Publié dans Travaux de logique 16, 9-36, 2005,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

La stratification catégorielle dans l'Ontologie

Nadine Gessler

Préambule

Les difficultés immanentes à la démarche logiciste classique sont-elles passibles d'une élucidation pleinement effective dans le cadre catégoriel et développemental de l'Ontologie? C'est la réponse à cette question – positive – que nous voulons instruire avec le présent article. Les difficultés dont nous traiterons ici prennent place parmi la problématique centrale que représente, pour le logicisme, l'élaboration d'une théorie générale des fonctions hiérarchisées en niveaux, au sein de laquelle la quantification trouve place, et contrainte dans ses déterminations par l'antinomie de Russell. Dans la perspective de cet article, notre effort a porté principalement sur la question des principes de stratification du langage logique et la portée des constructions réalisées, à la lumière d'un certain nombre de difficultés qui ont animé les théories logicistes inscrites avec les travaux de Frege, Whitehead et Russell.

Nous avons choisi d'ancrer notre réflexion dans la question de l'ambiguïté systématique ou typique qui habite le langage de la théorie des types des *Principia Mathematica*. De par les problèmes qu'elle recèle, cette question a en effet le mérite d'attirer l'attention de façon marquante sur la maîtrise formelle de l'Ontologie à rendre compte, dans l'unité d'un même symbolisme, des contenus et de leurs «ciments» logiques, à n'importe quel niveau hiérarchique du langage.

Deux difficultés liées à l'usage qui est fait de l'idée d'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica* seront abordées et effectivement résolues: d'une part, celle portée par la transparence analogique à laquelle se trouve contraint le langage essentiellement ambigu de la théorie des types et, d'autre part, celle liée à la prolifération possible d'une hiérarchie infinie d'arithmétiques, une relative à chaque type. Nous montrerons alors que les principes de formalisation de l'Ontologie régulent la construction *step by step* de la hiérachie catégorielle et bannissent du langage investi par le mode développemental toute problématique liée à l'idée d'ambiguïté systématique.

Parallèlement à la mise en évidence de cette effectivité formelle, nous serons amené à constater que l'Ontologie nous libère du scandale de nommer les fonctions et que les difficultés liées au processus de nominalisation s'y trouvent déliées par un mode de représentation pseudo-nominale des entités supérieures.

Mais dans un premier temps, afin que le lecteur n'ayant pas connaissance du système logique qu'est l'Ontologie puisse accéder à une pleine compréhension de notre propos, nous en préciserons les modes formels liés à sa dimension développementale. Quant au lecteur averti, il peut, s'il le souhaite, faire l'économie de cette présentation et accéder directement à la partie 2, qui constitue le centre de l'article[1].

1. La formalisation contextuelle

1.1 Remarques sur la théorie des catégories sémantiques

Les expressions dans l'Ontologie appartiennent à des *catégories sémantiques* distinctes qui sont les analogues formels des types logiques. Renvoyant à une analyse du langage en «parties du discours», la théorie des catégories sémantiques donne un corps technique à l'idée philosophique de catégories grammaticales, – les «Bedeutungskategorien» de Husserl. De la même manière que l'on ne peut remplacer dans une phrase grammaticalement correcte un nom

[1] Pour une présentation générale de l'Ontologie et du système propositionnel sur lequelle elle est construite – la Protothétique – on se reportera à Miéville (2001-04).

par un verbe, on ne peut pas dans l'Ontologie substituer un terme d'une certaine catégorie sémantique à un terme d'une autre catégorie sémantique, ce qui signifie que l'on ne peut pas substituer un foncteur à son argument. La différence majeure avec la théorie des types, sur ce point, est que la théorie des catégories sémantiques n'exige aucun artifice et satisfait de manière interne les requisits liés à la sphère d'idée universaliste, tout en étant ontologiquement neutre.

Les catégories sémantiques de base sont au nombre de deux, celle des propositions et celles des noms, S et N. Toutes les autres catégories en sont dérivées. N'importe quelle catégorie sémantique dérivée des catégories S et N, aussi complexe soit-elle, est potentiellement atteignable dans le système, moyennant l'obéissance aux modes d'expansion régulière du langage, ancrés dans une procédure inférentielle de définition. Les définitions ne sont pas traitées commes des abréviations métalinguistiques mais, comme les axiomes, elles sont assertées dans le langage lui-même comme thèses, permettant ainsi d'enrichir son pouvoir expressif et déductif par l'introduction de nouvelles constantes, et ceci en fixant leur catégorie sémantique et leur signification[2]. Quant à la reconnaissance de l'appartenance catégorielle d'un terme ou d'une expression, elle relève d'une formalisation contextuelle qui va faire l'objet du point suivant.

Nous utiliserons la notation suivante pour représenter une catégorie sémantique complexe[3]: $C/C_1C_2...C_n$. Cette écriture exprime une catégorie fonctorielle, $C_1C_2...C_n$ étant les catégories respectives des arguments sur lesquels opère le foncteur, tandis que C est la catégorie sémantique résultante. Par exemple, S/S est la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel, S/NN la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments nominaux, ou encore $(S/S)/SS$ la catégorie des foncteurs formateurs de foncteurs de catégorie S/S à deux arguments propositionnels.

2 Cf. ici même l'article de P. Joray.

3 Au sujet de la caractérisation de la grammaire catégorielle de la théorie, nous renvoyons le lecteur à Ajdukiewicz (1935); Bar-Hillel (1953); Joray & Godart-Wendling (2002); Joray (2001: chap. II).

Au sujet de la terminologie de catégorie sémantique, notons que nous pourrions lui préférer celle de catégorie syntaxico-sémantique, en faveur de laquelle certains auteurs inclinent (Miéville 2001-04). Cette terminologie a en effet le mérite de rendre manifeste la double dimension des catégories: sémantique dans l'intention et la signification qu'elles portent, et syntaxique du point de vue de la formalisation[4]. Cependant, il importe d'avoir à l'esprit que l'Ontologie est un système interprété: tout terme constant introduit dans le calcul acquiert sa signification des précédents, et ceci rétrospectivement jusqu'à la base axiomatique qui fixe les significations primitives. La sémantique est non seulement l'étape «intuitive» qui guide la construction du formalisme, mais ce dernier est avant tout l'expression de cette intuition.

1.2 L'axiome de l'Ontologie

Précisons tout d'abord que l'Ontologie s'ancre dans la Protothétique, un calcul propositionnel quantifié dans lequel on peut disposer de foncteurs de n'importe quelle catégorie construite à partir de la catégorie des propositions, et quantifier sur des variables de ces catégories. L'unique foncteur primitif de ce calcul est la biconditionnelle $\equiv$, de catégorie *S/SS*. C'est ce foncteur qui constitue la force motrice de la procédure développementale de définition, les définitions étant en effet insérées dans le calcul par leur formulation équivalentielle.

L'Ontologie ajoute à la base axiomatique de la Protothétique un seul axiome et, avec celui-ci, un foncteur primitif, l'epsilon ε, de catégorie *S/NN*, formalisant un certain usage de la copule dans les propositions de la forme «*a* est *b*»: une telle proposition est reconnue vraie si et seulement si le nom *a* désigne un objet singulier et si cet objet est bien ce que l'on dit qu'il est, c'est-à-dire un des objets désignés par le nom *b*. Quant à l'appareillage inférentiel, il se compose de directives de définition, de distribution des quantificateurs, de détachement, de substitution et d'extensionnalité. Nous

[4] Ajoutons qu'il est possible, comme le montre Joray (2005e), de proposer un calcul de la correction catégorielle simultanément syntaxique et sémantique.

n'évoquerons ici que les directives de définition, ainsi que celles de substitution et d'extensionnalité[5].

