

Langues naturelles, mathématique et réalité*

La description des relations entre les langues naturelles, le champ de la démarche logico-mathématique et le monde réel constitue actuellement l'une des préoccupations fondamentales de la pédagogie du degré élémentaire. Les considérations qui suivent n'ont d'autre objet que de présenter brièvement quelques aspects de ces relations dont les termes ont longtemps représenté à l'école — et représentent d'ailleurs encore — des sections nettement séparées, du moins en ce qui concerne la langue maternelle d'une part, l'arithmétique et la géométrie d'autre part. Aussi n'est-il peut-être pas tout à fait inutile de poser, comme en contrepoint, ce postulat: si les langues naturelles et les mathématiques procèdent, en fin de compte, d'une même intelligence, c'est qu'il existe entre elles une certaine réciprocité.

L'expression quotidienne de l'expérience au moyen de la langue use de fonctions en apparence nettement structurantes et à ce titre susceptibles d'être rapprochées des fonctions logiques élémentaires telles qu'on peut les voir figurer dans un programme de mathématique moderne du premier degré. Il s'agit en particulier des notions d'ensemble, de relation ou encore de structure.

En français, par exemple, l'article constitue un chapitre qu'il est d'emblée possible d'aborder à l'aide d'arguments sensiblement plus substantiels que ceux que l'on trouve dans n'importe quelle grammaire traditionnelle.

La comparaison d'expressions

“Les enfants sont malades.”

“Des enfants sont malades.”

“Ce sont des enfants.”

entraîne, par rapport à un référentiel donné, des considérations qui suggèrent assez spontanément un recours aux notions mathématiques de relations d'appartenance ou d'inclusion. On serait donc tenté, comme le souligne F. Bresson, de rapprocher ces fonctions linguistiques de celles qui forment les thèmes de la leçon de mathématique proprement dite. Mais, comme le dit encore Bresson, une telle assimilation “supposerait que l'on puisse considérer le langage dans son fonctionnement normal, chez l'adulte et plus encore chez l'enfant, comme une représentation des relations logiques ou ensemblistes. Il n'en est rien: on ne saurait à ce niveau parler de classes ou d'ensembles, car les propriétés de ces objets mathématiques, particulièrement la relation compréhension/extension, ne s'y retrouvent pas. Le fait que l'on puisse tenir des discours logiques traductibles de manière adéquate dans le symbolisme adapté

* Ce texte a paru dans le Bulletin d'information des professeurs de français (République de Côte d'Ivoire), No. 2, 1973-1974, p. 2-12.

aux mathématiques ne saurait justifier la proposition que, par conséquent, tout discours doit avoir ces propriétés. Sinon on ne pourrait s'expliquer que l'enfant parle à un âge où il est bien loin d'avoir les notions de classe ou d'ensemble. Les liens entre logique et langage sont beaucoup plus complexes et on masque les problèmes en utilisant métaphoriquement et sans précaution la terminologie et le symbolisme mathématique pour décrire des fonctions et des propriétés qui n'ont qu'un lointain rapport avec celles qui justifient ce symbolisme et permettent le calcul¹.”

Voyons donc d'un peu plus près comment les choses se présentent.

I

Nous commencerons par une remarque très générale, au fond assez banale, mais dont les conséquences sont importantes. Chaque fois qu'un sujet se trouve placé devant une situation-problème, il s'efforce de se tirer d'affaire par deux sortes d'activités. Les unes portent directement sur le réel concret, les autres passent par l'intermédiaire de représentations du donné. On peut évidemment discuter la question de savoir s'il existe véritablement des actions qui ne seraient accompagnées d'aucune sorte de représentation. En présence des résultats de la psychologie contemporaine, la chose est très improbable, mais la distinction reste commode. Prenons l'exemple du baguenaudier, ce jeu chinois où il s'agit d'enfiler et de dénouer des anneaux. Il est extrêmement différent de procéder en manipulant l'appareil n'importe comment ou de coder la situation en notation binaire et de calculer les coups à jouer. Nous ne nous occuperons dans ce qui suit que des cas où l'on a clairement affaire à des représentations qui forment système. Il est alors évident qu'un problème qui requiert l'usage de la langue ou celui de la mathématique entre dans la catégorie des activités symboliques. Or, ce qui nous paraît déterminant, c'est que toute représentation de ce genre est bipolaire, qu'elle a forme et structure d'une part, contenu de l'autre.

