celui où les prédicats s'appliquent à des opérandes.

Pour construire la signification de la forme propositionnelle 'tue y x', il suffit maintenant de remonter, par une démarche cette fois analytique, à la déduction précédente, en introduisant la définition de « tue » puis en exécutant successivement les actions opératoires déterminées par l'élimination de chaque combinateur élémentaire (en tête de chaque nouvelle expression obtenue à chaque étape), pour en déduire finalement une expression sans aucune occurrence de combinateurs :

(4) CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (NON (est-vivant y))) x

Cette expression constitue une « forme normale » qui exprime la signification de la forme propositionnelle de départ 'tue y x'.

Si l'on veut analyser la notion d'agentivité associée à l'actant 'x', et y ajouter un éventuel instrument 'z', dans l'expression 'tue (avec z) y x' (z' (*le chasseur a tué un daim avec son fusil*), notre analyse du prédicat « tue » devient légèrement plus complexe. Utilisant les primitives de CONTROLE et de FAIRE, et non pas celle de CAUSE, réservée à la représentation des vraies situations causales entre deux événements, la « forme normale » serait dans notre conception sémantico-cognitive et présentée dans une notation applicative préfixée (Desclés 1990) :

(5) CONTR (FAIRE (CHANGE (est-vivant y) (NON(est-vivant y)) z) x)

qui signifie qu'un agent 'x' contrôle, c'est-à-dire exerce une capacité de déclencher ou d'interrompre, une action qui affecte un patient 'y' par, éventuellement, l'intermédiaire d'un instrument ; lorsque l'instrument 'z' n'est pas précisé, l'agent est en même temps instrument. Par la méthode qui vient d'être décrite on peut en abstraire la nouvelle définition sémantique du prédicat lexical 'tue', avec des rôles assignés aux arguments, en fonction des primitives CONTR, FAIRE, CHANGE, est-vivant et l'opérateur NON.

La construction d'un prédicat lexical à partir de son schème sémantico-cognitif permet d'articuler étroitement des niveaux autonomes d'analyse et de représentation. En effet, un prédicat lexical, qui résulte d'un processus intégratif de synthèse, est une nouvelle unité entièrement autonome, obtenue par un processus de « réunitarisation ». En tant que nouvelle unité, elle possède des propriétés d'agencement syntaxique avec d'autres unités du même niveau mais ces propriétés ne sont pas nécessairement des propriétés du schème sémantico-cognitif qui, lui, fait partie d'un autre niveau de description. Inversement, les décompositions en schèmes permettent d'étudier des réseaux polysémiques associés à un même lexème verbal et parfois à un même prédicat lexical. Pour reprendre un exemple classique, les énoncés *la clef ouvre la porte* et *Luc ouvre la porte* sont représentés dans la langage classique des prédicats par la même expression canonique (pour reprendre une formulation de Quine) :

(6) (a) ouvre (la clef, la porte)
en notation applicative préfixée : (ouvre (la porte)) (la clef)

(b) ouvre (Luc, la porte)
en notation applicative préfixée : (ouvre (la porte)) (Luc)

Pourtant les deux rôles grammaticaux des termes *la clef* et *Luc* ne sont pas les mêmes, l'un est instrument, l'autre est agent. Le prédicat lexical ouvre se voit donc associer deux schèmes distincts : la description sémantique sous la forme de prédicats et de termes interprétés dans des modèles interprétatifs « à la Tarski » n'est donc pas suffisante et nécessite la prise en compte des différentes significations, décrites par des schèmes distincts, des prédicats lexicaux polysémiques. Les écarts entre les schèmes peuvent être plus importants et ne pas relever uniquement des rôles grammaticaux. Par exemple, en analysant le prédicat lexical « monter » nous avons plusieurs emplois polysémiques, de même schéma syntaxique :

(7) (a) *Luc monte le col de Saint Véran*
(b) *Le ministre monte les prix des denrées alimentaires*
(c) *Luc monte les valises*
(d) *Luc monte un film*
(e) *Luc monte une conférence*

Il est possible de montrer que les différents schèmes qui décrivent les significations du lexème verbal polysémique monte appartiennent à un même réseau avec un archétype commun. Nous ne le ferons pas ici. L'analyse réduite aux seules relations prédicatives ne permettrait pas de dégager cet archétype commun.