L'axiome de l'Ontologie est:

$$\lfloor ab \rfloor \lceil a\varepsilon b \equiv . \lfloor \exists c \rfloor \lceil c\varepsilon a \rceil \wedge \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \supset c\varepsilon b \rceil \wedge \lfloor cd \rfloor \lceil c\varepsilon a \wedge d\varepsilon a . \supset c\varepsilon d \rceil \rceil$$ [6]

L'axiome est une généralisation de la forme $\lfloor \ldots \rfloor \lceil \ldots \rceil$, où les caractères $\lfloor , \rfloor \lceil , \rceil$ marquent la quantification. On le lit: quels que soient les noms *a* et *b*, *a* est *b* si et seulement si il y a au moins un *c* qui est *a* et pour tout *c*, si *c* est *a* alors *c* est *b* et, pour tout *c* et *d*, si *c* est *a* et *d* est *a*, alors *c* est *d*.

La proposition élémentaire de l'Ontologie est donc «*a* est *b*», formellement «*aεb*», où les termes *a* et *b* représentent des objets formels appartenant à la catégorie sémantique des noms. Mais, à la différence des théories standards où seuls les noms singuliers sont retenus parmi la catégorie logique des noms, les noms dans l'Ontologie peuvent être singuliers, vides ou pluriels. Quant à la proposition «*a* est *b*», selon les conditions de vérité édictées par l'axiomatique, elle est vraie si et seulement si trois clauses sont remplies: le nom *a* n'est pas un nom vide (*clause d'existence*), ce que désigne le nom *a* est également désigné par le nom *b* (*clause inclusive*) et le nom *a* est un nom singulier (*clause d'unicité*).

Soulignons que l'introduction des noms pluriels et l'effacement conjoint de l'asymétrie entre sujet et prédicat désamorce dans l'Ontologie le vieux problème de l'un et du multiple. Les noms pluriels permettent en effet de ne retenir des «classes distributives» que leur dimension multiple, de sorte que la question du rapport entre l'extension en tant que multiplicité et l'extension en tant qu'unité n'a tout simplement pas à être posée. Un nom pluriel n'est en effet pas le nom de son extension, au sens où l'extension d'un nom n'est pas

[5] Pour une présentation complète des directives, cf. Miéville (2001-04).

[6] Le quantificateur «existentiel», qu'il est préférable d'appeler «particulier» car il n'a aucune portée existentielle, est introduit sous forme abréviative: «$\sim\lfloor A \rfloor \lceil \sim \ldots \rceil$» s'écrivant «$\lfloor \exists A \rfloor \lceil \ldots \rceil$». L'axiome de l'Ontologie requiert donc, au total, que les opérateurs binaires usuels $\supset$, $\wedge$, de catégorie *S/SS*, et l'opérateur unaire de la négation $\sim$, aient été préalablement définis.

associée à la classe des objets qu'il dénote[7]. On mesurera par la suite toute l'importance de cette analyse de la structure interne de la proposition qui rompt avec celle de tradition frégéenne, analysant la proposition en deux constituants irréductibles – fonction et argument – et renvoyant à des classes de termes mutuellement exclusives.

1.3 La procédure définitoire

Avant d'entrer dans le détail de la procédure de définition, esquissons tout d'abord les idées directrices de la formalisation dite contextuelle qui la gouverne. Les axiomes des systèmes contiennent des termes appartenant aux catégories primitives et de nouvelles catégories sont introduites en définissant des termes constants appartenant à ces catégories. Ces différentes catégories sont signalées par des parenthésages différents rangés sous le nom de contextes. Formellement, un contexte se caractérise par la forme de ses parenthèses et le nombre de ses arguments. Par exemple, (-), (--), {-}, {--}, ⟨-⟩, \----/ représentent des contextes distincts. Quant au mode d'écriture, c'est celui d'une écriture préfixée. Par conséquent, dans une expression, un contexte est toujours précédé d'un foncteur, celui-ci pouvant être un foncteur constant ou variable.

Si un foncteur appartenant à une catégorie déjà représentée dans le système est défini, alors il doit être associé au contexte déjà associé à cette catégorie. Par contre, s'il est destiné à être d'une catégorie nouvelle, alors un nouveau contexte doit être choisi.

Nul alphabet n'étant donné *a priori*, ni pour les constantes ni pour les variables, c'est la quantification qui opère la discrimination syntaxique entre les variables et les constantes: un terme a le statut de variable s'il est lié par un terme équiforme dans un quantificateur, sinon il a le statut de constante.

Les variables quantifiables sont celles des catégories déjà présentes dans le système en l'état actuel de son développement. Ainsi, dès qu'une définition introduit une constante d'une catégorie jusqu'alors non représentée dans le système, l'introduction de cette catégorie

[7] Cf. Joray (2005e).

autorise à quantifier sur des variables de cette catégorie. C'est ce principe quantificationnel qui, incorporé à la procédure définitoire, fonde l'expressivité catégorielle potentiellement infinie de l'Ontologie.

A la lumière de ces précisions syntaxiques, considérons dès lors la procédure définitoire. Celle-ci tombe dans l'Ontologie sous deux règles de définition: une règle de définition de type propositionnel héritée de la Protothétique et une règle de définition de type nominal, liée à l'ajout de la catégorie des noms. Les voici, sous la forme de représentations schématiques:

- **Définition de type propositionnel (Dfs)**

  $\lfloor v_1 \ldots v_n \rfloor \lceil \equiv (f\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]\ F_{v1 \ldots vn}) \rceil$

  écriture contextuelle

  $\lfloor v_1 \ldots v_n \rfloor \lceil f\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n] \equiv F_{v1 \ldots vn} \rceil$

  écriture conventionnelle

- **Définition de type nominal (Dfn)**

  $\lfloor v_1 \ldots v_n\, a \rfloor \lceil \equiv (\varepsilon\{a\ g\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]\} \wedge (\varepsilon\{aa\} E_{v1 \ldots vn}) \rceil$[8]

  écriture contextuelle

  $\lfloor v_1 \ldots v_n\, a \rfloor \lceil a\ \varepsilon\ g\ \{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n] \equiv .\ a \varepsilon a \wedge E_{v1 \ldots vn} \rceil$

  écriture conventionnelle

f et *g* représentent les termes définis, v_1 v_2 … v_n les arguments sur lesquels ils opèrent, s'il y en a. Ces arguments peuvent se répartir dans un ou plusieurs contextes. C'est ce que vise à représenter la forme générale $\{v_1 \ldots\} \ldots [\ldots v_n]$, où l'inscription en gras des parenthèses des contextes signalent qu'elles auront une certaine forme en fonction du nombre et de la catégorie des arguments sur lesquels opère le foncteur. On parlera de définition *régulière* lorsque le terme défini prend un seul contexte et de définition *paramétrée* lorsqu'il en prend plus d'un. Il peut également n'y avoir aucun argument dans le

[8] Le premier argument de la généralisation, «ε{a *definiendum*}», exprime que le terme sujet *a* est un nom individuel. C'est la raison pour laquelle le second argument a la forme conjonctive «$a\ \varepsilon\ a \wedge E_{v1\ v2 \ldots vn}$», «a ε a» traduisant l'unicité de l'objet dénoté par le nom *a*, et «$E_{v1\ v2 \ldots vn}$» étant le *definiens* à strictement parler.

definiendum, celui consistant alors en un seul terme constant. Dans ce cas, la définition sera dite *absolue*.

La reconnaissance des catégories des arguments sur lesquels opèrent le foncteur défini est donnée par le *definiens*, dont les constantes, catégories et contextes associés qui y apparaissent doivent être représentés dans le système en l'état présent de son développement. Quant aux autres conditions auxquelles doit satisfaire une expression pour être ajoutée au système comme thèse définitoire des foncteurs *f* et *g*, ce sont les suivantes: dans $f\{v_1...\}...[...\ v_n]$ et $g\{v_1...\}...[...\ v_n]$, *f* et *g* sont les seules constantes et elles n'y possèdent qu'une occurrence; aucune des variables $v_1...v_n$ n'y est répétée; ces variables sont les mêmes que celles (libres) que contiennent les *definiens* respectifs $F_{v1...vn}$ et $E_{v1...vn}$.