La forme ou la structure d'une opération de pensée est, ainsi que la définit le *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* de A. Lalande², “la nature du rapport qui existe entre les termes auxquels elle s'applique, abstraction faite de ce que sont ces termes en eux-mêmes.” Quant au contenu, c'est “certaines déterminations particulières qui donnent à cette forme une application concrète” (*ibid.*). Il importe de souligner en passant

1 F. Bresson (1973): “Langue écrite et langue parlée”, *Apprendre à lire, Actes du Symposium international sur l'apprentissage de la lecture*, 21-24 sept. 1971, Neuchâtel, I.R.D.P., 65.

2 Paris, P.U.F., 5e éd., 1947.

combien la définition du contenu est plus pauvre que celle de la forme. C'est qu'il existe, en effet, une science des systèmes formels, la mathématique, tandis qu'il n'existe aucune science des contenus. Cela peut servir à expliquer partiellement pourquoi, aussi bien dans la recherche que dans l'enseignement, l'un des deux pôles est tellement privilégié.

Cette bipolarité est tout particulièrement évidente dans la langue. Il suffit de passer de la forme

"C'est Jean qui a cassé le verre"

à la forme

"C'est le verre que Jean a cassé"

pour que le contenu, ici le sens, soit modifié³. En mathématique la situation paraît moins évidente, en ce sens que l'on peut se demander si l'on a bien encore affaire à des contenus. Mais un peu de réflexion montrera que oui. Plaçons-nous d'abord dans les conditions de l'école. L'élève auquel on enseigne que $A \cup B = B \cup A$ pense certainement à des ensembles. Selon son âge d'ailleurs le contenu du mot "ensemble" sera profondément différent. Cela peut aller de l'actuelle collection de jetons qu'il a sous les yeux, jusqu'à l'idée d'une sorte d'être abstrait en passant par les cercles de Venn—Euler que contient son manuel. Mais, dira-t-on, le mathématicien ou, mieux encore le logicien, ne voit-il pas simplement des lettres latines majuscules? A cela nous répondrons deux choses. L'une est qu'il peut le voir mais qu'en pratique il ne s'en tient jamais là. Un système formel sans aucune interprétation, un pur jeu, sans idée préconçue, sans une interprétation visée, n'est qu'un exercice scolaire. L'autre est que ces lettres continuent de se distinguer les unes des autres, qu'elles peuvent être répétées identiques à elles-mêmes, qu'elles s'opposent à d'autres lettres minuscules ou grecques.

En conclusion, on n'a jamais d'opérations qui ne portent pas sur des objets, pas de formes sans contenus, mais il est vrai que les objets peuvent être extrêmement abstraits et les contenus extraordinairement pauvres.

II

Le problème aussi bien épistémologique que pédagogique est de déterminer dans quelle mesure il est légitime d'éclairer les activités langagières par les activités mathématiques, voire de réduire les premières aux secondes. Il se pose aujourd'hui pour trois ordres de raisons. D'abord, à la suite de Chomsky, toute une école de linguistes pense avoir montré que la langue était justiciable de systèmes formels au sens strict. Ensuite, la psychologie génétique de Piaget

3 On notera de plus que le second exemple est ambigu.

a mis en évidence un parallélisme frappant entre les structures de l'intelligence et celles des mathématiques et des travaux comme ceux de H. Sinclair à Genève tendent à rendre l'apprentissage de la langue étroitement dépendant de la possession des opérations logico-mathématiques. Enfin des enseignants, comme Van Hout par exemple⁴, à juste titre soucieux d'éviter tout compartimentage dans la pensée de l'enfant, élaborent des manuels de grammaire qui sont presque des introductions à la mathématique.

Or, nous voudrions soutenir ici la thèse que, si toutes comparaisons entre mathématique et langue sont fructueuses, si même elles sont indispensables, elles le sont par les différences spécifiques qu'elles mettent en évidence et que, par conséquent, toute tentative de réductionnisme serait une grave erreur. Nous allons le montrer sommairement en rappelant quatre types de phénomènes fondamentaux.

1. En premier lieu, il y a la nature extensionnelle des mathématiques, totalement insuffisante à rendre compte du rôle déterminant que la compréhension joue dans la pensée et que la langue, elle, est apte à saisir. Prenons deux exemples.

Les éléments ensemblistes que l'on enseigne dans les écoles ont structure d'algèbre de Boole. Cela signifie que les seules phrases auxquelles il est possible de faire correspondre une proposition logique sont celles dont on peut décider si elles sont vraies ou fausses. Certains cas ne font pas problème.

