UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES LETTRES

L'ÉLÈVE ET LA NUMÉRATION

Regard sur la rénovation de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire

THÈSE

présentée à la Faculté des Lettres
de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès lettres

par

JEAN-FRANÇOIS PERRET

PETER LANG
1985

La Faculté des lettres de l'Université de Neuchâtel, sur les rapports de MM. Pierre Marc, professeur à l'Université de Neuchâtel, Jean Brun, maître d'enseignement et de recherches à l'Université de Genève, Jean-Blaise Grize, professeur à l'Université de Neuchâtel, et Samuel Roller, professeur honoraire de l'Université de Genève, autorise l'impression de la thèse présentée par M. Jean-François Perret, en laissant à l'auteur la responsabilité des opinions énoncées.

Neuchâtel, le 1er février 1985.

Le doyen: Pierre Centlivres.

Impression: Lang Druck S.A., Liebefeld/Berne

L'élève et la numération
Regard sur la rénovation de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire

AVANT-PROPOS

En 1969, Samuel Roller créait, avec la collaboration de Jean Cardinet, l'Institut romand de Recherches et de Documentation Pédagogiques, qui se voit notamment confié la question de l'évaluation du programme rénové de mathématique introduit dans les écoles primaires de Suisse romande.

En rejoignant, en 1977, cet Institut, j'ai eu la chance de pouvoir m'insérer dans le cadre d'un large programme de recherches et de contribuer à une partie de sa réalisation. L'expérience est exceptionnelle par l'ampleur et l'ambition des travaux engagés. Suivre sur plusieurs années l'implantation d'une innovation pédagogique, en analyser son impact et suggérer des adaptations est une démarche que peu de pays semblent pouvoir mettre en oeuvre.

C'est dans ce contexte qu'a pris forme la présente étude consacrée spécifiquement à l'apprentissage de la numération avec le souci constant de cerner les processus en jeu dans les conduites et réponses des élèves.

Cette étude n'aurait pas pu se faire sans un contexte favorable. Je ne voudrais pas manquer ici d'exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui l'ont rendue possible.

Le secteur mathématique de l'IRDP a bénéficié de la collaboration de Catherine Rübner puis de François Jaquet et Luc-Olivier Pochon avec qui j'ai la chance de travailler étroitement.

Très précieuse est la direction de Jean Cardinet, chef du Service de la Recherche, soucieux de l'orientation générale des travaux tout en préservant la liberté favorable à une dynamique de recherche authentique.

Jacques-André Tschoumy présent directeur de l'IRDP a tout mis en oeuvre pour rendre la continuation des travaux d'évaluation la plus efficace et heureuse possible.

Pour plusieurs aspects de cette étude, mes contacts universitaires se sont révélés particulièrement bénéfiques, m'ouvrant l'horizon à des cadres conceptuels des plus utiles pour l'objet traité bien que plus distants des questions d'évaluation.

Ce fut, pour moi, une grande chance de pouvoir compter sur le professeur Pierre Marc qui m'a encouragé et aidé à élaborer cette recherche dans la perspective d'une thèse. Son regard lucide sur les enjeux des innovations pédagogiques a été pour moi d'un apport déterminant.

Ma reconnaissance va au professeur Jean Brun qui, par ses travaux et par les nombreux échanges que j'ai eu avec lui depuis quelque dix ans, m'a stimulé à affiner l'observation des conduites des élèves en situation pédagogique.

Je tiens à remercier le professeur Jean-Blaise Grize pour l'attention qu'il a portée à mon travail, de même que pour ses précieuses remarques et suggestions.

Merci à tous les enseignants qui ont accepté de collaborer à l'observation des élèves; leurs avis et leurs propres observations m'ont été des plus utiles.

Merci à tous les élèves qui se sont vus confronter à des questions souvent ardues, non sans se demander quelques fois, je suppose: «où veulent ils bien en venir?».

La dactylographie initiale de ce texte a été assurée par Eliane Guye et la présente édition a reçu le concours très efficace de Françoise Santschy et de Michelange Schmidt, que je remercie vivement.

PARTIE I

POSITION DU PROBLÈME

La rénovation du curriculum de mathématique mise en oeuvre dans les années septante a ouvert un large champ d'investigation pour la recherche pédagogique. Conduites dans plusieurs pays, de nombreuses études visent à identifier l'impact réel du nouvel enseignement de mathématique sur les connaissances des élèves.

La convergence des conclusions auxquelles ces études aboutissent surprend. Il est fréquemment question d'échec partiel des innovations entreprises; les élèves ne semblent pas acquérir une compréhension aussi large que prévue des notions et techniques mathématiques abordées en classe, leurs capacités d'appréhender une situation-problème non familière restent en deçà des objectifs visés.

La permanence d'un tel constat interroge et invite à un réexamen des présupposés méthodologiques et épistémologiques sur lesquels il s'appuie. Un examen de la littérature dans le champ de l'évaluation des innovations pédagogiques montre que le modèle qui sous-tend la majorité des investigations actuelles est centré sur l'analyse des facteurs responsables de la «dérive» d'une innovation. Du projet initial à son implantation sur le terrain scolaire, il s'agit alors, dans ce modèle, d'identifier les obstacles, contraintes ou résistances que rencontrent les idées et pratiques pédagogiques nouvelles.

Le décalage entre un projet innovateur et sa réalisation tend à se présenter comme inéluctable. Un projet pédagogique ne peut garder son élan et sa «pureté» lors d'une implantation généralisée à l'échelle d'une région, tel est le présupposé plus ou moins implicite de maintes recherches évaluatives.

C'est un autre regard sur la rénovation du curriculum que nous proposerons dans la présente étude. Plutôt que de nous pencher sur les tribulations d'un projet pédagogique, nous partirons de ce que les élèves apprennent effectivement en classe sans en faire a priori la mesure de l'efficience d'une innovation. Ce point de vue particulier adopté, ce sont les apprentissages escomptés que nous interrogerons à la lumière des apprentissages réels. Pour expérimenter cette inversion du regard classiquement porté sur les rénovations pédagogiques, un domaine d'apprentissage bien circonscrit a été retenu, celui de l'epprentissage de la numération écrite. L'écriture des nombres par les élèves de 6 à 10 ans, domaine auquel les données empiriques de cette étude seront consacrées, est ainsi abordée dans la perspective d'une étude de cas dont la fonction première est d'explorer le fonctionnement du cadre conceptuel proposé.

CHAPITRE I

MAIS QU'APPRENNENT DONC LES ÉLÈVES À L'ÉCOLE?

Que font les élèves à l'école? Quels sont les apprentissages jugés suffisamment utiles et importants pour que des enfants de 6 à 12 ans y consacrent de si nombreuses heures dans le cadre scolaire? Quels savoirs, savoir-faire et savoir-être les élèves acquièrent-ils, jour après jour, en classe? Apprennent-ils ce qu'on dit et ce qu'on croit qu'ils apprennent?

Ces interrogations forment le noyau central de la problématique du curriculum scolaire. Au cours des quinze dernières années, le développement de cette problématique se manifeste par une multiplication des ouvrages ayant trait au curriculum, que cela soit sur la question de son élaboration, de sa mise en oeuvre et de son évaluation (Golby and al. 1975, Mc Donald and Walker 1976, Hamilton 1976, Lawton and al.1978, Holt 1981) ou sur l'enjeu social dont tout curriculum est porteur (Lawton 1975, Eggleston 1977, Vincent 1980).

1. Quel curriculum, pour quelle école primaire? une question récurrente.

Si ce domaine d'étude connaît un développement certain, les interrogations sur le curriculum de l'école primaire ne sont, par contre, pas récentes. Elles émergent à diverses époques lorsque, dans la dynamique du système social, les décalages entre l'école et les autres éléments de la société sont vécus comme dysfonctionnels. Le côtoiement d'éléments hétérogènes, tels par exemple les savoirs scolaires et les savoirs requis par la vie quotidienne et professionnelle d'une part, les méthodes d'enseignement traditionnelles et la psychologie de l'apprentissage d'autre part, la science qui se fait et celle qui s'enseigne finalement, sont alors sources de tensions et de changements probables.

A chaque époque, la pertinence du curriculum scolaire est questionnée. Comme le montre Vincent (1980), le débat sur le contenu de l'enseignement dans le contexte français est intimement lié à l'histoire de l'école primaire depuis le siècle dernier.

La critique certainement la plus percutante du curriculum hérité du 19e siècle vient des pédagogues et philosophes se réclamant d'une approche pédocentrique. L'oeuvre d'un Dewey, ou celle de Freinet, sont explicites sur ce point.

«L'école, ainsi pénétrée d'une vie nouvelle à l'image du milieu devra donc adapter non seulement ses locaux, ses programmes et ses horaires, mais aussi ses outils de travail et ses techniques aux conquêtes essentielles du progrès à notre époque. Nous ne devons pas nous accommoder plus longtemps d'une école qui retarde de cent ans avec son verbialisme, ses manuels, ses manuscrits, l'ânonnement de ses leçons, la récitation de ses résumés, la calligraphie de ses modèles. Au siècle du règne incontesté de l'imprimerie, de l'image, fixe et animée, des disques, de la radio, de la machine à écrire, de la photo, de la caméra, des postes, du téléphone, du train, de l'auto, de l'avion!
Ce contraste, auquel il est vraiment surprenant qu'éducateurs, parents et législateurs ne soient pas plus sensibles, pose dans toute son acuité la besogne de réadaptation qui s'impose.» (Freinet, 1945,cité dans l'édition 1977, p.22)

Dans le contexte des années 20, la perspective d'une école active à laquelle oeuvre alors Pierre Bovet suscite un réexamen des programmes d'enseignement.

«Pour les programmes, la cause est entendue: l'école enseignante a donné sinon tout, du moins, de tout, autant que l'enfant pouvait en retenir et toutes les choses «qu'il n'est pas permis d'ignorer». L'école active, pour qui les connaissances seront avant tout un stimulant au travail de l'esprit, n'a que faire de programmes encyclopédiques. Suivant une formule ancienne déjà mais, avouons-le, insuffisamment réalisée, il s'agira moins d'apprendre que «d'apprendre à apprendre», d'apprendre à travailler et l'on ne se fera par conséquent aucun scrupule «d'échantillonner» les connaissances historiques, géographiques, scientifiques, qui devront mettre en branle l'activité de l'esprit.» (Bovet, cité par Roller 1978, p.33)

La question de l'échantillonnage des connaissances, au sens où l'entend Pierre Bovet, touche un aspect central de la mise à jour des programmes d'enseignement. Dans le contexte romand, et plus particulièrement genevois des années vingt, l'enjeu consiste, comme le rappelle Roller (1978), à concilier l'esprit de l'Ecole active et la définition des programmes d'enseignement inévitablement contraignants sur le plan pédagogique. La solution alors adoptée consiste à distinguer deux composantes du curriculum scolaire: l'une définie par la spécification d'un nombre restreint de notions dont on juge l'acquisition indispensable (c'est la définition d'un bagage culturel minimum), l'autre se réfère au développement optimum de la personnalité de l'enfant, développement que l'enseignant s'attachera à favoriser au mieux, sans contrainte de programmation (l'échantillonnage des connaissances reste ici libre et ouvert). Cette distinction va se retrouver reformulée à différentes époques. Relevons par exemple ce qu'en dit Jean Grize dans un petit ouvrage stimulant, publié en 1941:

«Il y a des choses à savoir, et à savoir à fond. Il y en a d'autres dont la vertu est d'un ordre différent. Elles ne sont pas destinées à meubler l'esprit seulement, mais à le rendre plus souple, à le cultiver, à l'affiner. Elles visent à exercer le raisonnement, à fortifier le jugement, à développer les qualités de caractère. Elles parlent à la sensibilité aussi. En un mot, elles tendent à faire de nos élèves des êtres humains et non de bons élèves sachant bien réciter leurs «tâches». (p.62)

Notons qu'au début des années quatre-vingt, dans le sillage de la rénovation des programmes de l'école primaire engagée en Suisse romande, la question de l'échantillonnage se trouve à nouveau posée. Les programmes rénovés, jugés souvent trop ambitieux et trop larges par les enseignants, ne laissent plus toujours percevoir le bagage de base que chaque élève devrait au minimum acquérir. Des travaux actuellement engagés visent à identifier les connaissances (ces «choses à savoir et à savoir à fond») dont l'acquisition est jugée essentielle. Ils rejoignent, sous un certain angle, la question de l'identification des compétences de base nécessaires à tout individu dans une société donnée (Poisson 1980, Leduc 1980, Stievenart et Tourneur 1983).

Il n'est pas nécessaire de développer plus amplement ces quelques éléments historiques pour saisir que le mouvement de rénovation des programmes d'enseignement se nourrit d'un passé riche en débats et controverses sur le curriculum scolaire.

Les enjeux actuels ne se révèlent pas fondamentalement différents de ceux du début du siècle. D'une manière générale, c'est encore le décalage de l'école par rapport à la société, de même que le décalage entre la science qui se fait et celle qui s'enseigne, qui est au coeur du débat. Comme le formule Giordan (1983) en avant-propos d'un ouvrage consacré à l'éducation scientifique:

«Les deux prochaines décennies seront capitales en matière d'éducation scientifique. Un certain nombre de mutations ont déjà eu lieu. Ainsi, le développement impressionnant de la science et de ses applications techniques modifie la vie quotidienne dans tous les domaines. La médecine, les transports, l'agriculture par exemple ont opéré des transformations. Face à cela les systèmes éducatifs sont restés relativement statiques continuant à opérer comme si l'environnement ne se modifiait pas, or celui-ci est en perpétuelle mutation. L'école se doit d'intégrer ces changements que provoque l'ère industrielle et urbaine, si elle veut continuer à jouer un rôle.» (p.9)

C'est une analyse similaire que conduit Panchaud (1983):

«Celle-ci [l'école] ne peut ignorer les conditions du monde moderne sous prétexte qu'elle remplirait une mission qui dépasse les contingences matérielles et temporelles et qui ne relèverait que des exigences de la culture désintéressée. J'ai montré dans le premier chapitre que l'institution scolaire finissait toujours par s'adapter aux besoins nouveaux. La question est de savoir si elle le fait assez rapidement. Ne sommes-nous pas aujourd'hui en état d'urgence? Les mutations intervenues ces dernières années semblent le prouver.» (p.52)

Ce qui caractérise l'époque récente, ce sont les conditions sociohistoriques et économiques particulières qui ont permis de donner corps, au cours des années septante, à des projets pédagogiques de vaste envergure n'impliquant plus seulement quelques classes ou lieux expérimentaux, mais l'ensemble des écoles d'un pays. La remise à jour du curriculum de l'école obligatoire, en particulier, est la conséquence d'une prise de conscience de l'enjeu politique que représente la formation intellectuelle et scientifique des générations montantes en période de forte croissance économique. Dès les années 50, aux Etats-Unis, l'engagement de nombreux scientifiques dans le champ éducatif est, à cet égard, significatif.

La rénovation du contenu de l'enseignement paraît ainsi fondamentalement motivée par les mutations des sociétés occidentales, mutations qui exercent une pression permanente sur l'école afin d'obliger celle-ci à une «mise à jour» périodique. Le développement actuel de l'informatique et son impact dans de nombreux secteurs d'activités fournit à ce sujet une illustration exemplaire du processus. C'est apparemment avec précipitation que l'école va devoir intégrer aussi bien une initiation des élèves à l'informatique que le recours à l'ordinateur comme moyen d'enseignement. Cette évolution s'effectue de toute évidence plus sous la pression des événements et des enjeux économiques que par des choix éducatifs réfléchis.

Si le contexte socio-économique est un facteur certain de changement de l'école, l'appréhension des innovations dans leur contenu proprement pédagogique requiert la prise en compte de l'histoire de la pensée pédagogique. C'est cette histoire qu'interroge Panchaud (1983). Après avoir suivi la trace au cours des siècles de quelques idées pédagogiques «laissées pour compte ou sujettes à éclipses», l'auteur en arrive à une conclusion apparemment paradoxale. D'une part l'impact des idées novatrices paraît faible:

«elles ne sont pas entrées dans les moeurs du moment. Elles ont ressurgi et ont traversé les siècles jusqu'à nos jours, avec plus ou moins de succès. Les théories de l'éducation n'ont ainsi pas évolué selon une progression linéaire, mais ont été sujettes à des avances, suivies de reculs. Doit-on voir dans les éclipses et les réapparitions de ces idées la preuve de leur valeur ou, au contraire, le signe de leur caractère utopique?» (p.36)

D'autre part, il n'est pas possible d'affirmer que rien n'a changé dans le système d'éducation.

«Ce serait tout à fait faux. Il suffit de lire les descriptions des écoles d'autrefois, et de les comparer à celles où nous envoyons nos enfants pour s'en convaincre». (p.36)

Comment alors rendre compte de ce processus de changement sur le plan des orientations pédagogiques? La manière dont, en terme d'influence sociale, Moscovici (1983) aborde la dynamique évolutive de l'innovation fournit un cadre conceptuel qui nous paraît des plus utiles pour appréhender les innovations pédagogiques. Moscovici distingue quatre phases pour décrire le processus par lequel des idées novatrices, initialement provocantes et sources de conflits, sont peu à peu absorbées, intégrées et reconnues socialement. La première phase est ainsi celle du conflit; les tentatives d'influence d'autrui n'ont pas nécessairement de résultats tangibles. Une deuxième phase dite «d'incubation» ouvre la voie à un changement, mais dont l'individu «influencé» n'a pas conscience. Au cours de la troisième phase, il y a prise de conscience du changement, mais sans s'autoriser à le manifester. Enfin, la quatrième phase de «révélation» se caractérise par un changement opéré par chacun individuellement, mais ce changement est reconnu socialement.

Que l'on prenne la rénovation de l'enseignement de la mathématique ou du français, certaines options pédagogiques qui hier étaient provocantes sont en effet aujourd'hui reprises comme si elles relevaient du sens commun. Il en va ainsi, par exemple, du rôle de l'expérience concrète dans l'apprentissage mathématique, ou du primat de l'expression orale et écrite dans la maîtrise de la langue maternelle. Les emprunts aux données psychogénétiques ou aux recherches pédagogiques de terrain, telles celles de Freinet, ne sont pas ignorés mais ils font partie d'un bagage culturel intégré (non sans assimilation déformante), bagage qui ne saurait aujourd'hui faire problème, tout au moins dans le champ éducatif.

Approché sous cet angle, l'impact des idées novatrices se révèle plus complexe que ne le laissent souvent supposer les mouvements pédagogiques militants, soucieux de susciter l'adhésion. L'histoire des idées pédagogiques qui nourrissent les réformes du curriculum scolaire paraît en effet pouvoir être appréhendée sur plusieurs plans. Les idées apparemment «laissées pour compte ou sujettes à éclipses» selon l'expression de Panchaud, pourraient paradoxalement être celles qui marquent indirectement le plus l'école.

Nous avons développé jusqu'ici quelques considérations générales sur la dynamique évolutive en matière de curriculum scolaire, en soulignant l'ancrage historique de la question. Il nous faut maintenant cerner d'un peu plus près le contexte dans lequel s'inscrit plus particulièrement la rénovation de l'enseignement de la mathématique. Que sait-on de ce contexte d'émergence? Pour étayer la nécessité de cette rénovation, les arguments avancés depuis les années 50, avec une consistance presque inquiétante, sont d'ordre à la fois mathématique, socio-économique et psychopédagogique. Nous nous limiterons ici à évoquer les facteurs de changement les plus fréquemment rappelés dans la littérature pédagogique.

Ce sont tout d'abord les arguments propres au champ mathématique qui sont à mentionner. La nécessité d'une rénovation est soulignée par des mathématiciens préoccupés de voir réduit l'écart entre leurs activités de recherches (la mathématique qui se créée) et l'enseignement de cette discipline (Revuz 1970). C'est en premier lieu dans l'enseignement supérieur que cet écart est dénoncé vers 1950, mais le mouvement touche progressivement les degrés secondaire et primaire. L'ambition poursuivie est de favoriser chez les élèves une activité, une expérience proprement mathématique, au sens où pour le mathématicien

«l'important est de moins en moins dans la science faite, en tant que collection de résultats, mais une attitude mentale face à la réalité» (Revuz 1970, p.51).

C'est dans cette perspective que la notion de structure, comme outil, trouve alors une place centrale.

«Plus important est de mettre en évidence le caractère dynamique de la mathématique qui est action et non contemplation. Une espèce de structure particulière a des possibilités d'action sur les ensembles qui en sont munis. La pensée qui a pris conscience de ces structures est obligatoirement active et spontanément agressive à l'égard des problèmes à résoudre» (Revuz 1970, p.49-50). (1)

Les arguments d'ordre mathématique n'auraient probablement pas eu le même impact sans un contexte d'expansion économique qui fait ressentir l'urgence d'un investissement en matière d'éducation et de formation scientifique. Cette prise de conscience s'exprime avec force en Europe à l'occasion du colloque de Royaumont, près de Paris, colloque organisé en 1959 par l'Organisation Européenne de Coopération Economique (OECE).

(1) Pour une discussion critique du statut réel des structures-outils dans l'enseignement, on peut se référer à Chevallard (1980) pour qui «un certain enseignement moderne a tendu à organiser leur présentation, ou leur interminable construction (que l'on pense à la géométrie), non à mettre en lumière leur capacité d'action dans les situations de fonctionnement spécifique. Par là se réalisait une véritable décontextualisation de l'outillage conceptuel que les structures étaient venues mettre à disposition des mathématiciens.» (p.94)

Le but du colloque est de promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques. Si un tel colloque se tient dans le cadre de l'OECE c'est, comme le rappelle Pauli (1979), en raison de l'assurance que le développement scientifique, technique et industriel n'est possible qu'à la condition de former un plus grand nombre de techniciens et de scientifiques de haut niveau, ce qui requiert une réforme de l'enseignement des disciplines scientifiques.

Le lancement du premier Spoutnik en 1957, et le défi que cet exploit technico-scientifique lance du même coup aux pays occidentaux, est alors encore bien présent dans les esprits.

Liés à cette évolution socio-économique sans précédent, l'allongement de la scolarité et du temps de formation contribuent à modifier la fonction même de l'école primaire et des apprentissages qui y sont réalisés. Comme l'exprime Brun (1975):

«l'école primaire se voulait le lieu où les enfants commencent leurs études et non plus où ils les terminent, la finalité de l'enseignement n'est plus d'accumuler toute une série de connaissances en vue d'une préparation à toutes les professions imaginables, mais d'apprendre aux enfants à penser. On voit alors tout le parti à tirer d'une mathématique qui fait la part belle à la logique, aux opérations, plus qu'aux objets sur lesquels elles portent» (p.8).

Aux contextes mathématiques et socio-économiques évoqués ci-dessus s'ajoute un contexte pédagogique et psychologique sur lequel la rénovation de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire a pu étroitement prendre appui. Le projet de favoriser chez les élèves l'élaboration d'instruments structuraux de pensée et d'action pour appréhender (mathématiser) un large champ de situations-problèmes, a rencontré un large écho au sein des courants pédagogiques centrés prioritairement sur l'enfant et son développement. Les travaux de Piaget sur la genèse des opérations logiques élémentaires ont fourni un appui des plus solides pour penser une formation mathématique précoce en accord avec les possibilités intellectuelles des élèves. L'apport de l'épistémologie et de la psychologie génétique à l'enseignement de la mathématique est ainsi généralement jugé déterminant malgré les difficultés qu'il ne manque pas de présenter (Brun 1975, Vergnaud 1981c).

C'est ainsi la convergence historique de divers facteurs qui est souvent invoquée pour rendre compte de la force du mouvement de rénovation dont l'enseignement de la mathématique a fait l'objet. Nous pouvons cependant nous demander si cette analyse, communément admise, n'a pas pour effet de cristalliser une représentation du changement en «tout ou rien» ou plus exactement en «rien puis tout». En voulant démarquer nettement un temps révolu d'un temps rénové, à la manière de maints innovateurs, on tend à occulter le caractère continu des recherches orientées, depuis plusieurs décennies, vers l'amélioration de l'enseignement de la mathématique à l'école primaire. Par delà le bruit momentané des réformes introduites avec éclats, saisir cette dynamique de rénovation continue, à l'assise institutionnelle souvent fragile, relève d'un autre type d'analyse qu'il y aurait, à notre avis, tout intérêt à développer. Dans le contexte romand, par exemple, une revue telle que «Math-Ecole», créée en 1962 par S. Roller (revue initialement intitulée les «Nombres en couleur»), fournit un matériel des plus intéressants pour suivre une dynamique de rénovation pas à pas, mois après mois, sans escamoter la diversité des enjeux locaux qui en forment la trame. Cette histoire-là reste manifestement encore à écrire.

En résumé, nous avons voulu dans ces pages introductives rappeler la permanence des interrogations sur le curriculum scolaire. En fonction de l'évolution des contextes économiques et culturels, une pression constante s'est exercée pour une remise à jour du curriculum scolaire, ceci non seulement en vue d'en éliminer les éléments caduques, mais dans la perspective de développer une action éducative tournée vers un avenir fait de mutations certaines.

A propos plus particulièrement du mouvement de rénovation de l'enseignement de la mathématique, nous en sommes toutefois venu à nous interroger sur les risques de schématisation abusive que véhicule une argumentation souvent plus soucieuse d'emporter l'adhésion que de rendre compte de la dynamique réelle des changements.

2. Le curriculum scolaire comme champ d'investigation pour la recherche pédagogique

Le mouvement de rénovation du curriculum de l'école primaire, tel qu'il se développe dans les années soixante, fournit un vaste champ d'investigation pour la recherche pédagogique. Un domaine en particulier prend une ampleur jusque là inconnue, c'est celui de l'évaluation des innovations pédagogiques. Prenant initialement appui sur une tradition de pédagogie expérimentale, ce domaine tend peu à peu, au cours des années septante, à se constituer en courant de recherche spécifique comme le témoigne une littérature abondante sur la question.

Les recherches évaluatives restent toutefois l'objet de débats et de controverses vives en matière d'orientations méthodologiques et épistémologiques; que cela soit au niveau des méthodes d'investigation, du mode d'implication du chercheur, du but ou de la fonction de l'évaluation, les options en jeu sont diverses, sinon divergentes. Dans ce contexte, le cadre institutionnel de recherche joue un rôle non négligeable. Ainsi, les recherches évaluatives entreprises, dans plusieurs pays, par des organismes liés plus ou moins directement aux ministères de l'éducation, révèlent de nombreux points communs, aussi bien dans les démarches adoptées que dans la fonction qu'elles remplissent.

a) Recherches sur les effets de la rénovation de l'enseignement de la mathématique

Nous nous centrerons ici sur les recherches évaluatives conduites dans le domaine de l'apprentissage mathématique puisque c'est dans ce domaine que se situe notre propre étude. Comme cela a été rappelé plus haut, sous l'impulsion de milieux scientifiques, la mathématique est la première discipline à faire l'objet d'un réexamen radical aussi bien dans son contenu d'enseignement que dans les approches didactiques retenues. Des programmes d'études rénovés pour l'école primaire voient le jour au cours des années septante, et ceci dans plusieurs pays comme le montre avec précision Roller (1975) à la suite d'une enquête réalisée sous l'égide du Conseil de l'Europe. Les programmes adaptés et implantés de manière généralisée varient quelque peu d'un pays à l'autre, mais l'esprit et la philosophie de la rénovation sont semblables en raison des nombreuses références psychologiques et pédagogiques communes.

Influencé à la fois par les données de la psychologie cognitive de Piaget et de Bruner, en particulier, et par des mathématiciens préoccupés de voir l'enseignement de mathématiques prendre appui sur de nouvelles bases, le projet pédagogique peut être résumé par la thèse suivante: si l'on parvient à donner à l'élève une bonne compréhension des structures mathématiques (non pas au niveau formel où l'appréhende le mathématicien, mais au niveau représentatif adéquat), de manière à mettre en évidence la logique sous-jacente aux différentes opérations mathématiques et spatiales, l'apprentissage sera plus solide (moins sujet à l'oubli), et les connaissances acquises seront plus aisément transposables d'une situation-problème à l'autre. Autrement dit, ce projet psycho-pédagogique imprégné de structuralisme vise à fournir à l'élève des instruments intellectuels de base plutôt qu'un répertoire de techniques spécifiques.

Ce besoin, rappelons-le, s'est tout d'abord fait sentir au niveau de l'enseignement secondaire, comme l'exprime Picard (1970):

«Il ne s'agit pas uniquement, en effet, que les enfants soient capables de résoudre correctement des problèmes portant sur «les triangles égaux» ou le «thèorème de Thalès», ou sachent que «le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est $b^2 - 4ac$». Ceci est de la technique et c'est tout à fait insuffisant. Dans l'état actuel des choses, l'enseignement mathématique dans le deuxième cycle apparaît à une grande majorité des élèves comme beaucoup trop abstrait. Or, comme nous l'avons vu, si nous désirons que les mathématiques soient autre chose que des techniques de spécialistes, il est nécessaire que les élèves abordant des études supérieures, quelles qu'elles soient, aient à leur disposition quelques structures abstraites fondamentales. Il est nécessaire, d'autre part, qu'ils soient capables de mathématiser des situations concrètes les plus diverses possibles (....). Une théorie mathématique est d'autant plus applicable qu'elle est abstraite, car nous pouvons alors donner aux éléments et aux relations qui entrent en jeu dans cette théorie la signification qui va nous être utile.» (Picard, 1970, p.13)

C'est la même exigence de centration sur les structures mathématiques les plus générales qui sous-tend les rénovations du curriculum de l'école primaire, entreprises à la fin des années soixante. Ce mouvement de rénovation, d'une ampleur tout à fait nouvelle, a fait l'objet de nombreuses investigations empiriques conduites dans le but d'en identifier l'impact réel sur les connaissances des élèves. Donnons un aperçu des recherches réalisées dans ce domaine.

Une première catégorie de recherches vise à élucider les effets du nouvel enseignement sur certaines dimensions spécifiques de l'apprentissage. C'est tout d'abord l'analyse de l'impact sur la genèse des structures logiques élémentaires et le raisonnement de l'enfant, qui est au centre de plusieurs recherches (Brun 1975, Pelnard-Considere, 1973). D'autres travaux tentent de cerner l'impact réel d'approches didactiques spécifiques, telles, par exemple, les diverses modalités de recours aux diagrammes dans les activités de classement (Leoni 1976, Colomb 1978).

Une deuxième catégorie de recherches se caractérise par le projet de mesurer, de manière plus extensive, ce que les élèves apprennent au cours d'une année scolaire. Signalons quelques-unes des recherches de ce type, recherches conduites le plus souvent à la demande des ministères de l'éducation.

En France, dès 1975, l'Institut National de Recherche Pédagogique (INRP) réalise une investigation destinée à évaluer les effets de la «réforme de 1970» et à fournir aux enseignants des éléments de réflexion et des directions possibles de travail. L'analyse des comportements des élèves au CE2 et au CM2 (Audigier et al. 1979) est accompagnée d'une enquête d'opinion auprès des enseignants.

En Grande-Bretagne, l'«Assesment of Performance Unit» (APU) dont le but est de «favoriser le développement des méthodes d'évaluation et de contrôle du rendement scolaire et de chercher à identifier les domaines déficitaires» (Foxman and al. 1980, p.XI) conduit, en 1978, une étude sur les performances des enfants de 11 ans en mathématique. Une autre étude anglaise porte sur les connaissances mathématiques des élèves de 10 ans (Ward 1979).

Le NAEP (National Assesment of Educational Progress, 1979) aux Etats-Unis, chargé de contrôler le rendement scolaire sur le plan national, réalise en 1972, puis en 1977, une étude sur les connaissances mathématiques des jeunes de 13, 17 et 19 ans, et des jeunes adultes (26 à 35 ans).

C'est dans une perspective voisine de recherche que l'enseignement romand de mathématique à l'école primaire a fait l'objet d'investigations conduites à l'IRDP depuis 1975 (Perret, à paraître). Parallèlement aux enquêtes d'opinion auprès des enseignants, des épreuves de connaissances ont été passées de la 1ère à la 6e année scolaire. L'analyse des réponses des élèves a permis de faire le point sur les connaissances acquises d'année en année par les élèves. (1)

b) L'évaluation des curriculums rénovés: un bilan réservé

Les recherches évaluatives sur l'enseignement rénové de mathématique fournissent à l'heure actuelle un ensemble de données très riches. Dans les études signalées ci-dessus, les performances des élèves observées dans un large éventail de tâches et de problèmes sont analysées en détail et mises en relation avec diverses variables concernant l'élève et le contexte d'enseignement. Le caractère souvent très descriptif de ces études en rend leur synthèse difficile. De plus, un examen de l'apport de ces recherches évaluatives, pour être quelque peu complet, ne saurait passer sous silence leur impact direct ou indirect sur le développement même des innovations prises comme objets d'étude. En effet, dans la visée d'une évaluation dite formative, l'observation des élèves a pour but d'assurer l'adaptation du curriculum.

C'est ainsi, par exemple, que les recherches conduites à l'Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, dans le domaine de l'enseignement de la mathématique, ont permis de proposer notamment une adaptation des moyens d'enseignement mis à disposition des enseignants et des élèves, ceci à l'occasion de la réédition de ces ouvrages. Un autre apport des investigations réalisées se situe sur le plan des pratiques

(1) Les résultats obtenus sont présentés dans une série de fascicules sous le titre général «Connaissances mathématiques à l'école primaire» (à paraître chez Peter Lang, Collection Exploration, Berne).

didactiques. L'examen des résultats obtenus sur une large population d'élèves, et en particulier l'analyse des erreurs, interrogent sur la nature des apprentissages favorisés en classe. L'impact de certaines variables de la situation pédagogique est alors mis en évidence, des approches didactiques alternatives prennent forme. Autrement dit, évaluations et recherches didactiques peuvent se trouver étroitement imbriquées lorsque cette dynamique de recherche trouve les lieux adéquats pour se vivre.

En résumé, établir un bilan tant soit peu objectif et complet des recherches évaluatives dans le domaine de l'enseignement de la mathématique paraît fort complexe. Cependant, à la lecture des conclusions de chacune des études mentionnées ci-dessus, un élément frappe par sa permanence, et mérite une attention particulière. Chaque fois, dans des termes apparentés, les auteurs s'accordent à relever un certain décalage entre les objectifs visés et ce que les élèves ont effectivement appris. Ce décalage porte plus particulièrement sur le niveau d'intégration et d'appropriation des connaissances acquises. Confrontés à des situations-problèmes qui requièrent une élaboration propre au delà de l'application de procédures de résolution types, un grand nombre d'élèves n'ont pas acquis les capacités de compréhension et d'invention que l'enseignement rénové, selon ses promoteurs, aurait dû développer chez eux.

Ce constat revient souvent. Les résultats de la recherche du NAEP aux Etats-Unis sont discutés, domaine par domaine, pour chacun des niveaux taxonomiques auxquels correspondent les questions posées. Seules les performances concernant le plus bas niveau taxonomique considéré (connaissances de faits et de définitions, performances en calcul avec des nombres entiers) sont jugées satisfaisantes par le groupe de quelque trente experts chargés de la discussion des résultats. Les capacités relevant des niveaux supérieurs (compréhension, application) sont, par contre, estimées insuffisamment développées chez les élèves.

Dans les conclusions que les chercheurs de l'APU en Grande Bretagne tirent de leur étude, on relève que:

«La plupart des élèves de 11 ans savent mettre en oeuvre les concepts et techniques de base qui leur ont été enseignés en mathématiques, et les appliquer dans des cas simples. On constate cependant une relativement forte baisse dans les performances des élèves dès qu'on attend d'eux une compréhension plus approfondie ou une capacité à appliquer ces connaissances dans des contextes moins familiers ou plus complexes» (Foxman et al. 1980, p.XI).

Les difficultés apparaissent, par exemple, si la résolution d'un problème requiert d'aller, par inférence, au delà de l'information immédiatement perceptible dans un graphe ou un diagramme.

A l'INRP en France, Audigier et al. (1979) soulignent, dans leurs conclusions, que:

«Les élèves d'aujourd'hui savent aussi bien faire des opérations qu'il y a vingt ans, et ont de plus la maîtrise d'outils que ne connaissaient pas leurs aînés. En revanche, les élèves du CE2 et du CM2 ont des difficultés pour résoudre des problèmes: il s'agit là de réinvestir leurs savoir-faire techniques dans des situations où ils soient pertinents. Cette faible disponibilité d'outils par ailleurs bien maîtrisés, constitue l'information la plus claire des résultats, et renvoie aux multiples aspects de ce qui pour les enfants fait difficulté dans la résolution de problèmes» (p.92)

L'analyse des performances des élèves en Suisse romande conduit à des conclusions similaires. A la suite du dépouillement d'entretiens individuels conduits avec des élèves de 4e année, Hutin (1980) résume les résultats obtenus de la manière suivante:

«Les résultats observés semblent montrer que, si les élèves ont acquis un certain nombre de connaissances, les objectifs les plus élevés fixés par le plan d'étude, soit la capacité d'organiser des données et de choisir le «modèle» de traitement adéquat, ne sont que partiellement atteints.» (p.3)

A plusieurs reprises, les résultats des recherches évaluatives conduites à l'IRDP ont été commentés dans des termes voisins. Le constat peut se résumer ainsi: les questions écrites posées aux élèves de chaque degré scolaire dans le cadre d'épreuves collectives sont généralement bien maîtrisées. Ces bonnes performances auraient pu conduire à une surestimation des capacités réelles des élèves si l'observation de ceux-ci, confrontés en situations individuelles à divers problèmes ouverts, n'avait pas révélé des difficultés, voire des lacunes dans l'apprentissage mathématique, lacunes que les réponses aux questions écrites très structurées ne laissaient guère supposer.

C'est, en particulier, lorsque les élèves sont confrontés au choix d'une démarche, à la planification d'une activité ou à l'élaboration d'un mode de représentation graphique que les réactions de plusieurs d'entre eux surprennent; les connaissances acquises se révèlent difficiles à mobiliser dans une situation-problème ouverte et peu familière. L'objectif de «procurer aux élèves un outil intellectuel utilisable dans les situations les plus diverses de la vie courante» n'est que partiellement atteint.

Le constat d'une distance entre les performances escomptées et celles observées ne semble pas spécifique à l'enseignement de la mathématique. Comme l'expriment les auteurs du «Guide pour l'innovation pédagogique» (OCDE 1975), le phénomène est plus large:

«Le fossé entre les idées du concepteur et la réalité de l'école est d'une importance capitale. Cela nous aide à comprendre, entre autres, la raison pour laquelle l'immense effort d'élaboration entrepris à grands frais des deux côtés de l'Atlantique tout au long des quinze dernières années a abouti à si peu de résultats; pourquoi la mise au point consiste si souvent à changer les termes et à manipuler les activités formelles sans beaucoup influencer réellement la façon dont les élèves vivent et apprennent.» (p.16)

C'est également, dans le contexte canadien, l'opinion de Assogba (1982):

«Les innovations pédagogiques suscitent, la plupart du temps, beaucoup d'enthousiasme chez les uns (parents, enseignants, élèves) et beaucoup d'intérêt chez les autres (l'Etat, les novateurs, les pédagogues et certains spécialistes en éducation), car chaque groupe y fonde un espoir de changement en éducation, au niveau de certaines valeurs sociales et même, au niveau des structures sociales globales. (p.117) (....)
On comprend dès lors pourquoi la majorité des expériences novatrices en pédagogie provoquent le plus souvent, une certaine curiosité chez les chercheurs et engendrent en même temps chez eux un besoin d'analyse, d'étude évaluative (C.O.P.I.E., 1976; Bennet et al, 1977; Lépine, 1977, Chobaux, 1972), pour ne citer que ces auteurs.
Mais, jusqu'ici, on peut dire que les espoirs des uns et des autres ont été déçus. En effet, la plupart des études et recherches évaluatives des innovations pédagogiques concluent à un «échec» partiel ou total de ces expériences novatrices en matière de pédagogie. Elles n'apporteraient aucun changement réel en éducation et encore moins, au niveau des valeurs et des normes sociales.» (p.118)

Ce que nous voudrions souligner ici c'est que le constat fréquent d'un écart entre les effets attendus et les effets observés a certainement joué un rôle déterminant dans le développement des recherches empiriques et théoriques qui, au cours des quinze dernières années, ont porté sur le processus de changement dans le champ scolaire. Ce constat a en effet agi comme un défi aux sciences de l'éducation; il interroge, intrigue et même irrite. Ainsi, Avanzini, dans son ouvrage consacré à l'immobilisme et l'innovation dans l'éducation scolaire (1975), cherche pourquoi «malgré tout ce qui paraissait devoir le favoriser, voire l'exiger, aucun véritable renouveau ne semble s'être produit dans la première moitié de ce siècle sous l'influence de l'Education Nouvelle, puis des mouvements qui l'ont suivie...» (p.11).

Deux problématiques de recherches sont plus particulièrement reliées à ce constat d'échec des innovations. D'une part, celui-ci peut être appréhendé sous l'angle méthodologique comme une question de mesure et d'échantillonnage inadéquat pour mettre en évidence le changement; d'autre part, il renvoie à la question du degré d'implantation d'un nouveau curriculum, c'est-à-dire à l'examen de l'impact réel d'une innovation pédagogique sur les pratiques pédagogiques quotidiennes, l'idée étant que sans une connaissance précise de cet impact, toute velléité de mesure des effets est illusoire. Ces deux problématiques méritent ici quelque attention.

c) Le repérage des biais méthodologiques

Il y a certainement peu de domaines de recherche en sciences sociales où le débat méthodologique occupe une place aussi importante que dans le domaine de l'évaluation. Les résultats de nombreuses recherches évaluatives ont ainsi fait l'objet d'un réexamen critique suite à l'identification des biais méthodologiques susceptibles de rendre compte des effets (ou le plus souvent de l'absence d'effets) constatés (Cronbach and Furby, 1970, Berman et Mc Laughin 1974, Scriven 1976).

Une première question méthodologique revient à se demander si les variables que prend en compte l'évaluation sont adéquates pour cerner l'effet d'une innovation. Les recherches évaluatives menées dans le but de faire le point sur l'implantation et l'efficience de nouvelles méthodes d'enseignement requièrent le recueil de nombreuses données. Ces données ne représentent cependant qu'un échantillon de l'ensemble des observations qu'il est possible d'effectuer face à un macro-objet aux multiples composantes, comme l'est une innovation pédagogique. Sur quoi s'appuie cet échantillonnage? Dans le meilleur des cas, il relève d'une démarche explicite lorsque, par exemple, le choix des questions posées aux élèves se réfère à une taxonomie des objectifs d'apprentissage poursuivis. Mais cette référence reste pour une large part matière à interprétation; décider, par exemple, que l'on observera la capacité d'invention dont les élèves peuvent faire preuve, confrontés à une tâche, est une chose; choisir une situation-problème précise dans laquelle cette capacité est susceptible d'être actualisée en est une autre. La sélection des questions et des tâches à partir desquelles les critères d'apprentissage sont définis reste, en majeure partie, arbitraire. Décider quelles questions précises il est «honnête» de poser à des enfants de 7 ans ou de 10 ans relève plus d'une question consensuelle que de la traduction rationnelle d'un objectif général en objectif opérationalisé par une démarche déductive.

Comme le montre Perrenoud (1984), le curriculum réel est fondamentalement et nécessairement affaire d'interprétation. Le constat d'une difficulté des élèves à mobiliser leurs savoirs et savoir-faire dans certaines situations-problèmes peu familières pourrait alors n'être que la conséquence d'une inadéquation des situations-problèmes retenues, situations ne correspondant ni à une interprétation raisonnable du curriculum formel ni, ce qui est le corollaire, aux possibilités des élèves interrogés.

L'échantillonnage des données recueillies, comme nous venons de le voir, est certes une importante source d'erreurs mais ce n'est pas la seule. L'interprétation des faits observés est également susceptible d'être influencée par divers facteurs. Dans une démarche d'observation, chaque fait est en effet susceptible d'être interprété de plusieurs manières. Un faible pourcentage de réponses correctes à une question mathématique peut être dû à la formulation inadéquate de la question, à son trop grand niveau de difficulté, à une préparation insuffisante des élèves, à la formation insuffisante des enseignants ou à des mauvaises conditions de passation de l'épreuve. Un contexte donné de recherche peut amener à privilégier implicitement un système d'interprétation plutôt qu'un autre. Une grille d'interprétation adoptée, le risque est certain de ne voir peu à peu que les faits qui viennent conforter une interprétation avancée à un moment donné. C'est ce que Feyerabend (1980), sur un autre plan d'analyse, met bien en évidence lorsqu'il montre la nécessité de théories rivales pour éviter la lecture sélective des faits et le piège du dogmatisme théorique. Huberman (1983) reprend un aspect de la question en examinant sous l'angle psycho-social comment ce type de biais peut plus particulièrement jouer dans le cadre d'une recherche évaluative dite interactive (Cardinet, Weiss, 1979). Le rapport que le chercheur entretient institutionnellement avec le champ éducatif investigué n'est pas sans lien avec le fonctionnement d'un biais interprétatif.

Dans leur examen de nonante-trois études d'évaluation, Gordon et Morse (1975) prennent en compte le degré d'affiliation du chercheur au projet évalué. Ces auteurs ont simplement recensé le jugement global auquel a abouti chaque étude, jugement exprimé en termes de réussites ou d'échecs. Les cas ambivalents ne sont pas ici pris en compte. Les résultats de cette étude sont les suivants:

	Chercheurs affiliés	Chercheurs non affiliés
Projets jugés «réussis»	52%	14%
Projets jugés «échoués»	14%	32%
(Cas ambivalents)	(34%)	(66%)
		N = 93

Huberman commente ce résultat de la manière suivante:

«Il est possible que les chercheurs affiliés aient eu la chance de tomber bien plus souvent sur des projets réussis! Mais les probabilités statistiques militent énergiquement là-contre. On pourrait aussi argumenter que les projets ont été réussis plus souvent parce que les chercheurs y ont été affiliés, mais ce serait, avouons-le, un peu gonflé. Il est plus vraisemblable que les chercheurs affiliés se soient engagés aux projets sans nécessairement s'en rendre compte, et qu'ils aient vu davantage d'indices de réussite que les personnes externes. Soit. Le problème commence dès le moment où l'évaluation est diffusée dans le public comme bilan prétendument objectif et «scientifique», et qu'on l'utilise pour prendre des décisions de politique scolaire, que ce soit de petites ou de grandes décisions. Comme quoi l'affiliation, tout comme l'amour, perturberait quelque peu la tranquillité de l'esprit.» (p.23)

Si le degré d'affiliation du chercheur au projet innovateur peut influencer le jugement global sur la réussite d'un projet, les jugements plus locaux sur tel ou tel dysfonctionnement de l'innovation ne semblent, par contre, pas être sujets aux mêmes biais. L'effet de l'affiliation est à affiner par rapport à la fonction de l'évaluation entreprise. Des chercheurs «affiliés», engagés dans une évaluation formative et qui, par conséquent, sont impliqués dans la régulation, voire la réussite, d'une innovation ne sont pas nécessairement conduits à «biaiser» positivement les résultats obtenus. Au contraire, assurer la fonction de régulation tend à mettre l'accent sur les dysfonctionnements locaux d'une expérience pédagogique. C'est ce qu'exprime Hutin (1980) lorsqu'à la suite d'une discussion critique des performances des élèves, observées dans le cadre d'entretiens individuels, il ajoute:

«Dans une analyse de ce type, on est poussé à la mise en exergue des lacunes, des aspects négatifs. Il aurait été possible d'envisager les choses d'une manière toute différente et de déclarer que, compte tenu des difficultés de l'entreprise, des innovations en mathématique, de l'ambition des objectifs, de la transformation complète des démarches pédagogiques, les résultats atteints sont, somme toute, fort satisfaisants.» (p.173)

Ce regard critique n'est pas inconciliable avec l'implication du chercheur dans le projet. Il a notamment pour fonction d'attirer l'attention des responsables scolaires sur la nécessité de poursuivre les investissements dans le champ éducatif, investissements dont le chercheur affilié n'est pas le moindre bénéficiaire (Perrenoud 1977). La conclusion congruente avec un regard critique sur la mise en oeuvre d'un projet pédagogique peut alors prendre la forme suivante:

«Ce qui importe, c'est de constater qu'une étape a été franchie mais que la route est encore longue. Pour ne pas perdre le bénéfice de l'élan donné, l'effort doit être poursuivi, des moyens de formation continue doivent être offerts aux enseignants, les recherches en didactique doivent être prolongées.
C'est le prix à payer pour que, au cours des années 80, une chance soit donnée d'atteindre réellement et pour la plus grande partie des élèves les objectifs ambitieux du plan d'études de 1972.» (Hutin 1980, p.173)

En conclusion, si le degré d'implication du chercheur dans le projet innovateur influence les conclusions de la recherche évaluative, cette influence ne va pas nécessairement dans le sens d'une simple complaisance des chercheurs «affiliés» envers le projet pédagogique. Un jugement global positif peut paradoxalement remplir la fonction de porter (de rendre audibles et supportables), les critiques négatives, souvent vives, formulées par les chercheurs. S'il y a une part de complaisance, celle-ci est alors essentiellement stratégique, sans nier le fait que le stratège peut en être parfaitement dupe. De toute manière, la seule prise en compte du jugement global conclusif ne peut traduire ni l'apport, ni l'impact réel d'une évaluation.

d) Le repérage des sources de dérives dans la mise en oeuvre d'une innovation pédagogique

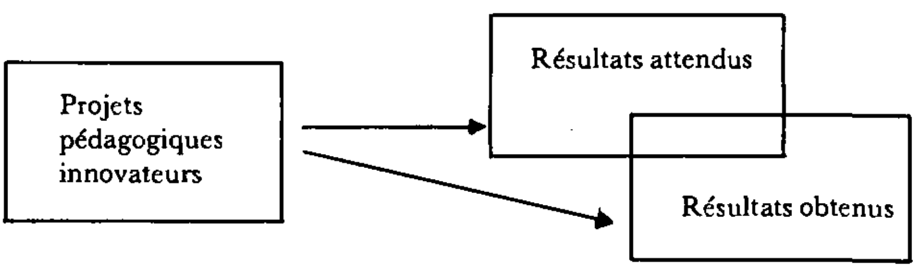
Avant même d'aborder la question des modalités d'implantation et de mise en oeuvre d'une innovation, il nous paraît nécessaire de situer plus largement le modèle du changement social qui sous-tend l'approche dominante des innovations pédagogiques et de leur implantation. Ce qui distingue classiquement une innovation d'un changement dans le champ éducatif, c'est son caractère volontaire. Une innovation est une modification introduite intentionnellement (Hassenforder 1972) alors que le concept de changement ne renvoie pas nécessairement à un ou des agents identifiés comme tels. Notons que cette distinction entre innovation et changement résiste mal, dans l'usage courant de ces termes, à un examen psycho-sociologique.

Parler d'innovation n'a, en fait, pleinement de sens que pour l'innovateur. D'où la question que pose Hutenmacher (1981): «Qui conduit l'innovation?» Cela a-t-il un sens de parler d'innovations inéluctables, par exemple, en matière d'introduction d'ordinateurs dans la classe? Ce qui est innovation pour les uns est vécu (subi) comme changement par ceux que l'innovation touche, en tant que public-cible. Le modèle informativo-cybernétique tel que le caractérise Rivière (1978) met l'accent sur la recherche des meilleures méthodes pour assurer le guidage d'une société en fonction des buts qu'elle se propose.

«Puisqu'une partie des changements sociétaux sont sous le contrôle de l'homme, il importe de savoir comment l'homme effectue ce contrôle, c'est-à-dire quels sont les buts

> de son action; de quelles connaissances sur le système et de quelles informations sur l'extérieur il dispose; comment il prend ses décisions et selon quelles stratégies? Pour qu'un système puisse fonctionner, il doit faire entrer de l'information de son environnement et en collecter sur lui-même. Mais un investissement coûteux dans la collecte des informations ne sert pas à grand-chose et peut même gêner le guidage sociétal s'il n'est pas assorti d'un traitement de cette information par les producteurs d'un savoir qui jouent un rôle actif dans la formulation de jugements servant à guider l'activité sociétale.
> Les guides majeurs de cette activité, correspondant au centre électronique, sont les élites chargées de la prise de décision. » (p.83)

Ce modèle de changement social forme la toile de fond de la conceptualisation de l'évaluation pédagogique qui voit le jour dans les années septante. Les perspectives actuelles en matière d'évaluation des innovations s'inscrivent explicitement dans la logique systémique; elles visent à assurer la gestion et la régulation du système scolaire (Cardinet 1979). La question de l'utilité d'une recherche évaluative trouve alors une réponse claire dans l'appui que la «recherche-service» doit apporter à la conduite des affaires scolaires. Comme le montre Hameline (1979), progressivement le processus enseigner-apprendre, le champ de la formation, «est conçu en termes de gestion. Le discours industriel moderne envahit le discours éducatif» (p.30). L'exigence de rationalité qui caractérise l'évaluation pédagogique se traduit alors, sous une forme ou sous une autre, par la mise en relation des intentions initiales et des réalisations, des résultats escomptés et de ceux obtenus, selon la logique du contrôle de la production des biens matériels. Même si la mesure des effets d'une innovation n'est pas le seul objet d'une recherche évaluative, la mise en rapport des objectifs visés et des objectifs atteints, quelles que soient la finalité de cette mise en relation et l'interprétation qui peut en être donnée, reste l'élément-noyau de toute évaluation; elle en constitue la marque même de sa rationalité. Schématiquement, les éléments-clefs d'une recherche évaluative se présentent de la manière suivante:



Dans cette perspective, l'interprétation du décalage requiert alors d'autres informations sur le processus en jeu. Quelle est la source de la dérive, quels sont les facteurs qui ont agi aux différentes phases de réalisation du projet innovateur? Ces questions sont à l'origine d'un déplacement du regard, l'attention privilégiée classiquement accordée aux effets obtenus s'étant portée récemment de plus en plus en amont, sur les mécanismes qui médiatisent l'impact d'un projet innovateur. Avec Berman et McLaughin (1974), deux champs de recherches peuvent être distingués. L'un est centré sur la question de l'adoption d'une innovation, l'autre sur les conditions et caractéristiques de sa mise en oeuvre, de son implantation (1).

La question de l'adoption d'une innovation pédagogique, à quelque niveau de responsabilité que ce soit, relève d'un processus décisionnel. Qu'il s'agisse pour l'enseignant d'innover de manière créative ou d'adhérer à un projet innovateur proposé, une décision personnelle intervient nécessairement à un moment ou à un autre. C'est sur cette base que les caractéristiques individuelles des adoptants ont fait l'objet de nombreuses études (Huberman 1973). Une attention particulière a été portée à la «résistance au changement». Dans la dynamique de la personnalité, les raisons de résister au changement sont nombreuses. Au delà du concept général de résistance qui, comme le soulignent Crahay et De Neve-Lejong (1982), est plus tautologique qu'explicatif, diverses composantes de ce concept ont été analysées. Relevons entre autres comme facteur de résistance le manque de confiance en soi, lié à la manière d'assumer le risque d'échecs, le conformisme, la résistance par méconnaissance du projet innovateur, et l'évaluation personnelle du coût du changement.

Des tentatives analogues ont été réalisées pour cerner les caractéristiques des novateurs. Plus que les traits de personnalité de ces derniers, ce sont les motivations à innover qui retiendront ici notre attention. La ques-

(1) Le terme «implantation» est pris ici au sens anglais d'«implementation» qui désigne la mise en oeuvre, la réalisation d'un projet sur le terrain.

tion peut s'aborder sur plusieurs plans. Nous avons rappelé plus haut le contexte socio-économique et scientifique dans lequel les innovations en matière de curriculum ont vu le jour. La prise en compte de ce contexte n'exclut cependant pas une approche psychosociologique et psychologique des enjeux d'une innovation. Qu'est-ce qui conduit les acteurs d'une innovation à introduire volontairement des changements dans leurs pratiques? Dans l'économie de la dynamique personnelle, ce sont tout d'abord les gains en termes de satisfaction professionnelle, de statut et de valorisation sociale qui sont à prendre en compte.

Dans le cas de la Suisse romande, la rénovation des programmes d'études a, par exemple, eu pour conséquence de renouveler pour une large part les lieux traditionnels d'élaboration des programmes et des moyens d'enseignement. De nombreuses personnes se sont ainsi vues confier des responsabilités en tant que rédacteurs de programmes, auteurs de manuels ou membres de comités de lecture pour la mise au point de ces documents. L'organisation de cours de recyclage selon un système de relais (formation d'animateurs qui, à leur tour, prennent en charge la formation de collègues) a également permis à de nombreux enseignants d'asseoir leur statut professionnel à l'occasion de l'implantation d'une innovation généralisée à toute une région.

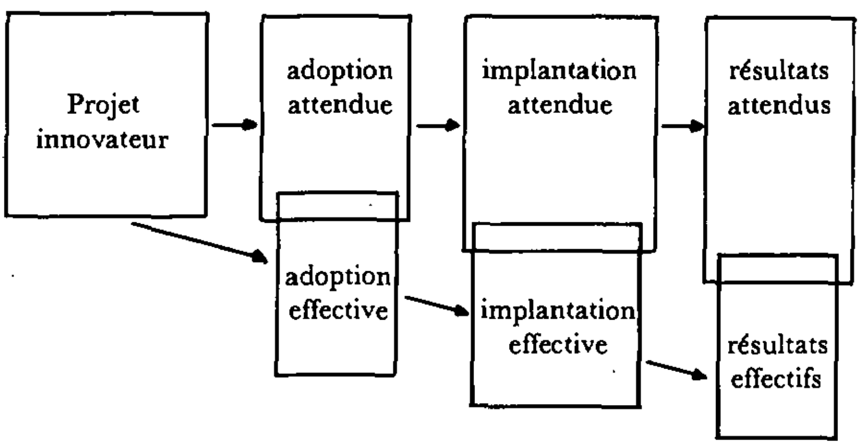
Mais c'est également sur un autre plan que les motivations à innover peuvent s'approcher. Au delà de leur caractère strictement pédagogique et didactique, les rénovations de curriculum véhiculent indirectement une philosophie de l'éducation qui ne laisse pas insensible. Pour s'en tenir à l'enseignement de la mathématique, le projet de former des élèves capables d'invention et outillés pour comprendre et maîtriser leur environnement renvoie à une aspiration humaine fondamentale, celle de voir les hommes à même de contrôler rationnellement aussi bien les problèmes d'aujourd'hui que ceux de demain. Ainsi, par ses connotations idéologiques et philosophiques, un projet innovateur, telle la rénovation de l'enseignement de la mathématique, a le pouvoir de mobiliser l'énergie de plus d'une personne. Comprendre la dynamique du changement dans le champ éducatif requiert sans aucun doute la prise en compte de tels processus.