Le contexte (--), qui est associé à la biconditionnelle et, de fait, à tout foncteur de catégorie *S/NN* défini dans le système, est le contexte primitif posé par l'axiomatique de la Protothétique. Quant au contexte {--}, c'est le contexte primitif associé à la catégorie *S/NN*, celle du foncteur primitif de l'epsilon ε introduit avec l'axiome de l'Ontologie. Par conséquent, les arguments de tels contextes sont destinés à être respectivement de catégorie *S* et de catégorie *N*, tandis que les foncteurs associés sont destinés à être de catégorie *S/SS* et *S/NN*. Il en sera de même pour tout autre contexte associé à une catégorie nouvelle introduite par le biais d'une définition. Pour la version contextuelle de l'axiome de l'Ontologie, on a donc:

$$\lfloor ab\rfloor\lceil\equiv(\varepsilon\{ab\}$$
$$\wedge(\lfloor\exists c\rfloor\lceil\varepsilon\{ca\}\rceil\wedge(\lfloor c\rfloor\lceil\supset(\varepsilon\{ca\}\ \varepsilon\{cb\})\rceil\ \lfloor cd\rfloor\lceil\supset(\wedge(\varepsilon\ \{ca\}\ \varepsilon\{da\})\ \varepsilon\{cd\}))\rceil)\rceil))\rceil$$

Toute expansion définitoire du langage est confinée dans la sphère extensionnelle par les règles d'extensionnalité. Deux règles, rapportées pour l'une à la règle de définition de type propositionnel et pour l'autre à celle de type nominal, assurent au total l'extensionnalité de toutes les expressions de toute catégorie sémantique du langage. Dès qu'une constante d'une quelconque catégorie a été introduite, les règles d'extensionnalité permettent l'inscription d'une thèse garantissant le principe d'extensionnalité pour toutes les expressions de cette catégorie. Par exemple, si la catégorie *S/N* est introduite dans le système, on peut inscrire la thèse d'extensionnalité suivante:

$$\lfloor fg \rfloor \lceil \lfloor v \rfloor \lceil f(v) \equiv g(v) \rceil \equiv \lfloor \phi \rfloor \lceil \phi(f) \equiv \phi(g) \rceil \rceil$$

où *f* et *g* sont de catégorie *S/N* et ϕ est de catégorie *S/(S/N)*. Et si on introduit une catégorie nominale telle que, par exemple, *N/NN*, la thèse d'extensionnalité pour cette catégorie sera:

$$\lfloor fg \rfloor \lceil \lfloor a v_1 v_2 \rfloor \lceil a\ \varepsilon\ f(v_1 v_2) \equiv a\ \varepsilon\ g(v_1 v_2) \rceil \equiv \lfloor \phi \rfloor \lceil \phi(f) \equiv \phi(g) \rceil \rceil$$

où *f* et *g* sont cette fois de catégorie *N/NN* et ϕ est de catégorie *S/(N/NN)*[9].

Précisons aussi quelque peu les modalités de lecture et d'interprétation de la quantification. Ni objectuelle, ni substitutionnelle, la quantification peut être qualifiée de catégorielle[10]. Pour aller à l'essentiel, disons que les variables qui apparaissent dans une généralisation ne sont que l'inscription du caractère sémantique que partagent tous les éléments tombant sous la catégorie à laquelle elles appartiennent. Il faut lire les formes $\lfloor v \rfloor \lceil \ldots v \ldots \rceil$ et $\lfloor \exists v \rfloor \lceil \ldots v \ldots \rceil$ respectivement «quelle que soit la signification de l'expression v» et «pour quelque signification de l'expression v», compte tenu de la catégorie sémantique à laquelle appartient l'expression v. Du point de vue de la syntaxe, les variables ne sont que des lettres. Quant à leurs valeurs, elles sont extraites des domaines de quantification correspondant à la catégorie de la variable, selon qu'elle est une variable propositionnelle, nominale ou fonctorielle. A chaque catégorie est associée un domaine de quantification, c'est-à-dire l'ensemble des significations extensionnelles attachées à un quelconque élément de la catégorie en question.

[9] Notons que ne pouvant quantifier sur des variables d'une certaine catégorie que si cette catégorie est représentée dans le système via une constante, l'inscription d'une thèse d'extensionnalité pour une catégorie *C* exige que la catégorie *S/C* soit représentée dans le système.

[10] Au sujet de la quantification dans l'Ontologie et de son interprétation, on consultera Simons (1985), Miéville (1999), Joray (1999, 2005e).

1.4 Définitions et substitution

C'est la directive de substitution qui assure à la quantification son rôle d'expression de la généralité. Cette directive permet d'opérer sur des variables d'une généralisation, qu'elles soient propositionnelles, nominales ou fonctorielles, en leur substituant une autre variable, une constante ou une expression de la même catégorie sémantique, et ceci indépendamment de toute question de référence extralinguistique, existence ou unicité. Libre de tout apport existentiel, la quantification est en effet ontologiquement neutre. Les thèses de l'Ontologie ne débouchent sur aucun indice concernant «l'ameublement dernier de ce monde», pour reprendre une expression chère à Russell, ni l'existence d'une entité quelconque. Ainsi, derrière les catégories logiques, on ne saisit aucune entité ontologique[11].

Nous ajoutons encore, au sujet de la règle de substitution, qu'elle n'autorise pas à substituer sur des «expressions incomplètes», c'est-à-dire considérées comme des écritures ouvertes[12]. Pour obtenir, par exemple, $\lfloor xy \rfloor \lceil (x \equiv y) \equiv (x \equiv y) \rceil$ à partir de $\lfloor \alpha x \rfloor \lceil \alpha(x) \equiv \alpha(x) \rceil$, où x et y sont de catégorie S et α de catégorie S/S, on ne peut pas substituer «$(\ldots \equiv y)$» à α. L'opération de substitution peut avoir lieu, mais par le biais d'un foncteur paramétré. Pour ce faire, on inscrira, par exemple, la définition paramétrée suivante:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \lceil \equiv /y\backslash (x) \equiv (x \equiv y) \rceil$$

Le foncteur paramétré $\equiv /y\backslash$ appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel, S/S. Puisqu'il est de la même catégorie sémantique que α dans la généralisation $\lfloor \alpha x \rfloor \lceil \alpha(x) \equiv \alpha(x) \rceil$, il peut lui être substitué. On obtient alors la formule désirée: $\lfloor xy \rfloor \lceil (x \equiv y) \equiv (x \equiv y) \rceil$.

[11] Cf. Simons (1995).

[12] Remarquons que Łukasiewicz (1951), propose une règle permettant de substituer sur des «expressions incomplètes». Cette règle présente cependant un caractère *ad hoc*, dans la mesure où elle est spécifique à certaines catégories. Elle ne revêt donc pas la dimension générale de l'utilisation du paramétrage propre aux théories leśniewskiennes.

1.5 L'homonymie

Ces éléments préparatoires ayant été exposés, nous fermons ce chapitre avec quelques définitions. Elles mettent en évidence que la formalisation contextuelle permet l'usage de constantes homonymes, sans risque de confusion catégorielle. C'est ce point qui occupera une place centrale dans la seconde partie de notre travail.