"Jules César est mort aux ides de mars 44"

est une proposition et

"Quelle heure est-il? "

n'en est certainement pas une. Mais que penser de

(a) "J'ai mal à la tête"

et de

(b) "La concierge est dans l'escalier? "

Selon celui qui énonce la phrase (a), elle est vraie, fausse ou même n'a pas de sens (si l'on imagine, par exemple, un texte où les choses parlent). Quant à (b), il est intéressant de remarquer qu'elle peut être une proposition, à condition de la situer dans un contexte.

"Madame Durand est concierge au 12 de la rue du Chat-qui-pense. Cette maison a un escalier en colimaçon. La concierge est à tel instant précis dans l'escalier." Dans ce cas, et à supposer que Madame Durand soit, à ce moment-là dans la cour, la proposition serait fausse. Dès lors, et c'est le plus gênant, elle ne se distingue en rien de la proposition

4 G. Van Hout (1973): *Franco-Math, Essai pédagogique sur les structures du français moderne*, Paris, Didier.

"Londres est la capitale de l'Italie".

Comme second exemple considérons les nombres naturels de 1 à 5. Comment définir alors, logiquement et donc mathématiquement, la relation "être plus petit que"? La réponse est: c'est la classe des couples ordonnés $\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$. On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, que celui qui dit

"3 est plus petit que 5"

ne veut pas seulement asserter que le couple (3,5) est élément de la classe ci-dessus.

On pourra certes remarquer que les choses sont plus complexes et que, en particulier, une formalisation de l'arithmétique peut rendre compte de ce que "3 est plus petit que 5" par une expression de la forme

$(\exists x) (x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 0 \wedge 3 + x = 5)$

Mais — et ce n'est pas le lieu de le prouver ici — cela ne change rien au fond du problème. L'opérateur +, le relateur =, la variable x et le quantificateur \exists exigent le point de vue extensionnel.

2. Un phénomène analogue, quoique plus complexe encore, apparaît au niveau de la détermination des concepts. Sous la forme affirmative, la mathématique élémentaire ne connaît que le "tous" et le "quelques". Il est certes assez aisé d'introduire "un et un seul", mais tout ceci reste très en-deçà de la langue. Chercher à ramener *les* à "tous" et *un* à "un et un seul" ne permet absolument pas de rendre compte de l'équivalence conceptuelle entre les trois formes suivantes.

"Les chats sont *des* félins"

"Le chat est *un* félin"

"Un chat, c'est un félin".

De la même façon, l'usage des quantificateurs logiques est bien insuffisant pour comprendre comment l'on peut dire

"La neige est blanche"

et

"Les neiges du Kilimandjaro",

pourquoi, si l'on met un mot comme "espérance" au pluriel, il change entièrement de sens.

3. Un autre phénomène est constitué par l'existence de niveaux de langue, niveaux qui peuvent se multiplier, qu'on ne retrouve nullement en logique classique (donc en mathématique) et fort mal dans les logiques modales. Il est peut-être lourd de dire

"Il est indéniable qu'il est possible que Paul soit malade", mais l'expression est correctement formée. Si l'on formalise les modalités, que l'on note \neg pour indéniable et \Diamond pour possible, on obtiendra quelque chose du genre

$\neg \Diamond p$

où p représente la proposition "Paul est malade". Même si on laisse de côté la présence du subjonctif "soit", il reste que \neg et \Diamond sont des opérateurs situés au même niveau que p . On objectera peut-être qu'il y a fort longtemps que les logiciens ont su distinguer les modalités *de re* des modalités *de dicto*. A ceci, on peut répondre deux choses. La première est qu'un système de modalités *de dicto* exige l'intervention d'une métalangue logique et l'on sait que, en dernière analyse, on ne peut se passer de recourir à une langue naturelle. La seconde est que, au niveau de l'enseignement élémentaire, là où certains tentent de réduire les phénomènes linguistiques à des catégories mathématiques, la notion même de modalité est absente.

4. Enfin, nous en arrivons à ce qui est peut-être le plus important. Même si l'on considère — à tort selon nous — que la langue est un code, ce code exige pour fonctionner un locuteur, un sujet énonciateur qui prend en charge les diverses assertions, tandis qu'un système formel est ce qu'il est, qu'il ne réclame l'intervention d'aucun sujet. Une démonstration est une suite de propositions qui ont entre elles des relations bien déterminées. Un discours est tout autre chose: c'est la manifestation d'un certain type d'activités d'un locuteur. Cet état de fait a de multiples conséquences parmi lesquelles nous voudrions en signaler deux.