Le changement de niveau dans les descriptions par définitions permet d'articuler les niveaux entre eux, dans une architecture linguistique, logique et cognitive, et de faire apparaître les propriétés spécifiques à chaque niveau de représentation : les propriétés, en particulier les propriétés syntaxiques d'un niveau, ne se transmettent pas entre les niveaux. Là encore, nous serions amenés à considérer que ce genre de définition (du prédicat lexical en fonction d'un schème interprétatif, aussi bien dans une démarche analytique que dans une démarche synthétique, possède un rôle créatif, dans un sens de « créatif » qu'il faudrait certainement approfondir.

Ainsi, en logique, les nombres, une fois définis par des combinateurs, comme nous l'avons montré plus haut, possèdent des propriétés spécifiques et particulières qui ne nécessitent pas de « redescendre » à leurs définitions combinatoires : ils peuvent être pris comme de nouvelles unités autonomes, à la source du déploiement de l'arithmétique, sans qu'il soit indispensable de revenir aux représentations par les numéraux de Church.

9. Quelques conclusions

L'approche de Pascal doit être complexifiée notamment en introduisant des modes complexes de composition. Définir, c'est établir une relation entre un *definiendum* et un *definiens* qui comprend plusieurs composantes mais ces composantes doivent faire partie d'une organisation structurée, c'est-à-dire être agencées par un programme opératoire de composition. L'utilisation des combinateurs de la Logique Combinatoire de Curry permet de définir effectivement des opérateurs de compositions intrinsèques qui expriment de véritables fonctions appliquées à des primitives en vue de construire une nouvelle unité qui peut ainsi avoir un fonctionnement autonome. Nous en concluons que, dans la définition de nouvelles unités complexes, notamment en logique, en linguistique et dans les représentations cognitives et des connaissances :

- les constituants du *definiens* sont souvent des opérateurs (prédicats, relations, fonctions …) ;
- la composition des constituants est effectuée par des opérateurs (indépendants des domaines des constituants), les combinateurs jouent ce rôle de composition fonctionnelle ;
- les unités créées par des définitions synthétiques acquièrent une certaine autonomie de fonctionnement.

Certaines unités ainsi créées sont de nouveaux « objets de pensée », par exemple des « points fixes » généraux, qui peuvent être parfois paradoxaux[40], mais la construction de ces « objets de pensée » fait partie du domaine de la logique qui doit les étudier et détecter les processus opératoires qui construisent d'éventuels « monstres paradoxaux », pour ensuite mieux s'en préserver en introduisant certaines restrictions dans l'usage de certaines définitions. Ce fut le cas avec la célèbre Loi V de G. Frege (1893) qui l'obligea à la rectifier à la suite de son côté paradoxal découvert par B. Russell : il fallait limiter la définition qui établissait une relation trop simple entre l'extension et le concept. Les théories des types apportaient des solutions sous la forme de restrictions.

40 Par exemple lorsqu'on interprète certaines expressions construites comme étant des propositions.

Références bibliographiques

BARENDREGT H. (1980). *The lambda-calculus: its syntax and semantics*. Amsterdam : North-Holland.

CURRY B.H., FEYS R. (1958). *Combinatory logic*. Vol. I. Amsterdam : North-Holland.

CURRY H.B., HINDLEY J.R. & SELDIN J.P. (1972). *Combinatory Logic*. vol. II. Amsterdam : North-Holland.

DESCLÉS J.-P. (1981). De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques- *Mathématiques et sciences humaines* 76, 1-32.

DESCLÉS J.-P. (1990). *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*. Paris : Hermès.

DESCLÉS J.-P. (1991). La double négation dans l'Unum Argumentum analysé à l'aide de la logique combinatoire. In : D. Miéville (éd.), *La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement*. Université de Neuchâtel : Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 59, 33-74.

DESCLÉS J.-P. (1993). Dialogue sur la typicalité. In : *Modèles et concepts pour la science cognitive, hommage à J. F. Le Ny*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble, 139-163.

DESCLÉS J.-P. & BISKRI I. (1995). Logique combinatoire et linguistique : grammaire catégorielle combinatoire applicative. *Mathématiques, informatique et Sciences Humaines* 32, 39-68.