D1: ⌊ABC⌋⌈≡(≡(ABC) ≡(A ≡(BC)))⌉ *Dfs* (*régulière*); ≡; *S/SSS*; (---)

⌊ABC⌋⌈≡(ABC) ≡ (A ≡ (B ≡ C))⌉ (*bicondionnelle ternaire*)

Cette définition, tombant sous la règle Dfs, introduit un foncteur de catégorie *S/SSS*, catégorie nouvelle pour laquelle nous avons choisi le contexte (---). Quant au choix d'un symbole équiforme à celui du foncteur primitif de la biconditionnelle pour ce nouveau foncteur, il ne soulève aucune difficulté puisque les contextes associés aux deux constantes homonymes, soient (--) et (---), permettent de les séparer l'une de l'autre. Bien au contraire, la similarité des formes présente l'avantage de rappeler la similarité sémantique des constantes. Voici deux autres définitions. Elles correspondent à deux manières de définir l'union logique, l'une nominale, l'autre prédicative.

D2: ⌊abc⌋⌈≡(ε{a∪⌈bc⌉} ∧(ε{aa}∨ (ε{ab} ε{ac})))⌉
Dfn (*régulière*); ∪; *N/NN*; ⌈--⌉

⌊abc⌋⌈a ε ∪⌈bc⌉≡: aεa ∧. aεb ∨ aεc⌉ (*union nominale*)

«∪⌈bc⌉» est l'union des extensions des noms *b* et *c*.

D3: ⌊aαβ⌋⌈≡(∪\αβ/{a} ∨(α{a} β{a}))⌉ *Dfs* (*paramétrée*);∪;
(S/N)/((S/N)(S/N)); \--/

⌊aαβ⌋⌈∪\αβ/{a} ≡. α{a} ∨ β{a}⌉ (*union prédicative*)

«∪\αβ/» est l'union des prédicats *α* et *β*.

Comme précédemment, les contextes associés aux deux constantes homonymes, ⌈--⌉ et \--/, excluent toute ambiguïté catégorielle.

Ces quelques exemples suffisent à illustrer les ressources polysémiques de l'Ontologie. Il s'agit maintenant d'inscrire ce point à l'aune de l'analogie fonctionnelle de constantes s'inscrivant dans une hiérarchisation catégorielle. C'est ce que nous ferons dans la section suivante, après quelques remarques introductives liées à l'idée d'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica.*

2. Le principe de stratification

2.1 L'ambiguïté systématique dans les *Principia Mathematica*

Le rôle de l'ambiguïté systématique dans la théorie des types des *Principia Mathematica*, où les indices de types n'apparaissent qu'à de rares exceptions, est tout à fait central. L'ambiguïté systématique est en effet le réceptacle de la dimension de généralité du discours logico-mathématique et elle fonde, corollairement, la voie d'accès à la lecture et à la résolution des paradoxes. Selon les auteurs, un paradoxe tient en effet à la présence, dans sa formulation, d'un symbole systématiquement ambigu: celui-ci a été utilisé sans spécification de type, ce qui a eu pour conséquence d'engendrer une «totalité illégitime»[13]. Pour que la contradiction – apparente – disparaisse, il suffit dès lors de spécifier l'ambiguïté du symbole, celle-ci exigeant un certain type pour être supprimée et donner lieu à une proposition (Whitehead & Russell 1927: 64).

Considérons à ce titre la définition de la classe, avec laquelle il faut parer au paradoxe dit de Russell de la classe de toutes les classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes, de la sorte que seules les formules atomiques de la forme $x \in W$ où x est d'un certain type n et W de type n+1 soient douées de sens. Pour tout type n différent de 0 (type des individus), la classe est ainsi définie comme étant la classe des objets de type n–1, ce qui correspond à la définition:

$$*20.03\text{: Cls} = \hat{\alpha}\ \{(\exists\phi).\alpha = \hat{z}\ (\phi\ !z)\}.$$

Cette définition possède une ambiguïté de type, relative au type de la variable apparente z. Le type de α est immédiatement supérieur au type de z, et celui de «Cls» immédiatement supérieur à celui de α. Il s'ensuit que l'expression «Cls $\in$ Cls», qui est une conséquence de la

[13] Cf. ici même l'article de C. Degrange.

définition précédente, requiert que «Cls» ait un sens différent pour chacune de ses occurrences. Pour traiter avec ce pseudo-énoncé, il faudra interpréter la seconde occurrence de «Cls» comme correspondant à la classe de toutes les classes de type n+1 et la première comme la classe de toutes les classes de type n.

Tout comme le symbole «Cls», les symboles de la classe nulle, la classe universelle, ainsi que ceux de 0, 1 et tous les autres nombres cardinaux sont ambigus, ainsi que les opérateurs arithmétiques. Par ailleurs, la notion de vérité étant elle-même typiquement ambiguë (ainsi que l'atteste le paradoxe du menteur), le symbole logique d'assertion est lui-même ambigu. Cela entraîne qu'il faut admettre une ambiguïté systématique des opérateurs logiques, leur signification variant en effet en fonction de l'ordre de la proposition assertée.

Examinons, par exemple, la définition du nombre 1 avec les commentaires qui l'accompagnent. Le nombre 1 est défini comme la classe de toutes les classes unités de la manière suivante:

*52.01. $1 = \hat{\alpha}\{(\exists x).\alpha = \iota\text{'}x\}$ Df[14]

> Like Λ and V, 1 is ambiguous as to type: it means "all unit classes of the type in question". The symbol "1(α)", where α is a type, will mean "all unit classes whose sole members belong to a type α". (1927: 347).

Puisque cette définition est systématiquement ambiguë, il s'ensuit que l'on peut définir autant de 1 qu'il y a de types. Le type de 1 étant relatif à la base au type de x, pour n'importe quel type t, ι'x sera de type t+1, α de type t+2, et 1 de type t+3. Quant à l'ensemble des entiers naturels, il sera de type t+4. Autrement dit, l'arithmétique est constructible relativement à n'importe quel type. Et, face à ce résultat, on ne peut guère mieux faire que de se référer à l'ambiguïté systématique elle-même en disant que si l'absence d'indices donne lieu à des symboles systématiquement ambigus, on peut toujours restaurer les indices de type de manière à être conforme à une construction

[14] Cf *51.11: $\vdash \iota\text{'}x = \hat{y}(y = x)$; la fonction descriptive ι'x signifiant «la classe dont le seul membre est x» (1927: 338).

respectant les conditions syntaxiques de formation des fonctions logiques. Néanmoins, si l'argument est correct, il ne change rien à la théorie elle-même. Celle-ci porte toujours en germe une prolifération infinie d'arithmétiques, tandis que le langage n'a toujours pas les compétences de dire «où on se trouve» dans la hiérarchie.

Terminons ces remarques en évoquant la notion d'analogie systématique qui vient se greffer sur celle d'ambiguïté systématique. Présentée par les auteurs comme le pendant de l'ambiguïté systématique, l'analogie systématique vise à répondre à la curieuse situation sur laquelle débouche inexorablement le recours à l'ambiguïté systématique. Car, si le langage logico-mathématique est essentiellement ambigu, il faut alors régler le problème de conjuguer les dimensions de généralité et de signification attachées à ses formes symboliques. La solution à cette situation – quelque peu paradoxale pour des logicistes qui furent parmi les premiers à proposer un langage logique formalisé – Whitehead et Russell la trouvent à travers le concept d'analogie systématique. Ils écrivent:

> [...] *the systematic ambiguity is the result of a systematic analogy.* That is to say, in almost all the reasonings which constitute mathematics and mathematical logic, we are using ideas which may receive any one of an infinite number of different typical determinations, any one of which leaves the reasoning valid. (1927: 65, nous soulignons).

C'est ainsi, en se réclamant de l'analogie systématique, qu'ils en viennent «naturellement» à parler de vérité permanente des théorèmes logiques (1927: xii) et à dire que nous *voyons* que tout ce qui peut être prouvé pour des types inférieurs peut l'être également pour n'importe quel autre type signifiant assumé, ceci par une transmission analogique de la preuve.

> [...] when we have proved a proposition for the lowest significant type, we "see" that it holds in any other assigned significant type. Hence every proposition which is proved without the mention of any type is to be regarded as proved for the lowest significant type, and extended by analogy to any other significant type. (1927: xi).