La première est qu'il est possible de parler en situation et qu'un dialogue comme:

— Oui?

— Non!

peut parfaitement avoir un sens bien déterminé. (Il suffit, par exemple, que les deux interlocuteurs boivent ensemble et que, en disant "Oui?", le premier tende le doigt vers le verre vide de l'autre.) Il s'agit certes-là d'un cas limite, mais il sert à faire comprendre toute la portée de cette déclaration de Benveniste que le dialogue "est la condition du langage humain"⁵. Or le langage mathématique — car c'en est bien un — n'est pas un langage de dialogue: rien n'est inscrit dans un système formel qui le permette.

5 E. Benveniste (1966): *Problèmes de linguistique générale*, Paris, Gallimard.

La seconde conséquence, d'ailleurs liée à la première, est relative à l'usage des présuppositions. O. Ducrot en a traité avec beaucoup de pertinence⁶. Qu'il suffise de rappeler ici que, dans l'acte de parole, on ne dit jamais ce que l'autre est censé savoir, alors qu'en mathématique on dit tout. De cela résulte que des expressions formellement identiques ont des significations différentes, selon qu'elles figurent en français ou en mathématique. Ainsi, pour prendre un exemple banal:

(a) "La femme est la femme" (b) " $f = f$ ".

(a) signifie à peu près que la femme est un être charmant, mais parfois déconcertant et (b) que la relation = est réflexive.

Dans la même perspective, la "traduction" de "La voiture de Pierre est rouge"

exige deux propositions logiques: "Pierre a une voiture" et "cette voiture est rouge".

S'il semble ainsi erroné de chercher à réduire les phénomènes linguistiques aux mathématiques, en revanche leur confrontation est des plus fructueuses. Prenons l'exemple de *et* et de *ou*, puisque aussi bien tout enseignement de la mathématique dite nouvelle a affaire à eux. Il apparaît rapidement que *et* ne désigne pas toujours l'intersection et que *ou* ne représente presque jamais l'union. Ainsi dans

"Un drapeau rouge *et* blanc flotte au vent"

le drapeau n'est aucunement un élément de l'intersection des objets rouges et des objets blancs, ce que confirme l'impossible implication:

"Ce drapeau est rouge *et* blanc" implique "Ce drapeau est rouge".

"Les militaires *et* les ecclésiastiques payent demi-taxe"

ne signifie aucunement que seuls les aumôniers ont droit au demi-tarif.

Comme R. Thom y a insisté avec justesse⁸, à moins d'être curieusement daltonien, personne ne dira

"Je vois un drapeau rouge *ou* blanc"

tandis qu'il est parfaitement normal de demander

"Le drapeau que tu vois est-il rouge *ou* blanc? "

C'est que le *ou* de la langue — et en laissant de côté la question de son exclusivité — ne s'utilise que rarement pour marquer l'union. En fait, il sert à

6 O. Ducrot (1972): *Dire et ne pas dire*, Paris, Hermann.

7 S'il nous a semblé utile de citer cet exemple, c'est que de telles confusions se rencontrent jusque sur la couverture d'un récent ouvrage de mathématique moderne! Il n'y a cependant aucune raison d'ériger la méfiance en dogme: il suffit d'abandonner à la langue ce qui lui revient d'ailleurs en propre, c'est-à-dire le pouvoir de tout exprimer, y compris l'ambiguïté et l'absurde.

8 R. Thom (1970): "Les mathématiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique?", *L'âge de la science* 3, no 2, 225-236.

rendre compte des situations où celui qui parle est indécis. Si je sais que Berthe ira à Paris en train, la proposition

"Berthe ira à Paris en train *ou* en avion"

est vraie, mais j'abuse de mon interlocuteur. Sinon, on ne voit pas pourquoi un examinateur ne mettrait pas la note maximum à un candidat qui répondrait que "Napoléon est mort à Chypre *ou* ailleurs".

Inversement, il existe des cas où la mathématique procède à des analyses plus fines que la langue. Ainsi, en va-t-il, pour rester dans des exemples élémentaires, de la copule *est*

"Jules *est* mécanicien"

"Jules *est* mon frère"

"Le chlorure de sodium *est* le sel de cuisine"

"La pomme *est* un fruit"

Dans la mathématique usuelle tout au moins, à ces quatre occurrences de *est*, correspondent des relateurs distincts:

est élément de, *est* l'unique x tel que, *est* identique à, *est* inclus dans.