Quant aux facteurs institutionnels et contextuels susceptibles de freiner ou, au contraire, de faciliter l'adoption d'une innovation, ils ont été le plus souvent examinés en liaison avec les stratégies de diffusion et de dissémination d'une innovation. Le pourquoi de l'adoption (ou de la non adoption) d'une innovation est alors suppléé par la question des stratégies à adopter pour obtenir l'adhésion des intéressés.

Les recherches centrées sur l'implantation d'une innovation, c'est-à-dire sur l'observation de ce en quoi consiste, en pratique, une innovation adoptée et mise en oeuvre, sont relativement récentes. C'est un domaine de recherche pour lequel les méthodes et les cadres conceptuels sont encore en grande partie à élaborer. Ce qui se passe entre le moment où une innovation est adoptée et le moment où l'on s'attache à en faire le bilan reste souvent mal connu. Ce domaine est resté longtemps la boîte que l'on a cru, par rigueur méthodologique, devoir maintenir noire (Fullan et Pomfret 1977). C'est en fait la nécessité d'expliquer les échecs de tant d'innovations qui a conduit à s'interroger sur l'implantation en tant que telle. Comme l'expriment Morris et Fitz-Gibbon (1978), le «ça ne marche pas» à propos d'un projet pédagogique appelle l'examen d'une question subsidiaire: «Qu'est-ce qui ne marche pas?». Cette dernière question requiert une observation dont la complexité soulève de nombreuses difficultés. Comment caractériser une pratique pédagogique effective et non idéalisée? Quelles composantes de la situation pédagogique retenir pour avoir quelque chance d'observer les changements les plus pertinents par rapport au projet innovateur? Quel poids accorder aux modifications du matériel pédagogique utilisé, de la relation maître-élève, de l'interaction verbale en classe, du rôle du maître, de l'attitude des élèves, de l'organisation du temps, de l'espace?

Ces variables de la situation pédagogique sont interdépendantes. Une approche systémique, voire écologique, permet de saisir la cohérence interne du micro-système que constituent les processus interactifs à l'oeuvre dans une classe. Un travail récent comme celui de Perrenoud (1982) éclaire la nature même de l'acte d'enseignement dans toute sa complexité et sa cohérence. Ce regard sur la pratique pédagogique renouvelle la question de l'implantation d'une innovation. Il permet de comprendre pour quelles raisons certaines pratiques pédagogiques nouvelles, bien que séduisantes, restent sans lendemain ou font l'objet d'un aménagement, d'une accommodation qui leur permettra, sous une forme ou sous une autre, de survivre dans un contexte donné. L'aménagement du projet initial n'est plus alors vu en terme de dérive, voire d'infidélité. L'adaptation du projet aux conditions locales d'implantation, adaptation qui est d'ailleurs réciproque, permet en fait d'assurer le succès de l'innovation (McLaughin 1976).

Les deux champs de recherche portant sur l'adoption et l'implantation d'une innovation correspondent en fait à des étapes successives du processus de changement. C'est ce qui permet à Huberman (1983) d'articuler ces deux problématiques dans un même cadre conceptuel qui relie des «blocs de variables distincts» (voir annexe 1). Le processus d'innovation est conçu dans ce modèle comme «une série d'interactions réciproques entre utilisateurs, facettes de l'innovation et paramètres institutionnels, bref un modèle davantage conflictuel que rationnel et technologique.» (p.10). Entre le projet innovateur et les effets attendus, les variables médiatrices sont susceptibles d'être différenciées et affinées de plus en plus. Une condensation de ces variables permet de dégager le modèle de base suivant; il correspond à une extension du premier schéma présenté plus haut, auquel ont été ajoutées les principales sources de dérives discutées ci-dessus.



En résumé, le constat fréquent d'un écart entre les résultats attendus et observés trouve dans la littérature pédagogique diverses explications. Certaines d'entre elles mettent plus particulièrement en jeu la dynamique évolutive de l'innovation. Dans cette dynamique, deux phases ont une importance déterminante, l'une relative à l'adoption de l'innovation, l'autre à la phase de sa mise en oeuvre. Ces deux phases semblent largement rendre compte des processus responsables des distorsions que subit le projet dans sa réalisation.

A l'étude descriptive des sources de dérive correspond une approche prescriptive des moyens et stratégies de les contourner. Un guidage efficace de l'innovation peut alors prendre appui sur le savoir acquis sur la dynamique de l'innovation, qu'il s'agisse des résistances au changement ou des facteurs de distorsion dans l'implantation d'un projet.

3. Eléments pour un autre regard sur les innovations et leur évaluation

a) L'échec inéluctable ou l'hypothèse d'un biais épistémologique

L'approche conceptuelle de l'innovation pédagogique qui vient d'être présentée est centrée sur le projet innovateur. La question de l'adoption, aussi bien que de l'implantation de l'innovation, reflète la préoccupation de comprendre ce qu'il advient d'un projet sur le terrain scolaire. L'interrogation de base qui sous-tend cette approche est la suivante: comment rendre compte de l'efficience souvent partielle d'une innovation pédagogique? Il s'agit alors essentiellement d'élucider les obstacles, les contraintes et résistances du réel que rencontrent les idées et pratiques pédagogiques nouvelles. Que subissent-elles dans cette confrontation avec le réel? En quoi sont-elles déformées, perverties, trahies par la lourdeur de l'appareil scolaire?

Même si les transformations que subit un projet sont décrites en termes plus neutres, comme des cycles de transformation (Huberman 1983), ou comme une adaptation mutuelle du projet au contexte (Berman, McLaughin 1974), la logique de l'analyse reste fondamentalement la même.

Cette manière d'appréhender les innovations pédagogiques, manière empreinte d'un modèle informativo-cybernétique du changement social, ne peut guère conduire à d'autres conclusions que celle d'un échec partiel d'une innovation. En effet, on voit mal, en appréhendant la question de l'innovation sous cet angle, par quel miracle un projet pédagogique pourrait garder son élan, sa «pureté», lors d'une implantation généralisée à l'échelle d'une région et non de quelques classes expérimentales. C'est, en fait, l'inverse qui serait étonnant, voire inquiétant, en tant que signe d'un contrôle total du processus de changement social sur le mode du changement technologique et du marketing. Le désenchantement que suscite l'écart entre le projet et sa réalisation est le fruit d'une approche foncièrement volontariste et idéaliste subitement imprégnée de positivisme au moment d'en mesurer les effets. En cela, au delà des questions méthodologiques que pose la mesure des effets d'une innovation, le constat fréquent d'un échec partiel nous paraît devoir être réexaminé en rapport avec les orientations épistémologiques qui le sous-tendent. En adoptant l'approche des innovations brièvement caractérisées ci-dessus, à la limite, on ne peut pas aboutir à une autre conclusion que celle d'un échec partiel, faute de s'en donner les moyens conceptuels. C'est en cela qu'il est possible de parler de biais épistémologique au sens où le regard adopté conditionne les conclusions des recherches évaluatives.

Notons encore que cette approche du changement, centrée sur le projet innovateur et ses tribulations, contribue certes à l'établissement d'un savoir sur la dynamique du changement. Mais ce savoir ne dispose que de peu d'espace pour se constituer. Aussitôt embryonnaire, il doit pouvoir servir à assurer le guidage du changement parce que sa fonction première est telle.

b) Apprentissage réel et apprentissage escompté: une articulation à repenser

Comme nous venons de le voir, le constat d'un écart entre les objectifs visés et ceux atteints a suscité de nombreuses investigations dans le domaine de l'évaluation pédagogique. Deux questions ont plus particulièrement retenu l'attention des chercheurs depuis une quinzaine d'années: l'écart constaté est-il bien réel ou ne pourrait-il être qu'un artefact de mesure? La deuxième question peut se formuler ainsi: l'écart est-il dû aux caractéristiques de mise en oeuvre de l'innovation, source possible de dérive de celle-ci?

Ce qui paraît commun dans ces deux problématiques, c'est que l'écart constaté entre l'escompté et le réel est appréhendé fondamentalement comme une erreur. Dans le premier cas, il s'agit d'une erreur de mesure; dans le deuxième cas, c'est une erreur de réalisation qui est invoquée souvent en termes clairs («dérive», «déviation», etc.), quelquefois en termes euphémisés («cycles de transformation»). Le postulat de base commun à ces approches est que les apprentissages réels devraient étroitement recouvrir les apprentissages escomptés. Le postulat paraît des plus raisonnables: toute action humaine se donne pour but d'atteindre les objectifs visés. Il n'y a là rien qui heurte le sens commun.

Toutefois, en matière d'apprentissage scolaire, ce postulat ne va pas de soi. C'est ce que nous montrerons ici en prenant appui sur les investigations en sociologie du curriculum. Tout particulièrement, une étude comme celle de Perrenoud (1984), par l'approche du curriculum qu'elle développe, n'est pas sans conséquence sur la manière de saisir la signification de ce qu'il est convenu d'appeler l'échec partiel d'une innovation. En analysant la distinction entre curriculum formel et curriculum réel, Perrenoud s'attache à caractériser, en particulier dans le contexte de la Suisse romande, la nature exacte du curriculum formel, en tant que définition et formulation de ce qui doit être enseigné en classe. Ce curriculum formel, mis en principe par écrit, relève d'une représentation sociale de la culture scolaire destinée à être transmise et apprise. Le contenu effectif de ce qui est enseigné et appris constitue alors le curriculum réel. C'est le rapport qu'entretiennent les curriculums formels et réels qui retiendra ici notre attention. Le premier est par nature trop imprécis pour guider la pratique pédagogique quotidienne. Comme l'explique Perrenoud:

«La culture qui doit être concrètement enseignée et évaluée en classe n'est que balisée par le curriculum formel. Il ne fournit qu'une trame à partir de laquelle il appartient aux maîtres d'élaborer un tissu serré de notions, de schémes, d'informations, de méthodes, de codes, de régles qu'ils vont tenter d'inculquer. Pour passer de la trame au tissu, le maître accomplit un travail permanent de réinvention, d'explication, d'illustration, de mise en forme, de concrétisation du curriculum formel.» (p.228)

Ce processus d'interprétation du curriculum formel conduit certes chaque enseignant à mettre en oeuvre un curriculum réel correspondant à son équation personnelle, mais les variations inter-individuelles ne peuvent masquer le caractère général du processus. Celui-ci est abordé en termes de transposition didactique (Chevallard 1980, Conne 1981) dans le cadre de recherches récentes en didactique des mathématiques. Cette transposition repose, comme l'ont analysé Perret-Clermont et al. (1981), sur un processus de décontextualisation et de recontextualisation des savoirs en fonction de leur contexte d'élaboration et de transmission. L'intérêt de cette approche du curriculum est qu'elle fait du processus interprétatif un élément constitutif du curriculum et non la source d'une distorsion, voire d'une perversion inévitable du curriculum formel.

Dans la même perspective, il s'agit maintenant de revenir à l'examen du rapport qu'entretiennent les apprentissages escomptés et les apprentissages réels, et tout d'abord de préciser quelque peu les termes. Les apprentissages escomptés relèvent du curriculum formel au sens où ils sont l'expression des visées du curriculum. Toutefois, ils ne sont pas nécessairement formulés par écrit en raison des difficultés aussi bien pratiques que théoriques que rencontre la définition d'un curriculum en termes d'objectifs. Pour une large part, les apprentissages escomptés renvoient donc à la représentation de ce quil est, par consensus et tradition lorsqu'elle existe, estimé «honnête» d'exiger des élèves aux différents degrés de leur scolarité, et ceci sans toujours pouvoir prendre appui sur des textes de référence. La notion d'apprentissage réel renvoie aux acquisitions effectives mais elle relève en fait toujours d'une activité d'inférence de la part de l'évaluateur. La production d'un jugement relatif au degré de maîtrise d'une notion met nécessairement en jeu un traitement complexe de divers indices.

Malgré la mollesse de ces concepts, c'est dans leur mise en relation qu'ils trouvent toute leur signification. En fonction de ce qui a été dit plus haut du curriculum, et par analogie, nous soutiendrons que les apprentissages réels ne peuvent pas rejoindre les apprentissages escomptés, de la même manière que le curriculum réel ne peut par nature recouvrir le curriculum formel. Il s'agit dans les deux cas de plans distincts (plan du projet et plan de l'action) avec leurs logiques propres. En adoptant ce regard, c'est la signification de ce non-recouvrement qui s'en trouve modifiée. Au lieu réduite à un indice d'échec partiel, la distance entre les objectifs visés et ceux atteints se révèle plus fondamentalement constitutive du processus d'enseignement.

Cette approche des apprentissages scolaires, approche plus descriptive qu'évaluative, a pour conséquence de déplacer certaines questions, voire d'ouvrir de nouvelles problématiques. C'est ainsi que le cadre conceptuel qui vient d'être posé conduit tout d'abord à une recentration sur les apprentissages effectifs de l'élève, apprentissages qui méritent un intérêt pour eux-mêmes et non seulement comme mesures de l'efficience d'un enseignement. Un deuxième point qui en est en quelque sorte le corollaire, porte sur le processus d'attente. L'inversion du regard permet de s'interroger sur l'origine et la nature des apprentissages escomptés. Leur distance aux apprentissages réels soulève un ensemble de questions le plus souvent négligées dans une démarche évaluative. Développons quelque peu ces deux points.

c) Pour une recentration sur l'élève et ses apprentissages réels

D'une centration sur le projet pédagogique innovateur et son degré d'implantation, centration propre à toute démarche évaluative, nous voulons ici déplacer le regard sur celui qui est touché par le changement en tant que partie consentante, si ce n'est partie prenante, soit l'élève. Prendre le point de vue de celui-ci ne signifie pas, bien entendu, lui demander son avis sur les innovations pédagogiques en cours. C'est se pencher attentivement sur ce qu'il fait et apprend en classe, sans en faire en premier lieu la mesure de l'efficacité d'une méthode pédagogique. Quotidiennement des activités lui sont proposées; il écoute, écrit, cherche à comprendre ce qu'on attend de lui et à répondre correctement aux questions posées.

C'est le fonctionnement de la relation triangulaire Maître-Elèves-Savoirs qu'une innovation en matière de curriculum vient modifier. Cette modification n'est pas sans impact sur ce qu'apprennent les élèves. S'intéresser plus à ce qu'ils acquièrent effectivement suite au travail réalisé en classe, qu'à ce qu'ils auraient dû apprendre selon la logique du projet, relève d'un regard peu fréquent sur les innovations et pédagogiques. Pourtant la nécessité d'un tel regard s'avère essentielle pour aborder la question de la généralisation des connaissances acquises. Nous avons vu plus haut que, dans plusieurs recherches évaluatives réalisées sur l'enseignement de la mathématique, la conclusion signale la difficulté des élèves à mobiliser ou réinvestir leurs savoirs et savoir-faire dans des situations nouvelles. Ce constat repose sur la logique suivante: un savoir visé S est acquis parce que l'élève en fait la preuve dans la situation A. Si dans la situation B on ne trouve trace de S, comme attendu, c'est que l'élève n'a pas actualisé son savoir. Cette logique est sans faille si l'on est certain qu'en situation A, c'est bien le savoir S qui a été mis en jeu. Or cette certitude n'est jamais acquise. Si S a trop vite été inféré et qu'en fait il s'agissait d'un savoir S' chez l'élève, parler de généralisation de S à B perd alors tout son sens; le constat de non-généralisation des connaissances est inévitable. Cette brève analyse de la logique qui sous-tend la question de la généralisation des connaissances souligne l'intérêt d'une centration sur les apprentissages réels en saisissant le plus précisément possible les représentations cognitives que l'élève met effectivement en jeu dans les tâches qui lui sont proposées.

d) Pour une étude des attentes en matière d'apprentissage mathématique

Examiner un enseignement rénové dans la réalité de ce qui est vécu quotidiennement en classe ouvre la voie à de nouvelles interrogations sur la dynamique d'une innovation. En particulier, l'ancrage sur la réalité des apprentissages quotidiens permet de questionner les objectifs visés à la lumière des acquis effectifs. Autrement dit, plutôt que d'interroger une réalité souvent perçue déviante par rapport à un projet donné, l'inversion du regard proposé peut conduire à interroger l'adéquation et la pertinence d'un projet, compte tenu de la réalité scolaire. Dans cette perspective, il devient difficile de décider ce qui dérive, et par rapport à quoi. Il est tout aussi pertinent de parler de dérive dans la réalisation d'un projet que de dérive dans l'élaboration d'un projet initial par rapport à un contexte de réalisation donné. Les idées, et peut-être particulièrement les plus ambitieuses et généreuses, sont tout aussi susceptibles de prendre le large que la réalité des faits! L'orientation épistémologique, ainsi caractérisée, correspond en fait à un réexamen des rapports que le chercheur-évaluateur entretient avec le projet innovateur et les normes pédagogiques que tout projet véhicule nécessairement. Selon que ces normes pédagogiques restent normes agréées a priori, ou deviennent objet d'étude, la nature de la recherche évaluative entreprise n'est pas la même.

Le but de la présente étude est de faire «fonctionner» ce nouveau regard sur le processus d'innovation. A propos d'un domaine précis, tel l'approche du système de numération dans le programme rénové de mathématique, nous partirons des faits, c'est-à-dire des savoirs et savoir-faire que les élèves maîtrisent en la matière; ce sera l'objet de la deuxième partie. Le constat d'un décalage entre les savoirs attendus et ceux mis en oeuvre dans diverses tâches sera alors l'occasion d'interroger cette attente. Qu'est-ce qui est attendu des élèves? Qui attend quoi? Sur quoi se fondent ces attentes? Telles sont les questions qui seront abordées dans la troisième partie.

CHAPITRE II

L'ENFANT

ET LE SYSTÈME DE NUMÉRATION DE POSITION

Dans le chapitre précédent, tout en nous référant plus particulièrement à la rénovation de l'enseignement de mathématique, c'est la question de la rénovation du curriculum de l'école primaire et de l'évaluation des innovations pédagogiques qui a été plus largement discutée. Nous restreindrons ici l'angle de vue pour nous centrer sur un domaine d'apprentissage bien précis: celui de l'écriture des nombres en tant que système de numération. Il s'agit d'un domaine qui se prête particulièrement à une étude de cas conduite dans la perspective développée au chapitre précédent. Tout d'abord les programmes rénovés de mathématique, mis en oeuvre à l'école primaire au cours des années septante, accordent une large place à l'approche méthodique du système de numération de position. La maîtrise de l'écriture des nombres et la compréhension du système de signes qu'elle met en jeu, relèvent d'un apprentissage jugé de base, dont l'importance est à maintes reprises réaffirmée.

Mais, en même temps, la numération telle qu'elle est abordée et travaillée actuellement dans les classes de Suisse romande depuis la première année primaire, suscite de sérieux doutes quant à ce qu'acquièrent réellement les élèves. Comme le révèlent les enquêtes réalisées auprès des enseignants de Suisse romande (Cardinet, Rübner 1975, Cardinet, Jaquet 1976, Perret 1978, Pochon 1979), les opinions des enseignants sont en fait partagées sur la question. Tous n'ont pas la même perception de l'apport d'un travail suivi dans le domaine de la numération. Une majorité d'enseignants estime le coût de cet apprentissage trop élevé. Compte tenu du gain perçu, ils souhaitent généralement voir réduite la place accordée aux activités strictement numériques. Avec les années d'expérience, les enseignants procèdent ainsi à leur propre évaluation de l'approche didactique actuellement proposée. C'est également dans une certaine mesure le cas des parents qui, dans ce domaine, sont à même de comparer l'approche traditionnelle qu'ils ont eux-mêmes vécue dans leur propre scolarité et l'approche proposée à leurs enfants.

Dans ce contexte, brièvement esquissé, la question de la numération et de son approche didactique se révèle constituer un noeud central où se rencontrent une visée pédagogique et les apprentissages effectifs, les attentes diverses des concepteurs, des enseignants et des parents, les pratiques didactiques traditionnelles et les pratiques nouvelles. En cela, ce domaine d'apprentissage se prête particulièrement bien à une investigation orientée par deux questions-clés: qu'est-ce qu'apprennent, en fait, les élèves? Qui s'attendait à d'autres résultats et pour quelles raisons?

C'est à cette tâche que nous nous attellerons mais, au préalable, il paraît nécessaire de situer, d'un point de vue aussi bien psychologique que pédagogique, la maîtrise de l'écriture des nombres.

1. Des nombres à leur écriture: perspectives psychologiques

La genèse du nombre chez l'enfant, étudiée par Piaget et Szeminska (1941), puis au Centre international d'épistémologie génétique (Greco et Morf, 1962), a suscité, comme peu de thématiques, de nombreuses études sur la question. Depuis quelques années, et dans une perspective plus psychologique qu'épistémologique, les activités de comptage ont plus particulièrement fait l'objet d'observations systématiques, Gelman et Gallistel (1978), Meljac (1979), Fischer (1981), Droz (1981), Droz et Paschoud (1981), Mosimann et al. (1982). Cependant, autant la construction conceptuelle du nombre et les activités spontanées de dénombrement ont retenu l'attention, autant la question de l'écriture des nombres, par contre, reste relativement peu explorée d'un point de vue psychologique.

Les nombreuses recherches que recense Fayol (à paraître) sur la numération verbale, le comptage mental et la représentation en mémoire des nombres, n'accordent guère d'attention aux caractéristiques de la numération écrite. Fayol commente ce constat ainsi:

«La représentation du nombre serait donc à un niveau abstrait indépendante de la symbolisation «de surface». En d'autres termes, la représentation et le traitement des faits numériques ne dépendraient en aucune manière du type de symboles utilisés: chiffres arabes ou romains, etc... Or, une série de résultats récemment rapportée par Gonzalez et Kolers (1982) semble montrer qu'il n'en est rien chez l'adulte, même si l'on contrôle la familiarité des sujets avec le symbolisme.» (p.22)

Dans notre contexte culturel, l'enfant est amené précocement à s'intéresser aux nombres écrits qu'il rencontre quotidiennement dans son environnement. Sans pouvoir initialement distinguer lettres et chiffres, le jeune enfant s'engage, avec la connivence de l'adulte, dans l'exploration de cet univers de signes qu'il s'agit de discriminer et d'identifier. Cette découverte progressive de la numération parlée et écrite relève d'un apprentissage «naturel» au sens de Halbwachs (1981), apprentissage «qui participe au développement spontané du système cognitif en présence de tous les stimuli produits par l'environnement et la vie quotidienne» (p.16).

Dans l'inventaire que Meljac (1979) dresse des acquisitions élémentaires, les capacités de lecture et d'écriture des nombres ont fait l'objet d'une observation systématique. En fonction de l'âge,la capacité de lire et d'écrire la suite des nombres est résumée par l'auteur dans le Tableau 1. Les deux capacités ne sont pas distinguées, l'évolution de la lecture et de l'écriture étant, à quelques exceptions près, parallèles.

On constate ainsi que si, à 5 ans, les enfants observés ne réalisent que quelques graphies isolées, à 5 ans et 6 mois, la moitié des enfants lisent et écrivent les nombres jusqu'à 5, 30% le font jusqu'à 10, 20% jusqu'à 15. Il est intéressant de mettre en relation la capacité de lire et d'écrire les nombres avec la connaissance orale que ces mêmes enfants ont de la suite des nombres «parlés». (tableau 2).

Tableau 1 :

Lecture et écriture des nombres en fonction de l'âge
(en pourcentages d'enfants qui savent lire et écrire le nombre jusqu'à...)

Ages	*Rien*	*5*	*10*	*15*	*20*	*50*	*100*	*Et plus*
4 ans	**100**							
4;6	**Quelques graphies isolées**							
5 ans		**—**						
5;6	**50**	**50**	**30**	**20**				
6 ans, mat.	**8**	**92**	**92**	**32**	**8**			
6 ans, CP		**100**	**80**	**50**	**10**			
6;6		**100**	**100**	**80**	**80**	**60**	**10**	**10**
7 ans		**100**	**100**	**90**	**73**	**63**	**63**	**27**

(tiré de Meljac, 1979, p.67)

Tableau 2 :

Connaissance de la suite des nombres en fonction de l'âge
(pourcentages d'enfants comptant jusqu'à...)

Ages	*Rien*	*5*	*10*	*15*	*20*	*50*	*100*	*Et plus*
4 ans	**10**	**90**	**80**	**10**				
4;6		**100**	**90**	**60**				
5 ans		**100**	**73**	**73**	**9**	**9**	**9**	
5;6	**10**	**90**	**80**	**70**	**20**	**0**		
6 ans, mat.		**100**	**100**	**75**	**65**	**16**		
6 ans, CP		**100**	**90**	**80**	**60**	**20**		
6;6		**100**	**100**	**100**	**100**	**80**	**20**	
7 ans		**100**	**100**	**100**	**90**	**80**	**60**	**20**

(tiré de Meljac, 1979, p.60)

Le commentaire de l'auteur est le suivant:

«On voit très clairement que l'acquisition de la transcription, quoique ayant la même forme d'ensemble, se présente comme notablement décalée par rapport aux seules connaissances orales. Cela est d'autant plus net que le nombre se situe bas dans la série (par exemple 15). Plus le nombre est élevé (par exemple 50), plus l'écart est réduit entre le moment où l'enfant sait l'énoncer et celui où il est capable de l'écrire. Ce phénomène se comprend aisément. A partir d'un certain seuil (variable sans doute selon les enfants et les milieux), on apprend la suite des nombres en même temps que leur représentation graphique.
C'est l'école qui, en général, induit alors ce synchronisme d'acquisition. Toutefois, avant les débuts de la scolarisation obligatoire (classes primaires), on sait réciter, la plupart du temps, d'assez longs fragments de la série, sans être capable de les reconnaître ni de les tracer.» (p.64)

Savoir écrire ou lire un nombre est une chose, comprendre la signification précise de chaque chiffre dans l'écriture des nombres plus grands que dix en est une autre. C'est ce que met en évidence la recherche de Kamii (1982) sur l'interprétation par l'enfant des nombres écrits. Après avoir dessiné et dénombré le nombre de roues nécessaires pour équiper quatre voitures miniatures, quatre-vingt enfants sont interrogés sur la signification du nombre «16». L'expérimentateur désigne tout d'abord le chiffre 6 et demande:«Est-ce que tu penses que cette partie de ton seize a quelque chose à voir avec la quantité de roues que tu as dessinées ici?» La même question est posée à propos du «1». Les réponses d'enfants âgés de 4 à 9 ans ont été analysées. La diversité des réactions obtenues révèle la complexité de la notion pour les enfants. A 9 ans, ce sont moins de la moitié des enfants qui font preuve, dans cette situation, d'une bonne compréhension du système de numération de position.

Des observations de même nature ont été réalisées par Brun, Giossi et Henriquès (1984). Ceux-ci interrogent vingt-et-un enfants de première et deuxième années primaires (6 à 8 ans) et leur demandent, dans un premier temps, de constituer des collections de jetons correspondant à divers nombres écrits. Dans un deuxième temps, la tâche proposée consiste à représenter à l'aide de jetons la quantité signifiée par chacun des deux chiffres composant, par exemple, le 12.

Les observations effectuées révèlent que la correspondance entre une quantité de jetons et un nombre donné inférieur à vingt ne pose pas de problème aux enfants de cet âge. Par contre, lorsque l'expérimentateur demande de donner (désigner) les jetons qui reviennent au premier chiffre et ceux qui reviennent au deuxième, la tâche ne va plus de soi. Cinq types de conduites ont été observés dans cette situation.

Conduite A: L'enfant donne un jeton au 1 du 12 et deux jetons au 2; ou encore un jeton au 1 du 17 et sept jetons au 7.

Conduite B: L'enfant tend à distribuer la quantité de jetons correspondant au nombre en jeu aussi équitablement que possible entre les deux signes numériques le composant. Ainsi il donne par exemple six jetons à chaque signe du 12.

Conduite C: L'enfant donne un seul jeton au deuxième signe du nombre présenté et tous les autres au premier signe.

Conduite D: L'enfant attribue le nombre total à chacun des signes. Ainsi il donne douze jetons au 1 du 12 et encore douze jetons au 2 du 12.

Conduite E: Cette conduite observée chez cinq enfants correspond à la réponse attendue. L'enfant donne dix jetons au 1 du 12 et deux jetons au 2.

Le commentaire des auteurs est le suivant:

«Sur l'ensemble des conduites que nous avons pu observer, quatre d'entre elles montrent que les enfants ne connaissent ou ne reconnaissent pas la signification de l'écriture utilisée. Ceci semble paradoxal puisque, au cours de deux premières années de scolarité, ils apprennent et exercent les notions de groupement, de base et de passage d'une base à l'autre. Malgré cela, les enfants interprètent le signe numérique comme un signe absolu et non comme la composition de deux signes dont, par convention, la position détermine la signification. Pour la plupart des enfants les signes graphiques qu'ils soient simples (de 1 à 9) ou doubles (de 10 à 99) sont assimilés à des indicateurs de quantité, de la même manière que les numéros.
La logique sous-jacente à l'écriture de position semble leur échapper complètement et l'écriture de la suite numérique se poursuit dans la même logique que celle utilisée pour les 9 premier chiffres. (Les signes 12 et 13 ont le même statut que les signes 6 ou 7).» (p.8)

Au delà de la maîtrise des nombres et de la compréhension de leur écriture, plusieurs auteurs se sont penchés sur la manière dont les enfants représentent spontanément une quantité donnée. Plus que la connaissance du système de signes en tant que tel, c'est la capacité d'y recourir pour coder une quantité et, plus généralement, l'ensemble des moyens représentatifs qu'utilise l'enfant qui sont alors observés. Une première étude conduite dans cette perspective et sur laquelle nous nous arrêterons est celle de Sastre et Moreno (1976). Ces auteurs posent le problème en ces termes:

«Compter des objets et représenter par des graphismes numériques les éléments qu'il vient de compter, est une activité que l'enfant est capable de réaliser très tôt, et qu'il mène à bien à l'école, sans aucune difficulté à 6 ans et même avant. Mais cette capacité suppose-t-elle, comme chez l'adulte, la compréhension de la signification du symbolisme numérique et donc son utilisation dans un contexte pratique?» (p.347)

Afin de vérifier si les enfants utilisent spontanément les graphismes numériques conventionnels, les situations expérimentales élaborées mettent en jeu soit la transmission d'un message graphique à un camarade censé pouvoir décoder le nombre signifié, soit le simple codage d'une quantité présentée sur la table aux enfants qui répondent indépendamment.

L'analyse de 350 représentations graphiques réalisées par les cinquante enfants observés permet de dégager les quatre catégories de conduites suivantes. Un premier type de conduite consiste à réaliser un dessin qui n'a apparemment aucune relation avec le nombre d'éléments que l'enfant croit pourtant avoir représentés. Ce sont des dessins figuratifs apparemment proches d'un dessin libre.

Les productions graphiques du deuxième type consistent en la réalisation de dessins plus ou moins schématiques qui laissent voir une correspondance terme à terme avec le nombre d'éléments en jeu. Ainsi par exemple, une collection de six bonbons donne lieu à un dessin schématique de six bonbons.

Une troisième catégorie de conduite se caractérise par le recours aux chiffres pour signifier la quantité, mais l'enfant écrit autant de chiffres que d'objets qu'il veut représenter. Le graphisme conventionnel est ainsi assimilé au schéme de conduite précédent. Cela donne des écritures telles que «1 2 3 4 5 6» pour une collection de six éléments. Le premier élément est représenté par le chiffre 1, le deuxième par le chiffre 2, etc. Chaque chiffre représente un seul élément.

La quatrième catégorie de conduite correspond à l'usage conventionnel des chiffres; un seul chiffre est utilisé pour désigner une quantité globale.

L'évolution des conduites avec l'âge est manifeste. De 6 à 10 ans, on assiste tout d'abord à la quasi disparition des conduites du type I (dessins sans relation avec le nombre d'éléments). Les conduites II (autant de dessins que d'éléments à dénombrer) diminuent quelque peu, ceci au profit des productions strictement numériques qui augmentent de façon marquée en fonction de l'âge des enfants. Notons que cette évolution est également fonction de certaines variables de la situation expérimentale adoptée. Par exemple, la consigne de rapidité donnée à l'enfant a pour effet de réduire le nombre de dessins du type I, au profit des écritures numériques. La tendance est encore plus marquée lorsqu'il est suggéré explicitement à l'enfant d'utiliser des chiffres.

C'est dans une perspective similaire de recherche que Sinclair, Siegrist et Sinclair (1982) relèvent les productions d'enfants de 4, 5 et 6 ans invités à représenter une collection d'objets. Deux situations expérimentales sont retenues. Dans la première, une collection d'objets identiques est présentée sur la table; l'expérimentateur demande à l'enfant: «peux-tu mettre par écrit ce qui est sur la table?» Le cardinal de la collection varie de un à huit. Dans la deuxième situation expérimentale, la collection est évoquée verbalement sans support concret. L'enfant est alors invité à représenter par écrit, par exemple, quatre maisons. L'analyse des productions de 45 enfants dans ces deux situations conduit les auteurs de l'étude à distinguer six types de codages différents. Caractérisons brièvement ces six catégories de productions.

Conduite 1: Représentation globale de la quantité.
L'enfant dessine, par exemple, une série de traits (||||||||||) qui ne représentent ni les objets de la collection, ni non plus leur nombre.

Conduite 2: Représentation figurative des objets.
L'enfant représente l'objet en tant qu'objet-type, sans indication de quantité. Les plus jeunes enfants produisent des dessins avec beaucoup de détails. D'autres recourent à l'écriture du nom des objets.

Conduite 3: Correspondance terme à terme avec des symboles non-numériques.
Chaque objet est représenté par un symbole graphique. Quelques enfants n'utilisent qu'un seul symbole, par exemple un 0 reproduit trois fois (000) pour représenter trois crayons. D'autres utilisent des symboles différents, par exemple T / L pour trois balles ou / J T T i , pour cinq maisons.

Conduite 4: Correspondance numérique avec des symboles numériques.
Chaque objet est représenté par un chiffre et ceci de deux manières selon que l'enfant écrit la suite des nombres qui intervient dans le comptage (par exemple «1 2 3 4 5» pour cinq maisons), ou selon que le même chiffre est reproduit cinq fois («5 5 5 5 5» pour cinq maisons).

Conduite 5: Valeur cardinale.
Les enfants recourent au chiffre désignant le cardinal de la collection. L'écriture du nom du chiffre peut également intervenir («troi», «de», «katr», etc.)

Conduite 6: Valeur cardinale et représentation de l'objet.
Le recours aux chiffres est complété par l'indication des objets dénombrés, par exemple: «4 crèıon», «deu bal», «3 mèzone».

Dans la conclusion du leur étude, Sinclair, Sigriest et Sinclair s'attachent à dégager la hiérarchie partielle des productions relevées. Bien que celle-ci ne soit pas toujours évidente à déceler, plusieurs élèves recourant durant l'entretien à différents types de productions, une évolution générale des conduites se dégage néanmoins.

L'interprétation qu'en donnent les auteurs est la suivante: les premières productions (catégories 1 et 2) se caractérisent par la difficulté de prendre simultanément en compte la quantité et le type d'objets. Les enfants tentent de représenter l'un ou l'autre. On assiste progressivement à une coordination de la compréhension et de l'extension au niveau de la symbolisation adoptée. Avec les productions de types 5 et 6, c'est la valeur cardinale qui est clairement désignée. Les chiffres peuvent être accompagnés ou non de l'indication du type d'objets dénombrés, dans les deux cas, la compréhension et l'extension se trouvent différenciées et coordonnées.

Malgré les caractéristiques propres de chacune des recherches auxquelles nous nous sommes référé, les observations effectuées présentent de grandes analogies. Mis en situation d'exprimer par écrit une quantité d'objets donnés, l'enfant ne recourt pas spontanément au système de numération même si, par ailleurs, il maîtrise l'écriture des nombres. Selon les situations, l'usage de diverses modalités de codage subsiste plus ou moins tardivement.

Ce constat général renvoie à l'examen des conditions d'actualisation des savoirs des enfants, conditions expérimentalement créées, dont la signification pour l'enfant n'est pas toujours évidente à discerner. Pour quelles raisons l'enfant devrait-il recourir aux nombres écrits plutôt qu'à une schématisation figurative de la collection pour en signifier le cardinal? Qu'est-ce qui motive l'enfant à utiliser l'écriture usuelle des nombres? Un souci d'économie, de communication, de concision, de clarté? Les recherches examinées plus haut restent, sur ces questions, le plus souvent peu explicites. Les situations expérimentales sont diverses, mais leur variation n'est pas problématisée comme c'est par contre le cas dans d'autres études, telles par exemple, celles de Schulbauer-Leoni et Perret-Clermont (1981) sur le recours aux écritures équationnelles par les élèves de 2e année primaire.

En ce qui concerne l'exploration et la lecture des nombres écrits, les recherches examinées (Kamii 1982, Brun, Giossi et Henriquès, 1984) laissent de nombreuses questions ouvertes. Le fait d'interroger les enfants successivement sur chacun des chiffres composant un nombre écrit permet d'approfondir leur compréhension ou leur capacité de réfléchir sur l'écriture d'un nombre, mais ne permet pas vraiment d'appréhender les stratégies de lecture des nombres qu'adoptent spontanément les enfants. Les processus en jeu dans cette exploration restent mal connus.

Les modèles développés pour rendre compte de la complexité de l'acte de lecture sont-ils transposables à la lecture des nombres écrits? Retrouve-t-on dans l'approche des nombres écrits les deux étapes qui caractérisent l'acte de lire au sens où «lire c'est émettre des hypothèses sur le texte en fonction du contexte linguistique et du vécu du lecteur, et vérifier ces hypothèses à partir d'indices différenciateurs et à partir de la signification» (Cardinet et Weiss, 1975)? Le rôle des mécanismes inférentiels semble réduit dans la lecture des nombres. Des observations fortuites nous ont permis de constater que, face à un grand nombre écrit, soit l'enfant parvient à le déchiffrer, en fonction de sa connaissance préalable de la numération, soit il renonce à émettre des hypothèses sur son compte en déclarant qu'il ne sait pas. Le type de structure qui caractérise le système numérique fait que le repérage par l'enfant du connu et de l'inconnu, c'est-à-dire des nombres qu'il sait lire et de ceux qu'il ne peut déchiffrer, est plus immédiat que dans la lecture de mots.

Une dernière réflexion que nous inspire cet examen de quelques recherches psychologiques porte sur le rapport établi entre les conduites observées et l'apprentissage dont la numération fait l'objet dans le cadre scolaire. Les conduites recensées et catégorisées sont analysées dans la perspective caractéristique des recherches psychogénétiques. L'inventaire des conduites, les tentatives de hiérarchisation de celles-ci visent à fixer les contours d'un apprentissage «naturel» ou «spontané» lié au développement général de l'enfant. Certes, l'apprentissage scolaire en matière de numération n'est pas ignoré, mais il n'est pas mis en relation de manière précise avec les conduites observées. La seule interrogation à ce sujet est de savoir si l'enfant mobilisera ou non ses savoirs scolaires. Pour éviter d'ailleurs la question complexe de cette mise en relation, certains auteurs limitent leurs investigations aux enfants de niveau pré-scolaire, ou alors élaborent une situation d'observation et des questions suffisamment éloignées du cadre scolaire pour atténuer tout recours trop automatique des élèves aux connaissances scolaires, recours qui ne pourrait alors être perçu que comme un parasitage inopportun.

D'un point de vue psychogénétique les apprentissages scolaires ne constituent qu'une facette complémentaire et contrôlée des expériences quotidiennes que vit l'enfant dans son environnement culturel et social. C'est dans ce sens qu'une intervention didactique est définie par Morf (1970) comme un aménagement de l'univers d'expérience de l'enfant. Si l'action pédagogique est perçue comme visant en premier lieu à favoriser le développement intellectuel, il devient alors possible d'occulter l'examen de la nature exacte des apprentissages scolaires et la question de leur impact réel sur les conduites des enfants. Le développement spontané reste l'objet fondamental de ces études, développement susceptible d'être modulé, mais pas radicalement modifié par les apprentissages scolaires.

Dans une perspective psychopédagogique ou didactique, le regard porté sur les conduites des enfants est très différent. Au lieu de s'attacher à discerner les régularités des réponses à chaque étape de développement, ce sont les changements observés suite aux interventions didactiques mises en oeuvre qui constituent l'objet central de la recherche. Comment les connaissances de l'enfant en matière de numération sont-elles marquées par l'enseignement? Que retire l'enfant des diverses activités numériques qui lui sont proposées en classe? Comment évoluent ses connaissances dans la dynamique d'un apprentissage scolaire?

Adopter, comme nous le ferons, ce point de vue requiert une connaissance précise du curriculum scolaire. C'est la raison pour laquelle il s'agit maintenant de nous pencher sur les approches didactiques de la numération et, en particulier, sur l'approche qui caractérise actuellement les programmes romands pour l'enseignement de la mathématique à l'école primaire. C'est en effet en référence à ce cadre précis que les conduites des élèves seront analysées et interprétées dans la deuxième partie.

2. Approches de l'écriture et de la lecture des nombres à l'école primaire: perspectives pédagogiques

La capacité d'écrire et de lire les nombres est un préalable à toute arithmétique. C'est la raison pour laquelle une place, plus ou moins importante, a toujours été donnée, dans l'enseignement de la mathématique, à l'approche du système de numération. L'enfant peut certes explorer spontanément ce système d'écriture et en acquérir une première connaissance par lui-même, mais la complexité des règles qui régissent ce système requiert, à un moment donné, que l'enfant recoure à son entourage. La valeur positionnelle des chiffres ne peut probablement être pleinement saisie qu'avec l'appui d'une intervention didactique.

Dans la conclusion que Hutin (1974) tire de l'analyse d'épreuves arithmétiques passées à Genève en 3e, 4e, 5e et 6e année primaire, avant la généralisation de la réforme du programme de mathématique, la maîtrise de la numération est commentée en ces termes:

«...il convient de prendre conscience à la fois du rôle et de la difficulté de construction de la numération. Celle-ci demande non pas qu'on lui consacre quelques leçons au début de chaque année scolaire, mais bien qu'une très large place lui soit accordée dans le programme, car c'est dans la mesure où la numération sera bien comprise que l'enfant aura la possibilité de pénétrer aisément dans les domaines qui se rattachent au nombre, en particulier ceux des opérations arithmétiques et de la mesure.» (p.84)

Comment cette approche de la numération a-t-elle été conçue par le passé? Quelles sont les solutions adoptées aujourd'hui? Sans prétendre ici à une analyse historique de la question ou à un recensement systématique des approches didactiques (recensement que l'on trouve dans l'ouvrage de Bouazzaoui (1982)), nous pensons néanmoins utile d'indiquer quelques jalons pour mettre en perspective l'approche actuellement en vigueur en Suisse romande.

Nous distinguons schématiquement trois types d'approches:

La première est celle qui transparaît des manuels d'arithmétique publiés dans les années cinquante. Les programmes en vigueur proposaient déjà une progression bien établie dans l'approche des grands nombres. C'est à l'occasion de ce que l'on appelait le «passage» à la dizaine, à la centaine et au millier, au cours des trois ou quatre premières années, qu'un temps était réservé à l'examen du système de numération en tant que tel.

Le principe de groupement est illustré, dans ces manuels, par l'assemblage de divers objets figurés. Examinons quelques extraits de manuels de mathématique utilisés dans les cantons de Berne, Valais et Genève (tableaux 3 à 6), tout en ayant conscience de ne voir, par cet examen, qu'un des aspects de l'enseignement, celui fait plus particulièrement d'exposés aux allures théoriques.

Tableau 3: (Thérèse et François calculent, 1P, DIP, Valais, 1962, p.64)

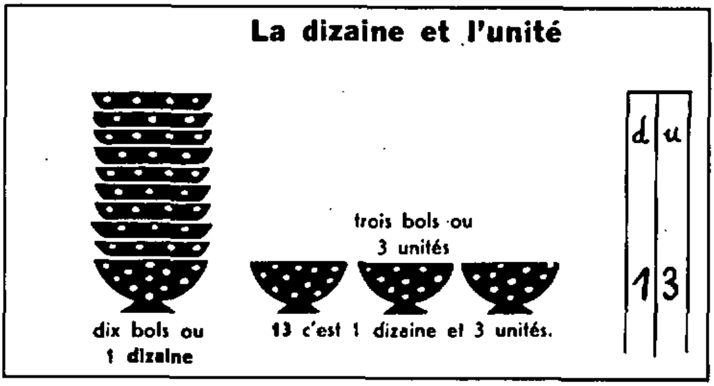


Tableau 4: (Lecoultre G, Chappuis A, Rosset R. Arithmétique 2e année, DIP, Genève, 1955, p.55)

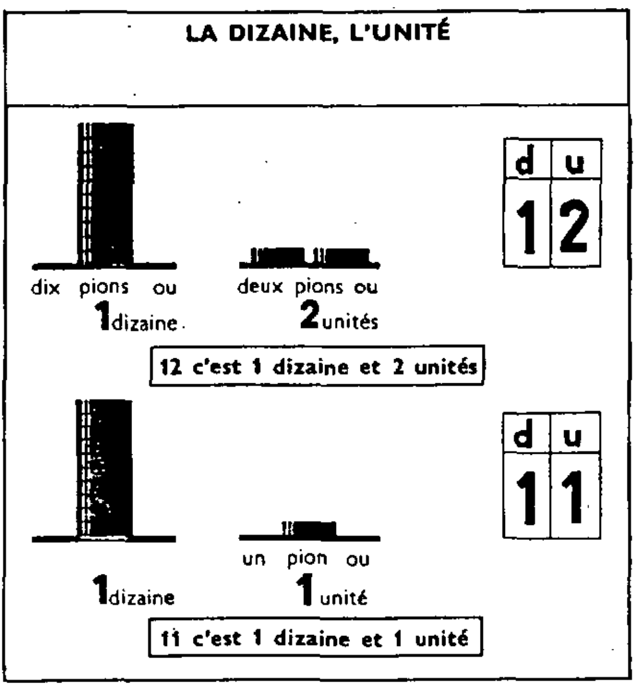


Tableau 5: (Lecoultre G, Chappuis A, Rosset R, Arithmétique 3e année, DIP, Genève, 1957, p.9)

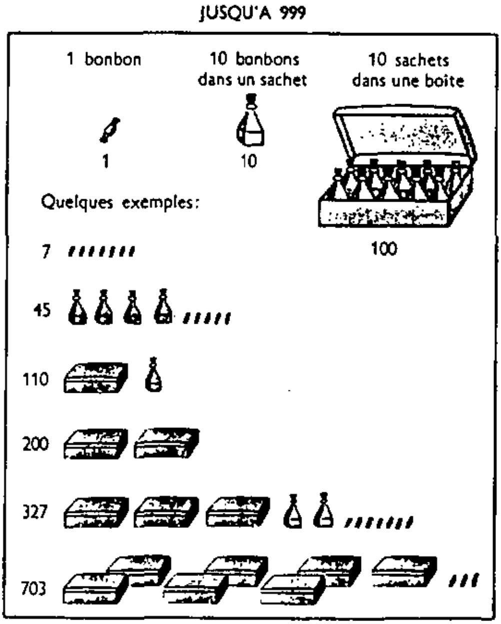
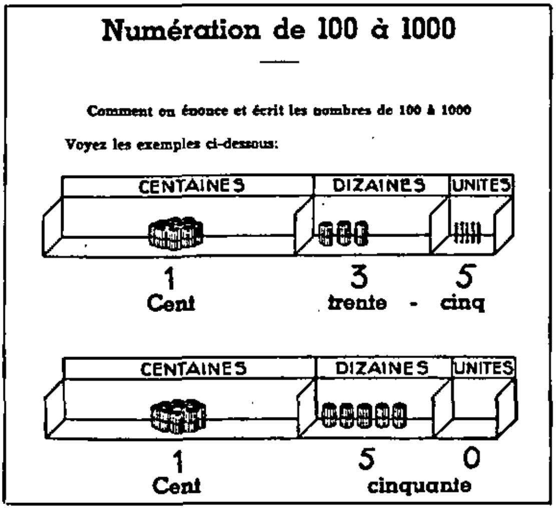


Tableau 6: (Fromaijeat M, Arithmétique 4e année, 2e édition, Librairie de l'Etat, Berne 1984, p.9)

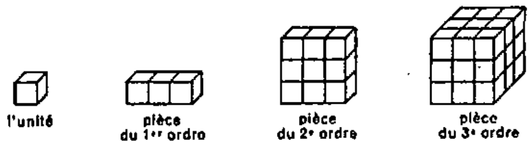


Ces exemples frappent par leur parenté. Dans chaque cas, il s'agit pour l'auteur de montrer à l'élève ce que signifie chacun des chiffres composant un nombre écrit. Il est alors fait recours à une représentation concrète des objets et de leur groupement. Le système de codage numérique en tant que tel est expliqué essentiellement à l'aide de nombreux exemples qui prennent valeur d'explications. La démarche est explicite dans l'ouvrage de Fromaijeat où, sous le titre «Comment on énonce et écrit les nombres de 100 à 1000», l'élève est simplement invité à voir les exemples donnés. L'accent semble être plus mis sur l'apprentissage d'un langage que sur la découverte et l'expérimentation active d'un système de règles, d'où l'insistance sur les énoncés du type «13, c'est 1 dizaine et 3 unités», énoncés parfois encadrés, comme pour en faire ressortir le caractère théorique et immuable. On retrouve ici, déjà au début de la scolarité, certaines orientations du discours-exposition analysé par Grize (1972), Balkan (1972), Bouvet (1970), dans le domaine de l'enseignement des sciences.

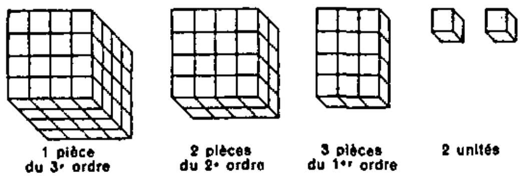
Il est également significatif d'examiner les exercices qui font directement suite aux encarts «théoriques» tels que ceux reproduits ci-dessus. Ces exercices se situent en effet sur le plan strictement numérique; il s'agit de lire des nombres, d'énoncer ou d'écrire une suite de nombres, de compter par dizaines, etc. Les représentations figuratives initiales sont censées fournir une image éclairant, comme le ferait un flash, la logique du système de numération, sans pour autant nécessairement remplir la fonction d'une représentation calculable au sens de Vergnaud (1974).

La deuxième approche didactique que nous évoquerons, vise à développer de manière plus active une réelle compréhension du système de numération et plus largement des opérations arithmétiques. C'est par le biais de matériels didactiques judicieusement conçus que l'élève est invité à explorer et expérimenter le fonctionnement de la numération. Divers matériels ont eu, dans cette perspective, un impact considérable sur le développement et la diffusion d'une pédagogie rénovée, centrée sur l'activité de l'élève.

Signalons tout d'abord les blocs multibases de Dienes (1966). Ce matériel se présente en plusieurs boîtes correspondant à des bases de numération distinctes. Dans la boîte pour la base trois, par exemple, on trouve en plusieurs exemplaires les blocs suivants:



Il existe des boîtes pour les bases trois, quatre, cinq, six et dix. L'exploitation de ce matériel s'organise autour d'une activité de base: construire de nouvelles pièces à partir des pièces données. La notation qui accompagne ces manipulations et permet de désigner les quantités en jeu peut prendre la forme suivante:



Base quatre	Blocs	Plaques	Barres	Unités
	1	2	3	2

ou

3e	2e	1er	U	Boîte quatre
1	2	3	2	

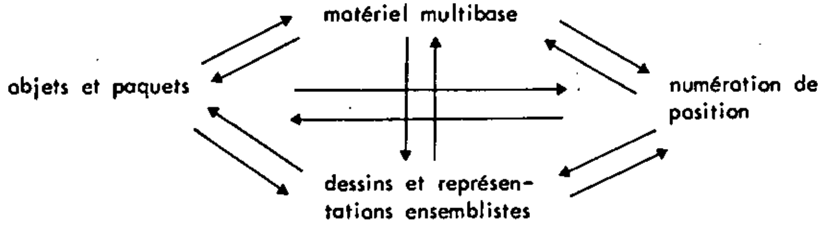
Un autre matériel didactique connaît une large diffusion dans les années soixante, ce sont les réglettes Cuisenaire, connues également sous le nom de «nombres en couleur». Ce matériel se compose de 241 réglettes de bois non graduées dont la longueur varie de 1 à 10 cm. La plus petite est de forme cubique. Une couleur différente est attribuée à chaque longueur selon le principe suivant:

			symbolisé par
famille rouge:	rouge	2 cm	(r)
	rose	4 cm	(R)
	marron	8 cm	(m)
famille bleue:	vert clair	3 cm	(v)
	vert foncé	6 cm	(V)
	bleu	9 cm	(B)
famille jaune:	jaune	5 cm	(j)
	orange	10 cm	(o)
	blanc	1 cm	(b)
	noir	7 cm	(n)

Ce matériel offre la possibilité d'une grande variété de manipulations, de mises en relation et d'observations (Cuisenaire, Cattegno, 1960, Goutard 1964). Une des exploitations possibles de ce matériel conduit à l'étude des progressions géométriques et par là, à l'écriture des nombres en diverses bases de numération (Jeronnez-Lejeune (sans date), Roller, Métraux, 1963).

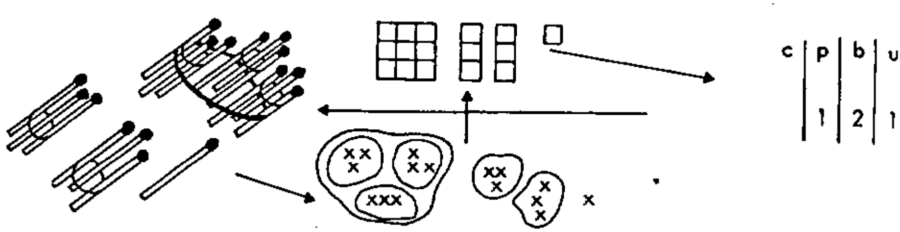
Une troisième approche de la numération se caractérise par le souci de procurer également aux élèves un champ d'expériences concrètes, mais en évitant l'usage trop spécifique d'un matériel précis. Comme l'exprime Vergnaud (1981), la question n'est plus de savoir quel est le meilleur matériel didactique, «c'est au plan des structures que se situe le problème essentiel et par conséquent au plan des homomorphismes qui font jouer l'analyse des structures entre différents matériels» (p.114).

L'accent est alors porté sur le passage d'un matériel à l'autre ou d'une représentation à l'autre. Les divers passages (que l'on peut voir comme une extension du principe de variabilité perceptuelle de Dienes) sont représentés par des flèches:



Pour illustrer ce schéma, Vergnaud donne un exemple de mise en relation en base trois:

«Prendre un plaque, deux barres et une unité, écrire le nombre correspondant, prendre un nombre d'allumettes correspondant à ce nombre, dessiner la représentation ensembliste correspondante, mettre cette représentation en rapport avec le matériel multibase de départ.» (p.116)



(d'après Vergnaud 1981)

C'est bien dans cet esprit que de nombreux manuels et ouvrages à l'intention des enseignants proposent actuellement un ensemble d'activités dans le domaine spécifique de l'écriture des nombres.

En prenant largement appui sur les travaux de Dienes, et dans le même esprit que les réalisations qui voient alors le jour, tant en Angleterre qu'en France, les auteurs du plan d'études romand de 1972 puis les auteurs des moyens d'enseignement ont accordé une attention particulière à la manière d'aborder en classe le système de numération de position. La numération en vient à constituer un des quatre domaines («avenues») qui composent le programme. Le lecteur trouvera dans l'annexe 2 le contenu de ce domaine tel qu'il se présente dans le Plan d'études. C'est par le biais de diverses activités de groupement et de codage numérique en différentes bases, ainsi que par les activités d'échanges, que les élèves sont progressivement sensibilisés à la généralité des règles qui régissent un système de numération de position, quelle que soit la base de numération retenue. L'intention n'est pas ici d'exposer en détail toute la démarche didactique qui sous-tend le travail réalisé en classe dans ce domaine. Il s'agit plutôt de fournir, de manière descriptive, quelques repères dans ce que font les élèves en classe, ceci afin de pouvoir situer dans leur contexte didactique les questions mathématiques composant les épreuves de connaissances présentées dans la deuxième partie.

Dans le «flux» des activités mathématiques proposées semaine après semaine en classe, activités constitutives du travail scolaire de l'élève, il est possible dans le domaine de la numération, de dégager quelques activités-types que nous caractériserons ainsi:

- activité de groupement et de codage numérique
- activité de décodage
- activité d'échanges
- écriture d'une suite numérique.

Notons que chacune de ces activités, dans la vie de la classe, se présente nécessairement sous différentes formes. Selon par exemple qu'il s'agit pour l'élève de «suivre» une activité collective conduite par l'enseignant, ou d'effectuer individuellement une activité analogue sur fiche, l'élève est confronté chaque fois à une tâche qui présente des caractéristiques spécifiques. Pour l'instant, c'est à une présentation des activités-types que nous nous limitons ci-dessous.

a) Activités de groupement et de codage numérique

La situation de base est la suivante: une collection d'objets (concrets, figurés ou schématisés) est donnée; on demande à l'élève de procéder au groupement de ces objets par deux, par trois, ...ou par dix, selon la base indiquée. Dès la 2e année, l'élève procède au groupement de groupement (groupement de 2e espèce), jusqu'à épuisement de l'activité. L'activité de groupement achevée, l'élève transcrit le résultat de son action en un code numérique (nombre écrit).

Dans les premières années, le codage est réalisé dans des tableaux préétablis qui fournissent des indices-repères quant à la valeur positionnelle des chiffres dans le code. La schématisation la plus fréquente est celle-ci.