Au vu de cette analyse, les formules logiques s'apparentent donc à des formes générales, porteuses de significations susceptibles d'être activées par une détermination typique et dont l'inscription réitérée dans la hiérarchie est redevable d'une analogie systématique. Il va de soi alors que la définition typique d'un symbole ou d'une formule n'a aucune incidence sur son mode de représentation graphique. Celle-ci peut rester la même, puisque la solution prônée, extérieure au formalisme, ne porte que sur la seule interprétation des symboles et des formules.

Nous touchons là le véritable enjeu de notre discussion. Les types ont pour mission de séparer les différentes valeurs possibles, c'est-à-dire les domaines de signification. Mais le recours à l'ambiguïté systématique, réglé par le concept d'analogie systématique et porté par la terminologie du *voir,* les re-superpose dans le même mouvement. Et cet «applatissement» d'une hiérarchie destinée à se déplier sous l'égide d'une transparence analogique contribue d'avantage à obscurcir la théorie qu'à l'éclairer, dans la mesure où l'on ne se place jamais du point de vue de la syntaxe.

Examinons maintenant ce qu'il en est de cette question dans l'Ontologie. L'approche étant résolument celle d'une formalisation d'une rigueur extrême, l'analogie ne saurait en aucune façon se limiter à être vue. Elle y est gérée de manière intrinsèque, par les propres modes formels du langage logique, sans que jamais il n'y ait dissociation entre forme et contenu.

2.2 L' homonymie verticale

Pour commencer, on considèrera un certain nombre de définitions mettant en évidence que, sans ambiguïté, des constantes équiformes peuvent être utilisées comme homonymes pour exhiber et rendre compte d'analogies systématiques. Nous formulons ces définitions dans une écriture hybride, tout en gardant à l'esprit qu'elles sont implicitement contrôlées par leur pendant contextuel.

D4: $\lfloor a \rfloor \lceil !\{a\} \equiv \lfloor \exists b \rfloor \lceil b\varepsilon a \rceil \rceil$ *Dfs*;!; *S/N*; {-}

$!\{a\}$: a *est un nom qui dénote* (foncteur d'existence)

D5: $\lfloor ab \rfloor \lceil \subset\{ab\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \supset c\varepsilon b \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; *S/NN*; {--}

$\subset\{ab\}$: *le nom* a *est inclus dans le nom* b (inclusion forte)

D6: $\lfloor ab \rfloor \lceil \approx\{ab\} \equiv \lfloor c \rfloor \lceil c\varepsilon a \equiv c\varepsilon b \} \rceil$ *Dfs*; ≈; *S/NN*; {--}

$\approx\{ab\}$: a *et* b *ont la même extension* (identité extensionnelle)

Définissons les analogues de ces foncteurs pour des catégories supérieures. Soit:

D7: $\lfloor \alpha \rfloor \lceil ![\alpha] \equiv \lfloor \exists a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; !; [-]; *S/(S/N)*

D8: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \subset[\alpha\beta] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \supset \beta\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; [--]; *S/((S/N)(S/N))*

D9: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \approx[\alpha\beta] \equiv \lfloor a \rfloor \lceil \alpha\{a\} \equiv \beta\{a\} \rceil \rceil$ *Dfs*; ≈; [--]; *S/((S/N)(S/N))*

Nous avons là une homonymie verticale de constantes «embrassant chacune la même idée», pour reprendre les mots de Russell. On peut lire «$![\alpha]$»: *le prédicat* α *est vérifié d'au moins un nom*, dit autrement: α *est un prédicat qui dénote*; «$\subset[\alpha\beta]$»: *le prédicat* α *est inclus dans le prédicat* β; et «$\approx[\alpha\beta]$»: *les prédicats* α *et* β *ont la même extension.* Et, si on réitère l'opération, on inscrira les définitions suivantes:

D10: $\lfloor \alpha \rfloor \lceil ![\alpha] \equiv \lfloor \exists \beta \rfloor \lceil \alpha[\beta] \rceil \rceil$ *Dfs*; !; [-]; *S/(S/(S/N))*

D11: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \subset[\alpha\beta] \equiv \lfloor \gamma \rfloor \lceil \alpha[\gamma] \supset \beta[\gamma] \rceil \rceil$ *Dfs*; ⊂; [-]; *S/(S/(S/N))*

D12: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \approx[\alpha\beta] \equiv \lfloor \gamma \rfloor \lceil \alpha[\gamma] \equiv \beta[\gamma] \rceil \rceil$ *Dfs*; ≈; [--]; *S/((S/(S/N))(S/(S/N)))*

De la même manière que précédemment, on peut lire «$![\alpha]$»: le foncteur α, de catégorie *S/(S/N)*, est un foncteur qui dénote, c'est-à-dire: qui est vérifié d'au moins un foncteur de catégorie *S/N*. Et ainsi de suite.

Ainsi, grâce aux contextes, qui se présentent comme des indices de catégories, la représentation graphique de ces constantes peut rester la même et rendre compte de l'analogie fonctionnelle de ces constantes, sans qu'il soit nécessaire de spécifier une quelconque ambiguïté systématique ou typique.

Il est bien évident que les constantes supérieures sont introduites, en premier lieu, par des définitions qui contiennent des variables nominales dans leur *definiens*, ceux-ci étant en effet construits sur la base de l'epsilon primitif. De fait, si l'analogie est totale en ce qui concerne leur *definiendum* – à l'exception de la forme des parenthèses associées aux contextes –, elle n'est que partielle en ce qui concerne leur *definiens*. Par ailleurs, si on peut paraphraser les définitions primitives pour donner une lecture des foncteurs supérieurs en «parlant» ces derniers comme des noms, ceux-ci n'occupent pas le rôle d'un nom dans le langage logique.

Cependant, on peut atteindre une analogie parfaite et, ce faisant, «légitimer» la nominalisation des entités supérieures dans le langage lui-même. La pierre de voûte d'une telle construction relève de la capacité du langage à gérer l'inscription d'espilons supérieurs, qualifiés de la sorte pour être des foncteurs propositionnels structurellement analogues à l'epsilon primitif, mais dont les arguments appartiennent à d'autres catégories que celle des noms. La similarité entre l'espilon primitif et un epsilon supérieur est rendue explicite dès lors que la définition de cet espilon permet de dériver une thèse structurellement analogue à l'axiome de l'Ontologie, à l'exception de la forme des parenthèses du contexte associées à la constante définie. Cette thèse ne diffèrera donc de l'axiome primitif que par la catégorie des variables et celle de l'epsilon supérieur. Dès lors, on peut également disposer des thèses analogues aux thèses primitives – à la forme des parenthèses près – régies par la base axiomatique et les directives inférentielles, que ce soient les définitions ou tout autre thèse. C'est ce résultat que nous nous proposons maintenant d'établir. Nous l'établirons pour un epsilon de catégorie $S/(S/N)(S/N)$, défini à travers le relateur de l'identité extensionnelle nominale $\approx$ introduit précédemment avec la définition D6[15].

[15] Pour d'autres démonstrations, voir Canty (1967, 1969a), Hiż (1977), Miéville (1984).

2.3 Le principe de stratification supérieure

Définition d'un epsilon supérieur

La définition est inscrite *via* la règle de définition de type propositionnel Dfs. C'est la suivante:

D13(Dfε): $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv .\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\beta\{a\}\rceil\wedge\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}.\supset\approx\{ab\}\rceil\rceil$

> On peut lire cette définition: pour tout foncteur α et β de catégorie *S/N*, α est β si et seulement si pour quelque nom a, α et β sont vérifiés de a et, pour tout nom a et b, si α est vérifié de a et de b, alors a et b ont la même extension.

Relevons que nous aurions pu préférer comme définition de notre epsilon l'une des deux thèses définitions suivantes. Chacune d'entre elles est en effet inférentiellement équivalente à la première.