III

Ce qui paraît, dans un premier temps tout au moins, pouvoir être retenu, c'est le fait qu'il existe des isomorphismes attestables non seulement parmi les structures mathématiques *ou*, par opposition, linguistiques, mais encore entre certaines structures appartenant à l'un et à l'autre plan.

Ainsi, à une structure algébrique de la forme

$$(S_0) a + x = bx$$

pourront correspondre d'autres formes selon les valeurs qu'on accordera à a et à b :

$$(S_0) \begin{cases} (S_1) 90 + x = 6x \\ (S_2) 34 + x = 3x \\ \dots \end{cases}$$

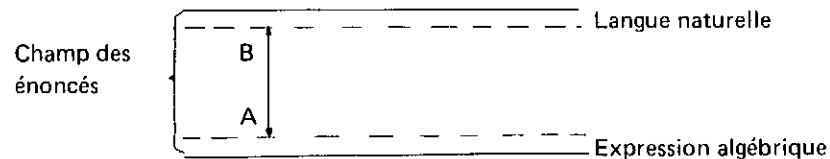
tout comme à chacune des formes ci-dessus correspondront, dans le langage, plusieurs "histoires" différentes pour les exprimer:

$$(S_0) \begin{cases} (S_{1_i}) \text{ "En ajoutant 90 à un nombre, on obtient 6 fois ce nombre."} \\ (S_{j_j}) \text{ "Je sextuple le nombre de mes billes si, à ce que je possède déjà, j'ajoute 90."} \\ \dots \end{cases}$$

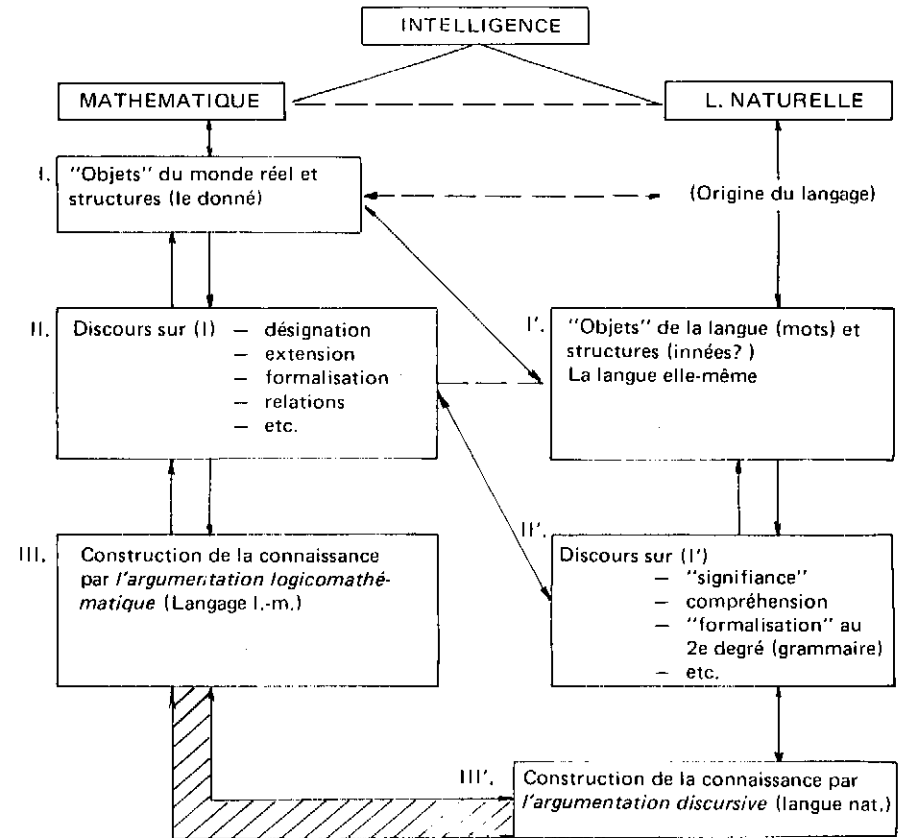
Il apparaît donc clairement qu'une langue naturelle dispose d'éléments structurants capables de sous-tendre des formes immédiatement transcrip- tibles en un métalangage de type algébrique, par exemple.

Ceci nous autorise à mettre en évidence la question de la forme des énoncés de problèmes, tout comme celle du discours didactique qui, généralement, s'y rapporte: que faut-il dire et que faut-il ne pas dire?