◯	o	X

ou

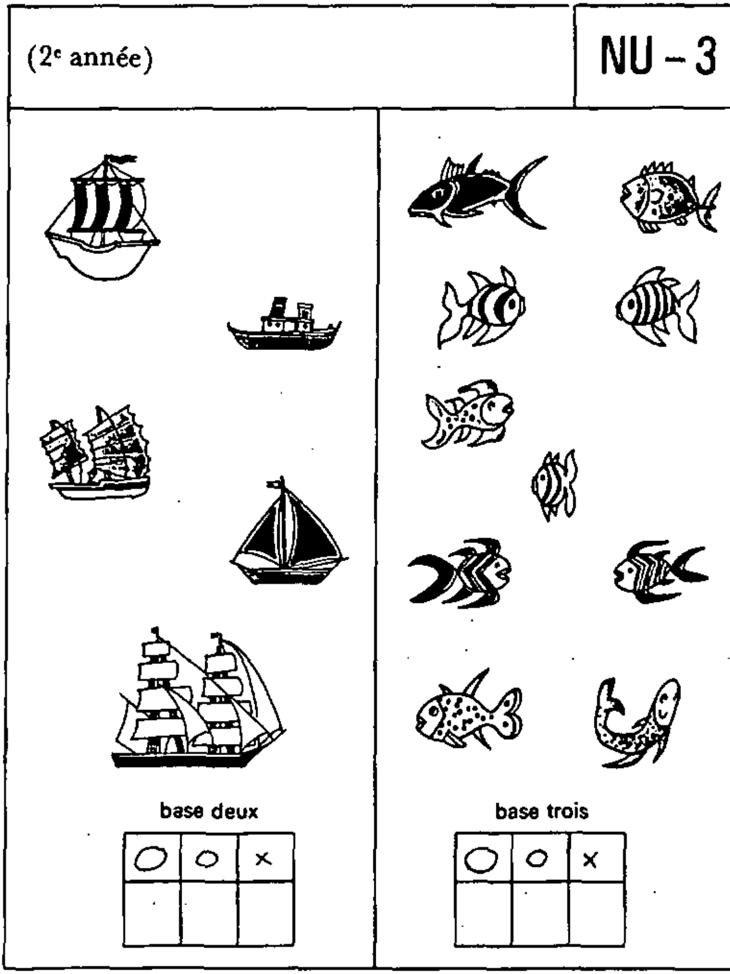
g_2	g_1	u

Les en-têtes de colonnes désignent, à droite, la place pour indiquer le nombre d'objets non regroupés ou d'unités (X), le nombre de groupes de 1ere espèce ( ) puis, à gauche, le nombre de groupes de 2e espèce ( ). En 4e année, ces indices sont mis en relations avec une première notation des puissances successives de la base.

Base trois

g_4	g_3	g_2	g_1	u
3^4	3^3	3^2	3	1

Les activités de groupements et de codage donnent lieu en classe à de nombreuses observations et comparaisons des codes obtenus en variant la base ou le cardinal de la collection de départ. Lorsque l'activité est proposée individuellement à l'élève, la fiche de travail se présente par exemple sous la forme suivante:



b) Activités de décodage

Il s'agit ici de l'activité inverse de celle précédemment décrite. Un code numérique est donné, il s'agit pour l'enfant de retrouver la collection dont il exprime le cardinal. Ce type de tâche se prête également, lors du décodage, à de nombreuses comparaisons entre codes initiaux et collections reconstituées. L'exemple-type se présente ainsi dans les fiches de travail de l'élève:

1ère Dessine les X et groupe-les.	NU – 13

base trois

O	×
1	2

base cinq

O	×
1	4

base trois

O	×
2	1

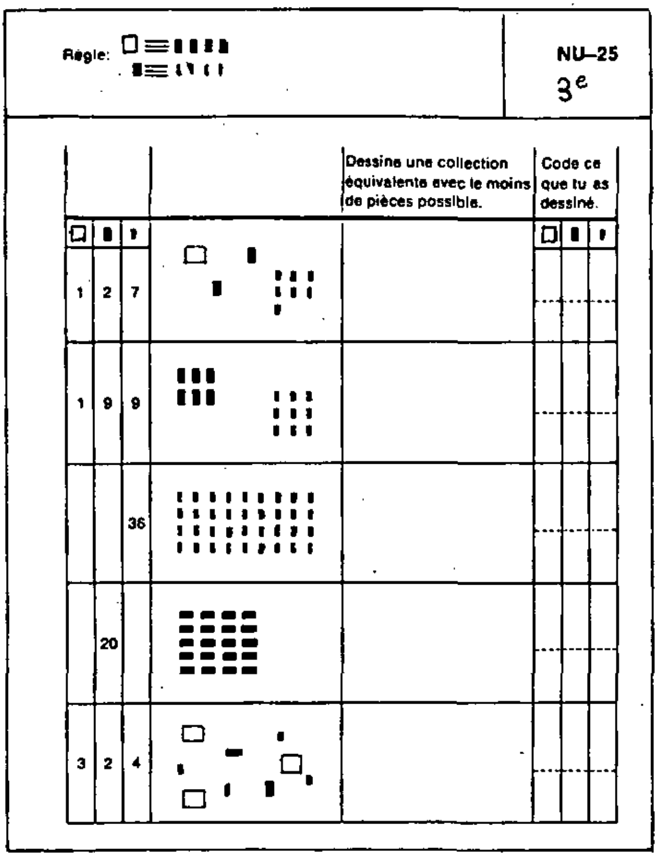
bese sept

O	×
1	1

c) Activités d'échange

Une autre manière de modéliser le fonctionnement du système de numération de position fait intervenir le principe de règles d'échanges entre éléments d'inégales valeurs. La notion d'échange est, en fait, déjà présente dans l'activité de groupement; en base quatre, par exemple, quatre unités sont échangées contre un groupement de première espèce, quatre groupements de première espèce sont échangés contre un groupement de deuxième espèce, etc. Ce principe permet, en particulier, de fournir une assise signifiante aux algorithmes utilisés dans la technique de calcul en colonnes. Les activités d'échanges proposées aux élèves, dès la première année primaire, sont de divers types, selon qu'il s'agit de juger de l'équivalence de deux collections, de trouver la règle selon laquelle un échange a été effectué, ou de procéder à des échanges donnés (à un ou deux niveaux).

Lorsque les activités d'échanges et de codages numériques sont mises en parallèle, la tâche de l'élève peut se présenter, sur fiches, sous la forme suivante:



d) Ecriture d'une suite numérique

Les tâches examinées plus haut privilégient le rapport entre une collection donnée et le code numérique qui en exprime le cardinal.

Les codes numériques sont également abordés en classe sous l'angle ordinal. Il est alors demandé à l'enfant d'écrire la suite des codes dans une base donnée, suite correspondant à la suite des nombres naturels. Notons que, pour effectuer cette tâche, les élèves ont toujours la possibilité de recourir à la manipulation effective de jetons ou de tout autre objet manipulable, ceci afin d'éviter un travail strictement formel et algorithmique sur les codes numériques.

Une activité de ce type se traduit sur fiches de travail, par exemple, par la tâche suivante:

NU – 14	Complète les colonnes			1ère
	les fruits ne sont pas groupés	les fruits sont groupés par quatre		
un				1
deux				
trois				
quatre				
cinq			1	1
six				
sept				
huit				
neuf				

En résumé, dans le cadre du curriculum actuel de mathématique, l'approche du système de numération de position devient un domaine de travail à part entière. La numération ne fait plus l'objet de mises au point occasionnelles comme c'était le cas traditionnellement. La large place accordée aux diverses activités sur les codes numériques, activité dont nous venons de recenser quelques-unes paradigmatiques, traduit la préoccupation d'asseoir au mieux l'apprentissage mathématique sur une bonne compréhension des écritures numériques. Par un apprentissage systématique, le but est d'aller au delà de la connaissance intuitive et fragmentaire que l'enfant peut acquérir des grands nombres rencontrés fortuitement dans la vie courante, sous forme écrite ou dans les propos de l'entourage.

L'intention est d'outiller l'enfant, de lui fournir les règles de déchiffrage qui lui permettent de donner un sens aux assemblages de chiffres qui constituent des nombres écrits. Notons que saisir le fonctionnement du système de numération est un objectif qui s'inscrit dans une visée plus large; l'enjeu réel de cet apprentissage est d'asseoir l'ensemble des pratiques numériques de l'enfant sur des bases solides. Qu'il s'agisse de recourir aux propriétés des nombres et des opérations, d'estimer le résultat d'une opération ou de maîtriser des algorithmes de calcul, chaque fois la compréhension de la numération est en jeu.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE ET CADRE INTERPRÉTATIF

Le but de ce chapitre est double. Dans un premier temps, il s'agira de décrire le cadre méthodologique de l'étude en précisant les modalités d'observations des élèves auxquelles nous avons recouru. Dans un deuxième temps, c'est le cadre interprétatif des conduites des élèves qui sera présenté, ceci en vue de l'analyse systématique des performances développée dans la partie II.

1. Modalités d'observation des élèves

L'investigation réalisée dans le domaine de l'apprentissage de la numération se présente comme une recherche méthodologiquement composite. Avec Vergnaud (1981b), nous pensons en effet que «l'enseignement et l'acquisition des connaissances mathématiques constituent un objet d'étude trop complexe pour qu'on puisse espérer le comprendre avec une seule approche méthodologique» (p.227). Pour cerner les conduites et capacités des élèves, diverses modalités d'observation sont nécessaires. Les méthodes d'investigation que nous avons utilisées et leurs conditions de mise en oeuvre sont décrites ci-dessous.

a) Interrogation d'une large population d'élèves au moyen de questions écrites (épreuves de connaissances dites «papier-crayon»)

Les épreuves de connaissances élaborées dans le cadre de l'évaluation du nouveau programme romand de mathématique constituent une de nos sources de données relatives à l'apprentissage de la numération. Les caractéristiques de ces épreuves sont les suivantes: elles sont composées d'un grand nombre de questions qui «couvrent» à chaque fois le programme d'une année scolaire. Les apprentissages réalisés à chaque degré scolaire ont ainsi fait l'objet d'un test de connaissances.

Selon le degré concerné, ce sont entre 75 et 130 questions qui ont été retenues de manière à constituer un échantillon représentatif des tâches proposées en classe. L'ensemble de ces questions n'a bien entendu pas pu être adressé à chaque élève; chacun d'eux n'a répondu qu'à six ou huit de ces questions. Les élèves n'ont ainsi pas tous répondu aux mêmes questions. Cette procédure d'échantillonnage des questions différencie radicalement ces épreuves (ou tests de connaissances) des examens scolaires habituels nécessairement fondés sur le traitement identique de chaque élève. Ce que visent ces épreuves de connaissances, c'est spécifiquement une information sur le degré de réussite à chacune des questions posées, dans une population donnée. Les performances des élèves sont ainsi recensées dans un très grand nombre de tâches «papier-crayon» représentatives du travail réalisé en classe. Successivement à chaque degré scolaire, l'ensemble des élèves de Suisse romande a été touché par ces épreuves, ce qui représente quelque vingt mille élèves. Chacun d'entre eux ne recevant qu'une partie des questions, ce sont, selon les cas, 1000 à 2000 réponses qui ont été recueillies pour chacune des questions. La correction a été prise en charge par les enseignants selon une grille de codage préétablie et les données, mises sur ordinateur avec la collaboration des centres cantonaux de recherche pédagogique, ont pu ainsi faire l'objet d'un traitement statistique. De ce large corpus nous ne retiendrons, dans le cadre de cette étude, que les données relatives à l'apprentissage de la numération. Pour l'analyse qualitative des erreurs, nous nous sommes penché, pour chaque question, sur un échantillon de 200 à 250 réponses afin de relever et de catégoriser les types d'erreurs observés.

b) Entretiens individuels

Pour obtenir des indications complémentaires sur le degré de compréhension des élèves, leurs procédures et leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des situations-problèmes plus ouvertes que ne le permettent les questions écrites, des entretiens individuels ont été réalisés avec la collaboration d'enseignants volontaires. Ceux-ci ont bien voulu observer plus particulièrement trois ou quatre de leurs élèves. Des canevas d'entretiens ont été élaborés selon le principe suivant: à partir d'une tâche proposée à l'élève, l'enseignant-observateur conduit un entretien sur la base d'un enchaînement de questions, en grande partie standardisées.

En plus de la démarche de questionnement , des consignes ont également été données aux enseignants sur la façon de prendre note des conduites de l'élève. Selon les degrés scolaires, huit à quinze situations d'observation individuelle ont été proposées, dont deux ou trois sur la numération. Pour chacune d'elles, les comptes rendus d'une centaine d'entretiens ont été recueillis et analysés. L'apport de ces observations individuelles réside en particulier dans la prise en compte d'une dimension temporelle dans l'analyse et l'interprétation des performances de l'élève. Cette dimension permet de saisir en quoi les réponses, les solutions trouvées par l'élève, sont le fruit d'une démarche de recherches plus ou moins systématiques et de tentatives successives correspondant à d'éventuels changements de procédures.

c) Observations de groupes d'élèves centrés sur une tâche

Une autre démarche mise en oeuvre a consisté à observer comment deux ou trois élèves, en groupes, abordent, traitent et résolvent une tâche de numération. Cette démarche n'a pas connu la même extension que les épreuves de connaissances ou que les entretiens individuels. Seules quelques classes ont été touchées par cette pratique d'observation. Cependant la richesse qualitative des observations effectuées compense largement l'extension limitée de ces observations. L'engagement de deux ou trois élèves sur une tâche précise, telle la numération d'un jeu de l'oie, s'est en effet révélé des plus fructueux. L'échange entre enfants, leurs élaborations progressives de procédures, dans le dialogue, ont permis de saisir leur appréhension des tâches proposées et des solutions envisagées.

Telles sont les modalités d'observation qui ont permis de constituer un important corpus de faits sur l'apprentissage mathématique et, plus spécifiquement, sur l'acquisition du système de numération.

2. Recherche d'un cadre interprétatif

Le but ici sera de circonscrire un cadre conceptuel qui permettra d'appréhender les processus cognitifs et socio-cognitifs en jeu lorsque l'élève aborde une question mathématique. Il s'agit, en effet, de rechercher un cadre d'interprétation des conduites de l'élève sans lequel les observations réalisées, étant donné leur masse et leur diversité, risquent de ne pas quitter le statut de faits anecdotiques, ou tout au plus de former un «patchwork» empirique. Quelques questions-clés guideront cette recherche d'une grille de lecture: Quels sont les processus cognitifs en jeu chez un élève confronté à des tâches scolaires de numération? Plus particulièrement, comment chacune des tâches proposées est-elle appréhendée et identifiée par l'élève? Comment celui-ci décode-t-il ce qui est attendu de lui? Quelle est la part de l'analyse des caractéristiques propres de la tâche («de quoi s'agit-il ici?»), et la part d'une reconnaissance analogique («cette tâche me semble être du même genre qu'une autre abordée antérieurement»)? Il est certain que, selon la manière d'appréhender la tâche, selon la perception qu'en a l'élève, les conduites qu'il déploie ne sont pas de même nature.

L'approche de la tâche est certes fonction des instruments cognitifs dont dispose l'élève et de leur degré de structuration. Mais la question de la gestion de ces instruments dans une situation précise reste entière. Elle requiert une approche résolument fonctionnelle de la pensée. C'est la raison pour laquelle nous commencerons par examiner, sur ce point, l'apport de quelques modèles psychologiques du fonctionnement cognitif, modèles issus de cadres théoriques différents. Ce seront successivement les concepts de «base d'orientation» de l'action et «d'espace du problème», de même que l'approche des systèmes représentatifs dans les recherches psychogénétiques récentes qui retiendront l'attention.

a) Le concept de base d'orientation de l'action dans le modèle de Galpérine

Le modèle de la formation par étapes des actions et des concepts, présenté par Galpérine (1966), cherche à rendre compte du processus en jeu dans l'acquisition d'une nouvelle action et dans l'intériorisation par paliers de cette action en opération mentale. La réalisation d'une action, quelle qu'elle soit, requiert d'une part une fonction orientatrice, d'autre part une fonction exécutive.

«La partie orientatrice est un mécanisme psychique de l'action, tandis que la partie exécutive représente le processus de réalisation de cette action. Bien que l'action d'un sujet contienne toujours une partie orientatrice psychologique idéale, la nature de l'action dans son ensemble est déterminée par celle des choses au niveau desquelles l'action se déroule.» (Galpérine 1966, p.116)

C'est plus particulièrement cette partie orientatrice de l'action qui retiendra notre attention ici. Les recherches scientifiques dans le domaine de la psychologie de l'enseignement mettent en évidence le rôle déterminant de la base d'orientation avec laquelle un élève aborde une tâche, quel que soit le plan de représentation auquel celle-ci se situe (Talyzina 1968, Mentchinskaïa 1966). La base d'orientation est définie par Galpérine (1966) comme «un système ramifié de représentations de l'action et de son produit, des propriétés du matériel de départ et de ses transformations successives, plus toutes les indications dont se sert pratiquement le sujet pour exécuter l'action» (p.118).

Une base d'orientation peut être caractérisée de différentes manières, en particulier selon son degré d'élaboration (elle peut être plus ou moins complète), selon sa généralité (elle peut être adéquate à une situation spécifique ou à toute une classe de situations) et selon son mode de présentation à l'élève. En ce qui concerne cette présentation, deux variantes sont distinguées selon que la base d'orientation est présentée toute préparée, ou selon qu'elle est dégagée par l'élève lui-même.

Nous reprenons ici la description des trois types d'orientations plus particulièrement étudiées par Talyzina (1974).

«Le premier se caractérise comme une orientation qui ne possède pas toutes les conditions nécessaires à l'action. Les indications sont données sous forme concrète, et le sujet les découvre lui-même par «essais et erreurs». Dans ce type d'orientation, le processus de formation de l'action avance très lentement, avec un grand nombre d'erreurs, et l'action une fois formée semble être très sensible aux moindres changements dans les conditions de l'exécution.
Le deuxième type d'orientation se caractérise par la présence de toutes les conditions nécessaires à l'exécution de l'action. Toutefois, ces conditions sont données au sujet, première-

ment sous forme toute faite et, deuxièmement, sous une forme concrète qui ne peut être utilisée que dans un cas particulier.
La formation de l'action à partir de ce type d'orientation est rapide et sans erreurs. L'action formée est plus stable que dans le premier type, mais la sphère de transposition de l'action ne va pas au-delà des limites de similitude des conditions concrètes de son exécution.
Le troisième type se caractérise par la totalité des conditions données: les indications sont présentées sous la forme généralisée, caractéristique de toute la classe du phénomène. Dans chaque cas concret, les bases de l'orientation de l'action sont construites par les élèves eux-mêmes avec l'aide de la méthodologie générale qui leur est donnée.
Une action formée selon ce troisième type se caractérise non seulement par la rapidité et l'absence d'erreurs dans le processus de formation, mais aussi par la stabilité et son large champ d'extrapolation» (Talyzina 1974, p.448).

L'intérêt du concept de base d'orientation réside en ce qu'il permet d'éclairer le rapport élève-problème en enrichissant la schématisation classique, peu féconde, qui oppose un apprentissage par découverte à un apprentissage par transmission (réception) verbale de connaissances. Dans la perspective de Galpérine, les explications de l'enseignant peuvent jouer un rôle essentiel dans l'élaboration d'une conception initiale de la tâche.

L'intervention didactique n'est, en cela, pas antagoniste à l'expérience propre de l'élève; elle a pour but (comme les structurants préalables [advanced organisers] d'Ansubel (1963)) de placer l'élève en situation optimale pour tirer adéquatement parti, selon les objectifs visés, de son activité dans une tâche donnée. La pédagogie de la découverte dans le cadre de l'enseignement des mathématiques est quelquefois comprise par les enseignants comme une manière de laisser l'élève aux prises avec un problème partiellement défini. Comme nous avons pu l'observer, faute d'éléments suffisants les élèves tentent alors de s'orienter de leur mieux, sans toujours y parvenir. Si l'élaboration, par tâtonnements, d'une base d'orientation peut se révéler formateur par la nécessité devant laquelle se trouve l'élève d'organiser les éléments disponibles, constitutifs d'une représentation de la tâche, cela n'est pas forcément le cas dans toutes les situations. En particulier, lorsque les données objectives fournies à propos de la tâche sont insuffisantes pour en comprendre la nature, l'élève se perd en conjectures sur ce qu'il peut bien faire. La seule conduite adéquate de sa part serait de lever l'ambiguïté de la situation en questionnant l'enseignant sur ce que celui-ci attend de lui, mais de telles conduites sont rares.

La distinction entre les diverses formes de bases d'orientation, dégagées par les auteurs soviétiques, permet d'affiner le regard sur la situation réelle dans laquelle se trouve un élève confronté à une tâche. De quelle manière la tâche se présente-t-elle à l'élève? A quel niveau se pose une éventuelle difficulté d'entrer en matière? Au niveau des actions et opérations à mettre en jeu pour effectuer la tâche, ou au niveau de l'élaboration d'une base d'orientation? Si l'élève se trouve dans cette dernière situation, quelle est l'intervention didactique la plus adéquate? Telles sont quelques questions-clefs qui tournent autour du concept de base d'orientation de l'action.

b) Le concept de «champ du problème» dans les recherches anglo-saxonnes sur la résolution du problème

Hayes et Simon (1974), dans leur article sur la compréhension des énoncés de problèmes écrits, partent du constat que les recherches psychologiques sont classiquement centrées sur les conduites que le sujet met en oeuvre lorsqu'il a compris la tâche qui lui est proposée. Les processus en jeu entre le moment où une consigne est donnée et celui où la tâche est comprise restent peu explorés dans la littérature sur la résolution de problèmes. Lorsqu'un sujet aborde un problème, sa première tâche est de le comprendre. Cela signifie, pour Hayes et Simon, que le sujet a pris connaissance de l'ensemble des éléments ou données du problème, qu'il connaît l'état initial du problème et le but à atteindre, de même que les opérateurs qui lui permettront de passer de l'un à l'autre. Il doit encore connaître les conditions dans lesquelles les opérateurs peuvent être appliqués. L'ensemble de ces éléments constitue ce que Newell and Simon (1972) appellent un «basic problem space», un champ du problème.

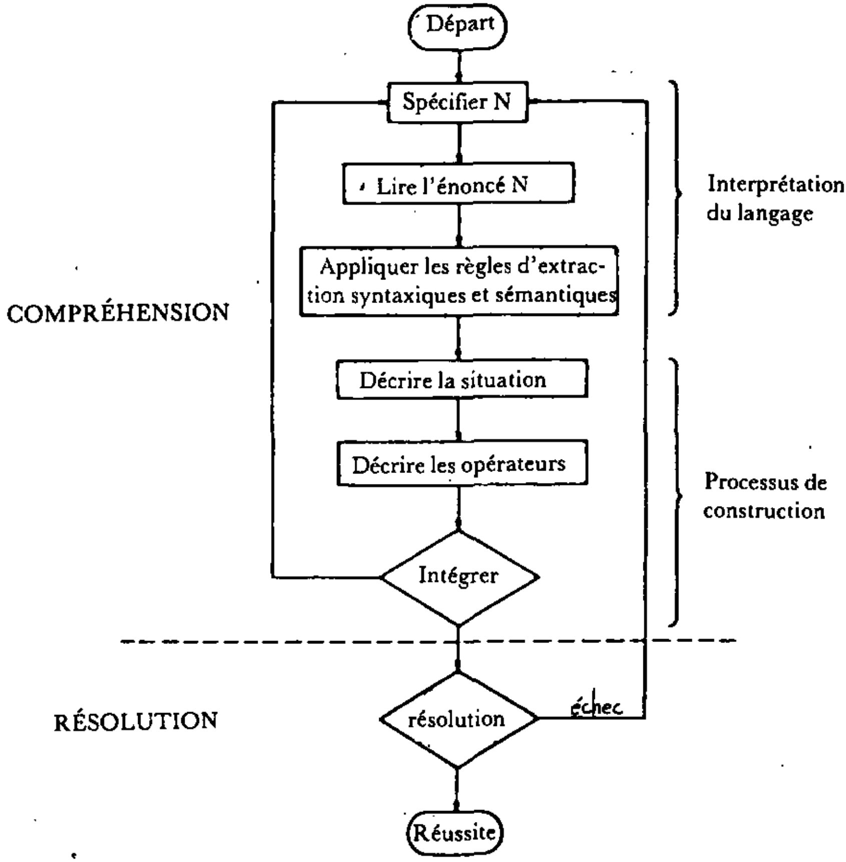
«Le champ du problème c'est la représentation que le sujet se fait de l'environnement de la tâche, représentation qui lui permet de prendre en considération différentes situations-problèmes, de caractériser les situations de telle façon à pouvoir décider que faire et d'appliquer les opérateurs qui transforment une situation en une autre. Le champ du problème est un champ minimal qui ne comprend que les éléments essentiels pour définir le problème, la solution et les opérateurs. Les sujets peuvent l'élargir pour qu'il incorpore d'autres informations utiles à la solution du problème.» (Hayes et Simon 1974, p.168)

C'est par l'analyse de protocoles de sujets adultes confrontés à des problèmes complexes et invités à exprimer à haute voix leur manière de s'y prendre, que le processus de compréhension est étudié par ces auteurs. Le but de ceux-ci est d'élaborer un modèle des processus cognitifs en jeu en vue d'élaborer un programme d'intelligence artificielle ou de simulation. Nous nous centrerons ici sur le modèle élaboré pour rendre compte de la compréhension d'un problème complexe par des sujets adultes.

Compréhension et résolution dans le modèle de Hayes et Simon sont deux processus interdépendants. Certes, un sujet aux prises avec un problème commence par le comprendre pour enfin le résoudre mais, dans la phase intermédiaire, ces deux processus interagissent. Le sujet se lance dans une recherche de solution dès qu'il a pu se faire une première idée du problème mais, en cours de route, il est amené à revenir sur les données initiales afin de mieux les comprendre. La compréhension de l'énoncé repose sur deux sous-processus, l'**interprétation** du langage et la **construction** de l'espace du problème.

Le processus d'interprétation consiste essentiellement à tirer de l'énoncé tous les éléments d'informations qui sont donnés. La construction d'une représentation du problème s'élabore sur la base de l'information extraite de l'énoncé; elle consiste en une description de la situation et en un ensemble d'opérateurs qu'il s'agit de rendre compatibles. Le modèle peut être représenté schématiquement de la manière présentée à la page suivante, d'après Hayes et Simon (1974).

Comprendre un problème, c'est-à-dire s'en faire une représentation, consiste, dans ce modèle, à extraire de l'énoncé toutes les indications nécessaires. Dans ce processus, le rôle des connaissances du sujet reste cependant incertain. Des travaux plus récents portent spécifiquement sur cette question. Comme le montre Greeno (1980), la distinction qui s'était établie dans la littérature anglo-saxonne entre, d'une part, les performances appréhendées comme actualisations ou applications des connaissances du sujet et, d'autre part, les performances de résolution de problèmes, est actuellement radicalement remise en question, ce qui n'est pas sans conséquence sur le rôle accordé aux problèmes dans l'apprentissage mathématique (Retschitzki et Perret, 1982). La représentation initiale que le sujet se fait d'un problème donné prend appui autant sur l'analyse des données du problème que sur les expériences antérieures et les connaissances du sujet.



c) La fonction représentative dans les recherches psychogénétiques genevoises

Centrées initialement sur la formation et la structuration des connaissances, les recherches psychogénétiques piagétiennes n'ont traditionnellement guère porté sur la question de l'actualisation des connaissances dans une situation particulière. Cette actualisation a, implicitement, été tenue pour acquise et automatique; confronté à un problème, l'enfant mobilisera son savoir. L'étude systématique des conditions contextuelles d'actualisation des connaissances est relativement récente, qu'il s'agisse du contexte objectuel (à propos notamment de la question des décalages horizontaux [Gilliéron, 1976], ou du contexte psychosocial [Perret-Clermont, Mugny, Doise, 1976]). De nombreuses recherches initiées et conduites par Inhelder et ses collaborateurs (Inhelder et al. 1976) partent du constat que les connaissances ne contiennent pas, en elles-mêmes, leurs propres conditions d'application. La question est alors de comprendre par quel processus les connaissances acquises sont transformées, «retravaillées» par le sujet, de manière à les rendre opérationnelles dans une situation particulière. L'approche du fonctionnement cognitif en terme de traitement de l'information attribue la fonction d'évocation, de différenciation et de coordination des connaissances, en vue de leur application, à la «mémoire de travail». Celle-ci est définie par Leiser, Cellerier et Ducret (1976) comme

> «lieu de l'adaptation cognitive où sont «traités» les contenus de la mémoire à long terme évoqués au cours de l'interaction avec l'environnement et la partie déjà élaborée du système représentatif. Ces contenus consistent en schémas, tant d'actions que perceptifs, figuratifs, verbaux et conceptuels et sont alors sélectionnés et assemblés en une représentation (ou système représentatif) particularisée du problème posé (....). La mémoire de travail a donc le rôle d'interface «entre deux milieux, l'un de nature interne, l'autre extérieur au sujet.» (p.84)

Confronté à une situation-problème, tout sujet procède aussi bien à une assimilation des données du problème à son système de schémes qu'à une accommodation de celui-ci. Pour étudier ce mécanisme, les situations expérimentales retenues visent à «ralentir» les réglages qui, en situation familière, sont souvent immédiats. C'est ainsi que les recherches conduites dans ce domaine ont pour dispositifs des problèmes dont le but est perçu par le sujet, mais dont l'atteinte de la solution requiert un enchaînement relativement complexe d'actions observables. L'attention est alors portée aux procédures mises en oeuvre par le sujet, à partir desquelles l'expérimentateur tente d'inférer les systèmes d'interprétation (système représentatif, modèles ou théories implicites selon les auteurs) qui sous-tendent la recherche d'une solution.

Le cadre conceptuel brièvement esquissé ici vise spécifiquement à rendre compte des processus cognitifs en jeu dans la résolution de problèmes, si l'on entend par problème, selon la définition classique d'Oléron (1974), «toute situation à laquelle le répertoire des réponses immédiatement disponibles chez un sujet ne permet pas à celui-ci de fournir une réaction appropriée.» (p.42)

Avant même d'examiner l'apport de ce cadre conceptuel à l'analyse des conduites des élèves dans des tâches scolaires, une question préalable se pose : les tâches scolaires proposées en classe aux élèves sont-elles assimilables à des problèmes au sens où ce terme est utilisé en psychologie? L'apprentissage scolaire ne vise-t-il pas précisément à outiller l'élève, à enrichir son répertoire de réponses, de manière à ce qu'il puisse avec une accommodation minimale «fournir immédiatement une réaction appropriée»? Le statut des tâches proposées aux élèves n'est pas toujours identifiable. Le concept de problème au sens psychologique caractérise plus un rapport entre le sujet et une tâche que la tâche elle-même; une même tâche peut à la fois faire problème à un élève qui se lancera alors dans diverses tentatives de résolution, ne pas être du tout comprise par un autre qui, par conséquent, passe à côté du problème, ou être effectuée sans difficulté par un troisième.

L'analyse du processus en jeu dans la résolution de problème est-elle pertinente pour appréhender ce qui est en jeu dans la réalisation d'une tâche non problématique? La réponse dépend d'un examen préalable de ce qui distingue la résolution d'un problème de la réalisation d'une tâche.

Nous recourrons pour cela aux distinctions éclairantes introduites par Ackermann-Valladao et al.(1983) pour caractériser les modèles (représentations spécifiques) du sujet face à une tâche. Ces auteurs font intervenir deux dimensions d'analyse. La première porte sur le degré de structuration du modèle; celui-ci est soit formé, soit transitoire (en formation). La deuxième dimension porte sur le degré d'applicabilité du modèle selon son adéquation à la tâche. La prise en compte simultanée de ces deux dimensions permet d'identifier quatre rapports différents que le sujet peut entretenir avec une tâche, rapports correspondant à des conduites et des états psychologiques différents:

Degré d'applicabilité:	Degré de structuration: modèle formé	modèle transitoire ou en formation
adéquat	(cas 1)	(cas 3)
modèle non adéquat	(cas 2)	(cas 4)

(tiré de Ackermann-Valladao et al, 1983), p.

Confronté à une tâche, le sujet peut se trouver dans quatre situations que les auteurs cités caractérisent ainsi:

Cas 1 (situation de l'«expert»):

«Lorsque le modèle du sujet est bien formé et s'applique facilement à la tâche, autrement dit qu'il nécessite un minimum d'accommodation pour mener à la solution, nous constatons que:

- le sujet effectue uniquement des transformations admises par la consigne et pertinentes dans le problème;
- il anticipe d'emblée l'enchaînement des transformations nécessaires pour atteindre le but;
- sa démarche lui paraît évidente;
- il éprouve un sentiment de maîtrise de la situation, correspondant à son efficacité réelle.

L'ensemble de ces conduites peut être interprété comme suit: les représentations du sujet témoignent d'une bonne différenciation et coordination des moyens et des buts, qui lui permet de planifier son activité de façon optimale. Autrement dit, le modèle exerce un contrôle de type descendant sur les conduites de résolution. Il n'y a pas de vrai problème pour le sujet.»

Cas 2 (situation de l'«applicateur»):

«Dire que le modèle du sujet est bien formé mais non adéquat, signifie qu'il a été élaboré dans des situations antérieures pour lesquelles il était pertinent; mais dans la situation présente, il ne mène pas, ou pas tel quel, à la solution du problème. Nous observons différentes conduites chez les sujets:

- transgression de la consigne (procédures non permises dans le cadre du problème posé, mais pertinentes dans le modèle);

- blocages (le modèle ne comporte pas de procédure permettant de poursuivre la résolution);
- changement rapide de stratégies (le sujet fait des «glissements» entre son modèle et un modèle proche de celui-ci);
- applications cycliques des mêmes procédures (sans modification du modèle);
- abandon de la tâche (si le sujet ne dispose pas d'un autre modèle ou s'il ne voit pas comment modifier le modèle présent).

Du point de vue du sujet agissant, ces conduites s'accompagnent d'un sentiment de surprise («comment! ça ne marche pas! pourtant mon idée est bonne et ça devrait marcher!»). L'évaluation de sa propre représentation du problème est positive, tandis que celle de sa réalisation, ou de la situation, est négative. Le sujet se dit à lui-même: «J'ai dû me tromper quelque part en faisant», ou encore: «Il y a quelque chose qui ne va pas dans la situation». Ces évaluations vont de pair avec une forte résistance, dans un premier temps du moins, à modifier le modèle ou à l'abandonner.»

Cas 3 (situation de l'«apprenti»):

«Dire que le modèle est en formation signifie, au niveau de son organisation, que le sujet possède de nombreuses représentations spécifiques à la situation, mais qu'elles ne sont pas encore articulées entre elles. Ou alors il dispose d'une ou plusieurs représentations générales qui ne sont ni différenciées, ni spécifiées en fonction de la tâche. Dans le premier cas, le modèle est adéquat parce que les représentations spécifiques qui le composent sont potentiellement fonctionnelles mais non encore vraiment signifiantes pour le sujet. Dans le deuxième cas, le modèle est adéquat car les représentations générales guident le travail du sujet dans la bonne direction. (...)

Le modèle décrit ici est donc toujours lacunaire, ce qui suppose que le sujet en poursuive la construction, sans l'abandonner ni le modifier radicalement. Ce travail d'élaboration se traduit par un ensemble de conduites d'exploration, qui vont permettre de sémantiser et d'intégrer par la suite les éléments (objets, actions, procédures) nécessaires à la réussite du problème.»

Cas 4 (situation du «novice»):

«Dire du modèle qu'il n'est ni adéquat ni formé signifie que le sujet ignore le problème tel qu'il est proposé par l'expérimentateur à travers la consigne et le matériel. Il se donne un autre but à atteindre qui, contrairement au Cas 2, n'a plus qu'un lien lointain avec le but proposé. Cela signifie aussi que le sujet ne va pas élaborer un modèle adéquat à la tâche telle qu'elle a été conçue par l'expérimentateur; par contre, il peut très bien construire un modèle par rapport au but qu'il s'est donné et manifester ainsi les conduites et états psychologiques décrits sous 1, 2 ou 3» (Ackermann-Valladao et al, 1983. p.67).

La pertinence de ce cadre conceptuel pour notre propre investigation retient l'attention; elle prend appui, comme nous voudrions le montrer ici, sur la résonance pédagogique des quatre situations qui y sont distinguées. Ces quatre situations, celle de l'«expert», de l'«applicateur», de l'«apprenti» et du «novice», pour reprendre la terminologie adoptée plus haut, couvrent un large champ d'observation et de problématique. Ces différents types de rapport à la tâche renvoient, sur les plans pédagogique et didactique, à des interrogations fondamentales souvent non résolues.

La situation de l'«expert» soulève indirectement la question des objectifs d'apprentissage poursuivis et de leur opérationalisation en termes comportementaux. La définition de niveaux de maîtrise dans les acquisitions scolaires fait l'objet d'une recherche complexe en raison de son caractère fondamentalement interdisciplinaire. Au delà de l'organisation logique et psychologique des objectifs visés, ce en quoi on estime un élève devoir être expert relève tout autant d'une sociologie du curriculum que de la psychopédagogie.

La situation de l'«applicateur» renvoie, quant à elle, au débat sur la nature des instruments cognitifs que favorise l'apprentissage scolaire. A l'un des pôles de ce débat, on trouve une pédagogie de la découverte soucieuse de laisser l'élève inventer ses propres instruments de lecture et d'approche des tâches proposées; à l'autre pôle, une pédagogie dont la visée est de fournir à l'élève des procédures et méthodes d'approches bien cadrées, quitte à prendre le risque que ces procédures soient appliquées inadéquatement dès qu'on s'éloigne des situations-types dans lesquelles l'apprentissage est effectué. Ce débat se pose en des termes voisins, selon que l'interrogation porte sur le degré de généralité de la «base d'orientation» qu'il est le plus judicieux de communiquer à l'élève (Talyzina, 1974), ou selon que l'on s'interroge sur la nature d'une pédagogie de la résolution de problème (Newel, 1980).

La situation de l'élève «apprenti» en train d'élaborer un modèle adéquat de la tâche retient tout particulièrement l'attention des chercheurs dans le domaine de la didactique des mathématiques. Brun (1983) analyse les conduites des élèves en «situations mathématiques» par une méthode qui consiste «à analyser le protocole du déroulement de la situation, en identifiant les moments-clefs qui marquent l'évolution de la démarche des élèves. Il s'agit donc d'une analyse diachronique, dans le but de comprendre les modifications des conceptions des élèves au fur et à mesure qu'ils avancent dans leur réflexion, en même temps que l'évolution des représentations qu'ils se font de la situation» (p.1). Dans cette perspective de recherche, qui caractérise également les travaux de Brousseau (1983), les critères qui président au choix des situations d'observation à fin de recherche didactique et les critères d'échantillonnage des situations proprement didactiques se recoupent largement, créant ainsi une convergence peu souvent observée entre le laboratoire et le terrain. En effet, l'une des caractéristiques essentielles des «situations mathématiques» conçues à fin didactique est «de permettre à l'élève de construire sa tâche, et de la définir au fur et à mesure qu'il y investit ses connaissances et se donne l'occasion de les faire évoluer à travers les différents problèmes qu'il se pose.» (Brun 1983, p.1). Or c'est également ce qui caractérise une situation expérimentale idéale orientée vers l'étude de la formation des modèles conçus comme «cadres assimilateurs permettant d'assigner des significations aux éléments de la situation comme aux actions du sujet» (Ackermann-Valladao 1983, p.62).

La situation du «novice» est différente selon le degré de structuration de la tâche. Lorsque celle-ci est suffisamment ouverte, au sens où peut l'être une «situation mathématique» dans la définition qu'en donne Brun (1983), le novice est susceptible de déployer une activité signifiante en poursuivant, d'une manière ou d'une autre, son propre but. Il se trouve alors de fait dans la situation d'«apprenti». Lorsque la situation est plus structurée, le but à atteindre plus cadré, c'est la possibilité du novice d'entrer en matière qui est en jeu. On touche ici à la problématique des prérequis à l'apprentissage. Que requiert la maîtrise de telle ou telle tâche, quelles sont les connaissances minimales requises pour percevoir de quoi il s'agit? Ce sont les questions-clefs que l'on rencontre dans toute programmation de l'enseignement.

d) Vers une psychologie de l'élève en situation pédagogique

Bien que d'un apport certain à l'élaboration d'une psychologie de l'élève, les recherches actuelles en psychologie cognitive présentent toutefois des limites qu'il s'agit d'examiner attentivement. Pour les fins de la recherche psychologique, les situations expérimentales retenues correspondent à des problèmes pratiques avec un but à atteindre, clairement défini. Le sújet perçoit, de ce fait, s'il avance dans la tâche et s'il se rapproche du but. Les interventions de l'expérimentateur sont alors limitées au minimum, ce qui permet d'observer le déroulement spontané des conduites des élèves. Si des situations de ce type peuvent certes être aménagées en situation scolaire, voire même systématiquement préconisées, notamment dans l'orientation d'une école active favorisant l'autonomie des élèves, et plus particulièrement dans les perspectives actuelles en matière de didactique des mathématiques, ces situations ne recouvrent pas l'ensemble des tâches proposées quotidiennement en classe. La grande majorité des tâches qu'abordent les élèves ne correspond pas à cette situation de recherche autonome. L'élève ne peut généralement pas constater par lui-même s'il s'est égaré en route. C'est le cas lorsque la tâche ne fournit pas de feed-back à l'élève sur l'adéquation de sa démarche et de sa réponse. Dans cette situation fréquente, propre au contexte scolaire, le feed-back vient alors de l'enseignant. C'est la raison pour laquelle, dans l'analyse des conduites des élèves, nous devrons faire appel aux concepts de réponses attendues, ou d'attentes non perçues, concepts étrangers à une approche psychologique centrée sur les processus cognitifs.

La nature du feed-back n'est pas sans conséquence sur le fonctionnement cognitif de l'élève. Celui-ci se trouve en fait en permanence devant une double tâche, celle de comprendre le problème et celle d'interpréter ce que l'enseignant attend de lui, ceci en fonction d'un contrat didactique que Brousseau (1981) caractérise ainsi:

«L'enfant puise alors les informations nécessaires à l'établissement de ses réponses, moins dans l'analyse de la situation et la compréhension du problème (qui lui est proposé) que dans les indications «pédagogiques» qui lui sont fournies d'instant en instant, selon un contrat didactique implicite indépendant du contenu. Ce processus présente l'avantage de réaliser l'institutionnalisation de la connaissance: l'élève prend connaissance des questions qu'on veut lui poser, des réponses qu'on attend de lui, de leur statut culturel ...etc.» (Brousseau 1979, p.86)

C'est par la nature des tâches scolaires en jeu (tâches avec feed-back médiatisé) que nous sommes conduit à prendre en compte le système triangulaire «enseignant-élève-tâche», au delà du sous-système «élève-tâche», sur lequel la recherche psychologique se centre traditionnellement.

Cette situation triangulaire est bien décrite par Vinh-Bang (1980):

«La situation d'apprentissage scolaire stimule et provoque une réorganisation de la connaissance par l'intégration du nouvel acquis. Seulement, dans cette situation, ce n'est plus le sujet-enfant qui agit, mais le sujet-élève qui cherche à s'adapter à un contexte scolaire. Cette attitude peut fausser le processus d'acquisition de connaissance. L'élève devine le maître, ce que le maître attend de lui; ce qu'il faut manipuler, exécuter, répondre, etc. L'élève mobilise, dans son acquis, ce qu'il croit être le plus propice pour satisfaire à une telle demande. C'est pourquoi il est beaucoup plus difficile de saisir la signification intrinsèque d'une conduite d'élève que de comprendre un sujet-enfant dans un examen psychologique» (p.98).

L'observation des élèves en situation d'enseignement mutuel (sur un problème de géométrie) conduit en particulier Vinh-Bang à constater que, pour l'élève, comprendre c'est avant tout réussir en action, et non saisir les notions de parallélisme et d'angles en jeu dans la tâche qui lui a été proposée. En situation scolaire, l'alternance cyclique qu'observe Inhelder et al.(1976) entre «les démarches procédurales proactives (orientées vers le but) et les efforts de compréhension rétroactive» (p.71) semble fonctionner difficilement, au détriment de ces derniers.

Notons que cet élargissement de l'objet même de recherche ne se révèle pas seulement pertinent dans le champ pédagogique, il permet également de décoder les conduites des élèves en situations expérimentales ou en situations d'examen psychologique. C'est ce qu'analysent Perret-Clermont et al.(1982) à propos de l'interprétation de la situation par le sujet:

«Toute épreuve opératoire, comme tout test psychologique, est inévitablement une mise en scène. L'expérimentateur a appris antérieurement son rôle. Cela fait partie de la formation professionnelle du psychologue. Les attentes de rôle à l'égard du testé sont relativement précises dans une situation de test. Mais si l'expérimentateur a été initié au sien, le sujet, lui, n'a pas été introduit à l'idée d'un jeu de rôles: celui qu'il doit tenir est difficile à expliciter et lui est rarement communiqué. A moins d'un «drill» spécifique (et que les psychologues redoutent, car alors leurs tests ne seraient plus vraiment des «tests»), le sujet n'a pas, lui, reçu un enseignement en vue de cette situation. Quel est son rôle? Quelle est l'intention de tout le cérémonial mis en oeuvre et auquel il doit répondre? Certains sujets se posent ces questions plus ou moins consciemment et avec attrait, humour ou angoisse, selon les circonstances.

Donc, dès le début d'un entretien à propos d'une notion opératoire, le sujet va devoir se situer socialement et comprendre ce qui est attendu de lui.» (p.26)

En conclusion de ces quelques considérations sur la nécessité d'élargir le cadre d'interprétation propre à la psychologie cognitive, les recherches actuellement conduites, aussi bien en didactique des mathématiques qu'en psychologie sociale de l'éducation, contribuent sans aucun doute à saisir la complexité des processus, à la fois cognitifs et psychosociaux, en jeu dans l'émergence des réponses des élèves. Comprendre la signification de ces réponses requiert la prise en compte des multiples enjeux qui constituent la trame de toute situation didactique (Perret-Clermont 1984).

PARTIE II

SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE

DES ÉLÈVES EN NUMÉRATION

Cette deuxième partie sera consacrée à la présentation et à l'analyse des performances des élèves dans un éventail de tâches qui, sous divers angles, concernent l'écriture et la lecture des nombres.

Pour présenter l'ensemble des données recueillies sur cette question, il fallait adopter un principe d'organisation qui facilite au mieux l'appréhension du corpus constitué. L'organisation retenue dans ce chapitre s'appuie sur la catégorisation des tâches de numération présentée au chapitre II pour décrire les principales activités composant, dans ce domaine, la trame du curriculum scolaire. Les observations recueillies seront ainsi regroupées selon la nature de la tâche en jeu. Ce sont successivement les conduites des élèves dans des tâches de codage et de décodage numériques, d'écriture de suites de nombres et de sériations numériques qui seront présentées et commentées ci-après.

Pour chaque type de tâches les observations réalisées seront, par conséquent, de nature hétérogène. Il sera fait référence aux performances observées dans le cadre aussi bien des épreuves de connaissances, des entretiens individuels, que des observations de groupes d'élèves. Le choix de ce mode de présentation des données se justifie par le souci de privilégier l'analyse développementale des conduites des élèves. Il nous importait en effet, pour chaque type de tâche, d'examiner l'évolution des performances au cours des quatre premières années primaires.

CHAPITRE IV

TÂCHES DE CODAGE NUMÉRIQUE

Dès la première année primaire, des tâches de codage numérique sont proposées aux élèves. Le principe est chaque fois de procéder au regroupement des éléments d'une collection, selon une base donnée, pour finalement écrire le code (nombre écrit) correspondant au cardinal de la collection. Très tôt, cette activité de codage est balisée par l'usage d'un symbolisme conventionnel bien établi; on recourt en particulier, de manière systématique, à des tableaux de codage dont les en-têtes fournissent les indications-clés quant à la valeur positionnelle des chiffres.

Ce sont tout d'abord les tentatives initiales de représentation graphique et de codage numérique observées dans quelques classes de première année primaire qui retiendront notre attention. Dans un deuxième temps, ce sont les réponses aux questions écrites posées à un large échantillon d'élèves des quatre premières années qui seront présentées et discutées.

1) Représenter graphiquement le groupement des éléments d'une collection

L'observation a porté sur quelque septante élèves de première année primaire. Deux groupes d'élèves ont pu être distingués selon les activités réalisées en classe préalablement. Le premier groupe a eu l'occasion en classe de procéder à divers regroupements d'objets, mais n'a pas encore été introduit à l'usage d'un tableau-type de codage numérique. Le deuxième groupe, par contre, au moment de l'observation, vient d'aborder en classe le codage sous forme de tableaux. Il paraissait en effet judicieux, pour comprendre les processus en jeu dans le passage à une symbolisation conventionnelle, d'observer aussi bien des élèves récemment «initiés» à ce type de codage, que des élèves encore «naïfs» en la matière.

La tâche a été présentée aux élèves de la manière suivante: chaque enfant dispose sur sa table d'une collection de six à neuf objets généralement de même nature; les uns ont des crayons, les autres des ciseaux, des bouchons, des jetons, ou encore des pinceaux. La consigne est alors donnée sous la forme suivante : «Vous allez grouper votre collection par quatre, puis vous noterez sur votre feuille ce que vous avez fait. En regardant votre feuille, on devra pouvoir comprendre ce que vous avez noté.» Notons que la perspective de communiquer un message à un tiers en reste à l'état de projet ou d'intention; les productions graphiques des élèves sont recueillies, sans que les élèves aient en fait la possibilité de vérifier le degré de «lisibilité» de leur codage pour un autre enfant. Soixante-sept productions graphiques ont été analysées. En nous inspirant des travaux de Vergnaud (1974) et Brun (1979) sur les différents niveaux de représentation, et des analyses de productions d'élèves effectuées par Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (1980), nous nous sommes centré sur le type de représentations adopté par l'élève, selon que l'élève recourt au langage, au dessin (schéma) ou au codage numérique.

Les productions des élèves qui n'ont pas encore recouru en classe aux tableaux de codage numérique (Groupe 1)

Les vingt-six élèves dont les productions seront examinées ici ont effectué en classe diverses activités de groupement dans une base donnée. Ils ont, par exemple, formé des rondes pour lesquelles les élèves se sont regroupés par trois, par quatre, en observant chaque fois les conséquences du mode de groupement adopté. Mais, au moment de l'observation, ces activités de groupement n'ont pas encore, avec ces élèves, été codifiées numériquement à l'aide d'un tableau de codage.Les productions de ces élèves à notre consigne de grouper leur collection et de noter ce qu'ils ont fait s'organisent en quatre grandes catégories.

A Représentation en langage naturel

Les écritures relevant de cette catégorie se présentent par exemple ainsi:

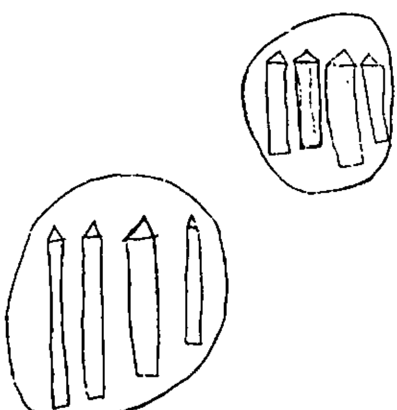
2 groupements et 1 isolés

1 groupe et 3 isoles

B *Dessin (schéma)*

Les éléments de la collection sont représentés graphiquement par les élèves; les groupements sont symbolisés par des «cordes» qui entourent les éléments regroupés. La nécessité de réaliser une représentation figurative des éléments en jeu est quasi générale; ces élèves ne se risquent pas spontanément à représenter conventionnellement les éléments par des croix ou tout autre signe.

Exemples:



C *Ecriture additive*

Pour représenter l'activité de groupement, certains élèves recourent à des écritures qui sont le plus souvent de type additif. Par l'écriture 3 + 5, l'élève signifie qu'il y a 3 éléments isolés et 5 éléments qui constituent un groupe.

Lorsqu'une équation telle que 5 + 4 = 9 est posée (correspondant à la situation concrète de 9 éléments regroupés par 5), plusieurs élèves poursuivent l'activité par une recherche de toutes les sommes égales à 9. On peut penser que c'est le travail réalisé précédemment en classe dans le domaine de l'addition qui conduit les élèves à assimiler la tâche de codage proposée à une tâche de décomposition systématique d'un nombre.

Exemples:

4 + 4 = 8
1 + 7 = 8
7 + 1 = 8

4 + 4 = 8
1 + 7 = 8
0 + 8 = 8
7 + 1 = 8
8 + 0 = 8

5 + 4 = 9   1 + 7 = 9   6 + 7 = 9
4 – 5 = 9
1 + 4 = 9   7 + 1 = 9
4 + 1 = 9   4 + 3 = 9
6 + 1 = 9   6 + 3 = 9
1 + 6 = 9   5 + 6 = 9

D Codage numérique

Pour représenter l'activité de groupement, quelques élèves se limitent à un code strictement chiffré. Par exemple, pour 7 éléments groupés par 3, l'élève écrit: 2 1. Quelquefois le code révèle une confusion entre le dénombrement des groupements et la base selon laquelle le regroupement a été fait. Ainsi, pour 6 éléments, regroupés par 3, un élève code: 3 0.

L'information chiffrée est souvent incomplète; l'élève peut n'indiquer que la base ou le nombre d'éléments isolés, ou le nombre d'éléments dans un groupe, par exemple. Le code se réduit ainsi à un chiffre (5 ou 3) qui signifie que l'élève a groupé les éléments par cinq ou trois.
En résumé, les modes de représentation adoptés par les éléves du groupe 1 se répartissent de la façon suivante

			Nombre d'élèves
A	Langage naturel		8
B	Dessin (schéma)		6
C	Ecriture additive		5
D	Codage numérique	information complète	3
		information incomplète	4
			N = 26

Les productions des élèves auxquels un codage numérique conventionnel, sous forme de tableau, a préalablement été présenté en classe (Groupe 2)

D'une manière générale, les productions des quarante-et-un élèves du groupe 2 se caractérisent par leur nature composite. Fréquemment ces élèves recourent simultanément à deux modes de représentation en associant par exemple dessin et texte, ou dessin et codage numérique. Ces conduites n'avaient pas été observées chez les élèves du groupe 1.

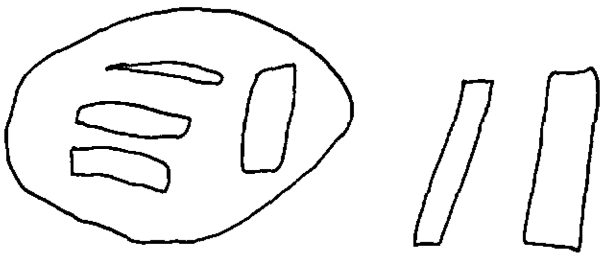
Les productions du groupe 2 se regroupent ainsi en sept catégories selon les modes de représentation graphique mis en oeuvre:

A Dessin
B Dessin et texte
C Dessin et chiffres
D Dessin, texte et tableau de codage numérique
E Dessin et tableau de codage numérique
F Tableau de codage numérique
G Dessin libre

Pour chacune de ces catégories, nous donnerons ci-après quelques exemples.

A Dessin

Certains dessins sont complets dans le sens que toute l'information sur le groupement effectué est donnée. C'est par exemple le cas dans le dessin suivant.

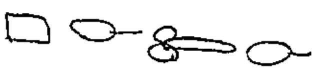


(crayons)

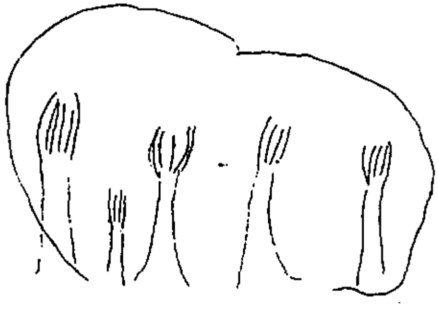
Tous les éléments sont en effet représentés; le groupement par quatre est symbolisé par le tracé d'une corde.

Par contre, d'autres dessins ne reprennent qu'une partie de l'information en jeu. Ce ne sont le plus souvent que les éléments regroupés qui sont retenus par l'élève, le regroupement étant selon les cas signifié ou non par une corde.

Exemple 1:



Exemple 2:

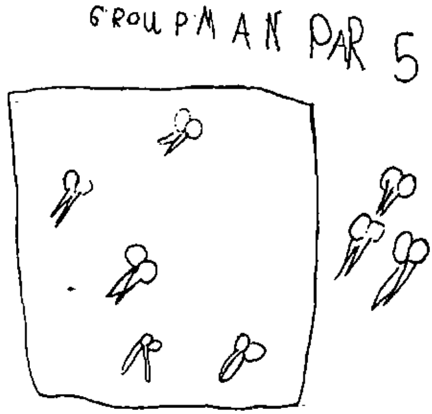


(pinceaux)

B Dessin et texte

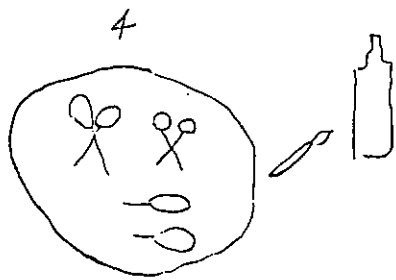
Au dessin des éléments, l'élève ajoute un commentaire verbal pour expliciter l'action effectuée.

Exemple:

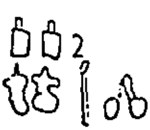


C Dessin et chiffres

Quelques élèves complètent leur dessin par des indications chiffrées désignant soit le nombre d'éléments regroupés, comme dans l'exemple suivant:



soit le nombre d'éléments isolés:

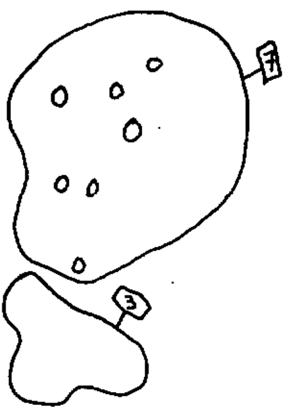


soit tous les deux:

Notons ici le mode original d'identification des éléments regroupés (marqués d'un O) et des éléments isolés (marqués d'une X). L'élève reprend en fait les en-têtes des tableaux O et X , et les utilise comme attributs logiques pour désigner une propriété des objets eux-mêmes.

D'autres élèves procèdent au regroupement de toute la collection présentée et en codent le cardinal.