Dfε': $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv .$
$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil\wedge\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}.\supset\approx\{ab\}\rceil\rceil$

Dfε'': $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv \lfloor\exists a\rfloor\lceil\lfloor b\rfloor\lceil\alpha\{b\}\equiv a\approx b\rceil \wedge \beta\{a\}\rceil\rceil$

Elévation de l'axiome de l'Ontologie

Il s'agit de dériver la thèse suivante, structurellement identique à l'axiome, dans laquelle des variables de foncteurs formateurs de noms remplacent les variables nominales et l'epsilon supérieur de catégorie *S/(S/N)(S/N)* remplace l'espilon primitif de catégorie *S/NN.*

Ax(ε_{-}): $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \equiv .$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha]\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha] \supset \varepsilon[\gamma\beta]\rceil \wedge\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha] \wedge \varepsilon[\delta\alpha].\supset\varepsilon[\gamma\delta]\rceil\rceil$

Un certain nombre de thèses relatives au foncteur $\approx$ sont nécessaires pour la démonstration. Voici tout d'abord quatre thèses, qui découlent de la définition du foncteur $\approx$:

T1: $\lfloor ab\rfloor\lceil a \approx b \equiv \lfloor\phi\rfloor\lceil\phi\{a\}\equiv \phi\{b\}\rceil\rceil$ *Extensionnalité de* $\approx$

T2: $\lfloor a\rfloor\lceil a \approx a\rceil$ *Réflexivité de* $\approx$

T3: $\lfloor ab\rfloor\lceil a \approx b \equiv b \approx a\rceil$ *Symétrie de* $\approx$

T4: $\lfloor abc \rfloor \lceil a \approx b \wedge b \approx c \mathbin{.}\supset b \approx c \rceil$ *Transitivité de* $\approx$

Ensuite, on a une définition paramétrée du foncteur $\approx$:

D14: $\lfloor ab \rfloor \lceil \approx\langle a \rangle\{b\} \equiv a \approx b \rceil$ *Dfs*; $\approx$; $\langle - \rangle$; *S/(S/N)*

$\approx\langle a \rangle$, de catégorie *S/N*, est suivi du contexte associé à cette catégorie, $\{-\}$; $\approx$, suivi d'un contexte nouveau $\langle - \rangle$, est de catégorie *S/(S/N)*. On lira $\approx\langle a \rangle\{b\}$: *les* b *forment l'extension des* a; et $\approx\langle a \rangle$: *l'extension des* a, ceci étant une façon de parler puisque, catégoriellement, $\approx\langle a \rangle$ doit être compris au sens de *former (être) l'extension des* a. Sur la base de cette définition, on obtient les thèses suivantes:

T5: $\lfloor abc \rfloor \lceil \approx\langle a \rangle\{b\} \wedge \approx\langle a \rangle\{c\} \mathbin{.}\supset b \approx c \rceil$ *par T2, T3, D14*

T6: $\lfloor a \rfloor \lceil \approx\langle a \rangle\{a\} \rceil$ *par T2, D14*

T7: $\lfloor a\alpha \rfloor \lceil \alpha\{a\} \supset \approx\langle a \rangle \,\varepsilon\, \alpha \rceil$

Démonstration:

$\lfloor a\alpha \rfloor$

1. $\varphi\{a\}\mathbin{.}\supset$ *hyp*
2. $\approx\langle a \rangle\{a\}$ *T6*
3. $\lfloor \exists b \rfloor \lceil \approx\langle a \rangle\{b\} \wedge \varphi\{b\} \rceil$ *1, 2*
4. $\lfloor bc \rfloor \lceil \approx\langle a \rangle\{b\} \wedge \approx\langle a \rangle\{c\} \mathbin{.}\supset b \approx c \rceil$ *T5*
5. $\approx\langle a \rangle \,\varepsilon\, \varphi$ *3, 4, Dfε*

Thèse

Ces thèses préliminaires posées, on démontre aisément les suivantes:

T8: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \alpha\varepsilon\alpha \rceil$ *par Dfε*

T9: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor \exists\gamma \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \rceil \rceil$ *par T8*

T10: $\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor \gamma \rfloor \lceil \gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta \rceil \rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta \supset$		*hyp*
2.	$\lfloor\gamma\rfloor$	$\gamma\varepsilon\alpha \supset$	*hyp*
3.	$\lfloor\exists a\rfloor$	$\gamma\{a\}$	*2, Dfε*
4.		$\alpha\{a\}$	*2, Dfε*
5.	$\lfloor\exists b\rfloor$	$\alpha\{b\}$	*1, Dfε*
6.		$\beta\{b\}$	*1, Dfε*
7.		$a{\approx}b$	*1, 4, 5, Dfε*
8.		$\gamma\{b\}$	*3, 7, T1*
9.		$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\gamma\{b\}\wedge\beta\{b\}\rceil$	*6, 8*
10.	$\lfloor ab\rfloor\lceil\gamma\{a\}\wedge\gamma\{b\} .\supset a{\approx}b\rceil$		*2, Dfε*
11.	$\gamma\varepsilon\beta$		*9, 10, Dfε*
12.	$\lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil\rceil$		*2-11*

Thèse

T11: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \supset \lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha .\supset \gamma\varepsilon\delta\rceil\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta.\supset$		*hyp*
2.	$\lfloor\gamma\delta\rfloor$	$\gamma\varepsilon\alpha$	*hyp*
3.		$\delta\varepsilon\alpha.\supset$	*hyp*
4.	$\lfloor\exists a\rfloor$	$\gamma\{a\}$	*2, Dfε*
5.		$\alpha\{a\}\rceil$	*2, Dfε*
6.	$\lfloor\exists b\rfloor$	$\delta\{b\}$	*3, Dfε*
7.		$\alpha\{b\}$	*3, Dfε*
8.		$a \approx b$	*1, 5, 7, Dfε*
9.		$\delta\{a\}$	*6, 8, T1*
10.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\gamma\{a\}\wedge\delta\{a\}\rceil$		*4, 9*
11.		$\lfloor ab\rfloor\lceil\gamma\{a\}\wedge\gamma\{b\} .\supset a \approx b\rceil$	*2, Dfε*
12.		$\gamma\varepsilon\delta$	*10, 11, Dfε*
13.	$\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha .\supset \gamma\varepsilon\delta\rceil$		*2/3-12*

Thèse

T12: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\varepsilon[\alpha\beta] \supset.$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\varepsilon[\gamma\alpha]\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge \lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha.\supset \gamma\varepsilon\delta\rceil\rceil$
par T9, T10, T11

T13: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge \lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha.\supset\gamma\varepsilon\delta\rceil .\supset \alpha\varepsilon\beta\rceil\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil$	*hyp*
2.	$\lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil$	*hyp*
3.	$\lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha .\supset \gamma\varepsilon\delta\rceil .\supset$	*hyp*
4.	$\lfloor\exists\gamma\rfloor\ \gamma\varepsilon\alpha$	*1*
5.	$\gamma\varepsilon\beta$	*1, 2*
7.	$\lfloor\exists a\rfloor\ \gamma\{a\}$	*4, Dfε*
8.	$\alpha\{a\}$	*4, Dfε*
9.	$\lfloor\exists b\rfloor\ \gamma\{b\}$	*5, Dfε*
10.	$\beta\{b\}$	*5, Dfε*
11.	$a \approx b$	*4, 7, 9, Dfε*
12.	$\beta\{a\}$	*10, 11, T1*
13.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\beta\{a\}\rceil$	*8, 12*
14.	$\lfloor ab\rfloor\ \alpha\{a\}$	*hyp*
15.	$\alpha\{b\} .\supset$	*hyp*
16	$\approx\langle a\rangle\ \varepsilon\ \alpha$	*14, T7*
17.	$\approx\langle b\rangle\ \varepsilon\ \alpha$	*15, T7*
18.	$\approx\langle a\rangle\ \varepsilon \approx\langle b\rangle$	*3, 16, 17*
19.	$\lfloor\exists c\rfloor\lceil\approx\langle a\rangle\{c\} \wedge \approx\langle b\rangle\{c\}\rceil$	*18, Dfε*
20.	$a \approx c$	*19, D20*
21	$b \approx c$	*19, D20*
22.	$a \approx b$	*20, 21, T3, T4*
23.	$\lfloor ab\rfloor\lceil\varphi\{a\}\wedge\varphi\{b\}.\supset a \approx b\rceil$	*14, 15-22*
24.	$\alpha\varepsilon\beta$	*13, 23, Dfε*