Il semble à première vue possible de confirmer la démonstration qui précède au moyen d'un pseudo-postulat du type: la forme des énoncés se situe quelque part entre l'expression littéraire, voire poétique, d'une structure globale et son expression algébrique. Ainsi, si l'on se réfère au schéma qui suit, on situera en *A* un énoncé de la forme "Partager 512 Fr entre deux personnes de manière que l'une ait 64 Fr de plus que l'autre", et en *B* l'énoncé. "Une fabrique de ciment dont le réputation est bien établie est appelée à livrer, pour la construction d'un barrage dans les Alpes, 4550 sacs de ciment d'une certaine qualité. Elle s'est empressée d'en livrer 2785. Combien lui en reste-t-il encore à livrer? "



Il apparaît donc que l'énoncé, tout comme l'éventuelle question qui le conclut, usent d'un certain *lexique* destiné à informer, au sens étymologique, une structure donnée. Cette dernière, on vient de le voir, peut prendre de nombreuses formes dont certaines sont, pour des raisons évidentes, plus recommandables que d'autres, ceci en fonction de leur destination, par exemple. A l'économie quasi irréductible de *A* (le stade ultime étant constitué par l'expression algébrique proprement dite), s'oppose un lyrisme de circonstance du type de l'exemple produit en *B*. Il arrive que celui-ci recèle des mots ou des tournures capables d'engendrer des interprétations d'ordre sémantique totalement erronées. Des formes telles que "donner", "vendre", "double", etc., peuvent sous-tendre chacune plusieurs opérations contradictoires en même temps, tout comme les déictiques (celui-ci, cette, le, etc.) ou les pronoms, peuvent constituer des pièges qui, pour l'enfant, n'ont rien de naïf. Ceci semble d'autant plus sérieux que le jeune élève s'y laissera souvent prendre sans que ses aptitudes réelles au raisonnement soient pour autant en cause.



IV

Ce qui précède nous autorise donc à souligner en passant le rôle fondamental que devrait jouer un enseignement cohérent de ce qu'on appelle le vocabulaire, au degré élémentaire en particulier. Un tel enseignement paraît même plus important, à ce stade, qu'une approche trop souvent abstraite de la syntaxe, laquelle, en fait, ne vise guère qu'à doter l'élève d'une terminologie utilitaire. Si, d'autre part, une notion telle que celle de *situation* (en tant que référence actualisante) doit être considérée comme éminemment pertinente, c'est que son rôle est indissociable de la compréhension des faits. C'est pourquoi, et ceci constitue la raison d'être de cette brève digression, l'enfant à qui un énoncé apprend que *X* donne trois pommes à *Y* doit savoir qu'un tel

procès peut supposer aussi bien l'idée de perte (-) que l'idée de gain (+) selon le point de vue où il se place, c'est-à-dire selon la situation.

Ces faits sont évidemment liés à la notion d'évolution des processus d'acquisition des connaissances au sens où Piaget⁹ l'a définie. C'est donc aussi sous l'angle qualitatif que cette relation de réciprocité entre logique et langue naturelle va se préciser tout en se transformant. Le fait est qu'on ne peut construire une langue logico-mathématique sans se servir, au moins partiellement, d'une langue naturelle. Mais inversement, les concepts abstraits ne peuvent être proprement réglés qu'au sein d'une langue de nature logique. De ce point de vue encore, logique et langue s'appellent l'une l'autre ou, plus exactement logique et linguistique sont des disciplines duales.

Nous concluerons par un schéma général traduisant l'ensemble de la situation à laquelle nous nous sommes référés et dont nous venons d'évoquer quelques aspects plus particuliers.

On y percevra un "décalage" ainsi que des différences dans les relations d'un point déterminé à un autre. Ces relations, marquées par des traits orientés ou non, doubles ou simples selon leur importance, traduisent en même temps une asymétrie dont découlent, à notre sens du moins, la plupart des difficultés de fond. Mais c'est dans la partie inférieure gauche du tableau que devraient pouvoir être regroupés un certain nombre de processus caractéristiques: ceux-là mêmes qui déterminent, au plan linguistique comme au plan mathématique, des conséquences conceptuelles identiques.

Université de Neuchâtel
Centre de recherches sémiologiques
CH 2000 Neuchâtel

Jean-Blaise Grize

Ecole normale cantonale
CH 2002 Neuchâtel

Charles Muller

9 J. Piaget (1966): *La psychologie de l'enfant*, Paris, P.U.F. (Que sais-je?).