DESCLÉS J.-P. (1997). Logique combinatoire, types, preuves et langage naturel. In : D. Miéville (éd.), *Introduction aux logiques non classiques*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 11, 91-160.

DESCLÉS J.-P. (2002). Categorization : A Logical Approach to a Cognitive Problem. *Journal of Cognitive Science* 3.2, 85-137.

DESCLÉS J.-P. (2004). Combinatory Logic, Language, and Cognitive Representations. In : P. Weingartner (ed.), *Alternative Logics. Do Sciences Need Them ?* Berlin : Springer, 115-148.

DESCLÉS J.-P. (2006a). Opérations métalinguistiques et traces linguistiques. Ducard & Normand (dir.), *Antoine Culioli, Un homme dans le langage, Colloque de Cerisy*. Ophrys, 41-69.

DESCLÉS J.-P. (2006b). Une analyse non frégéenne de la quantification. In : Joray 2006, 263-312.

DESCLÉS J.-P. & GUENTCHEVA Z. (2000). A non-fregean approach of quantification in natural languages. In : M. Böttner, W. Thümel, *Variable-free Semantics*. Osnabrück : Secolo Verlag, 210-233.

DESCLÉS J.-P. & CHEONG K. (2006). Analyse critique de la notion de variable. *Mathématiques et sciences humaines* 173, 43-102.

DESCLÉS J.-P. PASCU A. (2006). Logic of Determination of Objects : The Meaning of Variable in Quantification. *Artificial Intelligence Tools, Architectures, Languages, Algorithms 15*.6, 1041-1052.

FITCH F. (1974). *Elements of Combinatory Logic.* Yale University Press.

GINISTI J.-P. (1997). *La logique combinatoire.* Paris : PUF [Que sais-je ? n° 3205].

GIRARD J.-Y. (2006). *Le point aveugle I, Cours de logique, Vers la perfection.* Paris : Hermann.

GRIZE J-B. (1971). Éléments de logique combinatoire. In : *Logique moderne.* Fasc. III. Paris : Gauthier-Villars, 61-76.

HINDLEY J. R., LERCHER B., SELDIN J. P. (1972). *Introduction to Combinatory Logic.* Cambridge : CUP.

HINDLEY J. R., SELDIN J. P. (1986). *Introduction to Combinators and Lambda-Calculus.* Cambridge : CUP.

JORAY P. (sous la dir.) (2006). *La quantification dans la logique moderne.* Paris : L'Harmattan.

LADRIÈRE J. (1970). Le symbolisme comme domaine de l'opératoire. *Articulation du sens, discours scientifique et parole de foi.* Paris : Aubier-Montaigne, 51-70.

LADRIÈRE J. (1973). L'explication en logique. In : Apostel *et al., L'explication dans les sciences*. Paris : Flammarion.

LE NY J-F. (2005). *Comment l'esprit produit du sens*. Paris : Odile Jacob.

MIÉVILLE D. (2006). Quantification et significations primitives. In : Joray (sous la dir.) 2006, 139-152.

PASCAL B. (1954). De l'esprit géométrique et de l'art de persuader. In : *Œuvres complètes*. Paris : Bibliothèque de la Pléiade, 575-604 [texte établi et annoté par Jacques Chevalier].

PASCU A. (1999). *Approche logique de la typicalité*. Thèse, Université de Paris-Sorbonne.

PASCU A. (2006). *Les objets dans la représentation des connaissances. Application aux processus de catégorisation en informatique et dans les sciences humaines*. Dossier d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris-Sorbonne.

POTTIER B. (1955). *Systématique des éléments de relation. Étude de morphosyntaxe structurale romane*. Thèse principale pour le doctorat ès lettres, Sorbonne.

POTTIER B. (2000). *Représentations mentales et catégorisations linguistiques*. Louvain-Paris : Éditions Peeters.

SCOTT D. (1975). Some philosophical issues concerning theories of combinators. *Lecture Notes in Mathematics* 274. Berlin : Springer-Verlag, 57-82.

SELDIN J.-P & HINDLEY J. R. (eds) (1980). *To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*. London : Academic Press.

SHAUMYAN S.K. (1987). *A Semiotic Theory of Natural Languages*. Bloomington : Indiana University Press.