Thèse

T14: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \equiv.$
$\lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil \wedge \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil \wedge \lfloor\gamma\delta\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \wedge \delta\varepsilon\alpha\ .\!\supset \gamma\varepsilon\delta\rceil\rceil$ *T12, T13*

Cette thèse est bien l'analogue formel de l'axiome de l'Ontologie pour l'epsilon défini *ε* de catégorie *S/(S/N)(S/N)*. Ayant ainsi établi, par la démonstration de la thèse T15, la similarité de cet epsilon avec l'espilon primitif, on pourra disposer des thèses formellement analogues aux thèses de l'Ontologie primitive. Si l'on revient aux définitions précédentes, D7-D9, cela nous donne:

T15: $\lfloor\alpha\rfloor\lceil\,![\alpha] \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\rceil$

T16: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\subset[\alpha\beta] \equiv \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \supset \gamma\varepsilon\beta\rceil\rceil$

T17: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\approx[\alpha\beta] \equiv \lfloor\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha \equiv \gamma\varepsilon\beta\rceil\rceil$

L'analogie est cette fois parfaite et les thèses vont de pair: le second membre de ces biconditionnelles est structurellement identique aux *definiens* respectifs des définitions D4-D6 de l'Ontologie primitive. A titre d'illustration, nous démontrons la thèse:

T15: $\lfloor\alpha\rfloor\lceil\,![\alpha] \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\rfloor$

1.	$![\alpha] \supset$	*hyp*
2.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*1, D7*
3.	$\approx\langle a\rangle\varepsilon\alpha$	*2, T7*
4.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\alpha\rceil$	*3*
5.	$![\alpha] \supset \lfloor\exists\gamma\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\rceil$	*1-4*
6.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil\supset$	*hyp*
7.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*4, Dfε*
8.	$![\alpha]$	*7, D7*
9.	$\lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\varepsilon\alpha\rceil \supset ![\alpha]$	*6-8*
10.	$![\alpha] \equiv \lfloor\exists\beta\rfloor\lceil\beta\ \varepsilon\ \alpha\rceil$	*5, 9*

Thèse

On peut réitérer le processus en élevant la définition de l'epsilon de catégorie *S(S/N)(S/N)* à un epsilon de catégorie *S/((S/(S/N)/(S/(S/N))*. Cela donne pour cette définition:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \varepsilon[xy] \equiv \lfloor \exists z \rfloor \lceil x[z] \wedge y[z] \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil x[z] \wedge x[w] \;.\!\supset \approx[zw] \rceil$$

où les variables x et y sont de catégorie *S/(S/N)*.

Ensuite, on procède de la même manière que précédemment pour dériver l'équivalent structurel de l'axiome de l'Ontologie pour ce nouvel epsilon et les thèses corollaires. Ce qui nous donne, comme thèse analogue à l'axiome:

$$\lfloor xy \rfloor \lceil \varepsilon[xy] \equiv. \\ \lfloor \exists z \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \rceil \wedge \lfloor z \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \supset \varepsilon[zy] \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil \varepsilon[zx] \wedge \varepsilon[wx] \;.\!\supset \varepsilon[zw] \rceil \rceil$$

Dans ce cas, les variables nominales sont remplacées par des variables de catégorie *S/(S/N)* et les foncteurs formateurs de propositions à arguments nominaux par des foncteurs formateurs de propositions à arguments de la catégorie *S/(S/N)*. Et ainsi de suite. Ce résultat peut se résumer ainsi:

> Si on dispose de l'analogue de l'axiome pour un epsilon de catégorie *S/CC*, alors la définition suivante peut être utilisée pour produire un epsilon de catégorie *S/(S/C)(S/C)*, analogue à l'epsilon primitif (dans cette définition les variables z et w sont de catégorie C et $\approx$ est le foncteur de l'identité extensionnelle entre éléments de cette catégorie):
>
> Dfε: $\lfloor xy \rfloor \lceil x\varepsilon y \equiv. \lfloor \exists z \rfloor \lceil x\{z\} \wedge y\{z\} \rceil \wedge \lfloor zw \rfloor \lceil x\{z\} \wedge x\{w\} \;.\!\supset \approx\{zw\} \rceil$

La stratification définitoire

Sur la base de l'epsilon supérieur défini, nous nous proposons maintenant d'établir le résultat suivant:

> Pour toute thèse se présentant comme une définition de type propositionnel d'un foncteur, on peut disposer d'une thèse qui corresponde à une définition ontologique de ce foncteur.

Ce résultat peut être présenté sous la forme générale suivante:

$$\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\ \lfloor a x_1 \ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]\rceil \supset$$
$$\lfloor\gamma x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\gamma\varepsilon\alpha\langle x_1\ldots x_n\rangle \equiv.\ \gamma\varepsilon\gamma \wedge \beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]\rceil\ \rceil$$

Les variables x_1 ... x_n sont de catégorie S/N; α est de catégorie $(S/N)/(S/N)\ldots(S/N)$; β est de catégorie $(S/(S/N))/(S/N)\ldots(S/N)$. La démarche qui suit constitue une démonstration de ce résultat:

T18: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \supset.\ \lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\alpha\varepsilon\beta \supset$	*hyp*
2.	$\lfloor\exists b\rfloor\ \alpha\{b\}$	*1, Dfε*
3.	$\beta\{b\}$	*1, Dfε*
4.	$\lfloor a\rfloor\ \alpha\{a\}\supset$	*hyp*
5.	$a \approx b$	*1, 2, 3, Dfε*
6.	$\beta\{a\}$	*4, 5, T1*
7	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil$	*4-6*
8.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*1, Dfε*
9.	$\lfloor ab\rfloor\lceil\alpha\{a\}\wedge\alpha\{b\}\ .\supset a\approx b\rceil$	*1, Dfε*
10.	$\alpha\varepsilon\alpha$	*1, 8, 9, Dfε*
11.	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha$	*7,10*

Thèse

T19: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\ .\supset\alpha\varepsilon\beta\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\rfloor$

1.	$\lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\supset\beta\{a\}\rceil$	*hyp*
2.	$\alpha\varepsilon\alpha.\supset$	*hyp*
3.	$\lfloor\exists a\rfloor\lceil\alpha\{a\}\rceil$	*2, Dfε*
4.	$\alpha\varepsilon\beta$	*1, 2, 3, Dfε*

Thèse

T20: $\lfloor\alpha\beta\rfloor\lceil\alpha\varepsilon\beta \equiv \lfloor a\rfloor\lceil\alpha\{a\} \supset \beta\{a\}\rceil\wedge\alpha\varepsilon\alpha\rceil$ *par T18, T19*

T21: $\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle)] \wedge \gamma\varepsilon\alpha\backslash x_1\ldots x_n/ .\supset$ $\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\gamma a\ a x_1\ldots x_n\rfloor$

1.	$\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}\equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*hyp*
2.	$\gamma\varepsilon\alpha\backslash x_1\ldots x_n/ \supset$	*hyp*
3.	$\lfloor\exists a\rfloor\ \ \gamma\{a\}$	*2, Dfε*
4.	$\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}$	*2, Dfε*
5.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \supset a\approx b\rceil$	*2, 4, Dfε*
6.	$\lfloor b\rfloor\lceil a\approx b \supset \gamma\{b\}\rceil$	*3, T1*
7.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \equiv a\approx b\rceil$	*5, 6*
8.	$\lfloor b\rfloor\lceil\gamma\{b\} \equiv \approx\langle a\rangle\{b\}\rceil$	*7, D14*
9.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma] \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*8, Extensionnalité*
10.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]$	*1, 4, 9*