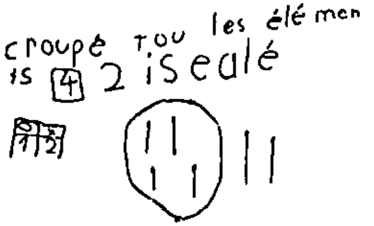
Exemple:

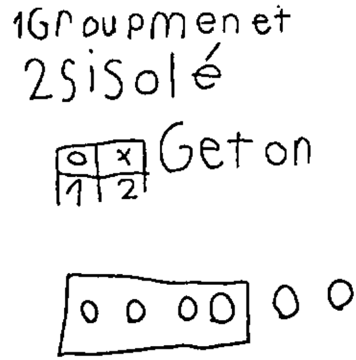


Pour cet élève, les activités de décomposition additives du nombre dix semblent bien être la référence implicite.

D Dessin, texte et tableau de codage numérique

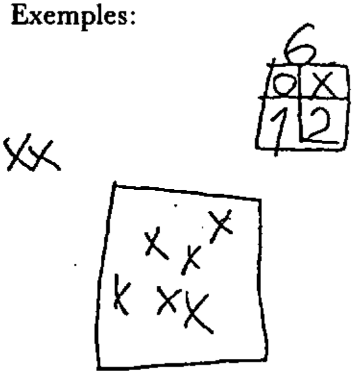
Exemples:

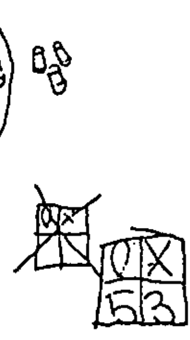




E Dessin et tableau de codage numérique

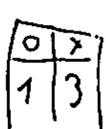
Exemples:

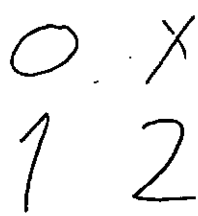




F Tableau de codage numérique

Exemples:

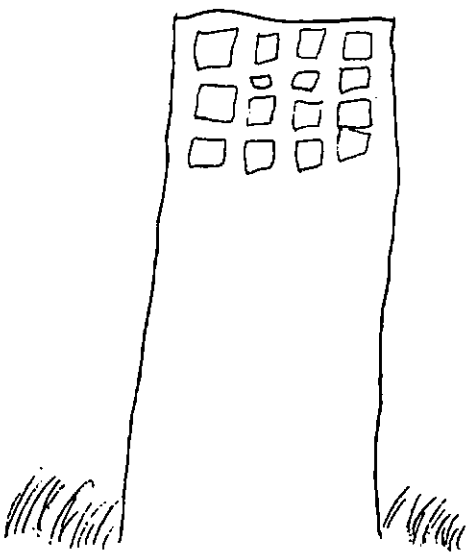


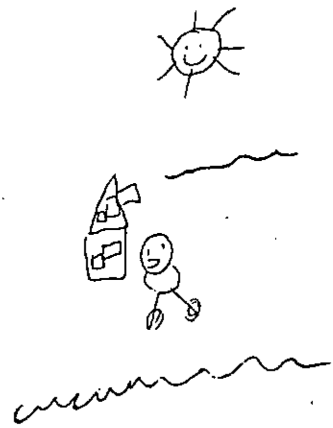


G Dessin libre

Les productions que nous avons examinées jusqu'ici se révèlent toutes pertinentes, en rapport d'une façon ou d'une autre avec la tâche de groupement proposée. Il peut arriver que, dans un premier temps, la tâche ne soit apparemment pas identifiée par l'élève comme de nature mathématique, ou plus généralement que l'élève ne perçoive pas vraiment ce qui est attendu de lui dans ce type de tâche. Il fait alors de la feuille blanche l'usage qui lui est le plus familier, soit le support d'un dessin libre.

Exemples:





En résumé, les différentes productions se répartissent de la façon suivante:

		Nombre d'élèves
A	Dessin	13
B	Dessin et texte	2
C	Dessin et chiffres	9
D	Dessin, texte et tableau de codage numérique	2
E	Dessin et tableau de codage numérique	7
F	Tableau de codage numérique	3
G	Dessin libre	5
		41

Discussion

L'analyse des productions présentées ci-dessus suscite les remarques suivantes:

- Dans le groupe 1, il est frappant de voir que plusieurs élèves tentent de se représenter l'activité de groupement par un simple code numérique ou par une écriture équationnelle. On aurait en effet pu s'attendre à ce que le principe même de codage numérique non introduit en classe soit peu utilisé par les élèves au bénéfice des autres modes de représentations (langage naturel et dessin)

- Il apparaît à plusieurs reprises que l'intention de l'élève est de désigner le nombre d'éléments dans un groupement plus que de coder le nombre de groupements en tant que tel. C'est ce qui apparaît dans l'exemple donné (groupe 2, catégorie E). Un groupement de cinq et trois isolés sont codés: 5 3 .

- La nécessité de représenter figurativement les éléments en jeu est quasi générale. Les quelques élèves qui symbolisent les éléments par de simples croix (X) ou ronds (O) appartiennent au groupe 2. C'est certainement un travail mené en classe sur des objets ainsi signifiés qui les conduit à adopter d'eux-mêmes ce mode de faire graphiquement économique. Le passage de l'objet matériel ou figuré à sa schématisation qui le transforme en objet quelconque n'est certainement pas immédiat pour chaque enfant. C'est par exemple ce que laisse supposer l'enfant qui ressent le besoin de compléter son schéma par l'indication des objets considérés.

- Bien que les élèves du groupe 2 aient abordé d'une façon ou d'une autre en classe le principe de codage dans un tableau, ce n'est malgré tout qu'une partie d'entre eux qui recourt au tableau conventionnel (12 sur 41). Neuf élèves, quant à eux, complètent leur dessin par des indications chiffrées; ces indications ne sont pas encore constituées véritablement en code numérique explicite par lui-même.

En résumé, malgré le flou de la consigne, la moitié des élèves saisissent d'emblée que l'activité de groupement a pour visée un codage numérique ou, en tout cas, que cela correspond à l'attente implicite de l'enseignant. Mais cette représentation de la tâche n'est pas formée chez chaque élève. Un tiers d'entre eux réalise un dessin des objets et de leurs groupements, sans laisser de trace numérique. Quelques élèves ne semblent apparemment pas identifier la tâche comme étant de nature mathématique; ils ne saisissent pas vraiment ce qui est attendu d'eux. Leurs productions graphiques relèvent de la catégorie que nous avons appelée «dessin libre». On constate donc, par le biais d'une consigne peu explicite, que les élèves de première année appréhendent la même tâche de manières très diverses; les uns font preuve d'une représentation bien établie de ce qui est attendu d'eux au point que l'on peut parler de connivence avec l'enseignant, les autres en restent au dessin des objets et de leur regroupement, ou même ne saisissent pas du tout ce dont ils devraient prendre note, leur base d'orientation étant par trop incomplète.

2. Grouper puis coder numériquement une collection donnée

Toujours dans le domaine du codage numérique, nous examinerons ici les performances d'une large population d'élèves dans des tâches plus spécifiées du point de vue de la modalité de réponse. Les tâches de numération retenues ici sont extraites des épreuves de connaissances passées en 1ère, 2e, 3e et 4e années primaires. Il s'agit en principe de questions écrites, mais pour s'assurer de la bonne compréhension des consignes, celles-ci ont été lues par les enseignants aux élèves de 1ère année surtout, mais également, pour certaines questions, aux élèves de 2e année primaire.

Observations

Nous examinerons et discuterons plus particulièrement les réactions des élèves à cinq questions, en commençant par les performances des élèves de 1ère année (Tableau 1).

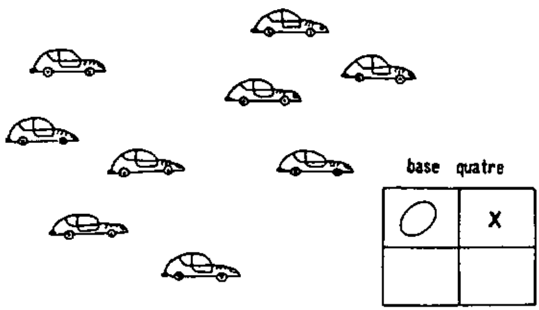
Presque tous les élèves maîtrisent cette tâche à la fin de leur première année primaire. En entourant les voitures dessinées, ils schématisent leur groupement par quatre et codent correctement le résultat obtenu.

Lorsque la tâche varie quelque peu quant à la base de numération proposée ou quant au nombre d'éléments en jeu, les performances ne sont guère différentes; plus de 90% des élèves répondent correctement.

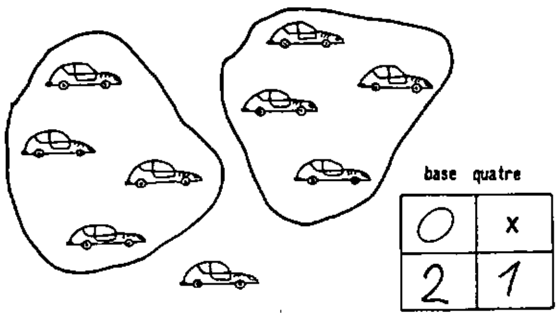
Tableau 1

1P Epreuve collective Consignes lues par à l'enseignant	Réponses: - Groupements corrects 98% - Codage correct 96% N = 1212

«Sur la feuille, vous voyez des voitures. Vous allez grouper les voitures par quatre» (on laisse aux enfants le temps de le faire)
«Maintenant, vous allez écrire le code dans le tableau.
Vous allez écrire dans les colonnes du tableau ce que vous avez fait. Allez-y.» (On laisse passer une minute)
«Partout où il y a quelque chose qui manque, vous l'écrivez.»

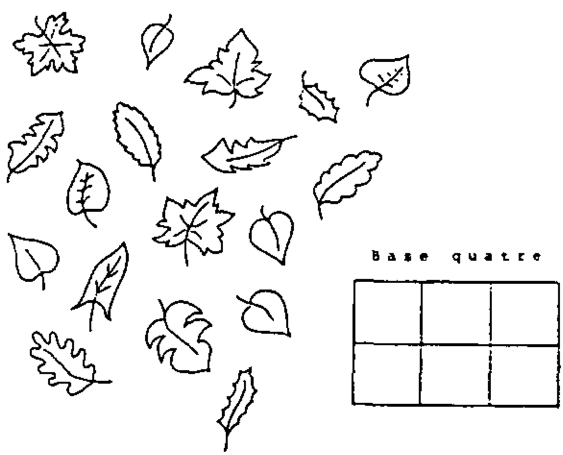


Exemple: réponse correcte



En 2e année, lorsqu'interviennent des groupements de deuxième espèce, le taux de réussite est presque aussi élevé (Tableau 2).

Tableau 2

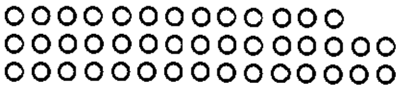
<table>
<tr><td>2P Epreuve collective</td><td>Réponses:
- groupements corrects: 91%
- codages corrects: 90%
N = 1762</td></tr>
<tr><td colspan="2">«Groupez les feuilles et codez en base quatre»

</td></tr>
</table>

En troisième année (Tableau 3), les erreurs augmentent quelque peu en raison du plus grand nombre d'éléments à regrouper et de leur disposition (tous les élèves n'ont pas pris en compte les colonnes de trois éléments qui simplifiaient la tâche de regroupement).

Tableau 3

3P Epreuve collective	Réponses: - groupements corrects: 89% - codage correct: 81% N = 1799

Groupe et code.



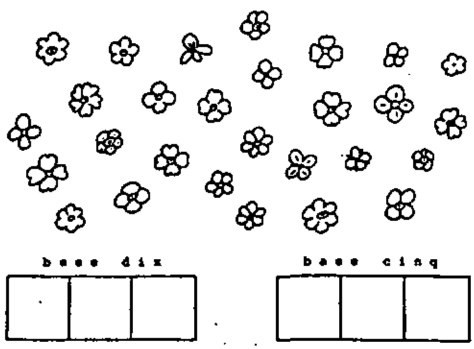
base trois

g.3	g.2	g.1	u

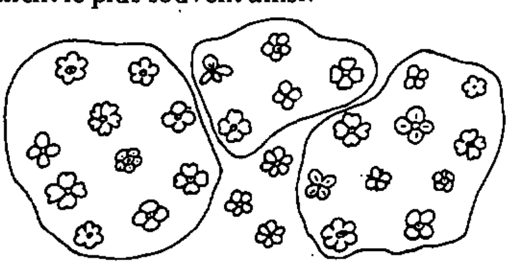
Les performances des élèves aux trois questions permettent d'affirmer que, dans son principe, l'activité de groupement et de codage est maîtrisée dès la première année par la quasi-totalité des élèves. Les difficultés que peuvent rencontrer certains élèves, en particulier à la dernière question, relèvent plus d'un problème de planification judicieuse de l'activité que d'une application erronée du principe de groupement.

Deux autres questions, l'une posée en fin de 2e année (Tableau 4), l'autre en 4e année (Tableau 5), méritent une attention particulière:

Tableau 4

<table>
<tr><td>2P Epreuve collective
Consigne lue par
l'enseignant</td><td>Réponses correctes:
- en base dix: 61%
- en base cinq: 56%
N = 1739</td></tr>
<tr><td colspan="2">«Comptez ces fleurs en base dix et écrivez votre réponse dans le premier tableau.»
«Comptez aussi ces fleurs en base cinq et écrivez votre réponse dans le second tableau.»

</td></tr>
</table>

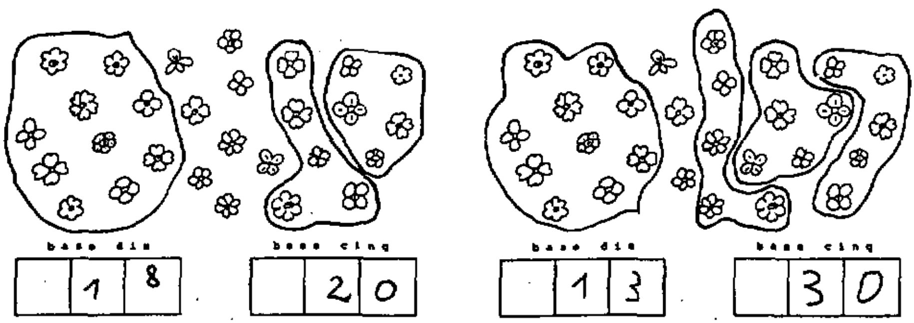
L'analyse des erreurs réalisées sur un échantillon de quelque deux cents réponses révèle que les diverses réponses proviennent d'une même démarche: au lieu de procéder successivement à un groupement des fleurs en base dix puis en base cinq, plus d'un tiers des élèves combinent les deux types de groupement le plus souvent ainsi:



Les codages numériques auxquels donne lieu ce mode de groupement sont divers; on relève à plusieurs reprises les réponses 23 en base dix et 13 en base cinq. L'élève ne prend en compte que les groupements effectués dans la base considérée, les unités dénombrées sont à chaque fois les mêmes.

Mais on trouve également d'autres réponses telles que 20 en base dix, ou 33 en base cinq. Dans le premier cas, seuls les groupes de dix sont pris en compte; dans le deuxième cas, l'élève dénombre les groupes constitués, qu'ils soient de cinq ou de dix éléments.

D'autres élèves résolvent différemment la simultanéité des deux questions. La collection de fleurs est subdivisée en deux sous-collections; l'une est alors codée en base dix, l'autre en base cinq. Le partage de la collection est variable comme le montrent les exemples ci-dessous:



Comment interpréter ces conduites? Manifestement, les deux étapes distinctes de la tâche n'ont pas été perçues par un grand nombre d'élèves. Le «comptez aussi ces fleurs en base cinq» de la consigne n'a pas été entendu comme une deuxième tâche; la consigne est alors aménagée pour rendre possible la simultanéité des deux groupements.

Cette conduite est révélatrice d'une assimilation de cette question aux tâches plus familières où chaque collection donne lieu à un codage numérique. Ici encore, la procédure de ces élèves révèle un modèle formé, mais non adéquat à *la tâche particulière proposée*. Lorsque l'élève introduit un groupe de cinq fleurs quand le groupement par dix n'est plus possible, c'est la notion même de base qui paraît fragilement établie. Les élèves maîtrisent certes la pratique du groupement, ils ont eu l'occasion en classe de grouper par 2, par 3, 4, etc., mais l'invariance de la base dans une tâche donnée n'a jamais été expérimentée comme une nécessité du dénombrement, sinon celle de suivre la consigne donnée. La manière dont la double tâche examinée ici est comprise par un grand nombre d'élèves est, à cet égard, très révélatrice. Pour ces élèves, s'il est possible de grouper par cinq et par dix, pourquoi ne pas combiner les deux regroupements? Les conséquences d'une base fluctuante ne sont pas perçues.

La deuxième tâche qui mérite attention a été proposée aux élèves à la fin de la 4e année primaire (Tableau 5).

Tableau 5

4P Epreuve collective	Réponses correctes: a) [1101]: 44% b) [31]: 59% N = 947
On prend une collection de treize objets. a) Quel est son code en base deux? b) Quel est son code en base quatre?	

La disposition de la question ne laissait pas d'espace destiné explicitement à la réalisation d'un schéma. On constate alors qu'en l'absence de support figuratif donné, la tâche fait problème à la moitié des élèves. Les réponses de ces derniers sont d'une grande diversité; quelques-unes reviennent cependant à plusieurs reprises. La réponse 111 en particulier est donnée par 12% (1) des élèves. Les réponses 1111 (9%), 1011 (6%), 101 (3%) et 121 (3%) ont également été relevées un certain nombre de fois. Ce résultat surprend lorsque l'on sait qu'une tâche comme la question b est bien maîtrisée par les élèves de 1ère année primaire, si les treize éléments en jeu sont représentés sur une feuille.

Discussion

En résumé, lorsque les élèves se trouvent devant une collection d'objets représentés graphiquement, objets qu'il s'agit de grouper selon une base donnée et de coder, la tâche est maîtrisée sans difficulté, et ceci dès la première année primaire. Leur degré de maîtrise dépend cependant de plusieurs variables relatives à diverses hiérarchies de complexité (Vergnaud, 1981). Il est notamment lié à la manière dont la tâche est présentée, présentation qui facilite plus ou moins le cadrage et le jalonnage des actions qu'elle requiert. Encore plus que le facteur familiarisation, c'est la présence de points de repères donnés à l'élève pour effectuer la tâche qui influence le plus les performances. Dans la terminologie de Galpérine, c'est le degré d'élaboration de la base d'orientation fournie à l'élève qui est déterminant.

En première année, la tâche proposée est particulièrement explicite; tout ce que doit faire l'élève est indiqué pas à pas. L'élève est ainsi parfaitement orienté dans les actions qu'il doit effectuer. Bien que de même nature, les consignes données aux élèves de deuxième et de troisième années laissent un peu plus de place au non-dit.

Tout d'abord, la consigne «groupez» doit être comprise aussi bien pour ce qui concerne les groupements de première espèce que ceux de deuxième espèce. En plus, les repères concernant la position des chiffres dans le code peuvent être absents (tâche de 2e, Tableau 2), ou symbolisés de manière non figurative (tâche de 3e, Tableau 3). Dans cette dernière question, un autre implicite réside dans le mode de regroupement des éléments. L'arrangement de ceux-ci par colonnes de trois était prévu pour faciliter le groupement par trois, mais tous les élèves ne l'ont pas vu; certains se sont trouvés, par conséquent, dans une situation incommode de groupement, source d'erreurs possibles. Malgré ces implicites, neuf élèves sur dix se révèlent experts en la matière. La faible diminution des taux de réponses correctes d'une tâche à l'autre semble toutefois bien liée à la nature des indications fournies, indications de moins en moins complètes pour des tâches de plus en plus complexes quant à la planification des actions qui entrent en jeu.

La question de codage numérique posée aux élèves de 4e année (Tableau 5) mérite une attention particulière. Du point de vue formel, cette tâche est strictement la même que les précédentes. Ce qui la distingue cependant des autres tâches, c'est l'absence de points de repères quant à la manière d'effectuer matériellement la tâche. Les éléments de la collection ne sont pas figurés, la consigne ne suggère d'ailleurs pas de les représenter. De nombreux élèves se trouvent désemparés devant une tâche qu'ils ne savent de ce fait par quel bout empoigner. Pour quelles raisons le taux de réponses correctes n'est-il pas plus élevé en 4e année? Comment interpréter ce fait? La question posée en 4e année est-elle réellement plus complexe que celles posées en 2e et 3e année? La notion de complexité logique, comme l'ont montré Vergnaud et Ricco (1977), Vergnaud (1981), fait appel à diverses hiérarchies selon que l'on prend en compte la hiérarchie des objets de savoir (classes, relations, transformations, etc.), celle de leurs propriétés ou encore celle des différentes classes de problèmes. La hiérarchie en jeu dans les trois tâches examinées ici relève du dernier type.

Ce qui distingue en effet ces tâches, c'est essentiellement le système de signifiants, c'est-à-dire le plan de représentation symbolique sur lequel l'élève est invité à opérer. Selon que celui-ci travaille sur une représentation figurative des objets à dénombrer (en 2e), sur des codes ou des écritures équationnelles (en 4e), la tâche ne met plus en jeu les mêmes procédures, le problème n'est plus le même. On constate en effet que les activités de codage effectuées dès la première année avec un support concret (matériel ou figuré) ne conduisent pas automatiquement à l'intériorisation des actions en jeu. Privé d'un support familier, l'élève peut très bien, en tout cas dans un premier temps, se trouver désemparé sans méthode de travail alternative. Dans la question b (Tableau 5), former mentalement trois groupes de quatre objets à partir d'une collection de treize éléments ne requiert pas la même procédure que le groupement physique des objets. Les difficultés des élèves peuvent ainsi relever d'une transposition non immédiate d'un plan d'activité à un autre. Une tâche qui n'introduit aucun schéma laisse l'élève de 4e année devant une incertitude plus grande quant au mode de résolution à adopter, faute d'un modèle de la tâche bien établi.

Quelques indications complémentaires, induisant notamment une mise en correspondance des plans de représentations auxquels la tâche peut être appréhendée (Vergnaud, 1974), auraient probablement modifié les réactions des élèves. La tâche ne se révèle pas hors de portée des élèves de 4e année (des élèves plus jeunes la maîtrisent, comme nous avons eu l'occasion de l'observer). Ce qui fait défaut, ce sont les points de repères qui permettent à l'ensemble des élèves d'identifier la nature exacte de la tâche et, par conséquent, les procédures de résolution qu'elle requiert.

Une deuxième interprétation, en partie complémentaire, s'appuie sur le fait que les activités de groupement et de codage numériques n'occupent plus en 4e année la place qu'elles occupent dans les degrés précédents. De ce fait, les élèves «pris à froid» mobiliseraient difficilement des conduites qui n'auraient *pas été* activées dans un passé *récent*. Cette interprétation soulève indirectement la question de l'apprentissage scolaire à long terme sur laquelle la psychologie pédagogique est particulièrement démunie. Le caractère ponctuel d'une épreuve de connaissance ne permet pas de mesurer l'importance des interventions didactiques que requérrait une «récupération» des savoirs et savoir-faire non disponibles dans l'immédiat.

CHAPITRE V

TÂCHES DE DÉCODAGE NUMÉRIQUE

Par l'expression «décodage numérique» nous désignons deux types d'activités qui consistent soit à analyser un code numérique donné pour reconstituer la collection signifiée, soit à identifier la base de numération lorsque le code et la collection sont donnés. Les performances des élèves dans ces deux types de tâches seront successivement présentées et discutées.

1) Reconstituer une collection désignée par un code numérique

Une première tâche de décodage consiste pour l'élève à retrouver le cardinal d'une collection désigné par un code numérique dans une base donnée. Ce seront, encore ici, essentiellement les performances des élèves aux épreuves collectives et individuelles qui seront examinées. Des tâches de décodage ont été proposées aux élèves de la 1ère à la 4e année primaire.

Observations

Nous commencerons par présenter et discuter les réactions d'élèves de 1ère année observées dans le cadre d'entretiens individuels (Tableau 6).

Les trois-quarts des élèves forment deux groupes de quatre jetons auxquels ils adjoignent deux jetons-unités. Dans les réactions des autres élèves, deux conduites fréquentes sont à relever. Certains élèves se mettent à former des groupes de quatre jetons, jusqu'à épuisement du stock. La quinzaine de jetons à disposition est ainsi entièrement dénombrée, la fin de la consigne: «comme le demande le tableau» est en tout cas momentanément oubliée. Dans l'esprit de ces élèves, la tâche est manifestement assimilée à celle, plus familière, qui consiste à grouper effectivement tous les éléments d'une collection donnée pour en déterminer le code numérique. Il s'agit-là d'une conduite d'«applicateur» aux sens où ces élèves mettent en oeuvre une procédure relevant d'un modèle certes formé, mais non adéquat à la tâche précisément en jeu. Notons que quelques élèves remarquent d'eux-mêmes leurs erreurs et reprennent la tâche. Une autre réaction révélatrice est celle des élèves qui forment deux collections de cardinal quelconque auxquelles ils ajoutent deux éléments isolés. Ici, l'idée de groupement prédomine indépendamment de toute base fixe de numération.

Tableau 6

1P Extrait d'un entretien individuel	Réussite: 76% N = 179

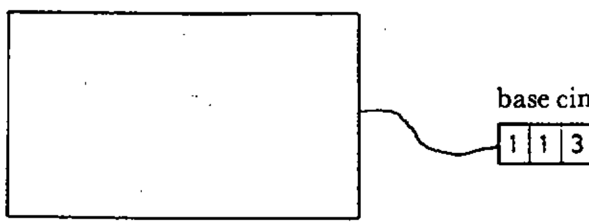
L'élève a, à sa disposition, des jetons (ou tout autre matériel homogène).
«Observe bien ce tableau. Voici des jetons. Prends le nombre de jetons qu'il faut et groupe-les comme le demande le tableau.»

base quatre

◯	x
2	2

En 2e année, la question a été reprise avec un code de trois chiffres (Tableau 7)

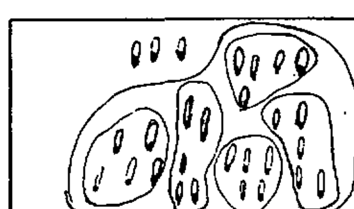
Tableau 7

<table>
<tr><td>2P Epreuve collective
Consigne lue par
le maître</td><td>Dessin correct: 79%
Dénombrement correct: 73%
N = 1799</td></tr>
<tr><td colspan="2">«Philippe a compté en base cinq les allumettes qui restent dans une boîte. Il a trouvé «un-un-trois». Dessinez les allumettes. Quand vous aurez dessiné les allumettes, comptez-les. Ecrivez combien vous avez dessiné d'allumettes.»


J'ai dessiné .... allumettes.</td></tr>
</table>

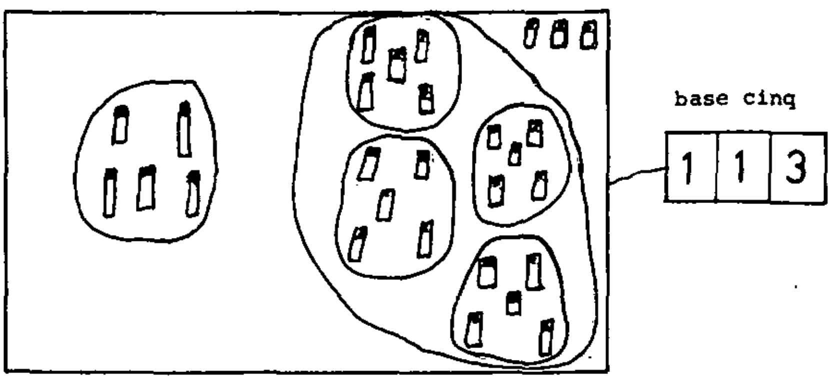
Trois élèves sur quatre maîtrisent cette tâche et trouvent la réponse correcte. Les erreurs de décodage sont le plus souvent liées à l'omission d'un ou de plusieurs groupes de cinq éléments. Deux schémas conduisent au dénombrement de 28 allumettes.

Le premier schéma se présente ainsi:



Il est obtenu par le dessin des trois allumettes isolées, le dessin d'un groupe de cinq puis d'autres groupes de cinq jusqu'à ce qu'il soit possible de former un groupe de deuxième espèce correspondant au premier 1 du code 113. L'enfant ne perçoit pas, dans sa démarche, qu'en procédant ainsi le groupe de première espèce, un instant identifié, a disparu du schéma. C'est probablement pour éviter au dernier instant cette disparition que d'autres élèves réalisent le schéma suivant:

Dessine des allumettes.



J'ai dessiné ..28.... allumettes, en base dix.

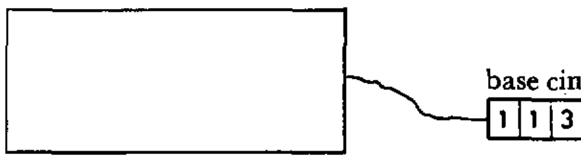
Ce qui échappe alors à l'attention de l'élève, c'est qu'en procédant ainsi le groupe de deuxième espèce ne comprend que quatre groupes de première espèce.

Une question presque similaire a été posée à d'autres élèves de 2e année mais cette fois-ci avec l'indication explicite de la base de numération dans laquelle le dénombrement est à effectuer (Tableau 8).

Tableau 8

2P Epreuve collective Consigne lue par l'enseignant	Dessin correct: 75% Dénombrement correct: 54% N = 1812

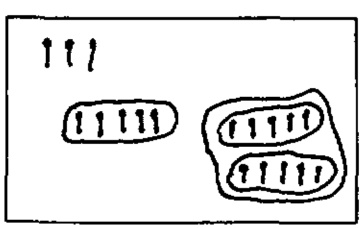
«Philippe a compté en base cinq les allumettes qui restent dans une boîte. Il a trouvé «un-un-trois».
Dessinez les allumettes.
Quand vous aurez dessiné les allumettes, comptez-les en base dix. Ecrivez combien vous avez dessiné d'allumettes.»



J'ai dessiné ... allumettes en base dix.

L'enseignant demande de «compter les allumettes en base dix». Sur sa feuille, l'élève peut également lire: «J'ai dessiné ... allumettes, **en base dix**». Il est intéressant de constater que la simple mention de la base dix perturbe les élèves au point que ce n'est plus 73% d'entre eux qui donnent la réponse correcte (33), mais 54% des élèves, bien que les pourcentages de dessins corrects soient sensiblement les mêmes (79% et 75%). En quoi consiste plus particulièrement cette perturbation? Trois types d'erreurs semblent être plus particulièrement déclenchés par la mention de la base dix.

C'est tout d'abord la réponse «18» qui correspond au schéma:



L'expression «compter en base dix» a manifestement induit le regroupement des deux groupes de cinq pour former un groupe de deuxième espèce. Cette erreur est en effet très peu fréquente lorsqu'il n'est pas question de base dix dans la consigne. C'est encore ici un modèle lacunaire de la tâche qui est en jeu. Compter ou dessiner des allumettes sans autre indication fait appel à la pratique usuelle du dénombrement (comptage), pratique qui s'appuie aussi bien sur une connaissance des nombres parlés qu'écrits. La mention explicite d'une base de numération induit l'élève sur une autre piste, celle jalonnée d'activités de groupements, de codages et de décodages. Dans cet univers numérique divisé en activités de comptage d'une part, et en activités de codage d'autre part, la précision «compte en base dix» crée chez certains élèves plus de confusion qu'elle n'explicite la tâche; ils ne savent plus s'ils doivent fonctionner dans le registre «bases» ou dans le registre usuel. L'élève fonctionne avec plusieurs représentations des tâches de numération, représentations qui ne sont pas encore articulées entre elles.

Une deuxième erreur caractéristique consiste à dessiner correctement les 33 allumettes de la collection tout en répondant «j'ai dessiné 113 allumettes en base dix». La simple reprise du code donné initialement est également induite par l'indication «en base dix». De cette indication, l'élève ne semble comprendre qu'une partie soit: la demande d'écrire un code «en base», d'où la reprise du code 113.

La troisième erreur, attribuable à cette consigne trop explicite, se situe également au niveau de la réponse numérique, et non au niveau du dessin qui, lui, est correct. La réponse donnée est 30. L'élève ne prend en compte que les allumettes groupées. L'indication de la base dix peut avoir conduit ces élèves à se centrer sur le concept de dizaine. Compter en base revient alors à dénombrer ce qui a pu être regroupé; le reste (les unités) est un résidu négligeable. Une telle réaction a déjà été mise en évidence dans les premières tentatives de codage en 1ère année (cf p.99). L'analyse des erreurs et des procédures que les élèves mettent en oeuvre révèle à quel point, en 2e année, la compréhension d'une tâche de décodage est mal assurée, sujette à fluctuer selon l'interprétation qui est faite de certaines indications.

Les entretiens individuels confirment la difficulté que les élèves de 2e année ont à comprendre le sens de l'expression «coder en base dix», expression qui pourtant désigne leur pratique usuelle d'écriture des nombres. Un extrait de l'entretien qui portait sur la numération est relaté en détail ici (Tableau 9).

Tableau 9

2P Extrait d'un entretien individuel	Réponses correctes immédiates: 51% N = 67

Une collection de 28 objets (des jetons par exemple) est présentée à l'enfant. L'enseignant demande en premier lieu de grouper par cinq, puis d'écrire combien il y a de groupements et d'isolés. C'est ensuite un groupement par dix des mêmes objets qui est proposé; l'enfant en écrit également le code.
L'enseignant refait un seul tas avec les 28 objets, attire l'attention de l'enfant sur les deux codes obtenus 1 0 3 et 2 8, puis demande en désignant les jetons:

«Combien y a-t-il de jetons ici?»

Les réponses de soixante-sept élèves ont été recueillies. La réponse correcte «vingt-huit» n'est donnée immédiatement que par la moitié d'entre eux (51%). Vingt-six autres élèves (soit 39%) trouvent également «vingt-huit», mais ceci à la suite d'un dénombrement des jetons sans s'occuper des codes numériques obtenus précédemment (1 0 3 en base cinq, et 2 8 en base dix). Dans ce comptage, deux élèves commettent d'ailleurs une erreur: l'un arrive à vingt-sept, l'autre compte sur ses doigts et trouve quatorze jetons. Sept élèves (10%) effectuent un calcul du type:

$$10 + 10 + 8 = 28$$

$$\text{ou} \quad 2 \times 10 = 20, 20 + 8 = 28$$

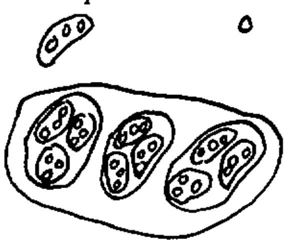
Manifestement, pour la moitié des élèves, avoir groupé et codé en base dix n'a guère de lien avec la question posée «Combien y a-t-il de jetons». La signification que l'enfant donne au codage en base dix reste à élucider. Nous reviendrons ultérieurement et avec des données complémentaires sur cette question.

En 3[e] année, c'est un code à quatre chiffres qui a été donné pour décodage dans le cadre d'une épreuve collective (Tableau 10).

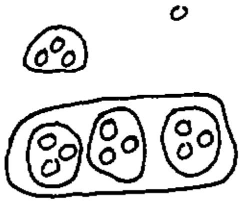
Tableau 10

3P Epreuve collective	Dessin correct: 60% Pas de dessin: 17% Dénombrement correct: 60% N = 1691
Paul a compté ses billes en base trois base trois 1 0 1 1 Combien a-t-il de billes? Il a .... billes. (Tu peux faire un dessin)	

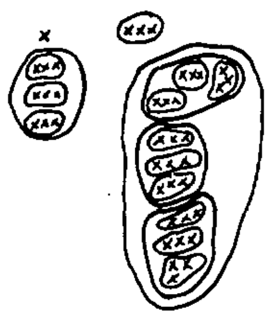
Quatre élèves sur cinq réalisent sur leur feuille un schéma auquel ils recourent pour dénombrer la collection de billes. Les trois-quarts d'entre eux réalisent un schéma correspondant à la donnée, tel par exemple:



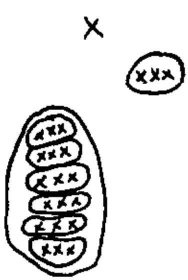
L'erreur la plus fréquente consiste à ignorer le chiffre 0 du code comme s'il était possible d'en faire abstraction. Le schéma qui est alors trouvé est du type suivant:

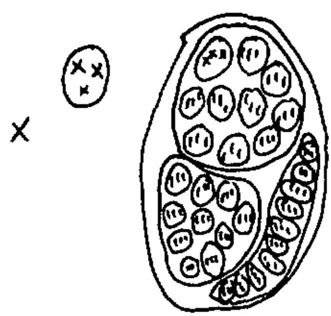


Une autre erreur, encore liée à la présence du chiffre 0, consiste à substituer le 0 par un 1, manière la plus sûre pour l'élève de ne pas omettre un niveau de regroupement. C'est ainsi que l'on trouve quelquefois des schémas correspondants au code 1111:



Chez quelques élèves, le principe du regroupement ne semble pas associé à l'idée d'une base de numération invariante, comme le montrent les deux exemples suivants:





Notons encore que, dans le contexte de cette tâche, le dénombrement n'est pas toujours compris comme devant être effectué en base dix. Tout en ayant réalisé un schéma correct des groupements, certains élèves, à la question «Combien y a-t-il de billes?», répondent: «Il y a 1011 billes».

Dans une autre question posée aux élèves de 3e année, la formulation retenue est «trouve le code de cette collection en base dix» (Tableau 11). L'ambiguïté des expressions «combien y a-t-il» ou «compte en base dix» est ainsi évitée. Comment réagissent les élèves dans ce cas?

Tableau 11

3P Epreuve collective	Dessin correct: 44% Pas de dessin: 40% Codage correct(14): 61% N = 1792

On a compté une collection de billes en base quatre. Trouve le code de cette collection en base dix.
(Tu peux dessiner les billes).

base quatre

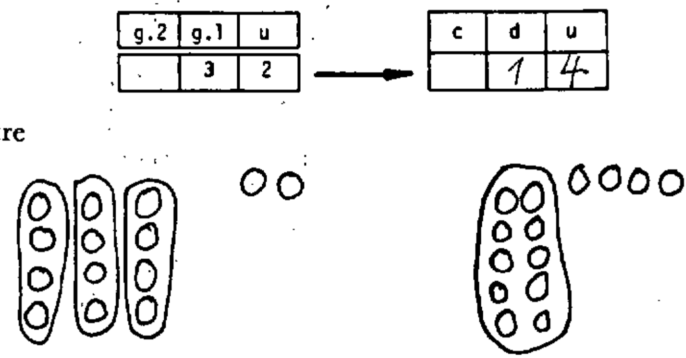
g.2	g.1	u
	3	2

→

c	d	u

Les dessins qui accompagnent la réponse correcte 14 sont le plus souvent du type:

L'enfant représente les trois groupes et les deux unités signifiées par le code 32 en base quatre. A partir de là, il fait abstraction du groupement effectué et dénombre les billes dessinées, soit quatorze. Certains élèves ne passent pas directement du comptage des billes au codage en base dix. Ils procèdent explicitement au regroupement par dix, en redessinant pour ce faire la collection de billes. On trouve alors sur leur feuille deux schémas de ce type:



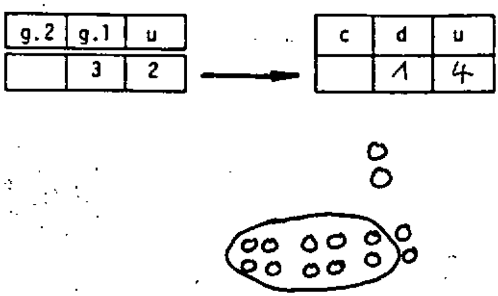
base dix

base quatre

Les deux modes de groupements peuvent être combinés; le groupement par quatre n'est signifié que par la disposition spatiale des éléments:

base dix

base quatre



Un élève sur dix donne comme réponse 32. C'est l'erreur la plus systématique. L'examen des schémas réalisés par ces élèves est instructif. Le schéma le plus fréquent représente des groupes de dix billes.

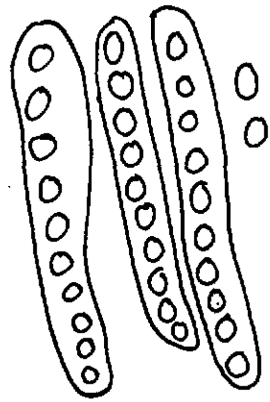
base dix

base quatre

g.2	g.1	u
	3	2

→

c	d	u
	3	2



Le groupement par dizaines est quelquefois mis en parallèle avec le schéma du groupement par quatre:

base dix

base quatre

g.2	g.1	u
	3	2

→

c	d	u
	3	2

Coder en base dix a manifestement été compris par ces élèves comme s'il s'agissait de donner un contenu décimal au code 32. Ils ont saisi que la tâche nécessitait une transformation, mais l'invariance du code numérique a été substituée à l'invariance du nombre d'éléments que postule en fait la tâche.

Au centre du modèle mis en jeu ici, on trouve le principe selon lequel un même code désigne en diverses bases des collections différentes. Cette comparaison de codes identiques fait précisément en classe l'objet de multiples activités. Ces élèves mobilisent ainsi un savoir établi antérieurement, mais qui ne s'applique en fait pas à la situation présente.

La tâche de décodage proposée aux élèves de 4[e] année ne suggérait pas le recours à un schéma (Tableau 12).

Tableau 12

4P Epreuve collective	Réponses correctes: a) (17): 55% b) (16): 54% c) (15): 45% N = 947

Des collections ont été codées dans différentes bases.
On te demande maintenant de coder ces collections en base dix.

a) base quatre

| 1 | 0 | 1 | s'écrit ________ en base dix.

b) base trois

| 1 | 2 | 1 | s'écrit ________ en base dix.

c) base deux

| 1 | 1 | 1 | 1 | s'écrit ________ en base dix.

Les performances observées sont comparables à celles relevées précédemment dans la tâche de décodage proposée aux élèves de 3e année. A l'examen des erreurs que font les élèves, il apparaît que la tâche est diversement comprise. Les erreurs les plus fréquentes à chacune des trois questions sont les suivantes:

a)	b)	c)
101 (4%)	121 (4%)	1111 (4%)
1010 (4%)	1210 (4%)	11110 (3%)
9 (4%)	120 (3%)	4 (3%)
111 (3%)	13 (2%)	13 (3%)
100 (2%)	4 (2%)	2222 (3%)
		9999 (2%)
		11 (2%)
		8 (2%)

On retrouve des réponses de même nature que celles observées chez des élèves de 2e année, réponses qui ont été discutées plus haut à propos du tableau 7. C'est tout d'abord le simple report du code numérique qui revient le plus fréquemment. On observe ensuite une conduite qui n'est pas sans lien avec la confusion constatée en 2e et 3e années entre la base dix et le concept de dizaine. Les élèves, ici, ajoutent simplement un zéro au code initial, d'où les réponses 1010, 1210 et 11110. Les réponses 100 et 120 peuvent s'expliquer de manière analogue. Quelques élèves ont manifestement procédé à une simple addition des chiffres du code.

En 4e, le travail réalisé en classe sur les écritures numériques conduit à la notion de puissance. Les élèves abordent alors la décomposition d'un nombre suivant les puissances successives de la base de numération. La question présentée ci-après (Tableau 13) fait intervenir la mise en relation de la valeur positionnelle des chiffres et la notion de puissance.

Tableau 13

4P Epreuve collective	Ecritures correctes:
	a) 1x25 + 1x5 + 1 = 31 — 32%
	b) 1x4 + 2x1 = 6 — 39%
	c) 1x16 + 2x4 + 0 = 24 — 29%
	d) 1x8 + 1x4 + 1x2 + 1 = 15 — 26%
	N = 859

On veut écrire en base dix la collection codée $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ en base trois.
On calcule de la manière suivante:

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ en base trois devient: 1 x 9 + 2 x 3 + 1 = 16 en base dix.

Fais les mêmes calculs pour les nombres suivants:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient:

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient:

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient:

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient:

De toute évidence, la tâche proposée ici aux élèves n'est pas simple malgré l'aide que peut apporter l'exemple donné. Ce n'est guère que le tiers des élèves qui maîtrise ces écritures équationnelles. Les erreurs sont extrêmement diverses; il est souvent difficile de comprendre la logique que l'élève a mise en jeu dans sa réponse. Relevons quelques erreurs-types interprétables. Tout d'abord, l'exemple donné ne remplit pas toujours sa fonction d'exemple, l'élève lui en fait trop dire; les réponses sont alors systématiquement contaminées par les caractéristiques propres de l'exemple:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient: $1 \times 9 + 1 \times 9 + 1 = 19$

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient: $1 \times 9 + 2 = 11$

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient: $1 \times 9 + 2 + 0 = 11$

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient: $1 \times 9 + 1 \times 9 + 1 \times 9 + 1 \times 9 = 36$

La récurrence des groupements qui fonde la valeur positionnelle des chiffres n'est pas toujours exprimée dans les écritures des élèves. Les diverses espèces de groupements ne sont pas signifiées:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient: $1 \times 5 + 1 \times 5 + 1 = 11$

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient: $1 \times 4 + 2 = 6$

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient: $1 \times 4 + 2 \times 4 + 0 = 12$

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient: $1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 = 13$

Quelquefois les groupements de groupements relèvent plus d'une structure plus additive que multiplicative:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient: $1 \times 15 + 1 \times 10 + 1 \times 5 = 30$

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient: $1 \times 8 + 2 \times 4 = 16$

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient: $1 \times 12 + 2 \times 4 + 0 \times 4 = 20$

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient: $1 \times 8 + 1 \times 6 + 1 \times 4 + 1 \times 2 = 20$

Le modèle en jeu ici est déjà plus articulé que dans les exemples précédents, les différentes espèces de groupements sont signifiées, mais il reste lacunaire en ce sens qu'il ne traduit pas la logique multiplicative des groupements de groupements qui, pourtant, sur le plan des actions effectives, est susceptible d'être mise en oeuvre par l'élève, comme nous l'avons vu dans les tâches du type «groupe et code». Ce que désigne le concept de base n'est également pas nécessairement bien établi, même si les procédures de calcul adoptées par l'élève sont correctes. C'est ce que revèle en particulier l'exemple suivant:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient: 1×25+1×5+1 = 31 en base trente

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient: 1×4+2 = 6 en base six

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient: 1×16+2×4=24 en base vinte

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient: 1×8+1×4+1×2+1=15 en base dix

D'autres réponses paraissent plus énigmatiques:

a) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base cinq devient: 2×9+2×1+5×10+1×1+1 = 32

b) $\boxed{1}\boxed{2}$ en base quatre devient: 4×2+4×2+2×2+4 = 24

c) $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ en base quatre devient: 4×5−4×5+4×5+4 = 24

d) $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$ en base deux devient: 2×2+2×2 =8

Etant donné la nouveauté de cette tâche de décomposition, tâche qui n'est abordée qu'en 4e année, on comprend la difficulté de certains élèves à comprendre le sens même de la question. Leurs productions ne semblent correspondre qu'à une imitation d'écriture équationnelle. Le modèle de la tâche mis en jeu est encore balbutiant. La distance entre leurs connaissances des nombres et celles que requiert la tâche est trop grande pour que ces élèves puissent esquisser un début de solution. La diversité des réponses observées révèle le caractère peu formé de la représentation que les élèves se font de la décomposition d'un nombre selon les puissances successives de la base de numération. L'aspect lacunaire des modèles avec lesquels les élèves fonctionnent dans cette tâche est souvent transparent. Ce qui est généralement maîtrisé sur le plan des actions (les groupements successifs des éléments) n'est pas sans autre transposé sur le plan des écritures équationnelles correspondantes. Ces écritures ne peuvent acquérir une signification que par un processus d'abstractions réfléchies au sens où «l'abstraction réfléchissante peut devenir consciente, notamment quand le sujet compare deux démarches qu'il a effectuées et cherche ce qu'elles ont de commun... Nous parlerons, en ce deuxième cas, «d'abstractions réfléchies», ce participe passé indiquant le résultat du processus «réfléchissant».» (Piaget 1974, p.274)

Discussion

Comment résumer les observations faites à propos des tâches dites de décodage numérique? L'examen des performances des élèves, lorsqu'il leur est demandé de retrouver la collection désignée, montre qu'il n'est pas toujours évident pour les élèves de comprendre ce que l'on attend d'eux. Quand la question est parfaitement balisée, la tâche bien circonscrite (groupements à reconstituer), comme c'est le cas dans les questions posées en 1ere et 2e année, trois élèves sur quatre répondent conformément à l'attente. Il n'en va plus de même lorsque, à la suite d'un décodage, il est encore demandé à l'élève d'indiquer le nombre d'éléments recensés en base dix. C'est alors que l'expression «compte (ou code) en base dix» semble avoir un effet parasite. Au lieu d'expliciter la tâche, elle suscite les réponses les plus diverses chez la moitié des élèves. Quant à la décomposition des nombres écrits selon les puissances successives de la base, activité introduite en 4e année, elle n'est guère maîtrisée par la majorité des élèves. De nombreux élèves écrivent des expressions numériques manifestement sans lien avec le módèle concret qui leur est fourni par les activités de groupements introduites dès la première année. De toute évidence, le travail sur les écritures requiert une reconstruction sur le plan représentatif de ce qui est maîtrisé sur le plan concret, reconstruction qui requiert probablement une plus grande attention didactique que celle qui a pu être portée en classe, en 4e année.

2) Identifier la base dans laquelle une collection a été dénombrée

Il s'agit ici d'une tâche de décodage d'un type particulier. La collection et le code numérique qui en expriment le cardinal sont donnés. L'élève doit retrouver la base dans laquelle le codage a été effectué. Cette tâche peu familière a été proposée aux élèves de 1ere, 3e et 4e année.

Observations

Ce sont les performances à trois questions analogues qui seront examinées ici (Tableau 14).

Tableau 14

1P Extrait d'un entretien individuel	Réponse correcte: 82% N = 193

«Regarde bien le dessin. Tu vois une ligne de souris. A côté, il y a un tableau. Le tableau montre comment on a groupé les souris. Regarde bien le tableau et montre-moi, avec ton doigt, comment on a groupé les souris ... Peux-tu me dire comment tu as groupé les souris, par combien?»

O	x
1	3

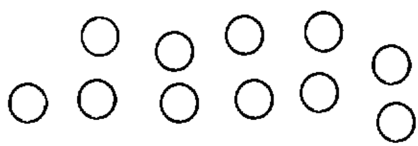
La grande majorité des élèves (82%) saisissent la question et donnent la réponse attendue. La principale erreur que font les autres élèves consiste à désigner un groupe de trois souris, le trois provenant manifestement du code 13 donné. D'autres réponses se révèlent difficilement interprétables, elles peuvent relever d'une incompréhension de la question.

En 3e année, la question posée aux élèves est quelque peu plus complexe (Tableau 15).

Tableau 15

3P Epreuve collective	Réponses correctes (quatre): 83% N = 1711

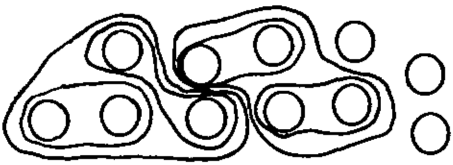
Blaise a compté des jetons. Il les a groupés et a trouvé le code $\boxed{2}\boxed{3}$



Dans quelle base a-t-il compté ces jetons ?

Base : ....

Les deux tiers des élèves laissent, sur leur feuille, la trace des groupements qu'ils ont recomposés d'après le code donné. La réponse correcte est obtenue en laissant trois jetons non groupés, puis en formant deux groupes avec les jetons restants; l'élève constate alors que c'est un groupement par quatre qui correspond au code 23. Parmi les autres réponses obtenues, les plus fréquentes sont «base deux». Le «2» du code 23 semble orienter certains élèves vers un groupement par deux qui peut alors être réalisé ainsi:



Une autre réponse fréquente est «base trois». C'est encore ici probablement une confusion entre les chiffres du code et la base qui est en jeu. On trouve également les réponses «base onze», «base dix», «base cinq», «base 0», etc.

Enfin, en 4e année, la question posée ne fait intervenir aucun schéma (Tableau 16).

Tableau 16

4P Epreuve collective	Réponses correctes (quatre): 77% N = 947
On a dessiné une collection de dix-neuf objets que l'on a codée | 1 | 0 | 3 | Dans quelle base a-t-on codé cette collection ? ______	

Les trois-quarts des élèves trouvent la réponse à cette question pourtant peu familière. Seuls, quelques-uns d'entre eux réalisent à même la feuille un schéma du groupement représenté par le code 103. Les erreurs sont diverses et difficilement interprétables. Les plus fréquentes sont «base trois» et «base dix». Notons que la réponse «base trois» ne correspond par nécessairement à une démarche inadéquate. Quelques élèves répondent en effet «base trois», tout en faisant «fonctionner» un dénombrement en base quatre, soit sous forme d'une suite de codes (Exemple 1), soit sous forme d'un groupement par quatre (Exemple 2).

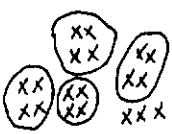
Exemple 1:

Dans quelle base a-t-on codé cette collection ? Base 3

1	21	100
2	22	101
3	23	102
10	30	103
11	31	
12	32	
13	33	
20		

Exemple 2:

Dans quelle base a-t-on codé cette collection ? en base trois



A part les réponses «base trois» et «base dix», on relève d'autres réponses moins fréquentes, telles «base deux», «base six», «base huit».

Discussion

D'une manière générale, la tâche qui consiste à identifier dans quelle base une collection a été codée est bien maîtrisée par plus des trois-quarts des élèves. Ce résultat peut surprendre étant donné le caractère peu familier de ces questions; en effet,les tâches proposées en classe aux élèves ne font généralement pas intervenir ce type de décodage. Identifier la base signifie clairement rechercher par combien les éléments ont été regroupés pour obtenir le code numérique donné. C'est d'ailleurs bien en ces termes que la consigne est donnée en première année. La tâche ainsi cadrée, l'usage des expressions coder ou compter dans la consigne n'est plus source d'ambiguïté. Le modèle de la tâche chez la grande majorité des élèves s'avère à la fois adéquat et complet.

CHAPITRE VI

TÂCHES DE SÉRIATIONS DE CODES NUMÉRIQUES

C'est la capacité des élèves a écrire une suite ou une série de nombres qui sera examinée ici. Quatre groupes de données seront successivement présentés et discutés; l'écriture des nombres en tant que système de règles est examinée chaque fois dans un contexte d'activité différent: une suite à *compléter*, un jeu de l'oie à *numéroter*, des *nombres* à sérier et finalement un nombre *mystérieux* à trouver.

1) Compléter une suite de nombres

Observations

En fin de première année primaire, on a demandé aux élèves d'écrire la suite des nombres de 8 à 16 et de 13 à 5 (Tableau 17). Cette tâche, maîtrisée par neuf élèves sur dix, révèle une pratique assurée de l'écriture des nombres inférieurs à vingt.

Tableau 17

1P Epreuve collective Consigne lue par l'enseignant	Suite correcte a) 92% b) 88% N = 1082

Dans la première partie de votre feuille, vous allez écrire les nombres de 8 à 16. On a déjà écrit le premier: 8, et le dernier: 16.
Dans la deuxième partie, vous allez écrire les nombres de 13 à 5. On a déjà écrit le premier: 13, et le dernier: 5.
Ecrivez dans cet ordre les nombres qui manquent:

a) $\boxed{8}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{16}$

b) $\boxed{13}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$

L'écriture de la suite des nombres en base autre que dix n'intervient qu'en 2e année (Tableau 18).

Tableau 18

2P Epreuve collective Consigne lue par l'enseignant	Réponses correctes: 36% N = 1757

On compte en base quatre et on écrit les nombres dans des petits tableaux. Ecrivez le nombre qui manque dans le dernier tableau, celui qui est encore vide.

$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}$, $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}$, $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{3}$, $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$, $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}$,

$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}$, $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{3}$, $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$, Un tiers des élèves, en fin de 2e année, trouve la réponse correcte, soit 0 2 0. Parmi les autres réponses, les plus fréquentes sont 0 1 4 et 1 0 0 qui apparaît également souvent. Les autres réponses sont extrêmement diverses et difficilement interprétables.

Dans une autre question, la case à compléter est insérée dans une suite de codes qui se poursuit ainsi:

$\boxed{0|0|1}$, $\boxed{0|0|2}$, $\boxed{0|0|3}$, $\boxed{0|1|0}$, $\boxed{0|1|1}$,

$\boxed{0|1|2}$, $\boxed{0|1|3}$, $\boxed{\ |\ |\ }$, $\boxed{0|2|1}$, $\boxed{0|2|2}$,

$\boxed{0|2|3}$, $\boxed{0|3|0}$, $\boxed{0|3|1}$, $\boxed{0|3|2}$, $\boxed{0|3|3}$,

$\boxed{\ |\ |\ }$

Le taux de réponses correctes est alors plus élevé. La moitié des élèves (52%) complètent alors la première case vide par le code 0 2 0. Les élèves peuvent alors, dans ce cas, chercher le prédécesseur de 0 2 1 qui est manifestement plus aisément trouvé que le successeur de 0 1 3. Quant au tout dernier code de la série, code qui suit 0 3 3, seul un quart des élèves (26%) trouve le code 1 0 0. Les erreurs les plus fréquentes sont 0 4 0 et 0 3 4.

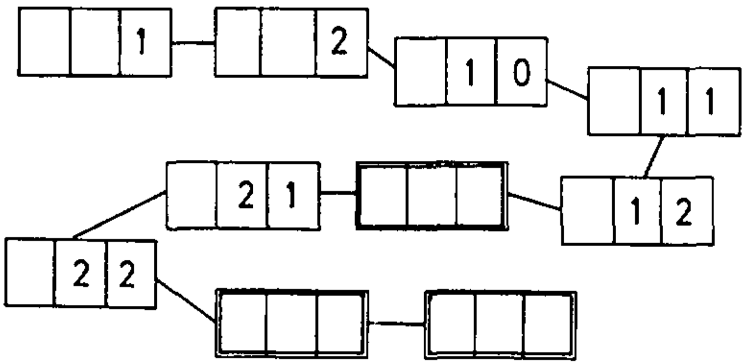
Qu'en est-il, en 3e année, de la capacité des élèves à écrire une suite de codes en base autre que dix (Tableau 19)?