Thèse

T22: $\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor\lceil\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle] \wedge$ $\beta\{x_1\ldots x_n\}\wedge\gamma\varepsilon\gamma .\supset \gamma\varepsilon\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\rceil$

Démonstration:

$\lfloor\alpha\beta\gamma a x_1\ldots x_n\rfloor$

1.	$\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\} \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*hyp*
2.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma]$	*hyp*
3.	$\gamma\varepsilon\gamma\ \ \supset$	*hyp*
4.	$\lfloor a\rfloor\ \ \gamma\{a\} \supset$	*hyp*
5.	$\beta\{x_1\ldots x_n\}[\gamma] \equiv \beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a\rangle]$	*idem T21 (4-9)*
6.	$\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}$	*1, 2, 5*
7.	$\lfloor a\rfloor\lceil\gamma\{a\} \supset \alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}\rceil$	*4-6*
8.	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\gamma\{b\}\rceil$	*3, Dfε*
9.	$\lfloor\exists b\rfloor\lceil\gamma\{b\}\wedge\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{b\}\rceil$	*7, 8*
10.	$\gamma\varepsilon\alpha\backslash x_1\ldots x_n/$	*3, 9, Dfε*

Thèse

$$T^{*}23:\quad \lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \lfloor a x_1 \ldots x_n \rfloor \lceil \alpha \backslash x_1 \ldots x_n / \{a\} \equiv \beta \{ x_1 \ldots x_n \} [\approx\langle a \rangle] \rceil \supset$$
$$\lfloor \gamma x_1 \ldots x_n \rfloor \lceil \gamma \varepsilon \alpha \backslash x_1 \ldots x_n / \equiv .\ \gamma \varepsilon \gamma \wedge \beta \{ x_1 \ldots x_n \} [\gamma] \rceil \rceil \qquad \textit{par } T21, T22$$

Ce résultat nous assure donc que l'on retrouve toujours, dans une strate supérieure de l'Ontologie régie par un epsilon supérieur, l'équivalent structurel des définitions inscrites dans l'Ontologie primitive. A titre d'illustration, nous proposons un exemple relativement simple qui concerne la négation de prédicat. En premier lieu, considérons la définition de la négation nominale. Soit:

$$D15:\quad \lfloor ab \rfloor \lceil a\varepsilon{\sim}(b) \equiv .\ a\varepsilon a \wedge {\sim}(a\varepsilon b) \rceil$$

La thèse que l'on veut dès lors atteindre est:

$$\lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon{\sim}\backslash\beta/ \equiv .\ \alpha\varepsilon\alpha \wedge {\sim}\,(\alpha\varepsilon\beta) \rceil$$

La négation apparaissant dans le premier membre de la biconditionnelle est une négation de prédicat, de catégorie *(S/N)/(S/N)*, tandis que celle apparaissant dans le second membre est la négation propositionnelle, de catégorie *S/S*. Posons la définition protothétique suivante:

$$D16:\quad \lfloor a\beta \rfloor \lceil {\sim}\backslash\beta/\{a\} \equiv {\sim}\,(\approx\langle a \rangle\varepsilon\beta) \rceil$$

ainsi que la définition auxiliaire:

$$D17:\quad \lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil {\sim}\{\beta\}[\alpha] \equiv {\sim}\,(\alpha\varepsilon\beta) \rceil$$

de laquelle s'ensuit, par substitution de $\approx\langle a \rangle$ à α:

$$T24:\quad \lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil {\sim}\{\beta\}[\approx\langle a \rangle] \equiv {\sim}\,(\approx\langle a \rangle\varepsilon\beta) \rceil$$

On obtient donc la thèse:

$$T25:\quad \lfloor \alpha\beta a \rfloor \lceil {\sim}\backslash\beta/\{a\} \equiv {\sim}\{\beta\}[\approx\langle a \rangle] \rceil$$

De là, avec ${\sim}\backslash\beta/\{a\}$ pour $\alpha\backslash x_1\ldots x_n/\{a\}$ et ${\sim}\{\beta\}[\approx\langle a \rangle]$ pour $\beta\{x_1\ldots x_n\}[\approx\langle a \rangle]$ dans T*23, on obtient la thèse:

$$T26:\quad \lfloor \alpha\beta \rfloor \lceil \alpha\varepsilon{\sim}\backslash\beta/ \equiv \alpha\varepsilon\alpha \wedge {\sim}\,(\alpha\varepsilon\beta) \rceil$$

Ainsi, les thèses-définitions peuvent être étendues d'un niveau à l'autre, pas à pas, conformément aux directives inférentielles initiales, simplement en définissant de nouvelles constantes homonymes, équiformes et similaires dans l'usage aux anciennes, mais de catégorie sémantique et signification propre différentes. Quant à l'axiome de l'Ontologie, il peut être élevé sans ambiguïté, simplement en définissant tout d'abord des epsilons supérieurs homonymes, analogues au foncteur primitif de la prédication singulière, aussi paraphrasables par «est», et permettant ensuite de dériver les thèses corollaires à l'axiome. Les constantes basiques, les thèses et déductions du système «suggèrent» donc des hiérarchies infinies d'analogues, exactement de la même forme excepté en ce qui concerne les formes des parenthèses, celles-ci se présentant comme des indices contextuels de catégorie. Mais, à la différence des *Principia Mathematica*, la «suggestion» n'est pas redevable de la transparence analogique qui résulte du caractère de généralité du langage logique. L'analogie est effective, en ce sens qu'elle est portée et gérée par les propres modes de formalisation du langage.

Nous le disions dans l'introduction, l'Ontologie nous libère de l'impossibilité de nommer les fonctions et d'en faire des sujets logiques d'assertion, impossiblité découlant de la doctrine des symboles fonctionnels comme symboles incomplets. La théorie permet aux fonctions d'être nommées de la même manière que n'importe quelle entité, sans qu'il y ait réification, ni qu'elles soient renvoyées à un statut de fictions logiques. Chaque strate du langage gérée par un epsilon supérieur mimant, pour ainsi dire, la strate nominale gérée par l'espilon primitif, le processus de nominalisation des entités supérieures est ainsi «validé» par leur représentation pseudo-nominale. On peut dès lors s'autoriser à projeter, au niveau du parler, toute strate supérieure sur la strate nominale.

3. En guise de conclusion

Ayant montré que le formalisme permet de déployer et développer toutes les thèses enveloppées dans l'Ontologie primitive dans toute strate supérieure, il convient de conclure en revenant à notre projet logiciste. La réflexion que nous avons conduite peut être menée, de manière strictement similaire, dans le cadre de la construction catégorielle de l'arithmétique. Simplement, l'epsilon supérieur défini fera intervenir dans sa définition non pas l'identité extensionnelle, mais l'équinuméricité. Quant aux nombres, ils pourront être traités comme des objets, sans qu'il y ait réification nécessaire. Chaque niveau supérieur conserve les axiomes de Peano tandis que l'axiome de l'infini est dérivable dans le système pour n'importe quelle catégorie supérieure. En conclusion, s'il est possible, comme dans la théorie des types, de construire une hiérarchie infinie d'arithmétiques, c'est en contrôlant toujours, formellement, le niveau où on se trouve, tandis que ce dernier peut être projeté sur le parler de la strate nominale, géré par l'epsilon primitif. Loin de toute prolifération ontologique d'entités, entre le platonisme généreux de Frege et le nominalisme instrumental des *Principia Mathematica*, la pensée logiciste peut alors trouver le repos.