Le taux de réponses correctes se révèle nettement plus élevé qu'en 2e année. Une grande partie des erreurs est liée à la manière dont les élèves comprennent la consigne. Contrairement à la question posée en 2e année, les zéros à gauche des chiffres n'ont pas été indiqués. Le début de la série se présente, par conséquent, ainsi: $\boxed{\ |\ |1}$, $\boxed{\ |\ |2}$, etc.

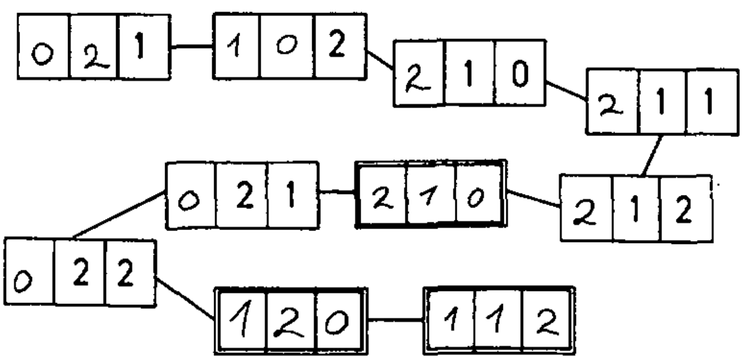
Tableau 19

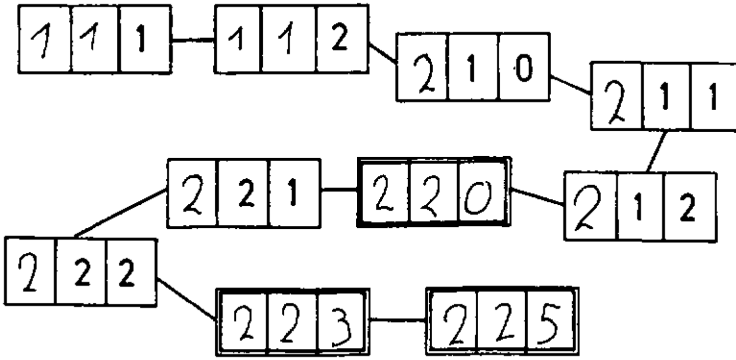
3P Epreuve écrite	- les trois codes corrects: 55% - le premier code correct: 78% N = 1686

On a commencé à compter en base trois, complète la suite des codes en ajoutant chaque fois un :

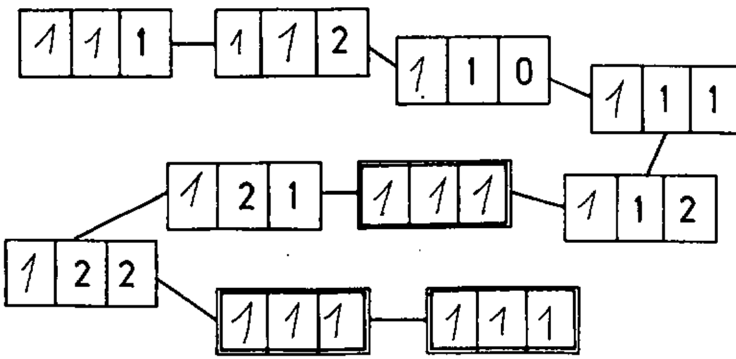


Certains élèves ont interprété ces cases blanches comme autant de cases à compléter, d'où la constitution de suites de codes à la logique souvent difficilement discernable. Donnons-en deux exemples:





Quelquefois, l'interprétation de la tâche par l'élève est plus perceptible, tel cet élève qui a bien lu dans la consigne «,..en ajoutant chaque fois un», ce qui donne:



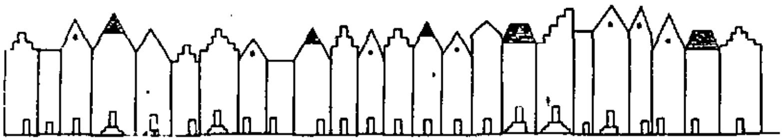
Cette interprétation originale d'une partie de la consigne révèle en fait un modèle de la tâche aussi peu formé qu'adéquat.

L'écriture d'une suite de nombres en base différente de dix a également fait l'objet d'observations dans le cadre d'entretiens individuels avec des élèves de 3e année. Dans le déroulement de l'entretien, seule la phase directement liée à l'objet qui nous occupe ici sera prise en compte (Tableau 20).

Tableau 20

3P Extrait d'un entretien individuel	Réponses correctes: 56% N = 132

L'entretien est conduit sur le thème de la numérotation d'une rangée de maisons:



Après avoir numéroté ces maisons en base dix et réfléchi à la signification des chiffres 1 et 2 selon leur position dans le code numérique, l'élève est amené à changer de base de numération: «On va maintenant compter et numéroter les maisons, mais cette fois en base quatre. Regarde bien (l'enseignant écrit les codes 1, 2, 3, 10, 11,...jusqu'à 32); essaie de continuer et de terminer cette numérotation en base quatre.»

Un peu plus de la moitié des élèves (56%) poursuit correctement la numérotation des maisons en base quatre. Les autres élèves font diverses erreurs, principalement dans le passage du code 33 au code 100.

On trouve les enchaînements de codes suivants:

...33, 110,...
33, 102,
33, 34, 35 (la suite est en base dix)
33, 40, 41, 42, 43, 50, 51

...103, 1000...
...103, 200...
...103, 120,...

...113, 114...
...113, 210...
...113, 220...

Une question posée aux élèves de 4e année se présentait un peu différemment (Tableau 21).

Tableau 21

4P Epreuve collective	Réponses correctes: - 1ère case (20): 53% - 2ème case (110): 39% N = 914
On compte de 2 en 2 en base trois. Complète les cases vides : 2 11 ☐ 22 101 ☐	

Cette question fait problème à plus de la moitié des élèves. Les erreurs les plus fréquentes consistent à donner les successeurs directs, soit 12 et 102; la consigne «on compte de 2 en 2» est simplement ignorée. Une autre erreur consiste à écrire 13 et 103. Ici, le comptage de 2 en 2 est respecté, mais les règles de numération en base trois sont alors malmenées. Parmi les erreurs interprétables à titre hypothétique, relevons les réponses 15 et 105 quand le «2 en 2» s'est transformé par composition en un «4 en 4»; les réponses 21 et 111 si l'enfant a voulu laisser deux nombres intermédiaires entre 11 et 21, de même qu'entre 101 et 111; les réponses 22 et 202, qui correspondent au double (en base dix) de 11 et 101, à moins que le «2 en 2» n'ait induit une utilisation exclusive des 2 dans les réponses données. C'est en tout cas bien l'interprétation de cette consigne que semble faire l'élève qui répond 2 et 2. Certains élèves semblent se lancer dans des soustractions que les conduisent à des réponses telles que 9 et 89. Bref, les réponses sont diverses, mais révèlent souvent une compréhension particulière du problème, due soit à l'occultation d'une partie de la consigne, soit aux interprétations diverses de l'expression familière, mais peu explicite «compter de 2 en 2».

Une autre question posée aux élèves de 4e année porte également sur l'écriture du code numérique dans une suite de nombres (Tableau 22). C'est la recherche du prédécesseur ou du successeur d'un code qui est ici en jeu.

Tableau 22

4P Epreuve collective	Réponses correctes: - a) (7200): 74% - b) (1100): 55% - c) (10999): 45% N = 963

a) <u>En base dix</u>, quel est le nombre qui suit immédiatement 7199 ?

Ta réponse: ___________

b) <u>En base deux</u>, quel est le nombre qui suit immédiatement 1011 ?

Ta réponse: ___________

c) <u>En base dix</u>, quel est le nombre qui vient juste avant 11 000 ?

Ta réponse: ___________

Le successeur de 7199 est trouvé par les trois-quarts des élèves, les deux autres questions se révèlent plus complexes. La difficulté n'apparaît pas spécifique à la maîtrise de la base deux. Le nombre qui vient juste avant 11000 en base dix fait problème à plus de la moitié des élèves. Encore une fois, les réponses incorrectes se révèlent d'une très grande diversité. Donnons-en un échantillon:

Réponses observées:

a): 7199, 7209, 7300, 7299, 8000, 8199, 7100, etc.

b): 1012, 1013, 1211, 10111, 1010, 10000, 1009, 1000, 10010, 1011, 1101, 11000, 1111, etc.

c): 999, 9999, 99999, 10000, 10990, 10090, 1099, 11001, 11099, 11999, 1999, 1100, etc.

Discussion

Des questions relatives à l'écriture d'une suite de nombres en base différente de dix ont été posées à des élèves de 2e, 3e et 4e années primaires. Ce qui frappe à l'examen des réponses obtenues, c'est le taux relativement faible de réussite à ces questions, quel que soit le degré considéré. La moitié des élèves ne semble guère maîtriser pleinement le fonctionnement de la numération en base autre que dix, sous son aspect ordinal. Ce constat soulève la question du lien que l'élève est susceptible d'établir entre la tâche de codage numérique d'une collection donnée, tâche, comme nous l'avons vu, généralement bien maîtrisée, et l'écriture d'une suite de codes numériques. Cette dernière tâche fait manifestement appel à une réflexion plus formelle sur le code lui-même, réflexion que les tâches de groupement et de codage d'une collection donnée ne favorisent pas nécessairement. Cette question du rapport entre l'aspect cardinal et ordinal des codes numériques est précisément au centre des observations réalisées à propos du jeu de l'oie, observations qui sont présentées ci-dessous.

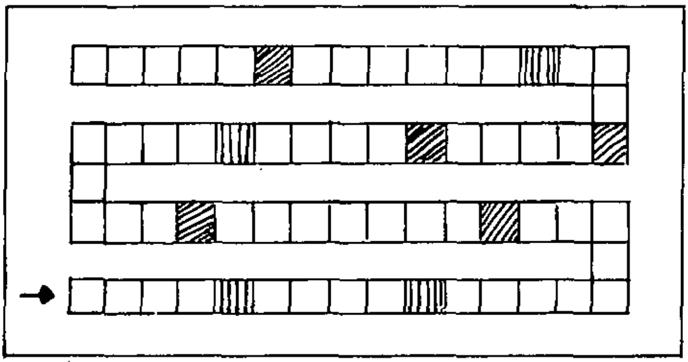
2) Numéroter un jeu de l'oie

Les diverses tâches examinées jusqu'ici, tâches aussi bien de codage, de décodage que d'écriture d'une suite de codes, présentent des caractéristiques bien définies. L'élève les appréhende sans ambiguïté possible comme des tâches relevant du champ scolaire, tâches pour lesquelles, par conséquent, ce sont les connaissances acquises en classe qui sont à mobiliser.

Le but de la situation-problème présentée ici, la numérotation d'un jeu de l'oie, est d'observer comment s'articulent, chez l'élève, ses connaissances et expériences scolaires en matière de numération, et sa pratique «ordinaire» des nombres et du comptage. La mise en relation de ces deux champs d'expériences est provoquée en cours d'entretien par les questions de l'adulte qui demande à l'élève d'identifier les groupements et unités désignés par les chiffres de l'un ou l'autre nombre écrit. C'est ainsi l'articulation entre l'aspect ordinal et cardinal des codes numériques (et non du concept du nombre) qui est ici en jeu.

Description de la situation

La situation se présente ainsi: un chemin formé d'une suite de cases non numérotées est représenté sur une grande feuille de la façon suivante:



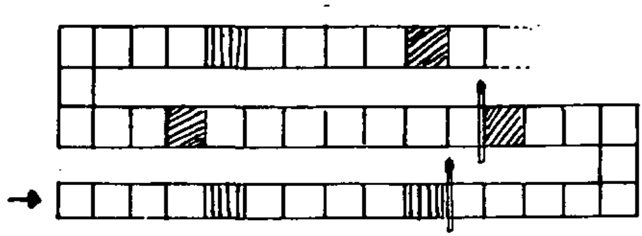
Quelques cases sont marquées d'un rond de couleur. Le jeu est prévu pour deux joueurs qui lancent à tour de rôle un dé, et avancent leur pion du nombre de cases correspondant.Les règles données sont les suivantes: lorsque le pion arrive sur une case rouge: on avance de deux cases; sur une case jaune: on recule d'une case.

Phase 1

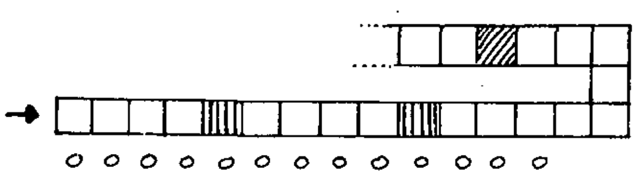
Quand les élèves ont compris ces règles, ils commencent à jouer. Le jeu est interrompu par l'enseignant lorsqu'un des joueurs dépasse la première case bleue (20e case). Il est alors demandé aux élèves de noter le numéro de la case sur laquelle se trouve leur pion. Ils ont pour cela à disposition soit de petites étiquettes vierges sur lesquelles ils peuvent écrire un numéro, soit des étiquettes avec les chiffres de 0 à 9, leur permettant de composer n'importe quel nombre.

Le jeu se poursuit jusqu'à la deuxième case bleue. A ce deuxième arrêt, on demande à nouveau à chaque enfant de numéroter la nouvelle case où se trouve leur pion. En désignant une des cases numérotées (le plus souvent entre 20 et 30), l'enseignant demande alors aux enfants ce que représente le chiffre des unités, puis le chiffre des dizaines. Pour aller au delà de la réponse verbale, il leur est demandé ensuite de montrer sur le jeu où se trouvent les unités (isolés) et les dizaines (groupements). Si l'enfant ne parvient pas à désigner les unités et les dizaines, on recourt à l'un ou l'autre des moyens didactiques suivants:

- à l'aide d'allumettes, on montre à l'enfant qu'il est possible de séparer des groupes de cases, ce qui rapproche perceptivement la situation des activités de groupement effectuées en classe.



- une deuxième approche retenue pour aider l'enfant consiste à établir une correspondance terme à terme entre les cases et des jetons placés en regard de chaque case.



L'enfant est alors invité à regrouper tous les jetons, à effectuer le groupement par dix. On lui donne ainsi l'occasion d'établir l'analogie entre, d'une part, le dénombrement de cases contiguës non manipulables et, d'autre part, le dénombrement de jetons selon une procédure familière de regroupement pratiquée en classe.

Phase 2

Afin de contrôler la compréhension des groupements de cases, on présente à tous les enfants une nouvelle feuille sur laquelle les cases sont toutes déjà numérotées de 1 à 60. Cette fois, l'enseignant désigne un nombre compris entre 30 et 40 en demandant à nouveau aussi bien d'indiquer la signification des deux chiffres que de montrer les dizaines et les unités signifiées par le code.

Phase 3

Dans un dernier temps, on reprend le jeu non numéroté et il est demandé à l'enfant de numéroter dans l'ordre les cases en base sept, à partir de la première. En fonction des réactions des élèves, une tentative d'apprentissage est amorcée. L'entretien a pris, selon les élèves, quelque trente à quarante minutes.

Observations

Cette activité a pu être proposée à 12 couples d'élèves, soit 5 couples de deuxième année primaire, 4 couples de 3^{e} année et 3 couples de 4^{e} année. Chaque étape du jeu a été pour nous l'occasion de multiples observations. Par exemple, en ce qui concerne l'avancement des pions, nous avons relevé des hésitations quant à la manière de compter la première case. Celle-ci est-elle à prendre comme case «point de départ» du pion ou comme case N°1? Cette incertitude est liée à l'indissociation entre le dénombrement des «pas» du pion et le dénombrement des cases en tant que telles. En cours de jeu, pour numéroter une case, plusieurs élèves hésitent à prendre en compte une case précédente déjà numérotée, d'où ils pourraient poursuivre la numérotation. Ils préfèrent spontanément procéder à une nouvelle numérotation en repartant de la case 1. Nous ne pouvons ici nous étendre sur de telles observations fortuites, certes intéressantes, mais qui devraient faire l'objet d'investigations plus systématiques pour en dégager leur signification réelle.

Dans les pages qui suivent, nous nous centrerons sur trois moments précis du déroulement du jeu, moments relatifs à:

- la signification des codes écrits par les élèves (Phase 1),
- la signification des codes sur un jeu à cases entièrement numérotées (Phase 2, situation contrôle),
- la numérotation par l'élève des cases en base sept (Phase 3).

Que signifient, pour les élèves, les codes numériques qu'ils ont eux-mêmes écrits? (Phase 1)

Rappelons qu'il a été demandé aux élèves de ne numéroter que la case sur laquelle se trouvent leurs pions après quelques lancers de dés. Les questions de l'expérimentateur sont posées en deux temps. Elles portent tout d'abord sur la signification des chiffres («Que signifient le 2, le 3 dans le code 23?», «Que représentent le 2, le 3?»). C'est ensuite sur la désignation des groupements que l'expérimentateur attire l'attention des élèves («Montre-moi les deux dizaines (ou groupements), les trois unités»).

Signification des chiffres

Interrogés sur la signification de chacun des chiffres, plusieurs élèves sont surpris; la question n'est pas tout de suite comprise et ceci aussi bien en 2e qu'en 4e années primaires. C'est ce que révèlent les extraits d'entretiens suivants:

CHRISTELLE - JOSÉ (2e année)

ENS: Tu as écrit 26. Qu'est-ce que ça représente 2 et 6? Qu'est-ce que c'est?
EL: Ça fait base deux et base six, ça fait vingt-six ... la base vingt-six.
ENS: Le 2, c'est quoi ? Et le 6 ?
EL: Deux dizaines. Six isolés. C'est comme ça qu'on a appris.

SIMON - CÉDRIC (3e année)

ENS: On va regarder un petit moment ces étiquettes. Est-ce que vous pouvez me dire ce que représentent ce 6 et ce 2?
EL: C'est un nombre pair.
ENS: D'accord. Qu'est-ce que vous pouvez encore me dire?
EL: Le numéro 6, c'est six unités; le 2, deux groupements.

PEDRO - FRANÇOIS (4e année)

ENS: Tu peux me dire ce qu'elle veut dire, ton étiquette?
FR: Qu'on est à la case 26. Je suis à la case 26.
ENS: Tu peux expliquer encore mieux ce que tu as mis sur l'étiquette?
FR: Silence
ENS: Qu'est-ce que tu as écrit?
FR: 26
ENS: Tu as écrit ici
FR: 2
ENS: Puis là
FR: 6
ENS: Tu peux nous expliquer ce que ça veut dire?
FR: Ça veut dire ...
ENS: Ce 2, ce 6, qu'est-ce que c'est?
FR: C'est deux groupes ... groupements de première espèce, pis le 6, c'est les six unités.

TATIANA - ANNE (4e année)

ENS: Qu'est ce que c'est comme étiquette?
AN: C'est celle de Tatiana, la vingt-cinquième
ENS: C'est la vingt-cinquième, voilà exactement, c'est le nombre vingt-cinq. Alors, vous pouvez dire ce que représente ce 5 et ce 2?
AN: Eh ben ça représente qu'y a déjà eu vingt cases plus cinq cases.
ENS: Qu'est-ce que tu en penses Tatiana? Tu penses la même chose, ou bien?
TAT: Ça fait vingt plus cinq cases
ENS: Mais ce 5 ici, ce chiffre 5, qu'est-ce qu'il représente?

AN: Les unités?
ENS: T'es d'accord, Tatiana?
TAT: Oui
ENS: Tu es sûre ou bien tu hésites?... Tu es sûre! Et puis ce 2, qu'est-ce qu'il représente?
AN: Un groupement de première espèce
ENS: Est-ce qu'il n'y a qu'un seul groupement de première espèce?
AN: Il y en a deux
ENS: Il y a deux groupements de première espèce. Alors ça, ça représente? Ce 5?
AN: 5 unités
ENS: Et ce 2?
AN: Deux groupements de première espèce.

Indépendamment de ces premières hésitations ou difficultés à saisir la question posée, tous les élèves parviennent à donner la réponse attendue, soit en termes de dizaines et unités (ou isolés), soit en termes de groupements et d'isolés (ou unités). Les trois extraits ci-dessous révèlent une compréhension immédiate de la question.

ÉRIC - ANNE-MARIE (3^e année)

ENS: Que veut dire 2 et 0?
EL: Zéro unité et deux groupements.

LAURENCE - NATHALIE (3^e année)

ENS: Bon alors, 26, on va le regarder; qu'est-ce que ça veut dire ce 6? C'est 6 quoi?
EL: Six unités
ENS: Et puis le 2?
EL: Ça veut dire deux dizaines

PATRICIA - OSCAR (2^e année)

ENS: On a 22, qu'est-ce que ça veut dire 2 et 2?
EL: Ça fait deux dizaines plus deux isolés.

Désignation des groupements

A l'intervention qui suivait immédiatement: «Montre-moi les deux dizaines, les unités» (ou les groupements et les isolés, selon les termes employés auparavant par l'élève), les réactions des élèves sont diverses.

La moitié des élèves désigne sans difficulté les cases composant les dizaines et les unités signifiées par le code en jeu. Le regroupement des cases n'est toutefois pas effectué par tous de la même façon.

Cinq élèves procèdent au regroupement suivant:

cases 1 à 10, 11 à 20:	dizaines	
cases 21, 22, 23:	unités	(cinq élèves)

Autres regroupements:

cases 26 à 16, 16 à 6:	dizaines	
cases 6 à 1:	unités	(1 élève)

ou inversement:

cases 1 à 6:	unités	
cases 6 à 16, 16 à 26:	dizaines	(3 élèves)

Pour le code 20:	«de 5 à 15 ça fait dix» (1 élève)
Pour le code 25:	les deux dizaines sont envisagées en bloc: «Une vingtaine (1 à 20) et 5 unités» (2 élèves)

D'autres élèves ne se centrent tout d'abord que sur les cases 10 ou 20. Ils n'identifient et ne prennent en compte la dizaine en tant que groupe de cases qu'à la suite d'une intervention de l'enseignant, comme le montre l'extrait suivant:

PATRICIA - OSCAR (2e année)

A propos du code 22:

EL: Ça fait 2 dizaines plus 2 isolés.
ENS: Tu pourrais me montrer ces deux dizaines?
EL: Là il y en a une (case 10) ...
ENS: C'est la case 10, mais une dizaine, c'est un groupe de 10, il serait où ce groupe?
EL: Là (de 10 à 20), et puis de là jusque là (1 à 10) ça fait une autre.

Pour d'autres élèves, l'intervention de l'enseignant ne déclenche pas automatiquement la prise en compte du groupe de cases qui composent une dizaine. La centration sur les codes 10 et 20 persiste plus longtemps.

FABIENNE - CATI (4e année)

ENS: Que veut dire 2 et 6, Cati?
CAT: Ca veut dire ... qu'on a ... (rire)
ENS: Tu comprends la question?
CAT: Oui, le 2, c'est les dizaines, le 6, c'est les unités
ENS: Voilà, est-ce que tu pourrais me montrer ces 2 dizaines?
CAT: Euh ..
ENS: Comment fais-tu?
CAT: Dix
ENS: C'est où?
CAT: ... depuis 15 jusqu'à 20 (pour elle)
ENS: On arrive à montrer sur le jeu ces deux groupes de dix cases, deux dizaines de cases? Comment tu peux me les montrer, un premier groupe serait où?
CAT: Là !
ENS: Là, c'est la case numéro 10
Et la dizaine, Fabienne?
FAB: (Elle désigne la case 10)

Un élève évoque une activité de regroupement d'allumettes, mises en paquets de dix. Les réactions de cet élève (que nous reproduisons ci-après) révèlent bien la prégnance d'une certaine approche concrète de la numération dans la construction d'un concept comme celui de dizaine. Pour cet élève, le concept de dizaine est associé à un groupement effectif de dix objets; appliquer ce concept dans un concret différent (dessin de cases contiguës non manipulables) nécessite un travail de transposition qui n'est pas immédiat.

CHRISTELLE - JOSÉ (2e année)

EL: Deux dizaines. Six isolés. C'est comme ça qu'on a appris.
ENS: Ces deux dizaines, elles sont où?
EL: Dans un paquet. On prend dix allumettes, on met un élastique, on prend encore dix, on met encore un élastique. Six isolés sans élastique, ça fait vingt-six.
ENS: Ca irait si on compte des allumettes, mais ici, qu'est-ce qu'on a compté?
EL: Des cases. (CHRIS compte les 10 premières cases)
ENS: Qu'est-ce qu'on a là ?
CH: Ici, c'est 10
ENS: Je t'ai demandé de me montrer deux dizaines
CH: (compte encore 10 et 6)
ENS: La dizaine, elle est où, le groupe de 10?
CH: Ici, case 10
ENS: Ici, c'est une case, mais la dizaine?
CH: Ah ... (elle entoure du doigt les 2 dizaines)

Deux élèves s'en tiennent à un simple comptage des cases en jeu, sans que les dizaines soient explicitement distinguées ou désignées.

JOËLLE - CÉDRIC (2e année)

JOE: Trente. On écrit 3 et 0
ENS: Pourquoi 3 et 0?
(Silence prolongé)
JOE: 3 dizaines...(silence)
ENS: 3 dizaines de quoi, de pommes?
JOE: de cases

ENS: Montre-les
JOE: (dénombre avec le doigt jusqu'à 30)
ENS: Ce 3, c'est 3 quoi?
(silence)
(Etiquette de Crédric: 12)
ENS: Douze, c'est 1 et 2 quoi?
(silence)
CED: C'est 1 dizaine et .... 2 unités
ENS: Montre-les
CED: (Dénombre les cases, de la première à la douzième, en les désignant du doigt).

C'est en recourant aux allumettes à disposition pour marquer les séparations entre dizaines que l'expérimentateur parvient à induire chez ces élèves la prise en compte des groupements de dix.

Enfin, un élève de 2e année ne semble pas comprendre la question. Malgré l'aide de l'enseignant, il ne parvient pas à identifier les dizaines et les unités signifiées par un code.

Que signifient les codes numériques sur un jeu de l'oie déjà numéroté? (Phase 2)

Les réactions des élèves relevées ci-dessus s'expliquent en partie par le caractère inhabituel des questions qui leur ont été posées. Ce temps d'adaptation passé, temps nécessaire pour saisir où l'expérimentateur veut en venir, quelles sont les possibilités réelles des élèves de formuler la signification des chiffres composant un nombre écrit? C'est pour répondre à cette question que lors d'une deuxième phase de l'entretien, les élèves ont à nouveau été interrogés sur la signification des chiffres et l'identification des groupements, mais cette fois-ci avec un jeu de l'oie déjà numéroté (de 1 à 68).

Signification des chiffres

En désignant un code (entre 30 et 50), l'expérimentateur demande aux élèves «que signifient le 3 et le 7 dans le code 37?». La question ne pose cette fois-ci aucun problème aux élèves. Les trois-quarts d'entre eux répondent en termes de dizaines et unités, d'autres élèves en termes de groupements et d'unités (isolés). Enfin, un élève de 2e primaire donne la signification du code 37 par l'expression «trois paquets de dix et sept unités».

Désignation des groupements

Poursuivant l'entretien, l'expérimentateur demande: «Montre-moi les dizaines et les unités»

Cette question a suscité les réactions suivantes:

- Désignation des dizaines et des unités sans comptage, à partir de la numérotation donnée (1 à 10, 11 à 20, 21 à 30 pour les dizaines et 7 unités). Notons que sur les dix élèves (de 2e, 3e et 4e années) qui procèdent ainsi, trois manifestent quelques hésitations dans la démarcation des dizaines. En particulier, un élève hésite à marquer la «coupure» des dizaines entre 19 et 20 ou entre 20 et 21.

- Désignation des dizaines et des unités (1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, etc.) suite à un nouveau comptage des cases par l'élève; celui-ci ressent la nécessité de compter pour s'assurer que chaque groupe comprend bien dix éléments (3 élèves de 2e et 3e années).

- Autres regroupements:

pour le code 37:	unités de 1 à 7 comptage des dizaines: de 7 à 17, 18 à 27, etc. (1 élève de 3e)
pour le code 46:	première réaction: 46 à 36: un groupement puis: de 1 à 10, 11 à 20, etc. (2 élèves de 3e)
pour le code 41:	première réaction: unité: 1 dizaines: 1 à 10. 11 à 20, etc. puis: les 4 dizaines et la case 41 comme unité (isolé). (2 élèves de 4e)

- Incompréhension de la question (1 élève de 2e).

Commentaires sur les conduites des élèves au cours des phases 1 et 2

Une fois passé le moment de surprise que provoque la question inattendue («Que signifie le premier chiffre, que signifie le deuxième chiffre?»), les élèves interrogés manifestent une bonne connaissance de ce que signifie un code numérique de deux chiffres. Que le langage utilisé fasse intervenir les termes «dizaines et unités» ou les termes «groupements et isolés» importe peu, finalement; les élèves, dès la deuxième année, semblent parfaitement avoir saisi un des principes fondamentaux du système de numération qu'est la valeur positionnelle des chiffres.

Lorsqu'il est demandé aux élèves de montrer sur le jeu de l'oie où sont les dizaines et les unités dont il vient d'être question, des hésitations et des difficultés apparaissent. Nous avons déjà souligné que celles-ci sont dues pour une grande part au caractère peu familier de cette situation de dénombrement. Cela enlève-t-il tout intérêt à l'analyse de ces réactions? Nous ne le pensons pas, au contraire; les difficultés rencontrées par certains élèves devant la nouveauté de la tâche proposée se révèlent peut-être d'autant plus instructives quant au fonctionnement intellectuel des élèves.

De nombreux élèves (près de la moitié) ne semblent pas comprendre tout de suite ce qui leur est demandé par l'expression «montre-moi les dizaines, les unités». Ce qu'ils ont sous les yeux (un jeu de l'oie vierge, dont seules 3 ou 4 cases sont numérotées) n'évoque en rien, pour eux, une situation concrète familière de groupement. Ce qui est alors demandé à l'élève est de transposer sa connaissance des activités de groupement et de codage à une situation qui présente des caractéristiques perceptives particulières (alignement d'éléments contigus). Cette transposition n'est pas immédiatement effectuée pour plusieurs raisons.

La formation de groupements dans notre jeu de l'oie ne peut s'appuyer sur un regroupement spatial des éléments clairement perceptibles comme lorsque l'on fait des tas de 10 jetons, par exemple. L'activité de regroupement est de ce fait plus mentale qu'effective. C'est bien pour favoriser le passage d'un regroupement effectif à un regroupement réalisé mentalement (intériorisé) qu'il a été proposé à quelques élèves de séparer les dizaines, ou groupes de cases, par des allumettes, ceci afin de leur fournir un support perceptif facilitateur.

En plus des aspects figuratifs examinés ci-dessus, qui jouent certainement un rôle très important, il nous faut signaler une difficulté peut-être plus fondamentale, liée à la dissociation dont nous avons parlé plus haut (cf. p. 109) entre deux types d'expériences chez l'élève: expérience spontanée de comptage et expérience de groupement. La numérotation des cases, effectuée par l'élève, paraît étroitement liée à l'expérience de comptage. Or, manifestement, celle-ci ne conduit pas spontanément à la prise de conscience du fonctionnement même du système de numération. Nous savons qu'un élève peut très bien écrire la suite . . . 8 9 10 11 . . . sans réfléchir au fait qu'en écrivant 10, il signifie à la fois qu'il en est à la dixième case et que dix cases ont été comptées (regroupées). Dans cette situation, la prégnance de l'aspect ordinal des codes rend compte en particulier de la centration de quelques élèves sur les étiquettes 10 et 20, alors qu'on leur demande de montrer une (ou deux) dizaine(s).

D'autre part, même pour les élèves qui parviennent à montrer les dizaines et les unités en jeu, il est frappant de constater que la moitié d'entre eux ne procède pas au découpage: 1 à 10 / 11 à 20 / etc. et x unités. Il arrive en effet que cela soit les six premières cases, par exemple, qui soient désignées comme unités (ou isolés) et les cases 7 à 17 / 18 à 27 / etc. comme dizaines.

Ce dernier «découpage», bien qu'en soi parfaitement légitime, est, à notre avis, à prendre comme un indice de la dissociation entre numérotation et principe de groupement. Pour ces élèves, les regroupements implicites inscrits dans l'écriture même des codes numériques utilisés pour une numérotation ne sont pas réellement perçus. En numérotant, par exemple, la quatorzième case, ces élèves ne semblent guère avoir conscience qu'ils en ont déjà dénombré dix, puis encore quatre. Seule, en effet, cette lecture à la fois cardinale et ordinale des nombres est susceptible de conduire spontanément à la désignation des dizaines en s'appuyant sur la numérotation, c'est-à-dire à la désignation des cases 1 à 10 / 11 à 20 / 21 à 30 / etc.

Rappelons que dans la phase 1 (numérotation ponctuelle réalisée par les élèves), cinq élèves procèdent spontanément à ce découpage; il s'agit aussi bien d'élèves de 2e, de 3e que de 4e années. A la suite d'interventions didactiques dans la phase 2 (jeu à cases numérotées de 1 à 60), c'est un peu plus de la moitié des élèves qui procède spontanément à ce regroupement 1 à 10 / 11 à 20 / etc. Notons également que parmi ces élèves, on trouve aussi bien des élèves de 2e, 3e ou 4e années.

L'évolution des réactions de la phase 1 à la phase 2 laisse bien penser qu'il s'agit-là d'un problème de prise de conscience du fonctionnement de la numérotation, prise de conscience qu'une intervention didactique appropriée est susceptible de favoriser sans trop savoir quelle peut être la solidité de l'apprentissage ainsi obtenu. Comment interpréter le fait que les réactions spontanées des élèves ne soient pas plus différenciées selon le niveau scolaire (2e, 3e ou 4e années)? Il est en effet frappant de constater à quel point la situation proposée, parce que peu familière, semble mettre les élèves interrogés devant les mêmes hésitations et difficultés, indépendamment du travail réalisé en classe de la 2e à la 4e années, dans le domaine de la numération. Cela peut s'expliquer par la place prépondérante que l'on accorde dans le nouvel enseignement à la construction du codage d'un cardinal «quelconque» au détriment d'une réflexion (que l'on a craint trop formelle) sur le système de codage d'une suite de nombres, système dont le fonctionnement d'un compteur peut fournir un modèle.

Quelles possibilités les élèves ont-ils de saisir dans toute sa complexité le fonctionnement d'une suite de codes numériques? A quel moment sont-ils réellement capables d'appréhender tout code numérique sous son angle aussi bien ordinal que cardinal, ce qui est la condition d'une compréhension complète du fonctionnement de la numération? C'est pour cerner ces questions que nous avons encore proposé aux élèves de procéder à une nouvelle numérotation du jeu de l'oie en base sept.

Comment numéroter les cases du jeu de l'oie en base sept? (Phase 3)

Afin de se rendre compte des possibilités qu'ont les élèves de réfléchir non seulement à la signification des chiffres mais au fonctionnement même de la numérotation, nous leur avons proposé de reprendre le jeu de l'oie à cases blanches et d'en numéroter, cette fois-ci, les cases en base sept, à partir de la première case.

Le matériel à disposition des élèves était constitué, en plus du dessin des cases, d'étiquettes blanches et d'étiquettes numérotées de 0 à 9, en nombre suffisant pour réaliser un grand nombre de codes. Nous savions déjà que la tâche proposée n'était ni simple, ni familière aux élèves. Le seul exercice abordé en classe et se rapportant à cette tâche est celui de la recherche d'un code successeur ou prédécesseur dans la base donnée. Il est rare en classe qu'un exercice fasse en effet intervenir toute une suite de codes numériques. Ce n'est par conséquent pas, en tant que telle, la performance à cette tâche qui nous intéresse, mais l'analyse des réactions spontanées, des difficultés rencontrées, des tentatives d'apprentissage et de leurs effets. Nous sommes ainsi parti du principe que pour savoir si un élève est capable ou non de comprendre une notion, le moyen le plus direct est de créer une situation d'apprentissage à fonction diagnostique. C'est la démarche qui a été adoptée ici.

Les observations sont présentées en deux temps. Tout d'abord, ce sont les premières réactions spontanées à la tâche proposée (numérotation des cases en base sept) qui sont recensées. Afin d'éviter le risque d'appauvrir considérablement les données recueillies, de larges extraits de protocole sont reproduits. Un bref résumé accompagne chaque extrait. Puis, à partir de ces premières réactions, ce sont les tentatives d'apprentissage et l'évolution des conduites qui font l'objet d'un examen.

Premières réactions

PATRICIA - OSCAR (2e année)

Résumé:

Adoptent une numérotation répétitive:

1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7

Extrait:

ENS: On va numéroter en base sept. On prend des étiquettes déjà numérotées.
EL: Je mettrais le 7 ici (sur la 7e case), après je compterais jusqu'à 7 et je mettrais encore 7.
ENS: Tu mettrais 1, 2, ...?
EL: Oui, jusqu'à 7.
ENS: Et après?
EL: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 / 1 2 3 4 5 6 7.
Après, on recommence.

CHRISTELLE - JOSÉ (2e année)

Résumé:

Commencent par numéroter en base dix jusqu'à 9. Au rappel de la consigne («On va numéroter en base sept»), ils retirent les chiffres 8 et 9, puis finissent par adopter une numérotation répétitive: 1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 ....

Extrait:

ENS: Maintenant, on va numéroter toutes les cases en base 7.
(Les enfants commencent par 0, au point de départ; ils cherchent le 7)

1	2	3	4	5	6		...

EL: J'ai trouvé le 9.
(Ils mettent de 1 à 9)
ENS: Tu te souviens, on voulait numéroter en base 7?
(José enlève le 8 et le 9, il reste de 1 à 7)
ENS: Comment fait-on, si on décide de compter ces cases en base 7?
EL: On part du point de départ, et sans compter, on dit 2, 4, 6, 7.
ENS: D'accord, maintenant on a les sept premières
EL: ...on peut les mettre comme ça ... à côté ... on peut grouper ... on les retourne

ENS: Qu'est-ce-que tu entends?
EL: On retourne et on essaie de dire ...
ENS: Ca serait une idée, mais on va les laisser et continuer la numérotation
EL: On recommence 1, 2, ...
ENS: Tu m'avais dit qu'on pouvait regrouper, qu'est-ce que ça veut dire?
EL: Ca veut dire faire un ensemble
ENS: Avec les sept premiers?
EL: Oui ...
On peut mettre une allumette ici et on continue.
ENS: Mettons l'allumette
(CH recommence la numérotation: 1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 ...)
EL: Non, on pourrait mettre 0
(L'enfant met le 6)
EL: Je n'ai jamais trouvé un 7
(L'enfant cherche un 7)
1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 6 7
ENS: Qu'est-ce qu'on fait maintenant?
EL: On recommence.

YANN - NICOLAS (2e année)

Résumé:

Commencent par numéroter ainsi: 1 2 3 4 5 6 7 / 11 12 13 14 15 16 17 qu'ils abandonnent au profit d'une numérotation en base dix. Ils tentent ensuite de concilier cette dernière numérotation avec un dénombrement «parallèle» en base sept:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
							1	2	3	4	5	6	7	

Extrait:

ENS: Pouvez-vous poser les étiquettes sur les cases, mais dans la base sept? ...pas dans la base dix.

NIC: Faut tout grouper par sept, que par sept. Tout doit être groupé par sept.
ENS: C'est très juste ce que tu dis, Nicolas, mais alors regarde un peu ce que tu fais!
NIC: J'ai déjà fait sept. Jusque là, j'ai fait un groupement de sept et 0 isolés (laisse l'étiquette 7). Mais ici (à partir de 8), c'est faux.
ENS: On peut employer n'importe quel nombre en base sept?
NIC: Non
EL: Alors on en a sept, on recompte sept
ENS: Sur cette case (la 14), qu'est-ce qu'on devrait avoir?
NIC: 17 ... non encore une fois 7
YAN: On met 14 et par-dessus 7. (Il repart de 8, 9, ... 14, en disant 1 2 3 4 5 6 7, et affirme que l'on peut faire un 2e groupement).

ANNE - STEPHANE (2e année)

Résumé:

Adoptent une numérotation répétitive:
1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 6 7 ...

Extrait:

ENS: Alors on va reprendre l'autre jeu. On ne va pas jouer tout de suite, mais tout simplement on va essayer de numéroter les cases, mais alors toutes les cases, les unes après les autres, en base sept.
STE: Facile
ENS: Alors, comment est-ce que vous allez faire, avant de démarrer ? Expliquez-nous donc un petit peu ce que vous allez faire.
AN: On va compter jusqu'à sept et puis là on va mettre une barre
ENS: Qu'est-ce que tu en penses, Stéphane?
STE: Moi aussi
ENS: Comment tu vas faire?
STE: Compter, mettre une barre, compter ...
ENS: Alors je vous laisse faire. Les barres, ce sont les allumettes, si je comprends bien. Alors, allez-y.

(Les élèves se répartissent la réalisation des étiquettes)

ENS: Vous les posez au fur et à mesure, oui, c'est mieux.
(Anne et Stéphane numérotent les cases de 1 à 7, puis recommencent de 1 à 7)
1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 6 7

FABIENNE - FRANÇOIS (3e année)

Résumé:

Numérotent en base dix (les chiffres sont réalisés sans ordre), sont gênés par l'étiquette 7, «on n'ose pas mettre 7 en base sept». La solution adoptée est de sauter la septième case :

1	2	3	4	5	6		8	9	10	11	12	...

LAURENCE - NATHALIE (3e année)

Résumé:

Numérotation répétitive: 1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 6 7. Hésitation de Laurence qui numérote en base dix. Nathalie suggère d'en revenir à une numérotation répétitive.

Extrait:

ENS: Je vais vous demander de numéroter les cases en base sept, sur de petites étiquettes. Comment allez-vous faire? Vous avez une idée?
EL: On fait déjà sept, puis après sept (elles montrent les cases de sept en sept)
ENS: Mais pour numéroter, il faut que toutes les cases aient leur numéro, mais en base sept
EL: Ben, on s'arrête à sept, puis on recommence jusqu'à sept
ENS: Allez-y, essayez donc entre vous deux
EL: Sept, puis après on met quatorze,
(Nathalie écrit les étiquettes jusqu'à sept. Laurence écrit les étiquettes depuis 8).

ENS: En base sept, hein.

EL: Ouais, en base sept.

Nathalie suggère à Laurence de ne pas écrire 8, 9 ... mais de reprendre à un.

ENS: Pourquoi vous vous arrêtez chaque fois à sept, expliquez-moi?

EL: Parce qu'on est en base sept, on peut pas faire plus que sept.

ENS: Et qu'est-ce qui se passe quand on arrive à sept?

EL: Ca fait déjà un groupement de première espèce.

ÉRIC - ANNE-MARIE (3e année)

Résumé:

Numérotation initiale en base dix, puis adoption d'une numérotation répétitive en recourant à la fois au 0 et aux cases vides:

0	1	2	3	4	5	6	7		0	1	2	3	4	5	...

Extrait:

ENS: On va numéroter les cases en base sept.
Comment on ferait?

EL: On va jusqu'à sept et ...

ENS: On commence :

EL: 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ENS: On voulait numéroter en base 7.
L'enfant enlève 8 et 9.

EL: On peut faire un groupement ...
Ah, oui, alors on peut pas mettre le 7.

ENS: On ne peut pas mettre le 7, alors comment on fait?

EL: Alors on met un 0 là, et ça fait comme si c'était 7.

ENS: On met un 0 tout au début, avant le 1.

EL: 0 1 2 3 4 5 6 ça fait 7 chiffres, comment on continue de numéroter?

EL: Ben ... on saute le 7, on met 8, 9, 10 ...

EL: Non, on met pas le 7, puis on met 0, 1, 2, 3 ... jusqu'à ce qu'il y ait 7 nombres.

ENS: Attends, la première idée d'Anne-Marie est de mettre 8, 9, 10, 11, et toi ça serait de faire ...
EL: On met pas le 7, on met 0 1 2 3 4 5 6, on saute une case et 0 1 2 3 ...

FABIENNE - CATI (4e année)

Résumé:

Numérotation initiale en base dix, puis numérotation répétitive 1 2 3 4 5 6 7 0 1 2 3 4 5 ...

Extrait:

ENS: On va numéroter en base 7.
EL: Mais sans mettre les plus que 7?
ENS: Non, on va numéroter en base 7 avec ces étiquettes.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

ENS: Tu mets 8 9 10 11 12, mais c'est en quelle base?
EL: En base dix.
ENS: On veut numéroter en base sept, comment est-ce qu'on fait?
EL: 1 2 3 4 5 6 7 puis, après 0 1 2 3 4 5

TATIANA - ANNE (4e année)

Résumé:

Numérotation répétitive projetée : «on numérote jusqu'à 6, après de nouveau jusqu'à 6... puis de nouveau 6. Pour éviter l'écriture du 7 le principe du groupement est évoqué mais l'écriture correspondante n'est pas trouvée.

Extrait:

ENS: Alors on vous demande de numéroter ces cases de ce jeu en base 7. Vous voyez comment vous allez faire? Je vous donne des petites étiquettes de nouveau et puis vous numérotez en base sept.

Tatiana écrit 1, 2,...

A: Ca va pas, parce qu'il faut écrire 7, 7, 7, 7,...

ENS: Comment tu ferais, Anne? Où tu mettrais 7?

T. En base sept, on ose pas avoir les 7.

A: Ah non, 6 alors.

ENS: Comment tu ferais?

T: On numérote jusqu'à 6, après de nouveau jusqu'à 6,. puis de nouveau 6...

ENS: Alors allez-y! Déjà jusqu'à 6.
(Elles numérotent jusqu'à 6)

ENS: Alors on s'arrête peut-être, on va réfléchir.
Qu'est-ce que vous allez faire maintenant?

T: Mettre un petit bâton.

ENS: Vous pouvez mettre un petit bâton, je dis bien on est en base sept hein?

T: On peut pas mettre un 7, on est en base sept

ENS: On peut pas mettre un 7 en base sept, oui alors là, c'est un problème.
Comment est-ce qu'on pourrait écrire ce 7 si on ne peut pas mettre

T: Ben ça fait comme si ça serait une dizaine, heu une dizaine, comme si ça serait un groupe déjà.

ENS: Comme si c'était un groupement, alors comment tu l'écrirais ce groupement?

EL: Un groupement de première espèce?

ENS: Un groupement de première espèce, comment tu écrirais?

T: J'sais pas.

En résumé la consigne de numéroter les cases du jeu de l'oie en base sept conduit presque tous les élèves observés à une numérotation que nous avons appelée répétitive, du type 1 2 3 4 5 6 7 / 1 2 3 4 5 6 etc. Par ce mode de faire, les élèves reflètent ou reproduisent l'activité qu'ils déploient effectivement dans une tâche de codage d'une collection en base sept, activité qui requiert un regroupement des éléments par tas de sept. Dans une tâche de codage numérique, l'activité de l'élève consiste effectivement à compter «1 2 3 4 5 6 7 éléments» et à renouveler l'opération autant de fois que possible. Les réactions des élèves qui spontanément procèdent à une numérotation en base dix sont instructives. Un simple rappel de la consigne les amène à modifier leur numérotation.

Si la suppression des chiffres 8, 9, est assez immédiate, le chiffre 7 par contre suscite plus d'hésitations, doit-il être maintenu ou non? A l'exception de quelques élèves, qui affirment «on n'ose pas mettre 7 en base sept», le chiffre 7 est généralement maintenu.

Notons encore les tentatives d'introduire un zéro ou même un espace blanc afin de marquer le passage au groupement (passage à la dizaine). Les élèves manifestent par là une intuition qu'il se passe «quelque chose de spécial» dans l'écriture de la suite des codes, un «quelque chose» que ne prend pas vraiment en compte la numérotation répétitive 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 ... et qu'il s'agit par conséquent d'introduire.

Séquences didactiques

Nous n'avons examiné jusqu'ici que les premières réactions des élèves à la tâche proposée qui consiste à numéroter les cases du jeu de l'oie en base sept. Comme nous l'avons déjà indiqué, suite à ces premières réactions, une tentative d'apprentissage à fonction diagnostique a été introduite. Les principales interventions de l'enseignant faites dans le but d'inciter les élèves à dépasser leur première réponse spontanée ont été les suivantes:

- Dans le cas d'une numérotation répétitive, l'attention de l'enfant est attirée sur le fait gênant de trouver deux cases numérotées de la même façon (1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6...)
- Dans le cas d'une numérotation effectuée en base dix malgré la consigne, l'enseignant attire l'attention sur le fait qu'en base sept tous les chiffres ne sont pas utilisés.
- Par une correspondance terme à terme cases-jetons et suite à un regroupement effectif des jetons en base sept, les jetons sont à nouveau replacés en correspondance terme à terme avec les cases. Les élèves sont invités à transposer le codage du groupement effectué à la numérotation des cases correspondantes.
- Tentative d'apprentissage direct de la numérotation en base sept. Par analogie avec la base dix, il est expliqué à l'élève que lorsqu' on en arrive à la septième case, un groupe de sept est ainsi formé, ce qui permet de noter la septième case 10.

En fonction des réactions initiales des élèves, et selon la situation, c'est l'une ou l'autre de ces interventions didactiques qui a été mise en oeuvre. Les quatre types d'interventions didactiques énumérés n'ont pas tous été exploités systématiquement; par conséquent nous n'avons pas la possibilité de conclure avec certitude sur l'impact réel de chacun. Certaines observations peuvent toutefois être relevées:

- Lorsque l'enseignant attire l'attention des élèves sur la numérotation identique de cases différentes (dans le cas d'une numérotation répétitive), cela crée chez tous les élèves un conflit cognitif manifeste qui se traduit par la recherche immédiate d'un dépassement de la procédure initialement adoptée. C'est l'intervention qui se révèle la plus efficace pour provoquer une réélaboration du modèle initial. Elle suscite la recherche active de solutions souvent originales, tel, par exemple, un système d'indices qui accompagnent la numérotation en base dix:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							1	2	3

  ou inversement, un système d'indices qui accompagnent la numérotation répétitive:

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3
							8	9	10

Les deux «solutions» sont proposées par des élèves de 2e année. Les tentatives de dépasser la numération répétitive peuvent donner lieu à une recherche exigeante chez les élèves, recherche au cours de laquelle diverses procédures sont successivement inventées, testées, abandonnées, reprises ou modifiées.

ÉRIC - ANNE-MARIE (3e année)

Extrait:

En sont venus (après une numérotation en base dix), à adopter 0 1 2 3 4 5 6
0 1 2 3 4 5 6

ENS: Ecoutez, c'est ennuyeux, si je dis la case numéro 4, il y en a une ici et une ici.

AM: Alors, il faut faire mon idée : 5 6 8 9 10, comme ça, on est quitte d'avoir deux 4.

ENS: Mais c'est vraiment numéroté en base sept?

EL: - Non.
- On peut mettre des allumettes entre, pour séparer ... Après le 6, on peut mettre 10, ça fait un groupement puis 0 unité.

ENS: Tu es d'accord?

E: un peu ...

ENS: On va essayer.
1 2 3 4 5 6 10

AM: Après le 6, (elle rajoute le 7), ça fait un groupement (de 1 à 7), après ça fait un groupement et zéro unité.

ENS: Attendez, on va mettre des allumettes, il est où ce groupe?

EL: Là (1 à 7), c'est un groupe et là (10), c'est son calcul, c'est l'étiquette. C'est comme si on pouvait l'entourer ici.

ENS: Et la case là (10), c'est quel numéro?

AM: Alors si on ne peut pas le mettre là, là c'est 8, ah non, si on est en base sept, on ne peut pas continuer 8, 9, 10 comme ça ...

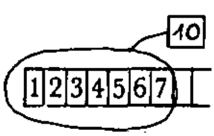
E: On pourrait mais ça serait des unités.

AM: Une fois que tu arrives à un certain chiffre, tu dois faire le groupement

EL: Ah oui! Mais si on va jusqu'à 7 puis après, on continue seulement jusqu'à 5, alors ça fait cinq unités et un groupement.

ENS: Si on veut numéroter chaque case 1 2 3 4 5 6 7

EL: On met 10 à côté.



ENS: C'est le code du groupe 1 à 7?

EL: Oui.

ENS: Comment on continue de numéroter les cases?

EL: On ne peut pas mettre 8, alors il faudrait recommencer, ah non, parce que ...

ENS: Comment on recommencerait?

AM : 1 2 3 4 , mais après si vous dites où ce qu'il est le 4, alors il y en aura plusieurs, ça peut pas marcher.

E: Moi je sais, faut continuer comme elle dit., mais après, vous disez où est le 4 du premier groupe, où est le 4 du deuxième groupe.

ENS: Ah, le 4 du premier groupe et le 4 du deuxième groupe.

AM: Il faudrait numéroter les groupements, parce qu'au bout d'un moment quand on arrive ici, ça fait sept groupements.

ENS: Il faut numéroter les groupements, je crois que c'est une bonne idée. Ici, c'est quoi (1 à 7)?

EL: Le 1

ENS: De 1 à 7, c'est le premier groupement, on met une allumette (à côté). Ici, c'est le deuxième groupement, comment est-ce qu'on les numérote?

AM: Eh ben ...on peut faire 1, 2, 3, 4, 5, 6 et puis 7. Et puis, on fait le calcul ...

E: On met deux allumettes pour montrer le deuxième groupement, ça c'est le deuxième.

AM: On numérote les groupements. S'il y en a sept, alors il faut trouver un autre moyen.

ENS: Peut-être qu'il y a moins de sept groupements!

EL: Il y a trente-quatre cases, il peut pas y avoir sept groupements.

ENS: Si on voulait écrire le numéro de cette case quatre, comment on ferait, il y a déjà un 4 ici?

AM: Si vous dites le 4, on est obligé de vous demander si c'est du premier ou du deuxième groupement, lequel?

ENS: Comment on pourrait écrire le numéro de cette case : (4, deuxième groupement)?

AM: Le deuxième groupement a aussi un 4 ...

ENS: Pour être sûr que l'on parle de cette case, comment faudrait-il l'appeler?

E : Le 4 du 2.

ENS: le 4 du 2, du 2, c'est le deuxième groupe?

EL: Oui.

AM: Le 4 du deuxième groupe.

E: Si on dit le 2 du 4, ça va pas.

ENS: Ici par exemple, il y aurait le 3 du 3?

EL: Oui.
ENS: Ca serait une méthode ...est-ce qu'on ne pourrait pas faire quelque chose de peut-être encore plus simple?
EL: Plus simple, on continue ...

Dans leur recherche d'un système de codage qui permette d'identifier chacune des cases («la 2 du 4», c'est-à-dire la deuxième case du quatrième groupement), le modèle de l'élève est manifestement en formation. On peut, dans ce cas, parler de modèle adéquat au sens où, comme l'expriment Ackermann-Valladao et al.(1983), «les représentations générales guident le travail du sujet dans la bonne direction» (p.65). Le fait pour ces élèves d'explorer une piste qu'ils sentent pertinente les motive dans leurs recherches de solutions plus satisfaisantes.

Examinons encore brièvement l'impact des autres interventions didactiques.

- Lorsque l'expérimentateur attire l'attention des élèves sur les chiffres que l'on utilise en base sept, ceci dans le cas où une numérotation en base dix a été initialement adoptée, les élèves réagissent généralement en retirant immédiatement les chiffres 8, 9, 10, etc. Le maintien ou non du chiffre 7, comme nous l'avons vu, fait plus problème; quelques élèves évoquent alors la règle de non utilisation du chiffre 7 en base sept (»on n'ose pas mettre le 7 en base sept»), d'autres maintiennent au contraire la numérotation des cases de 1 à 7.

  L'intervention de l'expérimentateur a ainsi surtout pour effet de rappeler une règle, voire un interdit concernant l'utilisation des chiffres. Elle n'a apparemment aucun effet structurant sur la compréhension de la numération.

- Le «détour» par une correspondance terme à terme cases-jetons (avec groupement et codage des jetons puis transposition du code obtenu au numéro de la case correspondante) ne semble guère remplir la fonction escomptée. Si cette «démonstration» peut paraître la plus parlante à des adultes, elle ne conduit à rien chez les élèves. Plus précisément, l'activité de groupement et de codage des jetons a pour effet de recentrer les élèves sur l'aspect cardinal du nombre et complique par là la transposition à la numérotation des cases.

- L'explication directe, qui fait intervenir simultanément les aspects ordinaux et cardinaux des nombres («en numérotant quant on arrive à la **septième** case, on **en** a déjà **sept**, ce que l'on peut écrire 10 en base sept...») semble conduire plus à un acquiescement de la part des élèves qu'à une véritable compréhension.

En résumé, il apparaît que l'intervention mathématiquement la moins «informante», qui consiste simplement à signaler qu'il est gênant de trouver deux cases numérotées de la même façon, est plus efficace qu'une démonstration ou qu'une explication aussi logiques et complètes qu'elles puissent être. Le conflit cognitif que provoque cette intervention suscite manifestement chez les élèves une activité intellectuelle et une attitude de recherche plus intenses que toute explication.

Il nous faut encore examiner quelles sont les réactions des élèves à ces tentatives d'apprentissage en fonction du degré scolaire auquel ils se trouvent. Les tentatives d'apprentissage réalisées avec les élèves de 2e année primaire ont pour effet d'amener deux couples d'élèves à l'élaboration d'un système d'indices (soit une numérotation en base dix marquée par groupes de sept, soit inversement une numérotation répétitive de 1 à 7 à laquelle est ajouté un système d'indices en base dix). Etant donné la complexité de la tâche et les difficultés rencontrées par les élèves de 2e, les tentatives d'apprentissage n'ont guère été poursuivies avec ces élèves, à l'exception d'un couple auquel a été proposée, pour terminer l'entretien, une explication directe mais sans grand succès.

Avec quelques élèves de 3e année, l'activité de recherche, d'élaboration de divers systèmes de numération est déjà plus facile à susciter; on sent chez eux un certain intérêt à «jouer» avec ces codes dont ils ont déjà une bonne pratique. La tâche proposée, bien que complexe, ne les dépasse pas complètement. Ils perçoivent en particulier le but de l'activité. Cela ne signifie pas pour autant que les difficultés rencontrées ne soient pas importantes; plusieurs d'entre eux restent en effet «bloqués» sur le concept de code comme cardinal d'une collection, indépendamment de toute série numérique ou de toute activité de numération. Les élèves de 4e année, bien qu'examinés en trop petit nombre pour tirer des conclusions générales, ne semblent guère avoir surmonté ces difficultés; la synthèse entre les aspects ordinaux et cardinaux des codes numériques n'est pas réellement établie. C'est finalement leur capacité à se mobiliser plus largement dans une activité intellectuelle qui leur permet peut-être d'aller plus loin dans une première appréhension de la numérotation en bases différentes de dix.

Discussion

Rappelons que le but des activités de numérotation proposées aux élèves à partir du jeu de l'oie était d'observer comment s'articulent, d'une part, les connaissances et expériences scolaires en matière de numération, d'autre part, la pratique «ordinaire» des nombres et du comptage.

Pour maîtriser l'écriture d'une suite de codes numériques, il s'agit de saisir qu'un code tel que 14 représente en base dix à la fois quatorze et le quatorzième code d'une suite qui commence avec 1. Les observations effectuées ont révélé que cette articulation n'est pas évidente même chez les élèves de 4e année pour qui, par exemple, le code 10 en base sept, en tant que code charnière, fait encore problème.

Au niveau du concept du nombre, les aspects ordinaux et cardinaux sont articulés par les enfants vers 5-6 ans comme l'ont montré Piaget et Szeminska (1941). Il semble bien qu'une synthèse de nature analogue doit être ensuite établie, non plus au niveau du nombre en tant que tel, mais au niveau des codes numériques qui en sont la symbolisation. Ce qui est acquis au niveau du concept est à reconstruire au niveau des écritures numériques en raison des règles et contraintes que le système de numération introduit par rapport au plan conceptuel. Mais cette reconstruction ne peut être saisie sans prendre en compte les activités numériques proposées en classe aux élèves. On peut en particulier se demander si l'approche actuelle de la numération favorise ou, au contraire, perturbe cette articulation. L'accent mis dès la première année primaire sur le codage de collections quelconques, codage qui exprime alors exclusivement le cardinal de la collection, nous conduit à retenir la deuxième hypothèse. En effet, par les activités numériques proposées en classe, on développe chez les élèves une expérience des nombres qui ne correspond pas vraiment à leur expérience ordinaire de dénombrement et d'écriture des nombres. La difficulté qu'ont les élèves à articuler leurs connaissances en matière de numérotation trouve certainement en partie son origine dans cette dissociation des expériences numériques «scolaires» et «ordinaires».

3. Sérier des nombres

Ce sont les réponses des élèves à un ensemble de questions écrites qui seront examinées ici. Par rapport à l'écriture d'une suite numérique examinée précédemment, les tâches de sériation se présentent quelque peu différemment. Ces codes numériques, en base dix, sont présentés à l'élève dans un ordre quelconque. La tâche consiste à les sérier selon la consigne donnée.

Observations

En 1ère année ce sont tout d'abord des couples de nombres que les élèves ont eu à mettre en relation (Tableau 23).

Tableau 23

<table>
<tr><td>1P Epreuve collective
Consigne lue par
l'enseignant</td><td>Réponses correctes:
a) 89%
b) 91%
c) 90%
N = 1175</td></tr>
<tr><td colspan="2">«Voici les nombres 8 et 11. Vous devez écrire ces deux nombres dans ces étiquettes. Mais attention, c'est ce signe (>) qui vous dit dans quelle étiquette il faut mettre le 8 et le 11. Vous allez faire la même chose à la deuxième ligne avec 17 et 7, et encore la même chose à la troisième ligne avec 15 et 9.

8 . 11 ☐ > ☐
17 . 7 ☐ > ☐
15 . 9 ☐ > ☐</td></tr>
</table>

Dans une autre question du même type les élèves de 1ere année devaient sérier trois nombres (Tableau 24). Par rapport à la question précédente, la part de hasard dans les réponses correctes s'en trouve fortement réduite.

Tableau 24

1P Epreuve collective Consigne lue par l'enseignant	Réponses correctes: a) 73% b) 74% c) 73% N = 1212
14, 11, 13	□ < □ < □
8, 7, 11	□ < □ < □
2, 5, 3	□ < □ < □

Maîtriser la sériation présentée de cette manière requiert en fait plusieurs capacités: reconnaître les nombres par leur écriture, les situer dans la suite des nombres et connaître la signification du signe $<$. Les trois-quarts des élèves maîtrisent la tâche. La part de l'incompréhension du signe $<$ dans les erreurs est difficile à estimer lorsque les élèves reproduisent, par exemple, systématiquement les nombres dans leur ordre initial ($14 < 11 < 13$, etc.) ou dans l'ordre inverse de présentation ($13 < 11 < 14$, etc.). Par contre, lorsque les élèves sérient correctement les nombres donnés mais inversent la relation ($14 < 13 < 11$, etc.), c'est essentiellement la signification du signe qui semble devoir être mise en cause. La moitié des erreurs trouve ainsi une interprétation non ambiguë quant à la localisation de leur source. Dans les autres cas le doute subsiste. Le fait qu'un ou deux trios de nombres soient sériés correctement laisse penser que le signe $<$ est bien décodé et que par conséquent les erreurs qui apparaissent relèvent d'une difficulté de sériation des nombres indépendamment de sa symbolisation. Notons que cette interprétation présuppose que la signification du signe est permanente chez l'enfant tout au cours de la tâche; or cela ne peut pas toujours être tenu pour acquis.

C'est à travers l'établissement du graphe de la relation «...est moins grand que ...» que la sériation des nombres 13, 103, 130, 303, 330 a été abordée en 3e année (Tableau 25).

Tableau 25

3P Epreuve collective	Graphes entièrement corrects: 84% N = 1673

Trace les croix dans le tableau.

La flèche veut dire "... est moins grand que ..."

↗	13	103	130	303	330
13					
103					
130					
303					
330					

Compléter un tableau de ce type ne pose guère de problème aux élèves de fin de 3e année, bien qu'à nouveau deux capacités se conjuguent: celle de comprendre le tableau en tant que mode d'organisation de l'information sur la relation, et celle d'identifier correctement la grandeur des nombres. Les erreurs sont de différents types: la plus fréquente (un tiers des erreurs) consiste à inverser systématiquement la relation; les croix sont mises au sud-ouest du tableau. D'autres élèves omettent simplement certaines croix, ou cumulent aussi bien les omissions que les croix mal placées sans qu'il soit réellement possible de déceler une logique dans leurs réponses. Le sens de la relation fluctue-t-il d'une case à l'autre ou est-ce la lecture des nombres qui est source d'erreurs? Il est difficile d'en décider.

Lorsque la sériation consiste à réécrire cinq nombres entre 100 et 1000, du plus petit au plus grand, indépendamment de tout diagramme (Tableau 26), le taux de réponses correctes n'est pas très différent.

Tableau 26

3P Epreuve collective	Sériation correcte: 78% N = 1691
Ecris ces nombres du plus grand au plus petit. 859 589 712 598 128	

Les deux tiers des erreurs correspondent en fait à une sériation inversée (du plus petit au plus grand) plus familière à l'élève. Si l'on ne tient pas compte de cette inversion, seuls 7% des élèves ne maîtrisent pas cette tâche. On retrouve approximativement le même nombre d'élèves (10%) qui rencontrent des difficultés avec le graphe de la relation examiné précédemment.

En 4e année une question de sériation se présentait ainsi:

Tableau 27

4P Epreuve collective	Réponses correctes aux deux questions: 45% N = 982
Souligne parmi les nombres suivants celui qui est le plus proche de 1023: 1203 1040 1230 2310 Et parmi les nombres suivants, souligne celui qui est le plus proche de 2001: 1001 1002 3001 3002	

Peu d'erreurs portent sur la première question. Seuls quelques élèves répondent 1230 au lieu de 1040, influencés manifestement par l'aspect similaire des codes 1023 et 1230. La deuxième question crée par contre plus d'embarras: un élève sur deux donne une autre réponse que 1002. C'est soit le nombre 1001 ou le nombre 3001 qui est souligné, soit, ce qui est fréquent bien que cela aille à l'encontre de la consigne, les deux nombres (1001 et 3001) qui sont soulignés. L'aspect figuratif des codes numériques semble jouer un rôle non négligeable. Derrière le code et son aspect, la grandeur du nombre désigné n'est pas toujours clairement appréhendée.

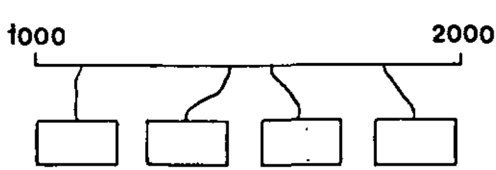
La prégnance des aspects figuratifs se trouve confirmée par les réponses obtenues à une autre question également adressée aux élèves de 4e année (Tableau 28).

Tableau 28

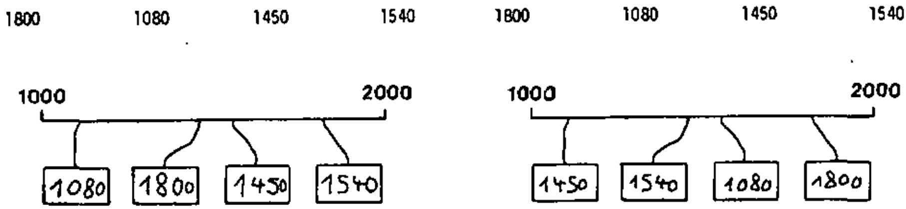
4P Epreuve collective	Réponses correctes: 89% N = 932

Place sur cette échelle les nombres suivants dans le cadre correspondant:

1800 1080 1450 1540



Un élève sur dix ne sépare pas dans la sériation les codes aux aspects semblables (1800 et 1080, 1450 et 1540). Cela donne lieu à divers arrangements dont les plus fréquents sont:



Chez ces élèves, la perception des chiffres semble en partie masquer la perception des grandeurs numériques en jeu.

Discussion

D'une manière générale la sériation de nombres écrits en base dix est maîtrisée par plus des trois-quarts des élèves. Notons que les éléments à sérier ont toujours été présentés en nombre restreint (deux à cinq selon les questions). Ce ne sont donc pas les procédures de sériations qui ont retenu l'attention, mais la réponse finale des élèves en tant qu'indice du niveau de lecture et de connaissance des nombres proposés. La lecture et l'écriture des nombres (jusqu'à 20 en 1ère année, 100 en 2e année, 1000 en 3e année, 10.000 en 4e année) paraît bien maîtrisée si l'on évite des cas limites proches du piège comme dans le tableau 27, question b.

4. Chercher le nombre mystérieux par questionnement

Les tâches qui viennent d'être examinées au sujet de la sériation de nombres écrits se présentent essentiellement sous deux formes. Un ensemble de nombres est donné: soit l'élève doit indiquer pour différents couples le sens de la relation d'ordre (à savoir si a est plus petit ou plus grand que b), soit réécrire les nombres donnés dans l'ordre croissant (ou décroissant).

La situation d'observation présentée ici fait intervenir la production par l'élève des nombres soumis à comparaison. Elle se révèle ainsi plus ouverte qu'une simple tâche de comparaison et est susceptible par là même de fournir des indices complémentaires quant à la compréhension que les élèves ont de la suite des nombres.

Le jeu du nombre mystérieux a été adapté de la manière suivante pour être joué par couples d'élèves.

Description du jeu

Un élève «questionneur» essaie de deviner le nombre (compris entre 100 et 1000) auquel pense l'élève «informateur». Le questionneur essaie avec un premier nombre, l'informateur lui répond uniquement si le nombre proposé est trop petit ou trop grand par rapport au nombre à trouver. Sur la base de cette information, le questionneur poursuit sa recherche par une nouvelle question. A chaque information obtenue l'incertitude se trouve ainsi réduite. Le jeu se poursuit jusqu'à ce que le «nombre mystérieux» soit localisé puis finalement identifié. Le but est d'y parvenir avec le mininum d'essais. De manière à garder trace de l'échange entre élèves, les questions et informations sont écrites à chaque essai par les élèves eux-mêmes. Ils se transmettent ainsi à tour de rôle une feuille qui relate l'échange (Tableau 29).

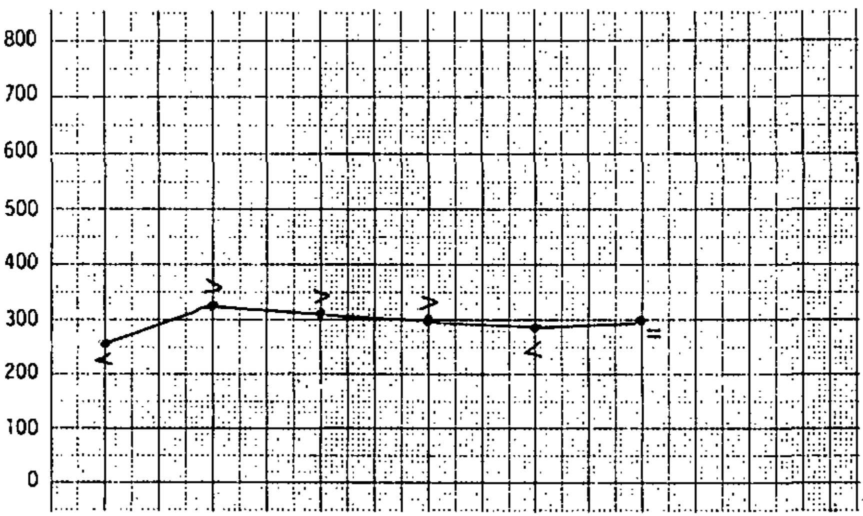
Questionneur		Informateur		
essai	nombre proposé	le nombre à trouver est plus grand	le nombre à trouver est plus petit	C'est le bon nombre
1				
2				
3				
4				
:				

A la suite d'une phase de familiarisation au cours de laquelle les élèves s'approprient les règles du jeu et les consignes concernant la feuille-réponse, les élèves ont pu jouer de manière relativement autonome.Cette situation a été expérimentée avec des élèves de 3e année (30 élèves), 4e année (43 élèves) et 5e année (19 élèves). Nonante-deux feuilles-réponses ont été recueillies qui reflètent le déroulement de quelque deux cents parties. Pour visualiser la démarche de questionnement adoptée par les élèves, la suite des nombres successivement proposés a été reportée sur un graphe, comme le montre l'exemple suivant (Tableaux 30 et 31).

Tableau 30: Exemple de feuille-réponse.

essai	nombre proposé	le nombre à trouver est plus grand	le nombre à trouver est plus petit	C'est le bon nombre
1	255	X		
2	325		X	
3	310		X	
4	300		X	
5	290	X		
6	299			X

Tableau 31: Représentation graphique.



Pascal (3P)

Ce sont les conduites et stratégies des questionneurs qui ont retenu notre attention. Celles-ci ont été examinées sous deux angles correspondant à deux questions:

- L'élève prend-il en compte dans ces questions successives l'information qui lui a été fournie précédemment?

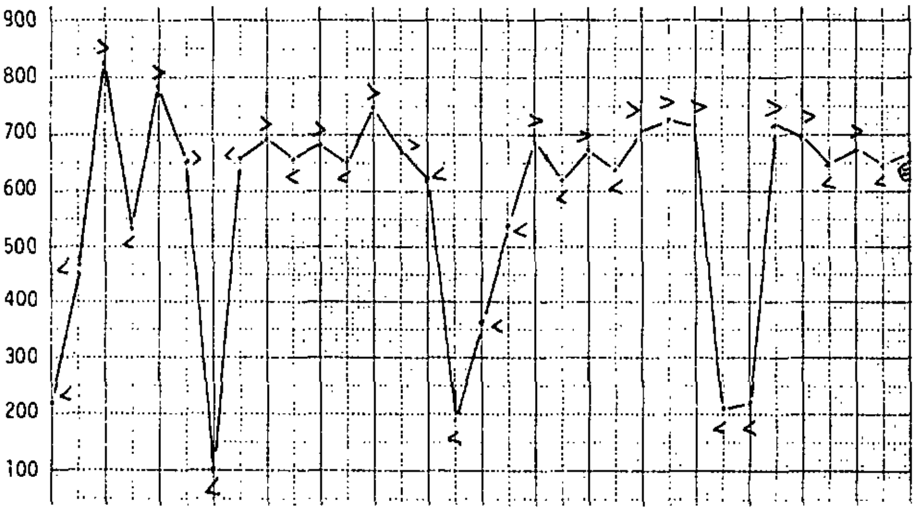
- Comment explore-t-il l'ensemble des nombres probables? Quelles stratégies met-il en jeu pour cerner le nombre inconnu?

Prise en compte de l'information fournie

Seule la prise en compte des informations exactes est envisagée ici. Il arrive en effet que l'informateur donne une réponse erronée, affirmant par exemple que le nombre à trouver est plus petit que celui proposé alors que c'est en fait l'inverse. Le plus souvent le questionneur ne semble alors pas s'en apercevoir, il poursuit sa recherche tant bien que mal avec les informations fournies parfois momentanément contradictoires. L'analyse de ces informations erronées de même que les réactions (ou absence de réactions) qu'elles suscitent pourrait faire l'objet d'une recherche en soi sur la sensibilité à la contradiction. Mais une telle analyse requérrait un mode d'observation plus précis que celui adopté dans notre investigation.

Que fait le questionneur de l'information exacte qui lui est communiquée à chaque essai? Deux situations sont à distinguer selon que l'on considère uniquement l'information fournie à l'essai précédent (information figurant sur la dernière ligne de la feuille-réponse) ou l'ensemble de l'information fournie depuis le début de la partie. L'information portant sur le dernier essai est presque toujours correctement interprétée. Les rares erreurs à ce niveau se situent principalement en début de partie; il s'agit alors pour l'enfant de se familiariser avec le sens de la relation «le nombre à trouver est plus petit que le nombre proposé» pour ne pas en comprendre l'inverse. Lorsque l'inversion se produit en cours de jeu, son interprétation est quelque peu énigmatique. Il est possible que l'expression «plus petit», dans la réponse, soit prise à un moment donné dans un sens absolu («tout petit») et non plus relatif. C'est ce que laisse penser la démarche de Nicolas (3P) (Tableau 32).

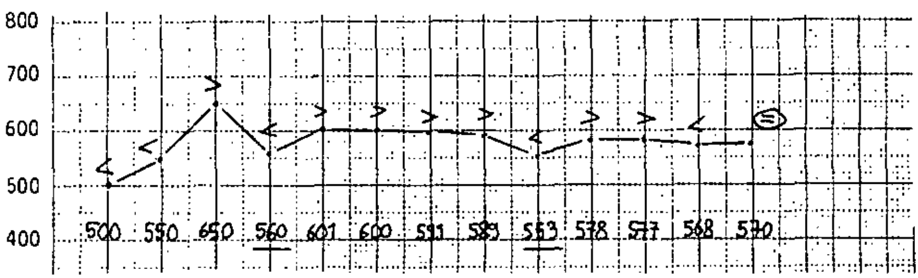
Tableau 32



Nicolas (3P)

Si à quelques exceptions près la dernière information fournie (sur la dernière ligne de la feuille-réponse) est correctement interprétée, les informations antérieures, par contre, ne sont pas toujours intégrées. Quelques élèves proposent des nombres pour lesquels la prise en compte des informations précédemment fournies aurait dû les conduire à les exclure du champ du possible. Dans l'exemple ci-dessous (Tableau 33) on relève que le nombre proposé au neuvième essai (553) néglige une information obtenue précédemment au quatrième.

Tableau 33



Joanne (3P)

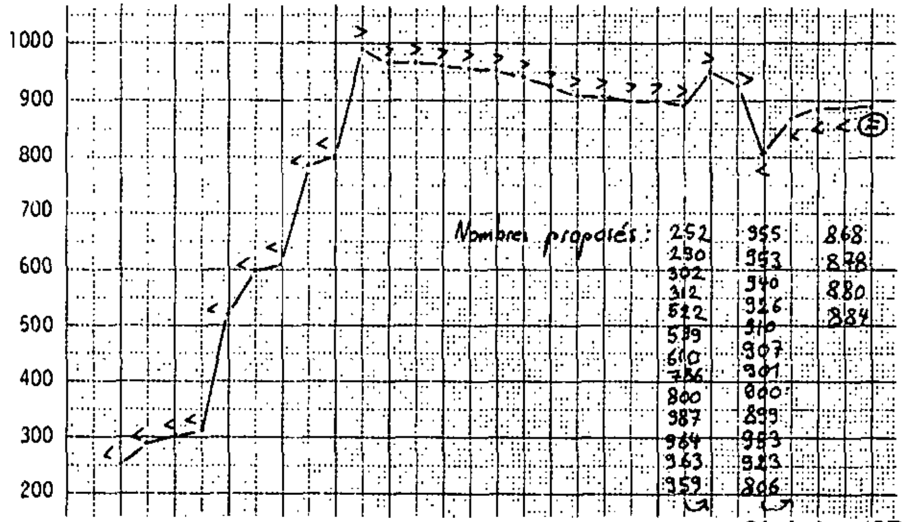
Analyse des stratégies

Une première observation générale qui mérite attention porte sur les nombres que choisissent les élèves au cours du jeu. De manière presque systématique, les élèves proposent dès le début d'une partie des nombres avec trois chiffres distincts. Ils évitent les chiffres ronds des centaines. Comment interpréter cette observation?

Procéder par encadrement à la centaine relève d'une dissociation momentanée entre la stratégie adoptée (situer l'ordre de grandeur) et le but visé (trouver le nombre). En évitant les chiffres ronds, les élèves semblent faire l'hypothèse que le nombre à trouver ne peut être un chiffre rond trop facile à repérer. Dès les premiers essais (comme dans l'exemple ci-dessus), ils tentent de tomber juste en visant tout de suite un nombre jugé probable. Cette conduite fréquente, que l'on retrouve aussi bien en 3ᵉ qu'en 4ᵉ années, révèle une articulation encore peu mobile entre moyens et fins dans une tâche de ce type. Quant aux stratégies adoptées par les élèves il est possible de mettre en évidence deux catégories de conduites selon que l'élève procède par rapprochements à petits pas ou par encadrements (plus ou moins systématiques). Ces stratégies ne se trouvent en fait jamais à l'état pur; ce que l'on peut observer chez certains élèves, c'est une dominance de l'une ou l'autre stratégie, comme l'illustre les deux exemples suivants (Tableaux 34 et 35).

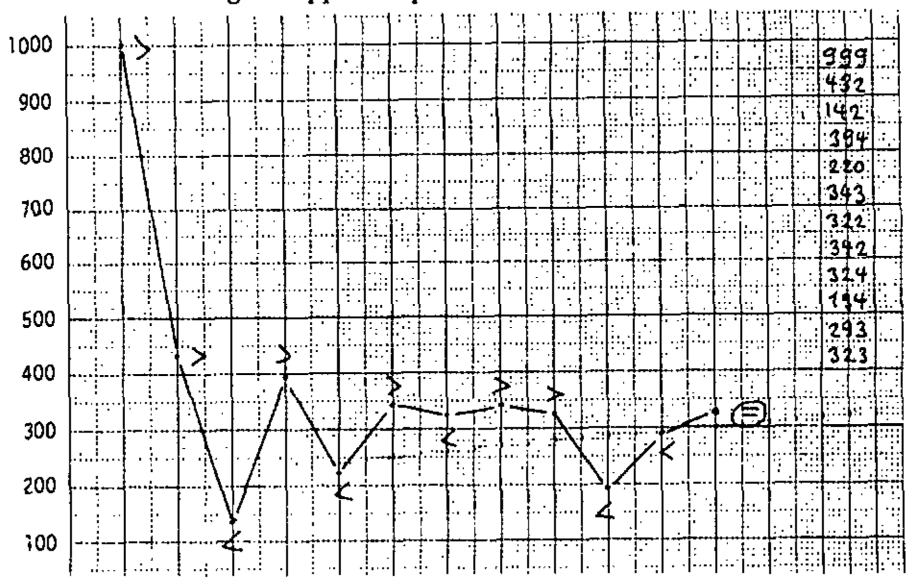
Les élèves d'une classe de 3ᵉ année ont été invités à réfléchir sur leur propre stratégie. La discussion entre maître et élèves à propos des stratégies adoptées conduit quelques élèves à expliciter la logique de l'encadrement. Un d'entre eux s'exprime ainsi: «on fait la moitié; si c'est entre 100 et 1000, on fait d'abord 500, comme ça on sait si c'est entre 100 et 500 ou entre 500 et 1000». Il est intéressant de constater que la formulation de la stratégie s'accompagne d'un recours aux chiffres ronds (centaines) comme bornes du champ d'incertitude peu à peu réduit. Notons que cela corrobore indirectement notre hypothèse formulée plus haut sur le lien entre l'usage des nombres quelconques (formés de trois chiffres distincts) et la non dissociation des moyens et de la fin visée.

Tableau 34: Stratégie de rapprochement pas à pas.



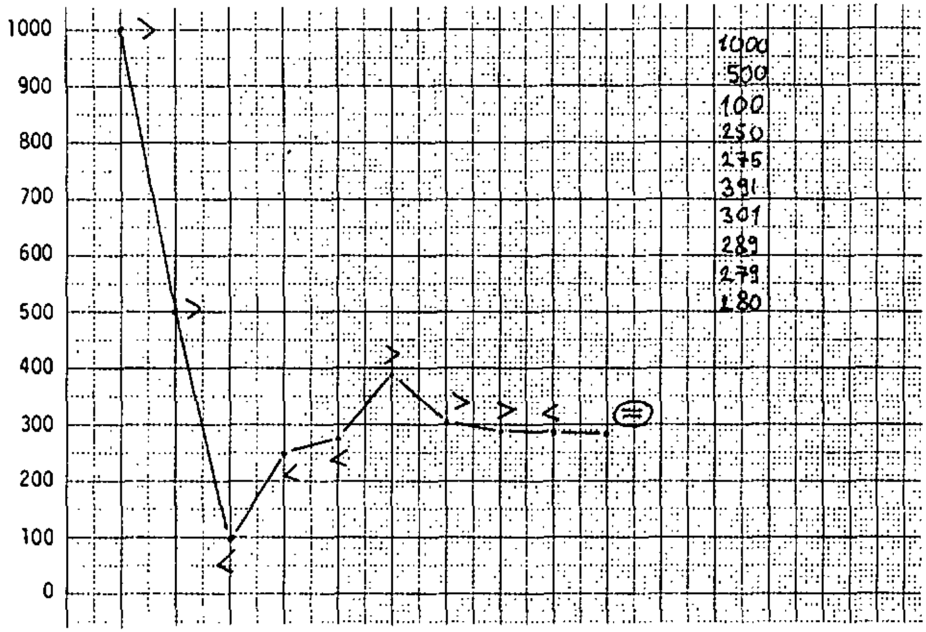
Christina (3P)

Tableau 35: Stratégie d'approche par encadrement



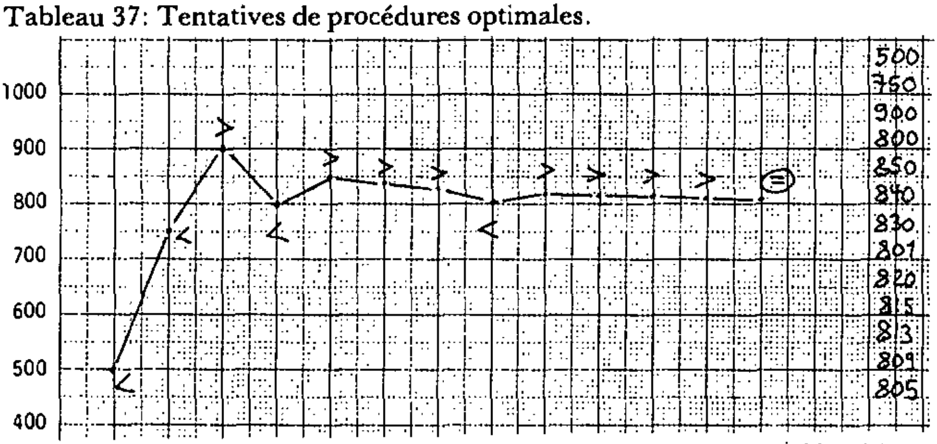
Adriana (3P)

Tableau 36: Tentatives de procédures optimales.



Joël (3e)

Tableau 37: Tentatives de procédures optimales.



Chloé (3e)

La logique de l'encadrement n'en reste chez ces élèves qu'au stade d'une première intuition, elle n'est pas poursuivie systématiquement jusqu'en fin de jeu. Deux exemples illustrent ces tentatives d'adopter une procédure optimale (Tableaux 36 et 37). Dans le premier exemple, l'élève qui commence par proposer le nombre 1000 qui est la borne supérieure confirme que la logique de l'approche par encadrement n'est pas encore vraiment assimilée.

Une dernière observation à relever porte sur l'évolution des stratégies en fonction du degré scolaire. Il est frappant de constater la similarité des conduites des élèves de 3e, 4e et 5e années confrontés à la recherche du nombre inconnu. En effet aucune évolution ne peut être mise en évidence et ceci aussi bien dans le recours aux chiffres ronds que dans le type de stratégie adoptée. La manière d'appréhender le jeu est manifestement la même chez les élèves observés. Ce que nous n'avons pas exploré, c'est la capacité des élèves de 4e et de 5e années à réfléchir sur l'adéquation de leurs stratégies et à les réviser en conséquence. Il est probable que cela soit sur ce plan que les élèves observés se différencient en fonction de l'âge.

Discussion

Par l'observation des élèves confrontés à la recherche du nombre inconnu il s'agissait d'approfondir quelle maîtrise les élèves ont des nombres et en particulier comment ils sérient les nombres dans une situation ouverte où ceux-ci ne se présentent pas à l'élève comme éléments donnés à sérier mais où ils sont à choisir en fonction d'un but à atteindre. Ce qui se dégage des observations effectuées se résume ainsi.

Dès la 3e année les élèves maîtrisent la sériation des nombres de 100 à 1000. Dans l'écriture des nombres plus petits ou plus grands proposés successivement, la valeur positionnelle des chiffres est «pratiquée» correctement. La maîtrise des codes numériques que requiert l'écriture des nombres de 100 à 1000 est acquise.

Quant à l'étendue, ou l'espace des nombres de 100 à 1000, il n'est pas certain que tous les élèves en aient la même perception. La procédure de rapprochement à petits pas laisse penser que l'élève qui l'adopte mesure mal le champ des possibles; elle pourrait être liée à une difficulté à se représenter la suite des nombres de 100 à 1000 en tant qu'espace structuré. Il est probable qu'un décalage existe entre la compréhension des codes numériques en tant que système d'écriture et la perception des grandeurs qu'ils désignent. Autrement dit l'écriture des nombres est susceptible d'être maîtrisée avant que la structuration de l'espace des nombres soit bien établie. Ce décalage est inhérent au fait que les grands nombres font partie de l'environnement culturel de l'enfant. Les grands nombres sont dits et probablement écrits par l'enfant avant que leurs propriétés ne soient pleinement construites. Cette fréquentation précoce des grands nombres joue certainement un rôle déterminant dans la structuration même de l'espace des nombres. Notons que les activités relativement formelles effectuées en classe à propos de l'écriture des codes numériques peut renforcer le décalage entre la maîtrise du code et l'acquisition du concept correspondant.

Une dernière remarque concernant la recherche du nombre mystérieux porte sur les stratégies adoptées par les élèves et les représentations de la tâche auxquelles elles renvoient. Le jeu s'organise autour de quelques éléments explicites (le but est de trouver le nombre mystérieux, il s'agit de procéder par essais successifs et d'y parvenir avec le moins d'essais possibles, etc.).

Il n'est tout d'abord pas certain que tous les éléments de la consigne orientent en permanence la conduite des élèves. En particulier, l'objectif de parvenir à ses fins avec le plus petit nombre d'essais semble être quelquefois oublié. Pour certains élèves cette contrainte n'ajoute en effet rien à l'intérêt du jeu; il leur est alors facile d'en faire abstraction. Par contre, d'autres éléments sont introduits. La stratégie par encadrement optimal (réduction de moitié du champ d'incertitude à chaque essai) est sans aucun doute la plus fiable pour limiter le nombre d'essais, mais elle revient à ne faire aucune hypothèse préalable sur la grandeur du nombre à trouver.

Comment interpréter le fait que les élèves n'articulent pas ainsi les moyens mis en oeuvre et le but poursuivi? Comment perçoivent-ils la situation? Tient-elle pour eux du jeu de hasard (type loterie)? Du jeu stratégique (combat naval)? Du jeu logique (Qui est-ce?)? Pour les élèves, faire des hypothèses sur le nombre choisi par l'informateur relève du jeu. En répétant le jeu à plusieurs reprises les nombres ne sont plus cachés de manière aléatoire, le questionneur tente d'inférer la cachette que l'informateur a pu juger la meilleure, la plus difficile à trouver (tels par exemple 999 ou 499).

En résumé, au delà des règles données explicites et bien précises, le jeu s'enrichit d'un ensemble d'éléments qui ne sont pas sans moduler, voire déterminer les stratégies adoptées par les élèves. L'interprétation de celles-ci requiert la prise en compte du contexte de signification que l'élève donne au jeu lui-même.

CHAPITRE VII

DISCUSSION ET SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

Parvenu au terme d'un examen détaillé des conduites et réponses d'élèves confrontés à un large ensemble de tâches numériques, il s'agit maintenant de discuter l'apport de cette investigation, d'identifier le noyau dur des multiples observations effectuées. Quelle vision d'ensemble se dégage de ces observations?

Conscient du risque de se trouver devant un patchwork empirique nous avons, au chapitre III, précisé le regard porté sur les réponses des élèves. Ce sont, en effet, les systèmes de représentation, qui orientent, voire déterminent la manière dont l'élève appréhende une tâche, qui ont systématiquement retenu l'attention. Le regard adopté s'est-il révélé judicieux? Qu'a-t-il permis de mettre en évidence en matière d'apprentissage de la numération? Telles sont les interrogations auxquelles cette discussion des résultats tentera de répondre.

Une première conclusion apparaît certaine: avant de vouloir faire de la maîtrise d'une tâche la mesure d'un apprentissage, on ne peut occulter le fait que la première tâche de l'élève appelé à faire preuve de ce qu'il sait est ...de comprendre la tâche qui lui est proposée! Cela paraît trivial mais le mécanisme de cette compréhension s'avère plus complexe qu'on ne le suppose généralement dans la phase de rédaction des questions d'une épreuve de connaissances. Lors des essais d'une épreuve aux fins de validation des questions, celles-ci sont généralement catégorisées en deux groupes: celles qui sont manifestement comprises par la majorité des élèves, et celles mal formulées, ou mal conçues, qui désorientent l'élève ou l'induisent en erreur. Au vu de l'analyse effectuée, cette dichotomie se révèle trop schématique. Entre la compréhension et l'incompréhension d'une tâche, se présentent toutes les formes intermédiaires de méprise sur la question, méprise qui n'est que le reflet de modèles de la tâche lacunaires et/ou inadéquats. L'étude des représentations particulières que se forge nécessairement l'élève, pour fonctionner dans chacune des tâches proposées, se révèle alors une étape préalable à toute interprétation des performances.

Les difficultés que rencontre cette étude dans le champ pédagogique méritent ici quelques remarques: nous nous arrêterons tout d'abord sur la question du caractère évolutif des représentations, puis sur l'impact de l'expérience antérieure que les élèves ont des tâches proposées.

1. Remarques sur le caractère évolutif des représentations de la tâche

Les systèmes représentatifs de l'élève, par lesquels une tâche est interprétée, n'ont rien de stable en ce sens qu'ils évoluent avec le développement des structures cognitives, mais aussi au cours même de la réalisation de la tâche. En reprenant les termes de la typologie des conduites présentée plus haut, l'évolution de la situation de novice à celle d'apprenti, voire d'expert, peut prendre, dans certains cas, l'espace de quelques secondes. Pour l'étude psychologique de ces processus, il est indispensable de les saisir au ralenti, d'où la remarque méthodologique d'Inhelder et al (1976): «L'intérêt que nous portons aux procédures exige le recours à des situations expérimentales permettant de saisir par l'observation des actions du sujet le déroulement de sa pensée, ce qui conditionne le choix des problèmes. Un de nos objectifs est de proposer un but qui ne peut être atteint que par un enchaînement d'actions.» (p.60) Ce ne sont, bien entendu, pas les mêmes critères qui président à l'échantillonnage des tâches scolaires élaborées à des fins évaluatrices. Au contraire, celles-ci sont généralement construites de manière à éviter l'enchaînement d'actions.

Le but d'une épreuve pédagogique est de procéder à une mesure ponctuelle, stable. L'évolution des performances de l'élève en cours d'épreuve agit comme un bruit; elle perturbe l'acte même de mesure conçu comme acte instantané. Cette approche qui repose sur le postulat d'une distinction bien établie entre situations d'évaluation et situations d'apprentissage, marque encore profondément les méthodes d'évaluation des élèves. Dans une épreuve, l'élève peut certes évoluer en cours de tâche; les nombreuses feuilles d'élèves qui laissent voir les traces d'une première réponse effacée en témoignent; mais la situation d'évaluation n'est généralement pas conçue pour prendre en compte cette dynamique évolutive. Les conséquences de cette orientation méthodologique sont importantes. La recherche d'une mesure idéale instantanée des capacités des élèves a paradoxalement pour effet de rendre d'autant plus déterminante les représentations initiales que l'élève se fait des questions et tâches qui lui sont posées. Or, ces représentations initiales, nous l'avons vu, sont souvent en deçà de ce dont l'élève est finalement capable. Des enseignants nous ont d'ailleurs fréquemment fait remarquer qu'il suffisait quelquefois de prendre place silencieusement à côté d'un élève pour que celui-ci modifie une première réponse incorrecte qui, sans cela, aurait subsisté. Ces quelques considérations sur la situation d'évaluation soulèvent la question de la malléabilité des conduites des élèves, malléabilité qui renvoie plus largement aux conditions d'émergence des réponses de l'élève (Perret-Clermont, 1982, 1983)

2. Remarques sur l'impact des expériences antérieures

Notre deuxième remarque porte sur l'impact des expériences antérieures des élèves. A quelques exceptions près, les tâches proposées aux élèves dans notre investigation ne leur sont pas inconnues. Il ont déjà eu l'occasion de les aborder sous une forme ou sous une autre en classe. En cela, les tâches scolaires examinées ici se distinguent des situations-problèmes créées pour les besoins de la recherche psychologique. En effet, ces dernières situations sont voulues inconnues du sujet, de manière à éviter le parasitage mal contrôlable d'expériences antérieures. Dans le contexte d'une évaluation pédagogique, la situation est autre: c'est précisément le fruit des expériences antérieures qu'il s'agit de mettre en évidence, d'où le choix de tâches relevant du répertoire scolaire.

Devant chaque tâche, l'élève cherche ainsi à comprendre précisément ce qui lui est demandé, mais il aborde également la tâche avec son passé d'expériences scolaires, avec des habitudes, des souvenirs de situations analogues, de procédures, de démarches appliquées avec succès ou non.

On comprend dès lors la place que peut occuper, dans la réalisation des tâches proposées, le recours à des conduites élaborées mais non pertinentes à la situation présente. C'est probablement une des caractéristiques du fonctionnement cognitif de l'élève que d'osciller entre une recherche active et ouverte de solutions et la transposition, consciente ou non, de démarches élaborées antérieurement, transposition qui prend appui sur l'analogie reconnue entre les situations présentes et antérieures, entre les tâches à résoudre et celles résolues.

Nous venons d'examiner quelques conditions particulières propres à l'étude des représentations de la tâche dans le champ pédagogique. Malgré la complexité de cette étude, l'investigation entreprise n'a fait que confirmer sa pertinence pour appréhender les connaissances des élèves en mathématique. Leurs connaissances se révèlent toujours à l'observation comme connaissances mises en jeu dans des tâches particulières. A partir de ces savoirs particuliers, inférer un savoir mathématique intégré est une démarche qui requiert certaines précautions.

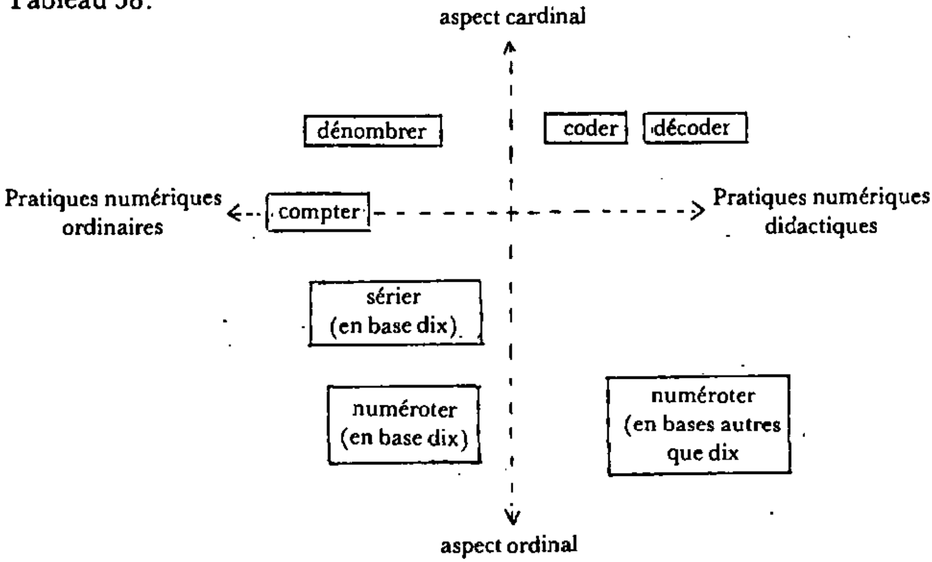
En répondant aux diverses questions qui leur ont été adressées, de quels savoirs et savoir-faire les élèves ont-ils fait preuve? Que savons-nous finalement des connaissances des élèves en matière de numération? C'est à l'examen de ces questions que nous nous attacherons dans cette synthèse des résultats.

3. Que savent les élèves du système de numération de position?

Les observations effectuées permettent d'esquisser une carte des principaux savoir-faire des élèves. Cette carte nous paraît pouvoir s'organiser autour de deux axes. Le premier prend en compte l'aspect ordinal et cardinal des nombres, le deuxième axe situe à un pôle les pratiques numériques ordinaires et à l'autre pôle les pratiques didactiques propres aux leçons de mathématique (Tableau 38).

A l'exception de la numérotation en bases autres que dix, chacun des savoir-faire considérés ici s'avère maîtrisé par une large majorité d'élèves

Tableau 38:



lorsque ceux-ci peuvent identifier la nature de la tâche sans ambiguïté. Autrement dit, les élèves sont susceptibles de mobiliser une pratique numérique adéquate pour autant que la situation fournisse tous les points de repères utiles. Ce qui, par contre, paraît plus problématique, c'est la nature des relations entre les diverses pratiques des nombres retenus ici. Au delà des savoirs locaux établis pour eux-mêmes, quelle est la densité du réseau que ces savoirs forment? A plusieurs reprises des maillons faibles ont été mis en évidence; nous reprendrons ici plus particulièrement l'examen de trois articulations relatives au comptage et au codage, à l'aspect ordinal et cardinal des nombres écrits, et finalement relatives aux aspects sémantiques et syntaxiques des nombres.

Codage numérique et comptage

Rappelons brièvement quelques faits.

- L'indication «en base dix» dans la question «Combien avez-vous dessiné d'allumettes en base dix» adressée aux élèves de 2e année perturbe un élève sur cinq. Ce qui n'est pas le cas si on leur demande simplement «Combien avez-vous dessiné d'allumettes?»

- Après avoir groupé et codé une collection de 28 objets en base cinq, puis en base dix, la moitié des élèves interrogés en 2e année procède à un nouveau dénombrement, lorsqu'on leur demande, en désignant la collection d'objets:
  «Combien y a-t-il de jetons ici?» Le code $\boxed{2}\boxed{8}$ en base dix n'est pas assimilé d'emblée par ces élèves au nombre vingt-huit.

- Des élèves de 2e année auxquels il est demandé de dénombrer un grand nombre d'objets, au delà de leur connaissance assurée de la suite des nombres, ne procèdent pas spontanément à un regroupement des objets. Malgré les difficultés et les désaccords rencontrés, ils persistent à appliquer le schéme du comptage partiellement maîtrisé. Ce constat est confirmé par Bednarz et Janvier (1984) qui observent «qu'un nombre appréciable d'enfants ne voient pas la pertinence à regrouper pour dénombrer vite une collection et que parmi ceux qui ont fait les regroupements, peu en ont déduit directement le code» (p.31).

- Des enseignants observent, dans le cadre des suites numériques, que le terme «compter» n'est pas utilisé par les enfants (de 3e année). «En bases différentes de dix, ils groupent, ajoutent un jeton, mais ils refusent la notion de comptage, 1, 2, 3, 10, 11, ... «parce que ça saute». La découverte que c'est une suite est difficile, la suite n'est maîtrisée qu'avec le matériel» (Perret, 1981).

Ces faits révèlent la coexistence chez l'élève de deux systèmes représentatifs, l'un associé à son expérience et sa pratique usuelle du comptage, l'autre associé aux activités plus spécifiquement scolaires de groupement et de codage. Ils correspondent à deux champs d'expériences distincts. L'élève fonctionne dans l'un ou dans l'autre selon sa compréhension de la tâche. A la question «combien y en a-t-il?» ou à la consigne «compte-les», l'élève actualise spontanément le modèle «comptage». Aux consignes «groupe et code» ou «trouve le code en base..», le modèle «codage» s'impose sans ambiguïté. Lorsqu'une situation comprend des éléments appartenant à l'un et l'autre modèle, l'élève fonctionne mal, faute d'articulation entre les deux modèles en jeu. En filigrane, ce constat renvoie certainement au débat général sur le décalage entre la vie et l'école.

Mais comment expliquer plus spécifiquement cette inarticulation, voire même cet antagonisme entre deux systèmes représentatifs? Faut-il trouver la chose évidente et normale, compte tenu que, dans les deux champs d'expériences numériques identifiés ci-dessus, le but à chaque fois visé n'est pas le même? Dans un cas, c'est effectivement un dénombrement qui est en jeu, dans l'autre cas, on vise la compréhension du système de numération de position. Par conséquent, aucune articulation n'aurait lieu de se produire automatiquement. Cette argumentation revient en fait à reconnaître inévitable la dissociation entre un savoir-faire (le comptage) et un savoir sur le système de numération, dissociation qui n'est guère satisfaisante. La question peut être abordée sous un autre angle en examinant de plus près en quoi se distinguent, pour l'enfant, le comptage du codage. Les principes de l'activité de comptage définis par Fischer (1981), qui s'inspire étroitement de Gelman et Gallistel (1978), sont les suivants:

- Le principe de bijection. Il consiste à assigner à chacun des n objets un et un seul mot.
- Le principe de la suite stable.
- Le principe cardinal. Le dernier mot de la suite utilisée lors du comptage est le nombre d'objets.
- Le principe d'ordre quelconque. Le cardinal de la collection comptée ne dépend pas de l'ordre dans lequel ont été comptés les objets.
- Le principe d'abstraction. Il consiste à faire abstraction des différences qualitatives des objets que l'on compte.

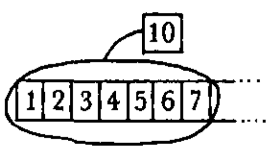
L'activité de codage, quant à elle, fait localement intervenir le comptage, d'une part lors du groupement des objets de la collection donnée (le comptage permet alors d'assurer l'équivalence numérique des groupes formés) et, d'autre part, lors du dénombrement final des objets non groupés et des groupements de diverses espèces qu'il a été possible de constituer. Mais le comptage ne remplit, dans cette activité, qu'une fonction secondaire, instrumentale. Le sens même de l'activité de codage est de construire un code numérique pour exprimer le cardinal d'une collection donnée. Notons que l'on retrouve ici la place privilégiée que le nouvel enseignement de mathématique accorde à l'aspect cardinal du nombre par le biais des représentations ensemblistes introduites dès la 1ère année, place privilégiée qui, d'un point de vue psychogénétique, n'est pas évidente comme le montre Halbwachs (1979).

La démarche didactique adoptée pour introduire les codes numériques s'appuie alors sur les homomorphismes que Vergnaud (1974) distingue entre quatre plans de représentations: plan des objets, des ensembles, des cardinaux et des nombres écrits (codes). Que signifie, pour l'élève, ce dernier passage au plan des codes numériques? Fait-il réellement la correspondance entre ces codes et les cardinaux qu'ils expriment? Ou le code n'est-il que l'expression de l'activité concrète de groupement dont la finalité (celle de dénombrer) serait perdue de vue, ou plutôt non entrevue? Certaines observations vont dans le sens de cette dernière interprétation.

Aspects ordinaux et cardinaux des nombres écrits

Un autre aspect de la question est le suivant: alors que l'activité de comptage prend appui, comme nous l'avons vu, sur le «principe cardinal» (lors du comptage, le dernier mot de la suite utilisée est le nombre d'objets), l'activité de codage ne met pas en jeu le principe réciproque («principe ordinal») que l'on pourrait formuler ainsi: le code qu'exprime le nombre d'objets est aussi le code du dernier objet compté. Or, c'est ce qui fait manifestement obstacle chez les élèves. L'aspect cardinal du code est si prégnant dans le codage que l'élève n'en voit plus son aspect ordinal.

Les réactions de quelques élèves confrontés à la numérotation des cases du jeu de l'oie en base sept sont, à cet égard, révélatrices. La difficulté de certains élèves à donner un statut à la fois cardinal et ordinal au code 10 se traduit dans des expressions du type «là (cases 1 à 7), c'est un groupe et là (10), c'est son calcul, c'est l'étiquette». Hésitant à placer cette étiquette 10 en 7e ou en 8e position, la solution adoptée provisoirement est de la mettre hors cases ou hors jeu:



Nous avons là un exemple manifeste de la prégnance que peut avoir l'aspect cardinal du code numérique, prégnance induite par le mode même de construction du code adopté en classe.

La synthèse entre les aspects ordinaux et cardinaux du nombre qui s'établit, comme l'ont montré Piaget et Szeminska (1941), vers 5-6 ans, semble devoir être alors reconstruite ultérieurement sur le plan, non plus cette fois-ci des cardinaux, mais sur celui des nombres écrits. Tant que cette synthèse n'est pas établie, l'élève actualise des systèmes représentatifs partiels organisés, selon les situations, autour du schéme de comptage ou du schéme de codage. La non articulation de ces schèmes est à l'origine de nombreuses conduites inattendues observées. Elle permet plus généralement de rendre compte des difficultés que les élèves ont à faire le lien entre la base dix et les autres bases de numération.

Aspects syntaxiques et sémantiques des nombres écrits

C'est encore ici une question d'articulation entre systèmes représentatifs partiels qui sera abordée. Tout nombre écrit renvoie d'une part aux règles d'écriture propres au système de numération de position, d'autre part aux collections d'objets (ou aux quantités continues) dont il en exprime la mesure. Comment l'élève intègre-t-il ces deux aspects syntaxique et sémantique d'un code numérique? (1)

La question ne se pose pas de la même manière selon qu'il s'agit de codes en base dix ou non. Nous avons vu précédemment que les codes en bases différentes de dix peuvent être pris par l'élève plus comme l'expression du produit de l'activité concrète de groupement que comme l'expression d'un cardinal. Autrement dit, l'élève code ce qu'il a fait et non le nombre d'éléments en jeu. A ce niveau, la signification du code numérique n'a guère de lien avec le concept de mesure, il s'agit tout au plus d'un inventaire des groupements réalisés, selon l'expression de Brandt (1984).

Cette absence de lien est d'ailleurs renforcée par la difficulté de nommer les codes numériques en base autre que dix. Le principe de les nommer

(1) Nous prenons ces qualificatifs au sens de Resnick (1982) à propos de l'apprentissage de la soustraction.

par la succession des chiffres qui les composent (le code 113 en base quatre se lit en principe ainsi «un-un-trois») ne facilite pas l'appréhension du code comme signifiant d'une mesure. Pas plus qu'un numéro de téléphone ne renvoie à une quantité. En fait, les élèves ne s'en tiennent pas à cette convention d'appellation et, par habitude et commodité, font souvent usage de la numération parlée, propre à la base dix, pour lire les codes en diverses bases. Pratique qui ne va pas sans introduire des ambiguïtés quant à quoi renvoie réellement ce signifiant bâtard.

L'aspect strictement perceptif des codes numériques a également un impact certain sur la manière dont le code est lu par l'élève. Ce sont des observations fortuites qui ont attiré notre attention sur ce facteur perceptif. Deux chiffres, 1 et 0 par exemple, ne sont perçus comme écriture du nombre dix que s'ils sont suffisamment proches l'un de l'autre pour former une seule entité signifiante et non deux chiffres disjoints. Cette observation triviale sous l'angle de la psychologie de la perception interroge néanmoins sérieusement l'usage systématique des tableaux de codage. La fonction de ces tableaux est de souligner pour l'élève la valeur positionnelle des chiffres mais, par là même, ils dissocient perceptivement les chiffres et entravent leur lecture globale. Cela conduit les élèves à adopter deux types de lecture des codes. Avec Brandt (1984), nous parlerons d'une lecture «verticale» lorsque l'élève fait le bilan d'une activité de groupement et de codage. Sous chacune des rubriques (groupe de 2e espèce, groupe de 1ère espèce, unité) l'élève y lit un chiffre. Notons que cette lecture tend à s'effectuer de droite à gauche, dans l'ordre adopté pour l'écriture du code (à partir des unités). C'est ce que révèle en particulier la réponse d'un élève invité à indiquer oralement quel code il obtient en groupant une collection de treize objets par quatre. La réponse obtenue «un-trois», justifiée gestuellement par l'élève, est mise en relation mentalement, et ceci sans équivoque, avec le tableau de codage 3 1 lu de droite à gauche.

La lecture «horizontale», par contre, est celle adoptée lorsque les élèves assimilent le code à un élément de la suite numérique décimale maîtrisée aussi bien oralement que par écrit. L'identification du code relève alors très vite d'une lecture globale.

Mais la question du rapport entre les aspects syntaxique et sémantique des nombres écrits se pose également à propos de la base dix et, en particulier, à propos des grands nombres. Le synchronisme d'acquisition observé par Meljac (1979) qui s'établit en début de scolarité entre la connaissance des nombres parlés et leur représentation graphique pourrait n'être que temporaire. Le travail systématique sur les règles d'écriture des nombres peut conduire les élèves, en 3e et en 4e année, à écrire des nombres qu'ils ne savent dénommer. Au delà de la question de pure dénomination, c'est la signification que ces codes numériques ont pour les élèves qu'il s'agit d'examiner. Lorsque les élèves de 4e année se trouvent devant la question suivante: «en base dix, quel est le nombre qui vient juste avant 11000?», comment appréhende-t-il ce nombre? Onze mille évoque-t-il une mesure, une quantité? Ce nombre écrit n'est-il qu'un assemblage de chiffres sur lequel opérer? La diversité des réponses relevées et la nature de certaines réponses telles que *999*, *9999*, *1999*, *11999* ou 1100 laissent penser qu'un certain nombre d'élèves procèdent à un traitement de la question sur le plan strictement syntaxique. Le prédécesseur de 11000 est obtenu par l'application de règles de transformation du code, sans accorder grande attention aux nombres ainsi signifiés.

La question se pose d'ailleurs déjà au niveau de la 3e année, comme l'exprime un groupe d'enseignants: «La numération pose des problèmes, notamment en ce qui concerne le passage à la centaine. Des exercices du type de la Fiche Nu 38 ne permettent pas d'arriver à la compréhension du nombre 213 par exemple. Il est nécessaire de travailler dans la base dix pour que ces nombres représentent quelque chose. Que signifie 213, quelle quantité cela représente-t-il? Combien y a-t-il d'élèves dans l'école: 120, 2000? A partir de 100, le travail dans les nombres n'est que formel, qu'un système de règles. Il y a décrochage entre le système de numération et les nombres correspondant à une réalité» (Perret, 1979). La signification d'un grand nombre sur le plan sémantique prend appui sur diverses représentations figuratives (mille correspondant à un solide de 10 x 10 x 10, à une surface de 10 x 100, etc.). Ces représentations qui permettent de structurer et de «donner corps» au nombre font intervenir diverses décompositions additives ou mulmultiplicatives du nombre (mille c'est aussi 500 + 500, 900 + 100, 5 x 200, etc.). C'est en ce sens que la construction des premiers nombres entiers, étudiée par Piaget, se poursuit au cours de la scolarité par la connaissance progressive des grands nombres. Cette acquisition consiste alors à asseoir la signification des grands nombres, parlés ou écrits, par le contenu opératoire qui en est progressivement donné et qui finalement leur donne leur sens.

Le rapport entre les aspects syntaxiques et sémantiques du nombre ainsi définis est à l'oeuvre dans le jeu du nombre mystérieux analysé plus haut (p.182). La recherche du nombre que le partenaire a en tête requiert un double savoir, l'un relatif à l'écriture des nombres, puisque les essais successifs sont transmis par écrit, l'autre à la connaissance des nombres au sens défini ci-dessus, connaissance qui correspond ici à une bonne structuration de l'espace ou de l'étendue des nombres jusqu'à mille. La stratégie efficace requiert effectivement une procédure d'encadrement progressif par réduction optimale du champ d'incertitude. Les observations réalisées montrent que de nombreux élèves maîtrisent l'écriture des nombres en ce sens que les écritures proposées sont en général correctement ordonnées, mais les stratégies adoptées, en particulier celle par rapprochement à petits pas, laissent des doutes quant à la perception que les élèves ont de l'étendue des nombres à explorer. Leur recherche relève par moment d'une exploration locale, comme si l'ampleur du champ à explorer était perdue de vue. La connaissance des écritures et la connaissance des nombres se révèlent, dans cette situation, ne pas aller nécessairement de pair; un décalage peut se produire au profit de la connaissance des écritures.

4. Conclusions

L'analyse des savoirs et savoir-faire des élèves à laquelle nous avons procédé dans cette deuxième partie a été entreprise dans un but précis. Comme nous l'avons explicité au chapitre II, la démarche adoptée visait au réexamen d'une conclusion paradigmatique à laquelle de nombreuses évaluations parviennent. Cette conclusion se résume schématiquement ainsi: les élèves ont appris beaucoup de choses, mais ils ne savent guère les mobiliser à bon escient dans des situations nouvelles. Plus que la question de la mobilisation, ce sont ces «choses» apprises qui ont retenu notre attention. En quoi consistent-elles réellement? Quel apprentissage les réponses et conduites des élèves révèlent-elles exactement?

Notre investigation visait ainsi à cerner au plus près l'acquis réel en évitant toute inférence et jugement évaluatif prématurés. Il s'agissait, dans un domaine d'apprentissage circonscrit, celui de la numération, d'identifier les représentations et procédures que met en jeu l'élève confronté à diverses tâches. De cette investigation, il ressort essentiellement que les connaissances numériques des élèves se présentent en premier lieu comme connaissances mises en jeu dans des tâches particulières. Autrement dit, ce sont d'abord des savoirs locaux dont les élèves font preuve dans les tâches proposées, et ces savoirs apparaissent souvent peu articulés entre eux.

Ce constat n'est pas sans conséquence sur la manière d'appréhender la question de la mobilisation des connaissances. Posée classiquement en termes de transfert et de généralisation, la question centrale devient celle de l'articulation des savoirs et savoir-faire acquis. En effet, comprendre le système de numération de position ne se résume pas à la maîtrise d'un ensemble de tâches bien définies. Au delà de la formation d'un répertoire de conduites et de réponses plus ou moins transférables, il faut encore que l'élève tisse des liens entre ses connaissances et pratiques diverses des nombres pour qu'il y ait réellement compréhension. L'intégration des savoirs se manifeste lorsque, confronté à diverses tâches de numération, celles-ci n'apparaissent plus à l'élève comme autant de tâches distinctes mais comme diverses facettes d'un même objet de connaissance.

En fait, un double processus cognitif est en jeu, processus que l'on peut désigner en termes de généralisation et d'accommodation. Il est intéressant de relever ici une des conséquences de l'accommodation analysée par Baldwin (1899), pour qui «en apprenant à agir, en s'accommodant pratiquement aux faits et événements qui se succèdent dans ce monde, l'enfant a acquis le sens de leur isolement relatif et de la façon dont on doit les traiter isolément» (p.256)

Cette question du rapport entre d'une part des savoirs locaux ou îlots de connaissances, selon l'expression de Baldwin et d'autre part, une compréhension générale renvoie aux conditions même de l'apprentissage de la numération. Dans les approches didactiques mises en oeuvre, les élèves sont-ils invités à mettre systématiquement en relation leurs connaissances? Ou sont-ils conduits à élaborer un répertoire de réponses de manière à faire face aux tâches scolaires? De fait, est-ce comprendre qui importe le plus, ou répondre correctement aux questions posées? Les élèves de l'école primaire ne sont pas en mesure de réfléchir à ces orientations cognitives; par contre, ils décodent avec beaucoup d'aisance ce qui est attendu d'eux, non pas sur le plan des discours en matière de visées éducatives, mais au niveau de la vie quotidienne en classe. C'est dans ce concret quotidien que prennent forme et se négocient des styles d'apprentissages, combinant savamment le savoir, le faire-savoir que l'on sait, ou à défaut le faire-croire.

Saisir la situation de l'élève requiert une analyse du contexte d'attente dans lequel il travaille. C'est à cette tâche que le prochain chapitre sera consacré.

PARTIE III

ATTENTES PÉDAGOGIQUES

ET

FONDEMENTS PSYCHOLOGIQUES

Après l'analyse des conduites des élèves présentée dans la deuxième partie, nous reviendrons dans les chapitres suivants à la question de l'écart entre les performances observées et les performances attendues. Par un contre-champ, c'est la nature et le bien-fondé des diverses attentes en jeu que nous tenterons d'éclairer. En matière d'apprentissage de la numération: qui s'attend à quoi, et pour quelles raisons?

Dans ces attentes aux multiples facettes, nous dégagerons les représentations du processus d'apprentissage qui sous-tendent le projet pédagogique des uns et des autres, qu'ils soient parents, enseignants ou auteurs de manuels. L'écart entre conduites observées et conduites attendues nous renverra alors, plus particulièrement, à la question de l'adéquation de la psychologie de l'apprentissage que véhiculent en particulier les programmes d'enseignement rénovés. Nous serons, par là, amené à reprendre plus généralement l'examen des rapports que peuvent entretenir les recherches psychologiques sur l'apprentissage et les pratiques didactiques.

Quelques points de repères pour une approche de la numération à l'école primaire seront finalement esquissés.

CHAPITRE VIII

CONDUITES OBSERVÉES ET CONDUITES ATTENDUES

Dans les chapitres précédents, les conduites observées ont fait l'objet d'une analyse psychologique centrée sur le fonctionnement cognitif de l'élève. Les conduites des élèves ont ainsi été examinées en rapport avec les systèmes représentatifs qui les sous-tendent. C'est un autre point de vue qui sera adopté ici. Nous quitterons le plan de l'analyse psychologique pour regagner le terrain de l'évaluation, qui est celui de la mise en relation des conduites observées et des conduites attendues. Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'approche actuelle de la numération à l'école primaire suscite des interrogations et des doutes qui, d'une manière ou d'une autre, sont l'expression d'un décalage entre l'apport réel et l'apport escompté de cette nouvelle approche didactique. Une rénovation pédagogique ne va pas sans susciter des attentes quant à son impact; c'est la nature de ces attentes qui retiendra notre attention dans ce chapitre.

Mais, auparavant, il nous faut expliciter la signification qui est donnée ici au concept d'attente, et pourquoi nous parlons d'attentes plutôt que d'objectifs d'apprentissage. Gilly (1980) distingue trois types de conditions qui influencent la façon dont l'enseignant appréhende chaque élève: «des conditions normatives très générales, des conditions liées à sa propre histoire personnelle et des conditions qui tiennent à l'élève et à l'expérience concrète de ses rapports avec lui dans l'institution scolaire» (p.44). Les attentes en matière d'apprentissage mathématique qui nous occupent ici, relèvent plus particulièrement des normes scolaires générales qui soustendent les conduites-types attendues. Ce n'est donc pas ici la manière dont les différents élèves sont perçus en tant que sujets singuliers qui sera examinée, approche qui caractérise les nombreux travaux sur la perception des élèves et les effets d'attentes (Marc 1981, 1983, Baker 1981), mais l'élaboration d'une représentation générale au sujet de l'élève modèle en mathématique. Les objectifs pédagogiques qui jalonnent la programmation de l'apprentissage mathématique ne sont, en ce sens, qu'un reflet de cette représentation de l'élève idéal. La définition d'objectifs d'apprentissage est l'expression explicite des attentes en matière d'apprentissage mathématique.

Parler d'attentes renvoie nécessairement à des acteurs qui ont quelques raisons d'anticiper les résultats des élèves. Autrement dit, les attentes ne sont pas désincarnées, d'où une première question peu souvent explorée, qui nous conduit au coeur d'une sociologie du curriculum: qui a des attentes en matière d'apprentissage mathématique? Qui les formule?

Le concept d'objectifs pédagogiques, par contre, relève d'une schématisation de la réalité scolaire, schématisation qui vise à rendre unidimensionelles les attentes des uns et des autres dans le but de rationaliser l'action pédagogique. Le propre des objectifs pédagogiques est alors de se donner comme tels. La question de savoir qui les formule est, en effet, occultée. Leur formulation est essentiellement perçue comme une affaire technique d'opérationalisation des intentions éducatives générales, intentions dont ou oublie alors l'origine, le champ de négociations d'où elles sont issues.

S'interroger sur la diversité des attentes dans le contexte de la rénovation de l'enseignement de mathématique en Suisse romande peut surprendre lorsque l'on sait le soin avec lequel un consensus a été recherché tout au long de la phase d'élaboration du programme romand de mathématique. Les procédures complexes de consultation adoptées n'ont-elles pas conduit à une perception commune des objectifs d'apprentissage visés et des moyens didactiques à mettre en oeuvre pour cela? Cette élaboration collective, aussi bien du programme que des moyens d'enseignement, a permis effectivement de trouver un accord en matière d'enseignement et d'asseoir l'introduction d'un curriculum rénové sur des bases solides. Cependant, cette recherche de consensus ne résorbe pas les différentes perceptions et interprétations auxquelles donne lieu un programme, même favorablement accueilli. S'interroger sur qui s'attend à quoi en matière de connaissances acquises par les élèves est une question que l'on ne peut, par conséquent, évacuer. Comme l'exprime Hameline (1979), «le sol de la pédagogie est pavé d'intentions de provenances les plus diverses et les plus contradictoires. L'éducation ne laisse indifférente aucune instance qui, à quelque échelle que ce soit, exerce, développe, consolide une influence, a fortiori un système d'influences organisées en un pouvoir» (p.57).

C'est dans cette perspective que nous tenterons d'élucider localement à propos d'un domaine précis d'apprentissage, celui de la numération, le point de vue et les attentes de quelques acteurs sociaux, en particulier les parents, les enseignants et les auteurs des moyens d'enseignement. En fonction de quels enjeux chacun de ces partenaires appréhende une nouvelle approche didactique et finalement procède à sa propre évaluation, même si celle-ci ne se pose pas comme telle? Le point de vue de chacun d'eux sera discuté ici, bien que les éléments dont nous disposons soient d'inégale importance selon le groupe considéré.

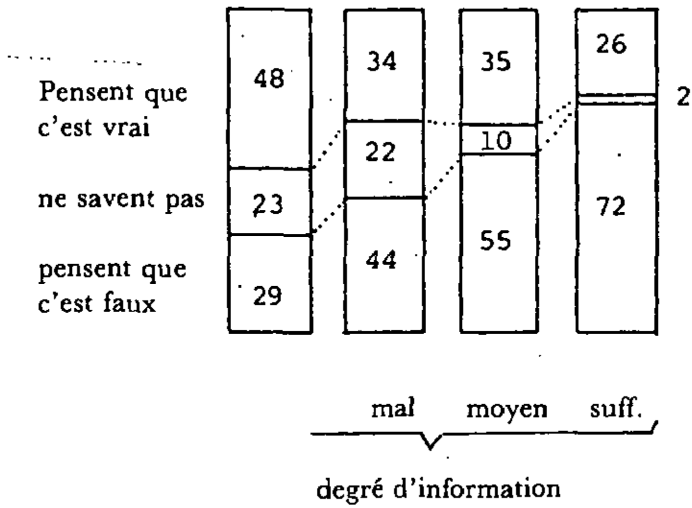
1. Les parents et la numération

Le point de vue des parents, en particulier, est le moins bien connu, tout au moins sur une question relativement technique comme l'est l'approche du système de numération de position. Cette lacune n'est pas fortuite; elle est révélatrice du peu de prises que les parents ont, dans la situation actuelle, sur le curriculum scolaire et, par conséquent, du peu d'occasions qu'ils ont de s'exprimer à son sujet. A cet égard, il est révélateur de voir la place relativement réduite que la question des programmes et des méthodes occupe dans l'ouvrage «L'école en question» du Mouvement populaire des Familles (1978). Dans les réflexions et opinions recensées au sujet de l'enseignement de la mathématique, on peut relever:

«Nous sommes un peu surpris par ces nouvelles méthodes; cependant, elles peuvent plaire aux enfants (c'est le cas des maths modernes). Il faut donc que les parents aient l'esprit ouvert.»...
«Quant aux maths modernes, c'est la bête noire qui effraie les parents: notre enfant saura-t-il un jour compter correctement? Le livret, par exemple, est délaissé, alors qu'on a besoin tous les jours de savoir compter. Certains enfants ne savent même pas rendre la monnaie, alors qu'ils savent faire bien des choses plus compliquées.

«Il y a un décalage important entre enfants et parents, ceux-ci ne s'y retrouvent plus.»
«On ne comprend pas le sens de ces nouvelles méthodes. On ne voit pas leur utilité.»
«Nous avons l'impression que nos enfants perdent leur temps.» (Mouvement populaire des familles, 1978, p.90).

Une enquête d'opinions réalisée auprès des visiteurs du Salon de l'Enfance «Kidd 77» de Lausanne reflète également les craintes que suscite la mise en oeuvre de la réforme de l'enseignement de la mathématique en matière de savoir-calculer (Jaquet, George, 1977). Quelque 700 personnes ont été invitées à se prononcer, notamment sur l'affirmation: «Avec le nouvel enseignement de la mathématique, les enfants ne font plus d'arithmétique et ne savent plus calculer». Les réponses se répartissent ainsi, en fonction du degré d'information des répondants sur la réforme:



On constate qu'en fonction du degré d'information, l'évaluation du savoir-calculer n'est pas la même. Les répondants qui se déclarent informés rejettent plus fréquemment l'affirmation avancée. C'est dans le même sens que vont les résultats d'une enquête exploratoire conduite auprès de quelques parents dont les enfants sont en fin de scolarité primaire, parents par là informés de première main (Perret, à paraître). Invités à dresser un bilan des cinq ou six années d'enseignement renouvelé de mathématique suivi par leur(s) enfant(s), l'affirmation «ils ne savent plus calculer» est généralement rejetée. Quant à savoir si «les enfants comprennent mieux les nombres», il semble difficile pour les parents de s'en faire une opinion, même si, par ailleurs, les exercices et les calculs en différentes bases proposés aux élèves, dès la première année, ne leur paraissent pas nécessairement une perte de temps.

Un thème qui revient souvent dans ces entretiens porte sur les procédés de calcul et de résolution qu'utilisent les élèves, procédés différents de ceux auxquels recourent les parents. Cela ne va pas sans difficultés, souvent mal vécues, lorsqu'il s'agit d'aider l'enfant. On retrouve ici certaines des préoccupations exprimées dans le cadre de l'enquête du Mouvement populaire des familles, relatives à la question du rapport entre les parents et les innovations pédagogiques, question que cernent en particulier Sieber et Wilder (1970) et Huberman (1972). Un deuxième thème porte sur les liens jugés insuffisants que le nouvel enseignement de mathématique entretient avec la réalité concrète et quotidienne. Les nombres en particulier sont trop souvent abordés pour eux-mêmes, en dehors de toute problématique de mesure.

Que tirer de ces quelques éléments d'information concernant les parents? Les attentes de ceux-ci vis-à-vis d'un enseignement de mathématique semblent porter en priorité sur la maîtrise du calcul comme critère d'un enseignement digne de confiance. Les moyens didactiques mis en oeuvre pour atteindre ce résultat, et notamment le travail systématique effectué dans le but d'asseoir la compréhension du système de numération de position, sont mal connus. C'est alors plus en fonction du caractère énigmatique des nouvelles approches didactiques qu'en fonction de leur pertinence pédagogique, que les parents réagissent à leur propos. Ce qu'attendent les parents, c'est que leurs enfants maîtrisent au moins ce qu'eux ont acquis lors de leur école primaire. Les moyens didactiques d'y parvenir ne sont pas, à la limite, leur affaire. En ce sens, la manière de développer chez les élèves la compréhension du système de numération n'est pas, pour eux, un enjeu en tant que tel. Ils n'en attendent rien; ce qui compte, c'est le point d'arrivée, soit la maîtrise assurée des opérations arithmétiques. Pour les parents, le terrain le plus signifiant est celui du réussir. Les facteurs qui entrent en jeu ici sont aisément cernables: la carrière scolaire de leur enfant est jalonnée d'épreuves de connaissances et d'examens de sélection. A chaque fois, le travail de l'élève est évalué sur ses réponses; il est rare que, dans ces situations, le degré de compréhension soit directement pris en compte. Dans ce contexte, ce à quoi aspirent les parents est que leurs enfants réussissent, qu'ils sachent faire preuve de ce qu'ils maîtrisent. Que cette maîtrise soit ou non reliée à une compréhension conceptuelle, plus ou moins large et solide, n'est pas leur préoccupation première. Cela relève des moyens didactiques mis en oeuvre; la responsabilité du choix des moyens est laissée à l'école et au maître d'autant plus facilement que leur nouveauté les rend difficilement déchiffrables.

Cette centration sur la réussite aux épreuves et aux examens est confirmée par une enquête de Degouys et Postic (1981) sur «les représentations des différents partenaires de la relation éducative à l'égard des mathématiques en sixième». Une des conclusions de leur étude est la suivante:

«Le déterminant de la représentation qu'ont les enfants et les parents de la réussite en mathématique est donc la note donnée par le professeur, quel que soit leur milieu socioculturel, norme qui est le reflet du fonctionnement institutionnel où les exigences de niveau en mathématiques sont bien connues pour l'accès aux filières «nobles». Ceci explique pourquoi le professeur est vu davantage dans l'exercice d'une fonction normative que dans son rôle pédagogique, et pourquoi son action d'enseignement n'est pas remise en cause.» (p.22)

Dans cette perspective, l'apprentissage mathématique consiste à acquérir les savoir-faire qui permettent de faire face au répertoire de questions d'examen; peu importe les moyens d'y parvenir pourvu que l'apprentissage soit efficace et fiable.

2. Les enseignants et la numération

Les enseignants se sont exprimés sur l'approche de la numération dans le cadre d'enquêtes par questionnaires (Cardinet, Rübner 1975; Cardinet, Jaquet 1976; Perret 1978; Pochon 1979), et dans le cadre de groupes cantonaux chargés de procéder à l'examen critique des moyens d'enseignement (Jaquet 1976; Jaquet, George 1978; Perret 1979; Pochon 1980). Les opinions détaillées des enseignants des quatre premiers degrés sur l'enseignement de la numération sont présenteés en annexe (Annexe 3).

L'examen des réponses données par près d'un millier d'enseignants de chaque degré scolaire permet de situer la manière dont ils perçoivent la place et l'impact des activités numériques effectuées en différentes bases. L'utilité et l'apport de ces activités à la compréhension du système décimal est reconnue à chaque fois par une majorité d'enseignants. On constate toutefois que, d'un degré à l'autre, l'utilité est affirmée moins systématiquement. La fréquence des interrogations et remarques qui expriment un doute augmente plus on avance dans la scolarité. Donnons-en quelques exemples. Tout d'abord, une remarque d'un groupe d'enseignants de 3e année:

- «Certains enseignants s'interrogent sur la nécessité de ces activités en différentes bases de numération, se demandent si ces exercices entraînent une réelle compréhension du système décimal» (Perret 1979).

Quelques remarques d'enseignants de 4e année relèvent d'une évaluation plus critique:

- «Les bases différentes de dix, c'est du temps perdu, il faut toujours tout reprendre à zéro».
- «Finalement, on doit utiliser la base dix pour expliquer les autres bases».
- «On pourrait bien expliquer le mécanisme de notre système de numération sans avoir recours aux bases différentes de dix».
- «Pour l'étude de la numération, les bases différentes de dix profitent à tous. Pour la compréhension du mécanisme des opérations, ce n'est plus vrai.» (Pochon et George 1980).

D'année en année, les acquis des élèves paraissent, aux enseignants, moins solides et stables que ce à quoi ils s'attendent; en particulier, la compréhension générale du système de numération de position ne leur semble pas vraiment assurée. Le lien entre les systèmes de numération en différentes bases et le système décimal (celui-ci n'étant qu'un cas particulier) est encore, en 4e année, souvent problématique.

Les remarques des enseignants soulèvent également la question complexe du rapport qui peut être établi entre la compréhension du système de numération et la maîtrise des opérations arithmétiques. Ce rapport n'est, pour le moins, pas perçu comme direct. En effet, aussi bien les enseignants de 2e que de 3e années peuvent affirmer simultanément qu'ils observent chez leurs élèves un progrès dans le domaine de la compréhension de la numération en base dix et un recul en matière de rapidité et de sûreté du calcul.

Encore plus que la pertinence pédagogique de l'approche didactique retenue, c'est son coût, estimé trop grand par de nombreux enseignants, qui est mis en cause. En 3e et 4e années, environ la moitié des enseignants se prononce pour une réduction des activités dans ce domaine, alors qu'en 4e année, le temps consacré à l'étude de la numération en tant que telle est déjà plus restreint que les années précédentes. La réduction préconisée est à mettre en relation avec le fait que les moyens d'enseignement mis à disposition des enseignants et des élèves sont extrêmement riches en activités et fiches de travail sur les différentes notions du programme. Cela requiert de l'enseignant une sélection des activités et une gestion adéquate du travail de la classe de manière à pouvoir «couvrir» le programme prévu pour chaque année scolaire.

Compte tenu de l'ampleur du programme, l'enseignant est conduit à prendre en compte consciemment ou non le rapport coût-gain de chaque approche didactique. Lorsqu'un doute existe sur le gain, les activités et tâches les moins valorisées sont laissées de côté. C'est ce que l'on observe en particulier dans le domaine intitulé «Découverte de l'espace», relativement peu exploité en classe. Dans le domaine de la numération qui nous occupe ici, cette sélection des activités paraît plus difficile. Il n'est pas évident pour l'enseignant de mesurer les conséquences des options didactiques personnelles qu'il pourrait adopter sur les connaissances des élèves. En particulier, la préoccupation de préparer suffisamment les élèves de sa classe pour les degrés suivants, réduit son champ d'action et de décision.

Examinons encore comment se pose la question du rapport entre réussir et comprendre pour les enseignants. Leur formation psychopédagogique les rend conscients que la stabilité de toute acquisition dépend de son ancrage dans les connaissances de l'élève, que tout savoir-faire algorithmique est vite oublié s'il ne prend pas racine sur une compréhension de sa logique sous-jacente. Mais, ceci dit, cette compréhension ne s'observe pas directement; elle ne peut être qu'inférée des conduites observées dans la diversité des tâches successivement proposées aux élèves.

Une leçon est estimée bien se dérouler si, d'une part le climat de classe a favorisé la participation du plus grand nombre d'élèves, et si, d'autre part, la majorité d'entre eux ont pu répondre correctement aux questions posées. Dans ce contexte, une attention toute particulière est portée de fait aux performances des élèves, sans qu'il soit toujours possible de référer ces performances aux compétences qui les sous-tendent.

Dans le cadre d'une autre étude, nous avons en effet pu constater, en travaillant avec des groupes d'enseignants à la mise en oeuvre d'une évaluation formative des élèves, à quel point *il était difficile* d'inférer sur la base des performances observées ce qu'un élève comprend réellement des notions sous-jacentes en jeu. Les tentatives d'abandonner une simple comptabilité des réponses correctes données par un élève dans une épreuve, au profit d'une analyse plus qualitative de ce qu'il a compris ou est en voie de comprendre, se sont révélées à chaque fois ardues. La rationalité d'une démarche d'évaluation formative qui se traduit par trois étapes, observer-diagnostiquer-remédier, ne relève pas de la pratique courante d'enseignement, pratique qui relève plus d'un bricolage, comme le montre Perrenoud (1983), que d'une approche clinique et d'une régulation raisonnée de l'intervention didactique. L'enseignant travaille ainsi avec deux systèmes de représentations dont l'articulation n'est pas évidente. L'un prend sa source dans la littérature psychologique et pédagogique, est centré sur la compréhension des structures sous-jacentes à tout savoir-faire, l'autre, issu de la pratique même d'enseignement, est axé sur le relevé des performances des élèves comme critères d'adéquation de l'intervention pédagogique quotidienne.

3. Les auteurs des moyens d'enseignement et la numération

Dans le contexte romand, les moyens d'enseignement de mathématique mis à la disposition des enseignants et des élèves sont édités par l'Office romand des éditions et du matériel scolaires, organe des Départements de l'Instruction publique. De ce fait, l'impact de ces ouvrages est considérable: ils concrétisent dans le détail le plan d'études qui fixe, quant à lui, les grandes lignes des programmes scolaires. Les moyens d'enseignement de mathématique donnent ainsi forme au projet pédagogique ambitieux qui soustend la réforme de cet enseignement.

Les visées et attentes des auteurs en matière d'apprentissage de la numération transparaissent de deux manières dans leurs ouvrages: d'une part, sous une forme déclarée dans l'introduction, d'autre part, d'une manière implicite, par le biais des activités et du style de leçons proposés.

a) Les attentes déclarées

La place que les auteurs des moyens d'enseignement de mathématique accordent à la compréhension des concepts et structures de base dans l'apprentissage mathématique, et à la compréhension du système de numération de position en particulier, s'inscrit dans un courant de recherche didactique qui voit le jour dans les années soixante, courant largement marqué par les travaux de Dienes. Il n'est par conséquent pas inutile de rappeler ici quelques orientations didactiques sur lesquelles ont pu s'appuyer les auteurs des moyens d'enseignement romands.

Dienes part de l'analyse du système de numération de position, système qui permet, par exemple, de signifier par les chiffres 2359 le nombre $2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$ en fonction des règles de décomposition selon les puissances successives de la base de numération. La question didactique que pose cet auteur est de savoir comment présenter une structure mathématique aussi complexe à un jeune enfant.

«Le concept de nombre naturel dans sa forme quantitative peut être tenu comme établi; autrement dit, le nombre cardinal peut être considéré comme un concept opérant (...). Il n'en est pas de même du concept de chiffre (qui aura différentes significations selon sa position), de puissance ou de base de numération. Nous devons pourvoir amplement au cycle de maturation par le moyen d'expériences réelles qui conduiront à ces concepts et à leur intégration définitive. De telles expériences ne se trouvent que rarement, sinon jamais, dans la vie réelle et doivent donc être artificiellement créées dans la classe. Un matériel structuré conduisant l'enfant dans les directions indiquées doit être fourni(...). En utilisant de tels matériels variés, nous pouvons amener finalement l'enfant à prendre conscience de ce qui est essentiellement la même chose dans la structure, cette «même chose» étant la structure mathématique elle-même.» (Dienes, 1966, p.73)

C'est ainsi que divers matériaux sont élaborés, dont en particulier les blocs multibases qui invitent l'élève à «fonctionner» tout d'abord sur le plan concret, puis sur le plan symbolique, dans plusieurs bases de numération. Les activités de groupement permettent, dans la perspective de Dienes, d'approcher la notion de puissance.

«Il est possible, et même absolument nécessaire, de procurer aux enfants des expériences concrètes pour construire les situations correspondant aux puissances des nombres» (Dienes 1970, p.52)

L'intérêt des activités en diverses bases est souligné à plusieurs reprises.

«Pour consolider les fondements mathématiques de la numération, il importe d'encourager le comptage dans toutes les bases possibles » (Dienes 1970, p.57).

Les quelques éléments qui viennent d'être rappelés sur les perspectives pédagogiques qui voient le jour dans les années soixante sont suffisants pour saisir l'accent qui est alors mis sur la compréhension des structures mathématiques les plus générales. De cette compréhension est censé découler un pouvoir d'action et de maîtrise d'une grande variété de problèmes familiers ou nouveaux. Dans cette conception de l'apprentissage et du fonctionnement intellectuel, comprendre implique réussir et les savoirs engendrent des savoir-faire.

Les objectifs assignés à l'avenue «Numération» dans les moyens d'enseignement romands mettent à plusieurs reprises l'accent sur la compréhension des principes fondamentaux du système de numération de position. Le lecteur trouvera en annexe (annexe 4) les visées pédagogiques concernant la numération telles qu'elles sont formulées dans les ouvrages romands. Nous en retenons ici quelques éléments extraits de Mathématique 1P, 1ère édition, 1972.

«L'étude de la numération de position dans différentes bases a pour but de conduire à la découverte des conventions qui régissent notre système décimal, (...).

Pour l'enfant les avantages de cette étude sont:

- qu'il domine mieux la numération décimale parce qu'il en comprend la construction grâce au travail exécuté dans d'autres bases;

- qu'il reste attentif à la valeur positionnelle de chaque chiffre dans l'écriture d'un nombre;

- qu'il peut écrire très tôt des nombres de plusieurs chiffres et comprendre la signification de cette écriture en manipulant une collection restreinte d'objets;

- qu'il comprend les techniques des opérations en découvrant que les démarches sont les mêmes quelle que soit la base choisie» (p. *108*).

b) Les attentes implicites

Les attentes des auteurs dans le domaine de la numération se manifestent également d'une autre manière, par le biais des activités préconisées. Les leçons qu'ils proposent dans leur guide méthodologique sont présentées sous la forme de «scénarios». Un dialogue fictif est décrit de manière à illustrer comment chacune des activités peut être conduite en classe. Ces scénarios accordent une place prépondérante aux questions adressées à l'élève. Ces questions balisent pas à pas l'activité en vue de stimuler la réflexion de l'élève selon un modèle pédagogique bien établi, non sans lien avec la maïeutique. L'enchaînement des questions prend appui sur des réponses ou des réactions supposées d'élèves. Un extrait de scénario permettra d'illustrer la nature de l'interaction maître-élèves imaginée par les auteurs des moyens d'enseignement.

(Extrait de l'activité Nu 1 présentée dans «Mathématique 3P»)

1. - Agnès compte ses timbres en base quatre.
La maîtresse dépose environ 40 timbres, ici 42.

Un élève reçoit les petites enveloppes, un second les moyennes, un troisième les grandes.
Les autres enfants commencent à grouper les timbres par quatre. Mais au fur et à mesure que les groupements apparaissent, les responsables des enveloppes interviennent. Dès que quatre petites enveloppes sont remplies, on les glisse dans une enveloppe moyenne; de même, dès que quatre enveloppes moyennes sont remplies, on les glisse dans un grande.
Quand tous les timbres sont groupés, on code la collection:

base quatre

g.3	g.2	g.1	u
	2	2	2

- Lisez ce code:
Toute réponse correcte est acceptée, à condition que la base quatre soit mentionnée.
La maîtresse lit elle-même:
- 2 groupements de deuxième espèce;
- 2 groupements de première espèce;
- 2 unités en base quatre.

2. - Isabelle compte aussi en base quatre, voici sa collection.
La maîtresse présente des enveloppes fermées, par exemple trois enveloppes moyennes, deux petites et un timbre isolé. On compare les collections d'Agnès et d'Isabelle:
- Qui a le plus de timbres (Isabelle).
- Pourquoi? (elle a trois enveloppes moyennes).
Si cette réponse n'est pas convaincante pour chacun, la maîtresse demande:
- Que contient une enveloppe moyenne?
- Et une petite?
- Laquelle des deux contient le plus de timbres? (la moyenne).
- Qui, d'Isabelle ou d'Agnès, a le plus d'enveloppes moyennes? (Isabelle, elle a plus de timbres qu'Agnès).
Si les enfants ont bien compris, la vérification consistant à ouvrir les enveloppes n'est pas nécessaire.

3. - Que faudrait-il ajouter à la collection d'Agnès pour qu'elle compte le même nombre de timbres que celle d'Isabelle?
Si les enfants répondent qu'il faut ajouter une enveloppe moyenne, ils constatent en manipulant que c'est trop. En tâtonnant, ils arrivent à la solution exacte (trois petites enveloppes et trois timbres). Certains peuvent donner la réponse sous cette forme: une enveloppe moyenne moins un timbre.
Après discussion, on constate que cette réponse est également acceptable (p.47-48).

Comme on peut le constater, le discours adopté dans les notes méthodologiques a un statut tout à fait particulier. Il est à mi-chemin entre l'exposé des règles d'un jeu, formulées habituellement au présent, et le compte rendu d'une leçon effective. Ce double statut vient du fait que la leçon en question a effectivement été expérimentée par les auteurs, mais le scénario présenté perd son caractère de compte rendu d'une leçon donnée pour proposer un exemple, voire un modèle de leçon. Les auteurs sont conscients des limites de l'exercice lorsque, en introduction à leur ouvrage, ils précisent que:

«La nécessité de conserver au texte de la méthodologie suffisamment de clarté empêche de rendre constamment toute la part de recherche et d'inventions que les élèves manifestent au cours d'une leçon. Les réponses supposées des enfants sont mentionnées entre parenthèses; elles ne constituent que des exemples, il est évident que d'autres réponses sont également recevables.» (p.III)

Même si les réponses et réactions supposées des élèves ne sont données qu'à titre d'exemples, elles prennent au fil des pages statut de réponses modèles au sens de celles qu'est censé donner un élève-type ou un élève «épistémique» dont la principale caractéristique est de jouer adroitement le jeu proposé. Ses réponses sont, soit celles attendues, soit justement celles qui permettent à l'enseignant de clarifier un point ou un autre. Plus qu'une attente en terme de connaissances acquises, les scénarios proposés trahissent une attente relative à la participation de l'élève: l'élève est censé, tout au long du parcours que lui propose l'enseignant, saisir immédiatement où celui-ci veut l'emmener, et ce qu'il attend de lui. Sur une classe d'une vingtaine d'élèves, il se trouve toujours l'un d'entre eux, à un moment, qui assure le rôle de cet élève modèle. Le propre de cet élève idéal, que reflètent indirectement ces scénarios, est d'avoir suffisamment saisi la logique et les conventions du codage numérique pour entrer dans le jeu.

4. Un tissu d'attentes

Comme nous venons de le montrer au cours de ce chapitre, les parents, les enseignants et les auteurs des moyens d'enseignement n'ont pas les mêmes attentes en matière d'apprentissage de la numération. Chacun porte en effet son propre regard sur l'approche didactique mise en oeuvre selon qu'importe en premier lieu l'obtention de réponses correctes aux divers exercices proposés, la participation active des élèves, la structuration des connaissances numériques ou encore la réussite scolaire globale de l'élève. Ce sont là autant d'enjeux qui constituent la trame de fond sur laquelle prennent forme les opinions et évaluations des uns et des autres. Dans ce contexte, parler d'échec ou de succès d'une approche didactique n'a de sens qu'en précisant, d'une part, pour qui il y a échec ou succès et, d'autre part, sur quel critère le jugement évaluatif est formulé. On constate en effet qu'une même conclusion (telle par exemple la nécessité d'aménager l'approche de la numération) peut être formulée pour des raisons différentes selon que l'on prend en compte soit les difficultés rencontrées dans la gestion ou le déroulement du travail de la classe, soit l'articulation partielle des savoirs et savoir-faire des élèves.

En conclusion, la tâche d'évaluation définie comme mise en relation des conduites observées et des conduites attendues ne peut se réduire à une simple mesure de distance entre deux points. L'interrogation initiale d'où nous sommes parti, interrogation qui se résume ainsi: en matière d'apprentissage de la numération, qui s'attend à quoi et pourquoi? nous a conduit à explorer ce tissu d'enjeux multidimensionnel dans lequel les acteurs du champ éducatif inscrivent leurs attentes à l'égard des élèves.

CHAPITRE IX

A PROPOS

DE LA RÉFÉRENCE PSYCHOLOGIQUE

Au cours du chapitre précédent nous avons mis en évidence que les attentes des parents, des maîtres et des auteurs de manuels, en matière de numération, ne se recouvrent pas entièrement. Les raisons de ce décalage se sont révélées multiples. Nous nous arrêterons ici à l'examen d'une des dimensions qui entre en jeu dans l'expression de ces attentes, soit la représentation que chacun se fait du processus d'apprentissage par lequel les élèves maîtrisent le système de numération de position. Au coeur de cette représentation, on trouve la question difficile du rapport qui peut être établi entre les savoir-faire et les savoirs ou, en d'autres termes, entre réussir et comprendre. Cette problématique qui sous-tend de nombreux travaux, aussi bien en psychologie cognitive qu'en pédagogie, forme le noyau central autour duquel les représentations des uns et des autres s'organisent.

Dans le champ de la recherche psychopédagogique productrice de représentations savantes, le débat a longtemps consisté (comme le relève Resnick, 1982) à opposer une approche algorithmique à une approche centrée sur la compréhension. Ce n'est que récemment que les recherches en psychologie cognitive fournissent les instruments conceptuels pour analyser comment s'intègrent, dans les conduites de résolution de problèmes, des savoir-faire susceptibles d'être «entraînés» et les connaissances plus générales qui leur donnent sens. C'est dans cette perspective cognitiviste que Berberat (1980), par exemple, présente un modèle qui situe le rôle du drill et de la mémorisation dans l'apprentissage mathématique.

S'il est vrai que de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves sont liées à une incompréhension des concepts de base sur lesquels prennent appui les procédures spécifiques de calcul, on constate également qu'une bonne compréhension des concepts sous-jacents ne conduit pas nécessairement à la maîtrise de ces procédures. Plus exactement, il n'a jamais été prouvé qu'un enseignement centré sur les structures mathématiques soit d'un apport réel à l'élève pour résoudre des problèmes complexes.

L'élaboration d'approches didactiques combinant situations d'action et situations de formulation (Brousseau 1970), approches susceptibles de favoriser chez les élèves une mise en relation des procédures de résolution et des connaissances acquises, reste un champ d'investigation largement ouvert. Il n'est donc pas étonnant que cela soit autour d'une question de recherche ouverte que les représentations véhiculées dans le champ scolaire laissent tout particulièrement voir du jeu. On constate en effet que les représentations savantes en matière d'apprentissage mathématique n'ont pas vraiment résorbé les représentations ordinaires fortement congruentes avec des pratiques pédagogiques bien établies. Cette cohabitation d'éléments représentatifs hétérogènes est-elle néfaste ou au contraire dynamisante pour la recherche didactique? La réponse dépend des orientations épistémologiques adoptées.

Trois options peuvent être distinguées:

- attendre des recherches psychologiques sur l'apprentissage qu'elles fournissent enfin un cadre théorique unificateur pour penser l'apprentissage mathématique, cadre suffisamment valide pour s'imposer dans les esprits;

- renoncer à se référer trop étroitement à des données de recherches fondamentales en constante évolution et prendre plus appui sur les savoirs ordinaires fondés sur l'expérience des enseignants;

- viser le développement d'un savoir spécifique en matière d'apprentissage scolaire.

C'est plus généralement la question de l'apport des recherches psychologiques à la pédagogie qui est soulevée ici. Notre intention est de faire le point sur la question en rappelant la manière dont cette problématique s'est posée au cours des vingt dernières années, ceci dans le but de situer les orientations qui se dessinent actuellement.

1. Extrapolation et transposition des données psychologiques

L'utilisation des données psychologiques dans le domaine de la pédagogie a été conçue de diverses manières. On peut tout d'abord distinguer, avec Ausubel et Robinson (1971), les démarches qu'ils qualifient d'«extrapolation» et de «transposition». La position selon laquelle la plupart des données psychologiques obtenues en situation expérimentale de laboratoire sont «extrapolables» à une situation pédagogique de classe a tenu, et tient d'ailleurs encore, une grande place en sciences de l'éducation. Cette extrapolation repose sur la reconnaissance d'une analogie entre une situation expérimentale et une situation pédagogique. Dans cette perspective, l'analogie des situations légitime l'utilisation directe dans l'enseignement des lois psychologiques dégagées par une recherche fondamentale. L'extrapolation des travaux de Skinner sur l'apprentissage animal à l'enseignement programmé est un exemple-type de cette démarche (Le Ny, 1974).

Notons que la question de l'extrapolation à partir de la psychologie se pose sur deux plans distincts. A un premier niveau, ce sont les résultats des recherches psychologiques qui peuvent donner lieu à une exploitation directe en pédagogie, mais il existe également un autre type d'extrapolation, moins souvent mis en évidence, d'ordre plus méthodologique ou épistémologique, que factuel. De la psychologie, il est en effet souvent tiré une représentation de l'élève et, plus largement, de la situation pédagogique. La psychologie pédagogique de maints auteurs piagétiens, qui s'appuient strictement sur les données psychogénétiques, nous semble relever, pour une bonne part, d'une telle extrapolation. La situation de l'examen clinique tend, en particulier, à devenir le «modèle» d'une situation pédagogique. Si l'on définit avec Morf (1970) l'intervention didactique comme «un aménagement systématique de l'univers d'expériences dans lequel la connaissance se constitue» (p.2), sa parenté avec l'intervention du psychologue dans les recherches psychogénétiques est évidente. Dans les deux situations, le paradigme est le même: l'enfant (l'élève) est confronté à une situation (problème, tâche à effectuer, énoncé à décoder, etc.) pour laquelle l'expérimentateur (l'enseignant) lui demande d'émettre un jugement, d'effectuer une construction ou de résoudre un problème. Toute l'information nécessaire au sujet (à l'élève) est donnée dans la situation, soit au niveau de la consigne, soit au niveau des propriétés du dispositif expérimental (du matériel didactique). Il existe ainsi une parfaite congruence entre les deux situations expérimentale et pédagogique bien qu'actuellement, pour des raisons historiques et institutionnelles, leurs visées ne se recouvrent pas nécessairement; dans un cas, l'accent est mis sur la connaissance du processus d'apprentissage, dans l'autre, l'accent est mis sur la formation de l'élève.

L'extrapolation d'une situation à l'autre se traduit également par une certaine approche de l'échange verbal maître-élève, préconisé en situation pédagogique. Si l'enseignant a pour fonction de stimuler, par ses interventions, la réflexion de l'enfant, ce qui nécessite, comme l'exprime Kamii (1980) «imaginer comment l'enfant pense et intervenir en fonction de ce qui se passe dans sa tête» (p.43), sa tâche s'apparente alors largement à celle du psychologue bien que, comme nous l'avons dit, sa finalité ne soit pas identique. Notons que divers cadres théoriques appliqués par extrapolation à la pédagogie tendent à produire des lectures réductionnistes de la situation pédagogique; les travaux anglo-saxons sur l'apprentissage ont marqué une approche de l'élève comme apprenti (learner). Les travaux sur la résolution de problèmes ont amené certains auteurs à ne voir en l'élève qu'un «solutionneur» de problèmes, l'apprentissage par découvertes a donné lieu à une pédagogie de la découverte. La caractéristique de ces extrapolations est qu'à chaque fois ce ne sont pas seulement des résultats de recherches qui sont extrapolés mais, plus fondamentalement, le cadre épistémologique sous-jacent pris comme référence.

Une deuxième démarche dite de «transposition» part du constat que les données obtenues dans le cadre d'une recherche de laboratoire ne peuvent pas, sans autre précaution, être extrapolées à la situation pédagogique, en raison principalement du degré plus grand de complexité de cette dernière situation. Si l'analogie entre ces deux types de situations n'est que partielle, les données psychologiques ne peuvent alors que fournir des hypothèses qui doivent encore être validées sur le terrain pédagogique, d'où une tâche spécifique de transposition. Une telle démarche peut être illustrée par les travaux de Berlyne (1960). Le cadre conceptuel élaboré par cet auteur, relatif aux conduites exploratoires, à la curiosité et à la réduction de conflit, cadre élaboré sur la base d'expériences de laboratoire portant initialement sur le comportement animal, a suscité un grand nombre de travaux de «transposition» au niveau de la situation de l'élève (Robinson 1974).

Alors qu'une démarche d'extrapolation ne laisse aucun espace à une discipline intermédiaire (toute donnée psychologique constitue une psychologie pédagogique (1) potentielle), une démarche de transposition fait, au contraire, explicitement appel à la nécessité d'un champ de recherche intermédiaire comme source même de validation de la transposition. Maints auteurs ont souligné le caractère essentiel et indispensable de telles recherches intermédiaires. Toutefois, selon le statut accordé à celles-ci, nous pensons pouvoir dégager deux orientations différentes. Pour certains auteurs, les recherches intermédiaires remplissent essentiellement le rôle de ponts entre la recherche fondamentale et la pratique pédagogique. D'autres auteurs visent plus explicitement à constituer ce champ de recherches intermédiaires en un corps de connaissances autonomes, acquérant son statut propre. Dans le premier courant, nous situons le modèle élaboré par Hilgard (1970) qui propose la prise en considération des six étapes successives qui permettent de relier légitimement la recherche de laboratoire sur l'apprentissage à l'adoption de méthodes pédagogiques généralisables.

(1) Nous utilisons ici le terme de psychologie pédagogique pour désigner une approche psychologique de l'enfant en situation pédagogique, Mialaret (1974) dans le Traité de psychologie appliquée désigne cette approche par le concept de pédagopsychologie, comme une des démarches de la psychologie de l'éducation. Nous évitons le terme plus large de psychopédagogie, couramment utilisé en langue française, qui comporte des acceptions très diverses comme le souligne Léon (1966). En effet, par psychopédagogie, on entend aussi bien une approche psychologique de l'enfant-élève qu'une «pédagogie scientifiquement fondée sur la psychologie de l'enfant», selon la définition de Piéron (1968).

Dans le même esprit, Carpenter et Haddan (1964) définissent neuf phases que doit respecter toute application psychologique. C'est également dans une optique de transposition que Bang (1971) souligne la nécessité de travaux intermédiaires pour exploiter légitimement les données de la psychologie génétique.

Notons que, sans nécessairement se poser au niveau d'une investigation expérimentale, cette préoccupation de transposition ou de transcription est également celle de nombreux auteurs qui, en tant que psychologues de l'éducation, s'adressent aux enseignants en formation (Lindgren, 1967), Garrison et Magoon (1972), Stones (1973). Cronbach (1962), par exemple, préconise une psychologie pédagogique (educational psychology) qui devrait être pertinente et utilisable par rapport aux problèmes scolaires; pour cet auteur, chaque chapitre d'un ouvrage de psychologie pédagogique devrait provoquer un changement chez l'enseignant, ce qui suppose un effort de traduction de transposition du matériel psychologique en termes signifiants pour l'enseignant. La tâche de transposition n'est pas toujours perçue comme spécifique du psychologue. Certains auteurs, en effet, préconisent que les données de la psychologie transmises aux enseignants soient, pour ceux-ci, un moyen de poser des hypothèses relatives à leur pratique. Comme l'exprime Coladarci (1972), l'enseignant procéderait ainsi: «sur la base de ce que je sais en psychologie, je pense que...». La tâche de transposition confiée à l'enseignant s'inscrit ainsi dans une certaine vision d'un enseignant-chercheur soucieux, en permanence, de valider ses propres stratégies d'enseignement. Des travaux récents montrent la complexité de la tâche. L'exploitation par l'enseignant des données de la recherche en éducation rencontre des difficultés majeures dues aux contraintes de la situation scolaire et, notamment, à ce qui constitue l'«écologie» de la classe (Huberman, 1983).

2. Vers une psychologie pédagogique comme discipline autonome

Examinons maintenant le deuxième courant, non plus orienté vers les problèmes de transposition que pose la référence psychologique, mais vers la constitution d'une psychologie pédagogique en tant que discipline autonome. Il est intéressant, dans un premier temps, d'analyser les raisons pour lesquelles la nécessité de fonder une discipline autonome s'est fait sentir. Tout d'abord, la conception selon laquelle toute donnée psychologique peut fournir (directement ou potentiellement) une information pertinente pour la pratique pédagogique conduit à un éclatement conceptuel de la psychologie pédagogique. Dans son article «La psychologie éducationnelle est-elle une discipline?», Ausubel (1972) décrit un certain type de manuels anglo-saxons de psychologie éducationnelle (educational psychology) comme «un mélange dilué, superficiel, guère digéré et généralement mal articulé, de psychologie générale, de théorie de l'apprentissage, de psychologie du développement, de psychologie sociale, de psychologie de la mesure, de psychologie de l'adaptation, d'hygiène mentale, de psychologie du conseil centré sur le client et d'écucation centrée sur l'enfant» (p.257). Ausubel conclut qu'à l'examen de ces manuels, on ne peut répondre par l'affirmative à la question que pose le titre de son article. Il est toutefois à relever que, au cours des années soixante, la problématique de l'apprentissage et l'étude des processus cognitifs tendent à devenir le noyau central de la psychologie pédagogique. Un besoin d'unification se fait sentir en réaction à la dispersion qu'entraîne la multiplicité des références psychologiques. Dans leur ouvrage «Contexts of education», Morris et Lunzer (1969) soulignent que «l'étude du comment l'enfant apprend et développe ses pouvoirs d'apprendre est centrale pour la psychologie éducationnelle» (p.XI). Les autres domaines de recherche en psychologie, tels par exemple la psychologie sociale ou la psychologie de la personnalité, sont intégrés à ce noyau central dans la mesure où ils permettent de cerner et d'étudier ce qui influence le processus d'apprentissage en situation scolaire.

Cependant, ces tentatives de structuration du champ de la psychologie pédagogique se heurtent à l'absence de théorie unifiée ou, tout au moins, d'un ensemble cohérent de faits relatifs au processus d'apprentissage, théorie qui permettrait de constituer une approche intégrée de l'acquisition de connaissances en situation scolaire (Shelley, 1976).

On se trouve, en fait, en présence de divers modèles théoriques qui ouvrent la voie à des articulations possibles entre l'enseignement et l'apprentissage. Que ces modèles relèvent des théories de l'apprentissage, tel le modèle de Gagné, de la psychologie et de l'épistémologie de Piaget, de la psychologie cognitive de Bruner, de la théorie de la formation des opérations mentales de Galpérine ou des recherches récentes en science cognitive, la visée est à chaque fois la même, c'est la recherche d'une psychologie pertinente pour penser l'acte même d'enseignement qui en est l'enjeu.

Chacun de ces modèles apporte, certes, un éclairage sur le rapport entre enseigner et apprendre, mais les psychologies de l'instruction (instructional psychology) vers lesquelles ils tendent laissent de nombreuses questions dans l'ombre lorsqu'il s'agit de donner forme à l'enseignement-apprentissage de certains contenus de savoirs spécifiques. La conclusion qui en a été tirée est celle que Piaget (1969), par exemple, formule ainsi: «Lorsque la pédagogie cherche à appliquer les données de la psychologie et de la sociologie, elle ne reçoit de ces sciences-mères que des secours modestes, faute d'un avancement suffisant de ces disciplines, et il lui reste à constituer un corps de connaissances spécifiques (une psychologie pédagogique qui n'est pas une simple psychologie de l'enfant, appliquée déductivement, une didactique expérimentales, etc.)» (p.24).

3. Perspectives de recherches en didactique

Les investigations actuelles en didactique des disciplines, qu'il s'agisse de la mathématique, de la langue maternelle, des sciences ou de l'histoire, correspondent à cette recherche d'un corps de connaissance spécifique pour la constitution duquel la démarche d'application des données psychologiques n'est pas suffisante. Vergnaud (1981) est, à ce sujet, explicite: «l'insatisfaction générale dans laquelle nous laissent les recherches psychologiques classiques sur l'apprentissage, nous ont conduits à définir de nouveaux cadres théoriques» (p.216). Dans une perspective similaire, la nécessité de constituer une psychologie de l'enseignement des mathématiques est formulée en ces termes par Resnick et Ford (1981):

«C'est cette double connaissance - celle relative aux structures des mathématiques et celle qui rend compte du comment les gens pensent, raisonnent et utilisent leurs capacités intellectuelles - qui fournit les éléments de base d'une psychologie des mathématiques. C'est l'étude de l'interaction entre l'objet de connaissance et la pensée humaine qui définit ce champ. Pour une série de raisons il semble important aujourd'hui de définir la psychologie des mathématiques comme un domaine de recherche spécifique» (p.4).

L'argument de base de ces auteurs est que l'apport de la psychologie expérimentale à la compréhension des mécanismes généraux de l'apprentissage se révèle finalement peu utile pour saisir en contexte naturel comment l'élève acquiert des connaissances spécifiques dans un domaine particulier, tel celui des mathématiques.

La constitution d'une psychologie de l'enseignement de la mathématique en tant que champ de recherche autonome requiert, en fait, plus qu'une psychologie de l'apprentissage de niveau de complexité adéquat. Elle requiert la prise en compte simultanée des trois axes constitutifs d'une pédagogie scientifique (Morf, Grize et Pauli, 1969):

- «Un axe psychologique auquel se rapportent les structures intellectuelles des sujets, leurs connaissances préalables, leurs références sociales.
- Un axe épistémologique auquel référer l'objet même de la connaissance en cause.
- Un axe logique qui doit permettre l'analyse des rapports en jeu et la mise en oeuvre de stratégies convenables» (p.1).

Par leur caractère nécessairement multidimensionnel, les recherches en didactique centrées sur le processus d'appropriation de savoirs particuliers ne sont ainsi pas réductibles au champ de la psychologie et de ses applications.

La référence psychologique reste cependant une composante importante des recherches didactiques; elle ne peut être occultée, même si la préoccupation de s'en démarquer (dans le but notamment d'asseoir le statut propre des recherches didactiques) tend à y conduire. Cette référence, plus ou moins explicite, n'est pas traitée de la même manière selon les auteurs. Toutefois, certains traits communs se dégagent notamment pour ce qui est de la place privilégiée accordée à la psychologie d'un élève «épistémique».

Morf (1970), auquel se réfère largement Brun (1975), place au centre de la recherche didactique la question de la description des états des connaissances en relation étroite avec les situations dans lesquelles elles se manifestent et se transforment. D'où l'intérêt pour les situations-problèmes dans lesquelles, comme l'exprime Brousseau (1983), l'élève «va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait obstacle pour lui et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier ou construire une connaissance nouvelle» (p.178).

La perspective psychologique qui est en jeu est celle d'un élève épistémique, cousin du sujet épistémique piagétien. Morf (1970), sur ce point, est explicite:

«Pour la psychologie, une connaissance est toujours la connaissance de quelqu'un; c'est-à-dire qu'elle est toujours liée à un fonctionnement cognitif individuel. Qu'elle soit considérée comme un fait de mémoire, comme une habitude ou comme un instrument opératoire, elle apparaît toujours comme la résultante de plusieurs facteurs dont la recherche doit tenir compte. L'information sur ces facteurs est toujours partielle, cela ne gêne pas la recherche psychologique qui en fait son propre objet; pour la didactique, en revanche, nous devons considérer le fonctionnement total de l'individu comme non connaissable (...). Pour construire une théorie des interventions sur la formation des connaissances, il apparaît donc nécessaire de mettre entre parenthèses le «sujet», qui est un objet psychologique toujours présent; il est intéressant de remarquer que, systématiquement, la psychologie a mis entre parenthèses l'intervention toujours présente dans ces procédés.» (p.14-16)

Dans cette orientation théorique, une psychologie pédagogique focalisée sur les connaissances et leurs transformations se distingue radicalement d'une psychologie de l'élève comme domaine de recherche sur le fonctionnement de l'élève en situation pédagogique. La relation de l'une à l'autre est analogue aux rapports qu'entretiennent la psychologie génétique et la psychologie de l'enfant.

4. Pour une psychologie de l'élève

L'étude des conditions dans lesquelles les connaissances scolaires se forment et se transforment privilégie par méthode un point de vue précis sur la situation pédagogique. Ce que nous soulignerons ici, c'est la nécessité d'autres éclairages psychologiques pour appréhender la complexité du fonctionnement de l'élève en situation scolaire. Les rénovations des programmes d'enseignement s'appuient fréquemment sur une schématisation de l'élève qui tient à la fois du sujet épistémique et de l'image du «bon» élève, schématisation assez éloignée de la réalité psychologique des élèves que les enseignants rencontrent quotidiennement. Nous avons vu plus haut que certains aspects de la psychologie de cet élève idéalisé se dégagent des ouvrages méthodologiques pour l'enseignement de la mathématique. Un élève attentif, qui saisit où l'enseignant veut l'amener, qui cherche à comprendre, répond et questionne à propos (ou juste adéquatement un peu à côté), prend plaisir à réfléchir sur ce qu'il a fait, telles sont quelques-unes des caractéristiques de cet élève épistémique modèle.

La réalité qui se présente à l'enseignant dans sa classe se révèle à la fois plus riche et plus rude. L'implication dans une activité de recherche qui amène l'élève à dépasser un obstacle, à découvrir de nouvelles relations et à restructurer ses connaissances acquises ne relève que de rares moments privilégiés. La vie de la classe est aussi faite d'activités routinières, peu mobilisantes, d'explications maintes fois redonnées, de manque d'intérêt et de concentration des élèves, de réponses imitatives et impulsives, d'oublis, d'impertinence, etc. La rénovation d'un curriculum ne peut ignorer cette réalité au risque de rester un projet utopique, et d'élargir par là l'anomie des enseignants si, avec Moret et Patry (1982), on désigne par là, le décalage ressenti entre, d'une part, les aspirations et convictions et, d'autre part, les pratiques d'enseignement quotidiennes.

Dans cette perspective d'une approche intégrative de la vie scolaire, quel peut être le statut d'une psychologie de l'élève et en particulier quel rapport peut-elle entretenir avec les données de la recherche psychologique? Une manière de concevoir ce rapport est de le situer en référence à la notion de recherche orientée, telle que la définit Pierre de Bic (1970):

«La recherche orientée naît en réponse à des besoins sociaux, elle s'élabore en fonction de ces besoins et est en quelque sorte commandée par eux: elle est centrée sur les problèmes qui requièrent une action scientifiquement informée» (p.687).

La recherche orientée, située entre la recherche fondamentale et la recherche appliquée, peut présenter des traits communs avec la première et avec la seconde. Son rapport avec l'action n'est, en effet, pas aussi étroit et contraignant que ce n'est le cas dans la recherche appliquée; elle est susceptible de contribuer à l'élaboration de connaissances nouvelles de caractère fondamental. Soulignons encore la dimension multidisciplinaire d'une recherche orientée, multidisciplinarité conséquente à la complexité des questions abordées.

Ce mode d'approche convient tout particulièrement pour caractériser le statut d'une psychologie de l'élève. Nous nous limiterons ici à esquisser les principaux axes d'une telle démarche.

De la réalité de l'apprentissage scolaire à la recherche de cadres interprétatifs. Partir de questions psychopédagogiques, qui surgissent de la vie de la classe, et qui requièrent, pour y apporter réponse, une meilleure connaissance psychologique de l'élève, permet d'assurer la pertinence pratique du champ de recherche. Les questions abordées se situent ainsi directement à leur niveau de complexité «naturelle».

Un rapport instrumental aux modèles théoriques. Le rapport aux données de la recherche fondamentale se distingue, ici, de celui qui sous-tend une démarche de transposition. Celle-ci postule que c'est à partir d'un cadre théorique déterminé et considéré avec plus ou moins de dogmatisme, comme le plus valide, qu'il s'agit de penser la situation d'apprentissage scolaire. Une recherche orientée conduit à modifier profondément ce rapport. Le point de départ étant non plus un modèle théorique, mais une problématique soulevée par l'action pédagogique concrète, la référence aux données de la recherche psychologique devient nécessairement diversifiée et instrumentale. Pour tenter d'interpréter les faits, divers cadres conceptuels, susceptibles d'éclairer une situation réelle, peuvent être exploités. C'est dans cette perspective que nous avons recouru, notamment, aux concepts de base d'orientation de l'action et de modèle de la tâche, pour analyser les conduites des élèves. Il s'agissait alors de faire «parler» les faits, et d'examiner ce que ces concepts permettent de voir dans une situation donnée.

Une psychologie situationnelle de l'élève. Un rapport instrumental aux modèles théoriques des divers champs de la psychologie (rapport que d'aucuns jugeront déroutant par son éclectisme), nous paraît le plus à même de favoriser, non pas la construction d'une théorie générale de l'élève en situation scolaire, mais l'élaboration d'une connaissance locale, situationnelle, des processus relevant à la fois d'une dynamique cognitive, affective et sociale sous-jacente à l'apprentissage scolaire.

CHAPITRE X

POINTS DE REPÈRES

POUR UNE NOUVELLE APPROCHE DE LA NUMÉRATION À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Il s'agira, dans ce chapitre, de tirer parti des analyses conduites jusqu'ici afin d'esquisser une approche de la numération à l'école primaire susceptible d'éviter les écueils identifiés dans la situation actuelle. Le statut particulier de ce chapitre appelle quelques commentaires. Formuler des propositions didactiques sur la base de l'investigation réalisée est un exercice périlleux. Le passage d'un constat à la proposition de solutions alternatives n'est pas aussi évident que pourrait le laisser croire la rationalité du modèle informativo-cybernétique qui sous-tend la conduite des innovations scolaires. La formulation de propositions ne peut l'être qu'à titre d'hypothèses, mais la gestion scolaire s'accommode mal des hypothèses de travail; elle requiert un savoir normé introduit par les expressions assurées et rassurantes: «Pour l'approche de la numération, **il faut que** les élèves..., il **est indispensable**..., l'élève **découvrira que**..., l'acquisition se fera en quatre étapes...etc.» Nous prenons donc le risque certain d'émettre des propos que les responsables scolaires pourront trouver désarmants par leur prudence et leur manque d'assurance. Inversement, les chercheurs en sciences de l'éducation reprocheront peut-être à ce chapitre son pragmatisme et les extrapolations illégitimes qui relient les connaissances établies sur la question et les propositions présentées comme en découlant. Les expérimentalistes demanderont que ces propositions soient validées empiriquement.

Conscient de la difficulté de l'exercice, nous nous y lancerons dans le but notamment de tester en quoi une recherche évaluative, telle que celle conduite sur l'enseignement de la mathématique, permet effectivement d'assurer une fonction régulatrice comme le préconise le modèle. Le débat sur l'utilisation ou les effets de la recherche en éducation (Huberman 1982, Perrenoud 1983) est à situer en arrière-fond de ce chapitre.

1. Eléments pour l'enseignement de la numération

Sur la base de ce que l'on sait aujourd'hui des résultats obtenus par une certaine approche didactique de la numération, même si le regard porté sur cette approche est nécessairement restreint, quelles modifications peuvent être envisagées au niveau des pratiques didactiques, quelle orientation alternative retenir? Notre intention est ici de recenser les éléments qu'une nouvelle approche devrait prendre en compte, en attirant l'attention sur les écueils et difficultés qu'elle devrait éviter. Ces éléments peuvent être présentés en huit points.

a) Partir des acquis de l'élève

Il est banal de rappeler qu'en entrant à l'école, l'enfant a déjà une connaissance des nombres, de la numération parlée à laquelle il recourt dans ses activités de comptage, qu'il reconnaît et écrit peut-être quelques chiffres. Le savoir acquis souvent indépendamment de toute intervention didactique planifiée a fait l'objet d'observations systématiques (Meljac 1979, Fischer 1981). Le caractère non opératoire de ces connaissances, qui prennent essentiellement appui sur l'imitation, est souvent invoqué pour ne pas trop y prêter attention, et entreprendre un apprentissage de base qui permette de construire le concept de nombre, puis d'acquérir progressivement les règles qui régissent le système de numération de position. Comment éviter l'illusion de partir d'une table rase, avec la sécurité qu'apporte un enseignement rigoureusement planifié, qui vise, à partir d'un point zéro, l'agencement progressif des connaissances dans la tête de l'élève? C'est la question du logicisme qui marque la programmation du contenu de l'enseignement. «Le danger du logicisme a envahi l'enseignement et fait perdre de vue que l'enfant va devoir réinventer pour lui toutes ces notions et que, même s'il est équipé pour cela (le sujet épistémique), il ne les comprendra qu'à partir d'un échange significatif avec le réel» (Brun 1975). Cet échange, pour être signifiant, engage nécessairement les savoirs et savoir-faire acquis antérieurement. Comment éviter que l'apprentissage scolaire ne se situe en porte-à-faux par rapport aux premières acquisitions extra-scolaires de l'enfant?

La préoccupation d'assurer une continuité de l'apprentissage conçu comme un élargissement progressif et cyclique des connaissances de l'élève traverse tout le curriculum de mathématique. Nous préconisons d'assurer encore plus radicalement cette continuité en évitant toute rupture entre l'expérience quotidienne et extra scolaire que l'élève a des nombres et les activités orientées vers la compréhension du système de numération de position. En cela, nous nous démarquons des conclusions auxquelles Not (1966) parvenait à la suite d'une approche de la numération en différentes bases au cycle d'orientation, notion qui était alors entièrement nouvelle pour les élèves.

«L'apparente facilité avec laquelle l'enfant applique les règles issues de la convention décimale est une cause d'opacité pour la notion. On ne peut donc partir de l'usuel ou du connu pour l'explorer; il faut, au contraire, dépayser l'enfant, le plonger immédiatement dans l'inusité et, à partir de là, lui faire retrouver le connu. On ne va pas ainsi du facile au difficile: le facile, c'est le système décimal; nous plongeons l'enfant dans le difficile pour l'amener à comprendre le facile» (Not 1966, p.52).

Si la rupture préconisée par cet auteur nous paraît peu recommandable au niveau de l'école primaire, c'est que les observations réalisées nous ont révélé à plusieurs reprises le risque permanent de dépayser l'élève au point qu'il se perde en chemin et n'établisse plus de lien avec ses connaissances usuelles, c'est-à-dire sa connaissance et sa pratique du système décimal. L'approche de la numération se doit d'articuler étroitement le connu et l'inconnu de l'élève, articulation qui est au coeur d'un apprentissage significatif au sens d'Ansubel (1968). Les situations de numération proposées aux élèves sont susceptibles de favoriser cette articulation si elles permettent à l'élève de s'appuyer sur deux types d'indices que Inhelder et Piaget (1979) définissent ainsi:

«Les premiers sont ceux qui montrent au sujet quels sont les schémas antérieurement construits et pouvant être utilisés dans la solution du problème actuel, (....). Les indices du second type, relatifs à l'existence de lacunes, montrent au contraire ce qui, dans la situation actuelle, exige la construction de nouveaux schémas ou de nouvelles accommodations à effectuer. Or, il va de soi que ces deux sortes d'indices, quoique aboutissant à des conduites d'orientations distinctes, sont sans cesse à coordonner entre eux...» (p.168).

Concrètement, prendre en compte l'acquis, et tout l'acquis de l'élève, signifie partir de situations qui lui offrent la possibilité de mobiliser des schèmes établis (tels que compter ou numéroter) en l'amenant à reconsidérer ou élargir, par là-même, sa connaissance du système de numération.

b) Eviter la dissociation entre le comptage et les activités de codage numérique

Ce point, comme d'ailleurs le suivant, découle en partie de ce qui vient d'être développé ci-dessus. Dans l'esprit de l'enfant, le nombre est étroitement associé au comptage. Lorsque l'enfant parvient à établir une bijection entre les objets qu'il compte et la suite des nombres parlés, il se sert de cette suite de nombres comme d'un étalon à la fois de cardination et d'ordination, pour reprendre l'expression de Halbwachs (1979).

«Ainsi les nombres parlés constituent ce qu'on appelle un référentiel, un référentiel privilégié par convention, qui servira d'intermédiaire nécessaire pour comparer des collections. Au lieu de comparer tous les ensembles les uns aux autres par bijection, de toutes les façons possibles, on les comptera tous, c'est-à-dire on les comparera à l'ensemble standard des nombres parlés, et on fera jouer la transitivité de la bijection pour comparer - indirectement- les ensembles eux-mêmes. C'est là un usage parfaitement légitime de l'ensemble ordonné particulier pris pour référentiel. Mais c'est précisément ce choix d'un référentiel particulier, privilégié par une convention arbitraire, qui indispose les mathématiciens et, bien entendu, ils ont raison de leur point de vue. Rapporter tous les objets à un système particulier érigé conventionnellement en référentiel, c'est rompre la symétrie entre les objets quelconques... C'est pourquoi les matbématiciens préfèrent les formulations «intrinsèques», qui se libèrent de la sécurité d'un référentiel, ou les formulations qui supposent explicitement que le référentiel est quelconque...» (Halbwachs, p.8).

Les activités de groupement et de codage en diverses bases permettent précisément une certaine prise de recul par rapport à la comptine-étalon en invitant l'élève à la relativiser. Mais cette relativisation par la manière dont elle est introduite le conduit, en fait, à perdre de vue la fonction première de l'activité qui est orientée vers le dénombrement d'une collection. Comment éviter que la visée de ces activités ne soit plus perçue, que grouper et coder ne deviennent, par conséquent, un but en soi? Cette dissociation du comptage spontané et des activités de codage numérique n'est pas inéluctable;

l'activité de groupement peut être abordée comme une technique de dénombrement lorsque, en particulier, la quantité en jeu ne permet plus de recourir au schème usuel de comptage. Une telle approche, suggérée actuellement dans les moyens d'enseignement romands de 4e année, auraient tout avantage à être introduite plus précocement, dès les premières années.

c) Eviter la dissociation entre le fonctionnement de la numération en base dix et dans les autres bases

Ce point paraîtra aller de soi étant donné que le travail réalisé dans le chapitre «Numération» vise explicitement à faire saisir les caractéristiques invariantes du système de numération de position quelle que soit la base adoptée. Si la numération en base dix se démarque des autres, ce n'est effectivement pas en raison de règles de fonctionnement qui lui seraient propres, mais uniquement en raison de l'image qui, par convention, fait qu'un statut privilégié lui est accordé. Si cela paraît logiquement évident, on a pu constater que cette évidence ne va pas de soi pour de nombreux élèves. Il ne suffit pas de préconiser une mise en relation des codes numériques obtenus en différentes bases et en base dix; il faut encore que l'élève procède à la relativisation à laquelle il est invité. Or, il semble bien que la manière actuelle d'aborder la numération en bases autres que dix fait que l'élève ne se libère pas facilement du contexte d'actions spécifiques dans lequel il oeuvre, contexte vécu comme hétérogène à celui dans lequel il mobilise sa pratique usuelle des nombres.

Un principe qui nous paraît, par conséquent, devoir être suivi est de partir des activités numériques «naturelles» quotidiennes que l'élève déploie en base dix et des contextes qui donnent sens à ces activités pour transposer le plus fidèlement possible ces activités et contextes dans d'autres bases de numération. C'est à cette condition que l'hétérogénéité constatée plus haut pourra être réduite, sinon supprimée.

Un type d'activité qui nous paraît à même de réduire l'écart que l'élève établit entre la base dix et les autres bases est de partir d'une situation d'écriture de nombres à l'aide de petites cartes comprenant les chiffres 0 à 9. Par arrangement de ces cartes, l'élève constate qu'il peut construire tous les nombres qu'il souhaite afin, par exemple, de noter le nombre de livres dans la bibliothèque de classe, nombre obtenu par rapprochement de deux cartes. Dans un deuxième temps, l'enseignant retire du jeu les cartes portant les chiffres 7, 8 et 9. Les élèves sont alors confrontés aux questions suivantes: est-il encore possible de dénombrer une collection avec seulement sept chiffres (0 à 6)? Comment s'y prendre? Quel numéro donner à chaque livre? Est-ce très différent de la numération réalisée avec neuf chiffres?

Dans le même esprit, l'exploitation de «compteurs mécaniques» construits pour fonctionner en diverses bases (Ermel, 1977) sont susceptibles de renforcer la correspondance entre le fonctionnement de la numération en base dix et dans les autres bases, mais les difficultés de cette approche ne sont pas à sous-estimer, comme le montre Thorel-Cornut (1984).

d) Prendre en compte la signification présente des activités proposées aux élèves autant que leur pertinence pour la poursuite de l'apprentissage à moyen et à long terme

La préoccupation d'éviter un compartimentage des expériences de l'élève selon la base de numération dans laquelle il travaille nécessite de prendre en compte le sens que prennent pour lui les activités proposées. Dans une programmation de l'enseignement bien établie, la question du sens se pose souvent de manière extrinsèque. Ce qui donne sens à une activité est ce à quoi elle prépare. Ainsi, on affirme que l'usage de diverses bases consolidera la compréhension de la base dix, que les groupements récurrents débouchent sur la notion de puissance, que les activités de numération permettront d'asseoir la compréhension des algorithmes de calcul, etc. On retrouve ici le principe fréquent dans l'enseignement de justifier ce qui est demandé à l'élève à un moment donné par l'attente d'un gain ultérieur. L'élève s'entend dire alors «...tu comprendras plus tard combien cela te sera utile», formulation pédagogique du «tais-toi et nage».

Il ne s'agit pas de nier la nécessité de penser la cohérence d'un curriculum dans sa progression; cependant la logique de programmation ne devrait pas évacuer la question du sens immédiat que prend pour l'élève toute activité. Quel sens, en particulier, peut-il donner à l'activité de groupement et de codage, sinon celui d'effectuer docilement une tâche dont il ne connaît pas les tenants et les aboutissants? Dans leur examen des rapports qu'entretiennent actions et significations, Inhelder et Piaget (1979) soulignent qu'en tant qu'intervention intentionnelle «toute action comporte une signification. Mais réciproquement, toute signification est relative à des actions...» (p.165). C'est ainsi que, pour l'enfant, grouper et coder, en tant que schèmes d'actions constitués, peut ne pas avoir d'autre sens que celui de grouper et de coder! Elargir la signification de cette activité requiert un contexte d'activités lui-même signifiant, contexte dans lequel les actions de grouper et de coder prennent statut de moyen par rapport à une fin signifiante (dénombrer) clairement perçue par l'élève.

Cette recherche de sens est une exigence qui traverse depuis plusieurs décennies tout les courants de l'Ecole nouvelle; elle est cependant à reprendre constamment. Un syphon tend en permanence à vider de leur sens des activités qui avaient pourtant été proposées aux élèves en raison de leur riche signification.

Une piste qui nous paraît devoir être explorée réside non seulement dans la recherche de ce qui a un sens pour l'élève (recherche qui caractérise une pédagogie pédocentrique), mais également dans la vérification que le sens qu'il donne aux tâches qu'il effectue soit de même nature que celui qu'accorde l'enseignant aux mêmes tâches. Les significations partagées sont le meilleur garant de l'adéquation d'une intervention pédagogique. Il est certain que cette communauté de sens correspond à une visée utopique. Les recherches psychologiques et didactiques, celles notamment sur la transposition didactique, s'attachent à montrer en quoi, à chaque niveau, il y a reconstruction de significations propres en fonction d'une recontextualisation des savoirs mis en oeuvre (Chevallard 1980, Conne 1981, Perret-Clermont et al, 1982). Toutefois, la communication entre l'enseignant et l'élève est néanmoins possible, les représentations des uns et des autres ne font pas toujours écran comme le souligne Perret-Clermont (1983). Les conditions de réussite d'une transmission de connaissances méritent autant d'attention que l'analyse des écueils que rencontre cette transmission.

Dans cette perspective, le choix des activités proposées aux élèves dans le domaine de la numération prend toute son importance. C'est autour des situations-problèmes retenues qu'une signification commune entre enseignants et élèves a quelque chance d'être élaborée. On sait en particulier le rôle primordial que joue l'explicitation du but recherché, dans l'élaboration d'une représentation intersubjective de la situation.

e) Prendre en compte la numération parlée et ses caractéristiques propres

Comme l'analysent les auteurs de «Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire» (Ermel, 1977), la numération parlée a ses caractéristiques propres. Le lecteur trouvera dans l'annexe 5 la présentation de ces caractéristiques. Un certain décalage existe entre les règles d'écriture des nombres et leurs règles de lecture. Cela ne va pas sans poser des problèmes aux élèves, problèmes sur lesquels les moyens d'enseignement romand de mathématique restent silencieux. Chaque enseignant est amené à y faire face lorsque le cas se présente. L'élève est ainsi conduit à faire fonctionner deux systèmes de règles de numération: le système écrit et le système oral. Le premier fait l'objet d'un apprentissage systématique alors que le second est censé s'acquérir spontanément sur le tas. Son caractère hybride, du fait qu'il combine notamment l'utilisation de la base mille (pour l'énoncé des grands nombres) et de la base dix le rend mathématiquement peu intéressant, d'où le silence à son propos. D'un point de vue mathématique, la numération parlée n'est qu'un accident de parcours requis par la communication orale. C'est une pratique usuelle commode, mais rien de plus. Du point de vue de l'élève, la maîtrise de la numération parlée relève d'un apprentissage comme un autre.

Faut-il alors préconiser, comme le font les auteurs cités ci-dessus, un apprentissage systématique en la matière? Le risque que la programmation de cet apprentissage soit coûteuse et qu'elle ne fasse qu'alourdir un enseignement déjà trop chargé est certain. Le fait que la numération parlée relève de l'environnement culturel quotidien (scolaire et extrascolaire) permet d'approcher cet apprentissage de manière informelle, selon une modalité analogue à l'élargissement, par l'enfant, de ses connaissances lexicales dans la langue maternelle. Cela ne signifie pas qu'une intervention didactique ne soit pas nécessaire, mais, au lieu d'être programmée, elle peut n'intervenir qu'en cas de nécessité, selon les circonstances.

Cela requiert que les enseignants soient attentifs et parfaitement au fait des particularités de la numération parlée, particularités avec lesquelles l'adulte est tant familiarisé qu'il ne les perçoit souvent plus.

En résumé, prendre en compte la numération parlée signifie, dans notre perspective, ne pas sous-estimer l'apprentissage qu'elle requiert de l'élève sans toutefois en faire l'objet d'un apprentissage méthodique.

f) Ne pas surestimer la capacité de l'élève à comprendre dans leur généralité les règles qui régissent le système de numération de position.

La capacité de s'abstraire d'un référentiel donné pour adopter une position relativiste en matière de numération requiert, sans aucun doute, une structuration cognitive complexe relevant du niveau des opérations formelles au sens piagétien. C'est la position que défend Halbwachs (1979) pour qui :

«vouloir à tout prix obliger le jeune enfant à raisonner en termes relativistes et le priver des aides et des supports conceptuels que lui procure, dans chaque cas, un référentiel bien stable et bien sécurisant, pour y inscrire l'ensemble des relations (système de numération, numération décimale, axes de coordonnées cartésiens, etc.), c'est vouloir faire violence à sa logique, la précipiter dans un système de pensée protéiforme, dont le caractère abstrait et indéterminé ne peut produire chez lui que le vertige et l'écoeurement. On ne peut faire l'économie du référentiel. Le mode de développement spontané de la pensée exige qu'on les introduise au départ, d'abord implicitement comme s'ils étaient les seuls systèmes «naturels», puis explicitement, en faisant découvrir leur caractère conventionnel, enfin qu'on les détruise, soit en adoptant un référentiel quelconque et en insistant sur la covariance des représentations, soit lorsque c'est possible, en construisant des représentations intrinsèques.» (p.8)

L'analyse des performances des élèves à laquelle nous avons procédé confirme, à plusieurs reprises, la difficulté des jeunes élèves à adopter un point de vue relativiste en matière de numération. Cela ne signifie pas qu'une approche de la numération en diverses bases soit à éviter, mais il s'agit, à chaque niveau, d'adapter les intentions poursuivies aux possibilités des élèves. Viser la compréhension du système de numération de position, si l'on entend par là une maîtrise complète de la logique et des conventions en jeu dans l'écriture des nombres, ne peut être qu'un objectif à long terme, qui ne peut probablement pas être atteint avant 11-12 ans (6e année). Par contre, certains aspects de ce système, comme la valeur positionnelle des chiffres, ou une première intuition de la notion de base, peuvent certainement être appréhendés par des élèves plus jeunes. Ces objectifs intermédiaires restent le plus souvent à définir de manière à pouvoir préciser ce qui est attendu des élèves à chaque niveau, tant sur le plan des savoirs que des savoir-faire relatifs à la numération.

Le fait de ne pas pouvoir s'attendre trop prématurément à une compréhension générale et articulée du système de numération soulève la question du moment où il est judicieux d'introduire une approche de la numération en diverses bases, question qu'il s'agit d'examiner maintenant.

g) Le coût d'une introduction précoce de la numération multibase est-il justifié?

Si la compréhension du système de numération dans toute sa généralité est plus tardive que les initiateurs de la rénovation ont pu le penser, ceci notamment en raison du processus d'abstraction qu'elle requiert, processus plus complexe qu'une simple intériorisation des actions effectives de groupements, on est alors conduit à s'interroger sur le moment propice pour introduire un codage numérique en diverses bases. Le programme romand actuel mise sur un lent processus d'abstraction qui permettrait à l'élève, au cours des ans, de prendre peu à peu conscience des caractéristiques les plus générales des actions mises en oeuvre dans la réalisation efficiente d'une tâche. On retrouve ici partiellement le cadre théorique piagétien à propos de la prise de conscience et du rapport qu'entretiennent réussir et comprendre (Piaget 1974). Toutefois, dans les expériences de Piaget et de ses collaborateurs, rien ne permet d'affirmer qu'un entraînement systématique de l'action orientée vers la réussite favorise, en tant que telle, la conceptualisation orientée vers la compréhension. En nous référant, par exemple, à l'expérience de la fronde (Piaget 1974), rien n'est dit sur le rôle de la répétition de l'expérience pratique dans le développement de la conceptualisation du mouvement effectif de la fronde.

Supposer qu'une expérience répétée, au delà d'une phase de familiarisation avec la tâche, favorise la conceptualisation est une hypothèse qui néglige deux aspects des processus en jeu. C'est tout d'abord sous-estimer le fait que la prise de conscience requiert «un processus de conceptualisation reconstruisant, puis dépassant, au plan de la sémantisation et de la représentation, ce qui était acquis au niveau des schèmes d'action» (Piaget 1974, p.271). D'autre part, c'est négliger la dynamique et le «pourquoi» de la prise de conscience. Celle-ci n'a rien d'immédiat.

«Ce qui déclenche la prise de conscience est, nous l'avons vu sans cesse, le fait que les régulations automatiques (par corrections partielles, en négatif ou en positif, de moyens déjà à l'oeuvre) ne suffisent plus et qu'il importe alors de chercher des moyens nouveaux par un réglage plus actif et, par conséquent, source de choix délibérés, ce qui suppose la conscience» (Piaget 1974, p.262).

L'approche actuelle de la numération à l'école primaire ne prend guère en compte cette dynamique qui conduit du savoir-faire au savoir, du réussir au comprendre. Confiance est faite au temps qui, dans la conception d'un programme dit cyclique, seconde précieusement l'enseignant. Le rôle de la prise de conscience est affirmé, mais celle-ci est censée se produire en fonction de la maturation des élèves. Certes, l'élève est invité par l'enseignant à observer et comparer, après coup, les résultats de ses actions, dans le but d'y réfléchir et d'en tirer un savoir «plus-value». Mais la démarche présente des limites importantes. L'élève ne perçoit pas pourquoi la tâche, une fois effectuée, donc de son point de vue achevée, mérite une réflexion rétroactive. Les conditions requises pour amener l'élève à dépasser le plan du faire et du réussir restent problématiques. Dans l'attente de prises de conscience, les activités de codage et de décodage numériques ancrées sur des actions concrètes de groupement des objets d'une collection suivent leur cours. C'est alors la question du coût de ces activités qui retient l'attention. Est-il réellement utile de passer tant de temps à effectuer des activités qui ne décollent pas de leur concrétude? N'est-il pas préférable de n'introduire une activité concrète qu'au moment où une première ébauche de conceptualisation est possible?

Nos interrogations reviennent en fait à reconsidérer ce qui, dans l'apprentissage mathématique, peut relever d'une macrogenèse et ce qui relève d'une microgenèse. Traditionnellement, la programmation de l'enseignement met l'accent sur la macrogenèse en ce sens que les étapes de l'apprentissage sont pensées à l'échelle des années scolaires. La prise en compte des aspects microgénétiques de l'apprentissage mathématique rend sceptique sur l'apport réel des activités précoces concrètes censées préparer et faciliter, par imprégnation, les apprentissages ultérieurs. On peut sérieusement penser qu'une approche plus tardive des activités de groupements et de codage numérique en base différentes de dix, en 3e ou en 4e années, au moment où l'on sent les élèves prêts à réfléchir et travailler sur le système de codage en tant que tel, permettrait d'obtenir des résultats identiques en faisant l'économie d'une longue phase d'approche à l'apport incertain.

h) Pour une mise en correspondance systématique des différents plans de représentation auxquels la numération peut être abordée

Ce qui vient d'être dit des conditions de prise de conscience et des aspects microgénétiques de l'apprentissage mathématique conduit à réexaminer le rapport qu'entretiennent les divers plans de représentation auxquels se situent les activités des élèves dans le domaine de la numération. Rappelons les quatre plans que distingue Vergnaud (1974) selon que les actions portent sur les objets, les ensembles, les cardinaux ou les nombres écrits. Au cours des trois premières années, pour éviter de voir les élèves se perdre dans un jeu numérique formel, toutes les activités en bases autres que dix prennent appui sur un support concret. Les élèves ont en permanence la possibilité de se référer à une collection d'objets matériels (le plus souvent des jetons), ou figurés, pour effectuer les groupements selon une base donnée. Le passage au codage numérique conduit apparemment l'élève à mettre en correspondance les plans des objets et celui des nombres écrits. Mais la nature de cette correspondance mérite attention. Faire correspondre un code numérique à une collection regroupée selon une base donnée peut ne mettre en oeuvre qu'un pseudo-homomorphisme entre les deux plans de représentation. Une activité proposée dans les moyens d'enseignement de 3e année permet d'illustrer ce point.

La classe est organisée en groupes d'élèves. Chaque groupe procède au groupement et au codage d'une collection dans une base différente. L'enseignant demande ensuite à chaque groupe d'écrire ce qu'il advient du code trouvé si un élément est ajouté à la collection, puis un deuxième, un troisième, etc. Chaque groupe établit ainsi une suite de codes, suite qui est alors comparée à celles des autres groupes. Dans la mesure où les élèves construisent leur suite de codes par l'observation systématique de la collection augmentée chaque fois d'un élément, leur activité ne décolle pas du plan des actions sur les objets. Le codage numérique correspond à une «description» du produit de chaque action, mais aucune opération n'est effectuée sur le plan des codes. Parler d'homomorphisme entre le plan des objets et celui des codes signifie, en effet, qu'à la transformation de la collection par adjonctions successives d'un élément correspond une transformation des codes selon les règles propres à ce plan de représentation. Or les opérations qui permettent de travailler sur les codes en tant que tels ne sont, le plus souvent, pas maîtrisées par les élèves comme nous l'avons observé, en particulier à propos de la numération du jeu de l'oie.

Le va-et-vient précaire entre la manipulation et le codage numérique en bases autres que dix ne met souvent en jeu qu'une correspondance partielle, terme à terme, entre deux plans de représentation. Celui des nombres écrits peut alors ne pas relever d'une représentation calculable, au sens que Vergnaud donne à cette expression.

Ceci est la conséquence directe du statut accordé à l'activité concrète dans l'enseignement rénové de mathématique. Par crainte, certainement justifiée, de voir les élèves opérer sur des signes qui ne renverraient à rien, le parti a été pris d'ancrer le plus systématiquement possible les connaissances de l'élève sur un fond d'actions effectives. Cet ancrage est préconisé tant que l'élève en ressent le besoin, ce qui revient à dire que la conceptualisation ou la thématisation des actions de l'élève est censée se produire un beau jour, lorsque le temps sera venu. C'est cette perspective, quelque peu caricaturée ici, qui est à remettre en question. Si les activités de codage numérique en diverses bases visent la compréhension du système de numération de position, et non seulement la transcription chiffrée du résultat d'une manipulation de collections d'objets, cela requiert de faire jouer pleinement l'homomorphisme entre plans de représentation différents. Cela signifie qu'aux actions sur les objets, il s'agit de faire correspondre une manipulation des codes numériques en tant que tels, en s'assurant que le sens de ces manipulations symboliques puisse, certes être référé, en permanence, aux actions concrètes correspondantes.

La complexité des calculs sur les codes numériques en base autre que dix soulève à nouveau la question de l'âge auquel ils ont quelque chance d'être maîtrisés et, par conséquent, à quel moment cela a un sens de développer le savoir-faire correspondant en matière de groupement d'objets selon diverses bases de numération. Ce n'est effectivement qu'au moment où ce savoir-faire est susceptible d'être «réfléchi» et reconstruit sur le plan de la représentation qu'il présente un intérêt didactique. Or il semble bien qu'une réelle mise en relation de ces plans, dans le cadre d'une numération relativisée multibase, n'est de l'ordre du possible qu'avec des élèves de 3e, voire de 4e années.

2. Quelle option retenir?

Nous venons d'énumérer divers éléments qu'une approche de la numération à l'école primaire devrait prendre en compte pour éviter les écueils rencontrés actuellement dans cet apprentissage. Ce sont les implications de ces éléments critiques pour un aménagement des programmes qui seront discutées ici. Au vu des observations réalisées, un réexamen de l'approche didactique de la numération actuellement adoptée dans les écoles primaires de Suisse romande paraît nécessaire, c'est un premier acquis. Certes à l'occasion des rééditions des moyens d'enseignement, certains ajustements ont pu être apportés sur la base des premières recherches évaluatives, mais aucun aménagement radical n'a pu être entrepris, faute à ce moment-là d'un recul suffisant sur l'effet à long terme du travail réalisé dans les premiers degrés. Les données plus complètes recueillies à ce jour fournissent une assise plus solide pour formuler des propositions d'aménagement. En fait, trois options distinctes peuvent être envisagées. Nous les discuterons successivement, en nous arrêtant plus particulièrement à la troisième qui nous paraît la meilleure.

a) Développer les activités numériques actuellement proposées pour combler les lacunes observées

A plusieurs reprises nous avons souligné la difficulté des élèves à articuler leurs savoirs et savoir-faire numériques; les aspects ordinaux et cardinaux des nombres écrits, par exemple, ne se sont révélés que partiellement intégrés. En développant les activités de numération, notamment celles qui portent sur la construction de suites numériques mises en relation avec le comptage, une meilleure intégration des connaissances pourrait probablement être favorisée. De tels développements sont susceptibles de combler les lacunes observées mais au prix d'un investissement qui ne paraît pas réaliste dans le contexte d'enseignement actuel.

b) Supprimer les activités numériques en diverses bases de numération

Cette deuxième option part du même constat: les activités en diverses bases de numération sont coûteuses par rapport aux gains observés, mais la manière de réduire ce coût est ici inversée, elle consiste plus radicalement à renoncer à tout investissement dans ce domaine. Posée en ces termes, cette option peut être comprise comme un retour à l'enseignement traditionnel de mathématique. Cela n'est pas nécessairement le cas. L'approche dynamique de construction d'un code numérique par activités de groupement et d'échanges peut très bien subsister pour asseoir spécifiquement la compréhension du système décimal. Certes l'avantage des «petites» bases de numération qui permettent d'écrire des nombres à plusieurs chiffres pour coder des collections numériquement peu importantes et par conséquent aisément manipulables est perdu. Mais l'argument paraît fragile pour justifier à lui seul le maintien des diverses bases de numération.

c) Aménager l'approche de la numération de manière à atteindre efficacement l'essentiel

Développer, de manière détaillée, une nouvelle approche didactique de la numération, requerrait une investigation d'une autre nature que celle que nous avons présentée. En effet, élaborer et expérimenter diverses démarches didactiques, en observer les effets, les apports et les lacunes, relèvent d'un autre projet de recherche, projet encore à entreprendre, et qui pourrait faire l'objet d'un deuxième ouvrage. L'intention, ici, se limite à esquisser une approche alternative organisée en deux cycles bi-annuels, en vue de fournir un cadre général aux aménagements didactiques souhaitables en matière de numération.

Le cadre que nous proposons se résume aux options suivantes: En 1ère et 2e années, le travail dans le domaine de la numération devrait être limité à la base dix. Les activités de groupement par dix, sous les formes figuratives les plus diverses, et de codage numérique s'insèreraient ainsi dans un contexte «naturel» de dénombrement et de comptage. Le but visé serait essentiellement de faire saisir la valeur positionnelle des chiffres dans le système de numération usuel. En 2e année, en abordant les nombres jusqu'à cent, on pourrait recourir en plus à quelques activités conduites à partir de compteurs pour asseoir la compréhension de la structure de la suite des nombres écrits. En 3e et 4e années, les activités de numération en base dix seraient poursuivies. Afin de favoriser la prise de conscience du système de règles qui régit l'écriture des nombres, des activités en diverses bases pourraient être introduites. Leur but ne serait pas de développer chez les élèves des savoir-faire en matière de groupement, de codage ou de décodage. Elles viseraient par «touches» à susciter chez les élèves des réactions d'étonnement et de curiosité face à la possibilité de faire fonctionner la numération en bases autres que dix. Par le biais, par exemple, de compteurs ou d'arrangements de petites cartes comprenant chacune un chiffre, l'élève pourrait tout d'abord être incité à inventer, à reconstruire un système de numération. Cette recherche de moyens originaux, plus ou moins lisibles et exempts d'ambiguïtés, viserait la prise de conscience de la fonction réelle des conventions. Dans le même esprit, l'examen, avec les élèves, de quelques systèmes de numération utilisés à différentes époques historiques (systèmes dont on trouve une description détaillée dans les ouvrages de Guitel (1976) et de Ifrah (1981) pourrait également favoriser cette prise de conscience.

L'approche suggérée ici revient en fait à reconsidérer fondamentalement la place et le rôle des activités multibases dans l'appropriation, par l'élève, du système de numération. A l'approche systématique des diverses bases, nous préconisons une approche pointilliste diversifiée, sans attacher trop d'importance à sa programmation au cours des ans. Il s'agit donc, dans cette perspective, de donner occasionnellement aux élèves de 3e et de 4e années des temps privilégiés de recherche et de découverte sur les nombres écrits. Le critère premier de pertinence des activités retenues réside dans leur caractère stimulant, susceptible d'amener l'élève à se prendre au jeu. Dans de telles situations, les remarques des élèves: «ah, mais on pourrait s'y prendre ainsi», «Mais maintenant je vois: chaque fois que...», «Tiens, c'est la même chose que tout à l'heure...» sont les indices les plus srs qu'un travail mental de reconstruction est en cours. C'est la qualité de ces moments privilégiés qui est à rechercher plus que la multiplication des activités quasi-routinisées de codage et de décodage en diverses bases.

3. Est-ce vraiment une question de méthode d'enseignement?

Parvenu au terme de ce chapitre, le lecteur sera surpris de n'avoir trouvé dans ces pages qu'un cadre général et des points de repères pour une approche de la numération à l'école primaire. Pour quelles raisons l'étude systématique présentée dans cet ouvrage ne débouche-t-elle pas sur une proposition précise, une méthode d'enseignement bien programmée, voire la méthode heureuse et efficace? La question ne peut être escamotée. Elle renvoie à une interrogation corollaire d'où nous partirons. Pourquoi vouloir chercher une méthode en soi meilleure que les autres? Cette quête de la «bonne» approche méthodologique n'est-elle pas en partie illusoire? Cette interrogation, bien que d'allure provocante, n'a rien de gratuit; plusieurs recherches, conduites initialement dans le domaine de l'apprentissage de la lecture, ont montré que l'adoption d'une méthode ou d'une autre n'est pas le facteur le plus déterminant par rapport aux résultats obtenus à moyen terme. L'impact d'autres variables, tels l'expérience de l'enseignement, ou l'usage souple d'une méthode en fonction des réactions des élèves, paraît en effet plus important. La pertinence de ce constat pour l'enseignement de la mathématique est en particulier soulignée par Howson (1983) à la suite d'une revue des recherches réalisées dans ce domaine.

Il ne s'agit pas, dans notre esprit, de préconiser par là un relativisme intégral en matière de méthode d'enseignement; toutes les approches méthodologiques ne se valent certainement pas. Mais l'apport des recherches évoquées ci-dessus est de déplacer le débat. La validité de telle ou telle méthode est relativisée par un constat qui rejoint, sous un certain angle, le sens commun; une méthode ne vaut que par l'usage que l'on en fait. Le degré de maîtrise d'une approche méthodologique devient alors une variable centrale. Cette maîtrise se traduit notamment par la capacité de modeler, d'adapter la démarche retenue, quelle qu'elle soit, ou autrement dit, d'en «jouer» avec souplesse au gré des réactions des élèves. Cela requiert en premier lieu d'être à même d'observer les élèves, d'interpréter leurs conduites, leurs difficultés. La contribution de notre étude se situe précisément sur ce plan. Les points de repère énumérés au cours de ce chapitre ont pour fonction première d'attirer le regard sur un ensemble de questions que soulève l'observation des élèves engagés dans des activités de numération. Chacun de ces points suggère des idées d'aménagements possibles, non pas dans un but normatif, mais dans la perspective d'outiller en hypothèse de travail aussi bien l'enseignant chargé de favoriser jour après jour un apprentissage mathématique chez ses élèves, que le chercheur en didactique des mathématiques impliqué dans l'étude analytique de ce processus d'apprentissage.

CHAPITRE XI

CONCLUSIONS

Le point de départ de notre étude, rappelons-le, est un constat: les gains de la rénovation du curriculum de mathématique sont difficiles à mettre en évidence; les recherches évaluatives conduites dans divers pays concluent souvent à un échec partiel des innovations entreprises à large échelle. Ce constat a suscité de nombreuses études en sciences de l'éducation, études le plus souvent centrées sur les heurs et malheurs des innovations et en particulier sur les mécanismes de dérive d'un projet pédagogique initial, lors de son implantation dans le champ scolaire. Nous avons analysé au cours du chapitre I quelques présupposés épistémologiques sur lesquels s'appuient ces recherches évaluatives, recherches qui ne peuvent, par là-même, aboutir à une autre conclusion que celle d'un échec partiel. C'est alors le constat même d'une distance entre les effets attendus et les effets réels d'un curriculum rénové qui a retenu notre attention. Plutôt que de nous focaliser sur la mesure de cette distance apparemment inévitable, c'est sa signification que nous avons interrogée. Notre investigation s'est organisée plus précisément autour de deux interrogations. La première porte sur les apprentissages réels: qu'est-ce qu'apprennent en fait les élèves? La deuxième, sur les attentes pédagogiques, est une double question: dans le cadre du nouvel enseignement de mathématique, qui s'attend à ce que les élèves maîtrisent mieux certaines tâches ou notions et sur quoi repose cette attente? Nous nous sommes ainsi attaché à inverser le regard porté classiquement sur les heurs et malheurs d'une innovation. Plutôt que d'interroger les résultats obtenus à partir du projet innovateur et des objectifs visés, c'est le projet, médiatisé par diverses attentes, qui a finalement été interrogé à partir des apprentissages effectifs des élèves. L'intention dans ce chapitre conclusif est de mettre en évidence l'apport de ce contrechamp dans le cadrage conceptuel d'une innovation pédagogique.

1. Principaux résultats

L'apport de notre investigation se situe sur trois plans distincts:

Le premier est celui de la psychologie de l'apprentissage mathématique et en particulier de la formation des connaissances numériques.

Le deuxième plan, celui des attentes pédagogiques à l'égard des élèves, relève de la psychologie sociale.

Le troisième plan, d'ordre épistémologique, porte sur le rapport entre les modèles didactiques savants et les modèles ordinaires.

Nous examinerons successivement les principaux résultats obtenus sur chacun de ces plans.

a) L'apprentissage de la numération

C'est par le biais d'un large éventail de tâches et de situations que les acquisitions des élèves dans le domaine de la numération ont été analysées. Les observations réalisées se résument ainsi: les tâches proposées, qu'il s'agisse de codage ou de décodage numérique, sont généralement maîtrisées par une large majorité d'élèves. Cependant, inférer de ces pourcentages relativement élevés de réussite une compréhension générale quelque peu assurée du système de numération de position relève de l'extrapolation hasardeuse. Les savoirs et savoir-faire acquis ne «décollent» pas aisément des conditions particulières dans lesquelles ils ont été élaborés et mis en oeuvre. Le processus d'abstraction sur lequel repose tout l'enseignement de la mathématique ne fonctionne pas, dans le domaine de la numération, aussi automatiquement que les auteurs du curriculum rénové ont pu le penser. C'est ainsi par exemple que les élèves maîtrisent très tôt les règles de formation d'un code numérique à partir d'une activité de groupement en diverses bases; de manière à bien marquer la signification positionnelle des chiffres, l'élève écrira le code d'une collection de treize objets, denombré en base quatre, dans un tableau du type:

base quatre

g_2	g_1	u
	3	1

Cette pratique, bien rôdée, risque cependant de ne former qu'un isolat. Nous avons en effet observé qu'il ne va pas de soi pour de nombreux élèves que le code obtenu corresponde à un nombre et non simplement au codage de l'action de grouper. D'autre part, si un regroupement est effectué en base dix et aboutit, par exemple, au code 2 3 , ce code n'est pas assimilé d'emblée par les élèves au nombre écrit usuel 23. Nous avons également observé que le code 1 0 pouvait ne prendre chez certains élèves qu'une signification cardinale, alors que par ailleurs l'écriture de la suite des nombres en base dix est parfaitement maîtrisée. Ces exemples d'articulation fragile des connaissances numériques pourraient être multipliés. Ils révèlent essentiellement que le réseau que forment les savoirs et savoir-faire des élèves reste, encore chez de nombreux élèves de 4[e] année, trop lâche pour asseoir une compréhension quelque peu générale du système de numération de position.

b) Les attentes pédagogiques

La particularité des situations dans lesquelles les élèves mobilisent leurs connaissances ne réside pas seulement au niveau des caractéristiques des tâches proposées mais également au niveau du contexte d'attentes dans lesquelles ces tâches s'inscrivent. Comme l'expriment Perret-Clermont, Brun et al. (1982): «la capacité qu'a un sujet d'actualiser une compétence n'est pas indépendante de la situation sociale et culturelle dans laquelle l'individu a pu et dû déployer son activité.» (p.55).

Les attentes que nous avons pu mettre en évidence en matière d'apprentissage de la numération sont diverses. Parents, enseignants et auteurs des moyens d'enseignement n'accordent pas nécessairement la même signification à cet apprentissage. Le tissu d'attentes peut très schématiquement être résumé ainsi:

Les parents sont soucieux que leurs enfants maîtrisent les acquisitions jugées de base en mathématique. Plus que la numération en tant que telle, c'est la maîtrise des opérations qui constitue le principal enjeu. Autrement dit l'accent est plus porté par les parents sur le réussir que sur le comprendre. Les auteurs des moyens d'enseignement, qui ont inscrit leurs travaux dans le courant psychopédagogique des années soixante, mettent au contraire l'accent sur la compréhension comme préalable à toute maîtrise systématique de techniques ou de savoir-faire. En matière de numération, la visée didactique est d'amener les élèves à découvrir et maîtriser de manière raisonnée les règles qui régissent le système décimal. Pour comprendre le fonctionnement de ce système, il s'agit d'en démonter le mécanisme, ce que permet tout particulièrement le recours à diverses bases de numération. Pour les auteurs des moyens d'enseignement, c'est ainsi d'abord la compréhension de la *structure* générale du système *positionnel* qui est attendue des élèves.

Les enseignants se trouvent dans une situation-carrefour. D'une part, ils adoptent les visées du projet didactique véhiculé par les moyens d'enseignement: la nécessité d'asseoir au mieux la compréhension du système de numération leur paraît évidente. Par expérience, les enseignants savent quelles sont les difficultés rencontrées en particulier dans la maîtrise des algorithmes de calcul lorsque le système de numération n'est que partiellement compris par l'élève. Mais, d'autre part, les leçons de mathématique se composent d'un flux d'activités diverses proposées aux élèves selon un plan et une méthodologie bien établis. Dans le quotidien de la vie de la classe, ce n'est pas le niveau de compréhension de l'élève qui est saillant mais sa capacité à répondre aux questions et à réaliser correctement les exercices et fiches de travail proposés. Sous cet angle, la réussite et la performance priment, de fait, sur la visée plus générale de structuration des connaissances numériques.

c) Modèles didactiques savants et modèles ordinaires

L'enseignement de la numération met de fait en jeu diverses représentations du processus par lequel l'élève apprend. Ce que nous soulignerons ici, c'est la double origine de ces représentations: les unes sont issues d'une pratique de recherche psychologique ou didactique, elles sont véhiculées par les milieux de chercheurs en éducation, de formateurs, d'enseignants et d'auteurs de manuels. Nous qualifierons ces représentations de savantes de même que les modèles didactiques qu'elles valident. Les autres représentations dites ordinaires sont issues de la pratique même d'enseignement. Elles sont constituées de tous les savoirs et savoir-faire, pas nécessairement formulés, que l'enseignant acquiert avec les années d'expérience.

Cette cohabitation de modèles savants et ordinaires nous a conduit à réexaminer la question de l'apport des données psychologiques à la pédagogie. La conclusion à laquelle nous sommes parvenu se résume ainsi: une innovation scolaire en matière de curriculum requiert une psychologie de l'élève ouverte et non dogmatique, une psychologie qui évite toute schématisation abusive, notamment en n'occultant pas les savoirs ordinaires. Une telle psychologie est à concevoir dans la perspective d'une recherche orientée; c'est confronté à des problèmes pédagogiques réels, et pour élucider la situation, que le recours pragmatique à divers cadres conceptuels et savoirs prend son sens.

2. A propos de la rénovation du curriculum de l'école primaire

L'investigation présentée dans cet ouvrage est focalisée sur un domaine d'apprentissage très précis, celui de la numération. L'adoption d'un angle de vue si aigü, loin de nous faire perdre de vue le contexte plus large de rénovation du curriculum, nous a attiré l'attention sur les processus généraux en jeu dans une innovation pédagogique. Dans le chapitre I, c'est le contexte culturel et historique dans lequel la rénovation de l'enseignement de la mathématique a été entreprise que nous nous sommes attaché à rappeler.

Notre intention ici est d'examiner quelques conséquences de cette rénovation, conséquences non planifiées, voire marginales par rapport aux objectifs d'apprentissage mathématique visés. Cet examen nous conduira à soulever la question du rapport que l'enseignant entretient avec l'innovation.

a) La gestion de l'incertitude

Du point de vue des responsables de la conduite d'une innovation pédagogique, l'élaboration d'un projet innovateur, sa diffusion, son implantation sont autant d'occasions d'explicitation d'un projet. Dans la perspective administrativo-scolaire, tout texte qui contribue à la définition du curriculum formel remplit une fonction clarificatrice en réduisant les disparités interindividuelles et interrégionales. De ce point de vue l'implantation d'un enseignement rénové réduit le degré d'incertitude relatif à ce qui s'enseigne et s'apprend en classe.

La situation de l'enseignant est par contre tout autre. Prenons la situation de celui qui a quelques années d'expérience au moment d'être amené à rénover son enseignement dans l'une ou l'autre des disciplines scolaires. Cet enseignant, qui suivra un cours de recyclage, est invité à mettre entre parenthèses son expérience passée, pour adopter sans arrière-pensées (et arrières-pratiques) de nouvelles approches didactiques, de même qu'un contenu d'enseignement remanié. S'il tente de tirer parti explicitement des expériences passées afin d'en récupérer les éléments les plus positifs, il sera vite déconseillé dans son entreprise. L'implantation d'un enseignement rénové, aux yeux de ses promoteurs, ne peut, dès sa phase initiale, s'accommoder d'emprunts qui réduiraient la cohérence du projet. Cette situation, à peine caricaturée, ne peut que susciter la plus grande incertitude: l'enseignant est invité à plonger dans la nouveauté, à mettre en oeuvre de nouvelles pratiques, à adapter sa gestion du travail de la classe sur la base des éléments méthodologiques qui lui sont fournis, mais qu'il ne maîtrise pas encore.

C'est ici qu'intervient la problématique des moyens d'enseignement, moyens dont la fonction est de fournir un cadre au travail de la classe et de réduire par là l'incertitude induite par l'innovation. Le débat autour de la conception des moyens d'enseignement est à cet égard significatif. Les positions se situent entre deux pôles. D'un côté, on préconise des ouvrages méthodologiques et des manuels de l'élève très structurés, susceptibles de fournir un guide précis pour organiser l'enseignement semaine après semaine. D'un autre côté, les moyens d'enseignement sont craints par leur rigidité; il est préconisé que les enseignants élaborent eux-même les documents utiles en fonction des intérêts et besoins de leur classe.

Dans le contexte de la Suisse romande et pour les raisons évoquées plus haut sur la fonction que remplissent les moyens d'enseignement lors de l'implantation d'une rénovation, l'attente de moyens structurés reste dominante.

Par la question des moyens d'enseignements, nous mettons indirectement le doigt sur une autre conséquence du mouvement de rénovation du curriculum, conséquence relative à l'évolution du rôle professionnel de l'enseignant. Celui-ci, de «maître», tend, dans un processus d'innovation dont il ne maîtrise pas les tenants et aboutissants, à remplir de plus en plus une fonction d'exécutant chargé d'appliquer un programme d'enseignement pré-établi. Cette perspective est peut-être satisfaisante et commode pour la gestion scolaire en ce qu'elle permet apparemment d'homogénéiser les pratiques pédagogiques. Par contre elle ne saurait contribuer à l'amélioration du niveau de formation des élèves. Les acquisitions scolaires, pour constituer autre chose qu'un vernis culturel mal assimilé, requièrent des conditions d'apprentissage dont une programmation, aussi bien pensée qu'elle soit mais conçue indépendamment de la vie de la classe, ne peut remplir ce rôle.

Les observations réalisées à propos de l'apprentissage de la numération ne peuvent que conforter ce point de vue. Comprendre le système de numération de position n'est pas l'aboutissement logique d'une application consciencieuse et méthodique des multiples activités numériques proposées dans les moyens d'enseignement. Viser cette compréhension requiert du maître en premier lieu une attention aux savoirs des élèves. Que signifie pour eux les chiffres qu'ils écrivent? Que révèlent leurs erreurs dans l'écriture d'un nombre ou dans un calcul? C'est à partir de là que l'enseignant peut retenir les activités numériques les plus à même de favoriser efficacement une prise de conscience des règles de fonctionnement du système de numération. Nous sommes conscient du degré de maîtrise que requiert la conduite d'un enseignement tel que nous l'évoquons ici. D'aucuns estimeront ces propos utopiques. Le fait que, dans la plupart des pays occidentaux, la formation des enseignants primaires tende de plus en plus à relever d'une formation universitaire n'est pas étranger à la complexité de la tâche qui leur est aujourd'hui confiée.

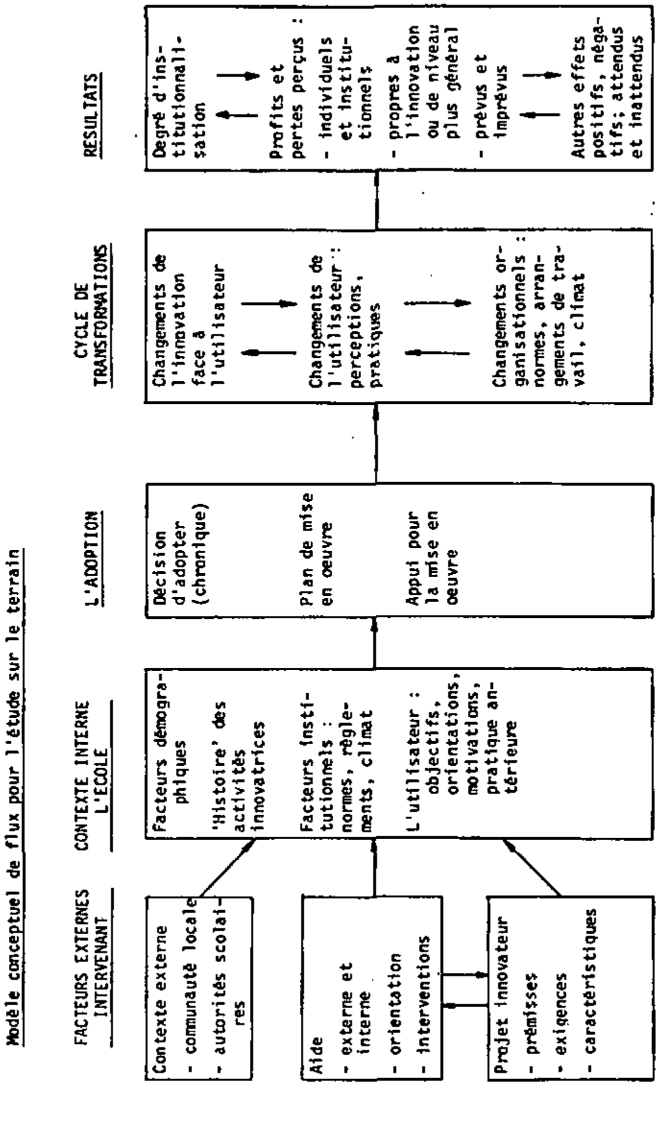
b) La logique du changement

Les considérations développées ci-dessus relatives à l'incertitude qu'une rénovation du curriculum introduit dans le champ scolaire, et la manière dont réponse lui est donnée, conduisent à un réexamen des modalités selon lesquelles les innovations sont implantées. Dans le contexte de la fin des années soixante, la rénovation du curriculum a été pensée en termes de changements radicaux, voire de rupture; la diffusion et l'implantation de ces changements se sont effectuées non sans dogmatisme théorique. Des pratiques nouvelles scientifiquement fondées devaient se substituer aux pratiques traditionnelles. On constate aujourd'hui que le caractère radical des changements introduits relève pour une large part de la rhétorique pédagogique. Si certaines composantes de la situation pédagogique se trouvent profondément modifiées par une rénovation du programme, d'autres composantes restent invariantes. Une innovation véhicule certes de nouvelles représentations, aussi bien du contenu même de l'enseignement, du processus d'apprentissage par lequel les élèves forment leurs connaissances, que des stratégies didactiques les plus appropriées, mais elle n'annihile pas les représentations ordinaires qui orientent quotidiennement l'activité de l'enseignant et lui permettent de donner sens à ce qui se vit en classe.

Nous sommes en fait en présence de deux champs de représentations et d'expériences distincts. D'une part celui du chercheur en éducation qui construit ses cadres conceptuels et théoriques sur la base de sa pratique de recherche, d'autre part, celui de l'enseignant qui, sur la base de sa pratique quotidienne, en vient nécessairement à se forger sa propre représentation du processus d'apprentissage. Les rapports entre ces deux champs d'expériences sont complexes. Il ne peut y avoir de transplantation directe de représentations, ou de pratiques, d'un champ à l'autre. C'est en terme d'interaction que ce rapport doit être pensé. Les savoirs et savoir-faire élaborés dans chacun de ces champs sont susceptibles d'interpeller, de questionner l'autre champ. Le mouvement de rénovation des années soixante consiste, pour une large part, en une interpellation des pratiques pédagogiques traditionnelles, interpellation alors appuyée par des connaissances savantes en matière de développement cognitif. Il est temps que la pédagogie renvoie à la psychologie et à la recherche en didactique les nombreuses incertitudes et interrogations que suscite la mise en oeuvre du curriculum rénové, et qui restent, pour l'instant, sans réponse. C'est la dynamique qui peut s'instaurer entre les modèles savants et les modèles ordinaires en matière d'apprentissage scolaire que nous situons au centre de la problématique de la rénovation du curriculum. Reconnaître cette dynamique ouvre des perspectives de changements, non plus imposés, mais susceptibles d'être vécus par chaque enseignant comme occasions de réflexion et d'analyse critiques de sa propre pratique d'enseignement, ceci en vue d'améliorer les conditions d'apprentissage créées jour après jour en classe.

ANNEXES

Annexe 1



(Extrait de: Huberman M, Miles M, «*L'analyse des données qualitatives: quelques techniques de réduction et de représentation*» IRDP, Neuchâtel, 1983, p.57)

Annexe 2

Extrait du Plan d'études pour l'enseignement primaire de Suisse romande, 1972.

NUMÉRATION

1ère année	- Aspect cardinal et aspect ordinal du nombre (comparaisons, sériations). - Groupements par 3, par 4, par 5, par 2, par 10, au niveau des manipulations. - Expression graphique, expression verbale et premières notations. - Jeux élémentaires d'échange. - Limite de la numération en base dix: 20.
2e année	- Groupements par 3, par 4, par 5, par 2, par 10. - Nouveaux groupements obtenus à partir des groupements de première espèce. - Expression graphique ou verbale puis «codage» des unités et des groupements de différentes espèces. Exercice inverse: «décodage». - Jeux d'échange. - Limite de la numération en base dix: 100.
3e année	-Révision du programme de 2e année. - «Codage» et «décodage» d'unités et de groupements de différentes espèces. - Extension des jeux d'échange. - Comptage, sériations et comparaisons (cas simples) dans des numérations de position de bases diverses. - Limite de la numération en base dix: 1000.
4e année	-Révision et approfondissement du programme de 3e année. - Notation des puissances. - Comptage, sériations et comparaisons dans des numérations de position de bases diverses. - Limite de la numération en base dix: 10 000.

Annexe 3

Enquêtes par questionnaires auprès des enseignants. Extraits concernant la numération.

Enquête 1P	N = 1350

«Le travail dans les différentes bases vous paraît:»

indispensable	16%
utile	73%
superflu	10%
nuisible	1%

Enquête 2P	N = 555

Que pensez-vous maintenant des résultats obtenus à la fin de la 2e année en mathématique par rapport à l'enseignement «traditionnel», en ce qui concerne les points suivants:

	recul	statu quo	progrès
la lecture et l'écriture des nombres en base dix	9%	46%	45%
la compréhension de la numération en base dix	4%	23%	73%
la rapidité et la sûreté du calcul	67%	24%	9%

(annexe 3)

Enquête 2P	N = 824

«Que pensez-vous des propositions suivantes?»

Le temps investi dans les activités en bases différentes de dix est trop important par rapport aux avantages qu'on en tire au niveau de la compréhension.

pas d'accord	46%
sans opinion	16%
d'accord	38%

Le travail dans les différentes bases est utile pour à la compréhension du système décimal.

pas d'accord	9%
sans opinion	16%
d'accord	75%

Il permet de faire mieux comprendre la valeur positionnelle des chiffres.

pas d'accord	7%
sans opinion	12%
d'accord	81%

(annexe 3)

Enquête 3P			N = 424

Que pensez-vous maintenant des résultats obtenus à la fin de la 3e année, par rapport à l'enseignement «traditionnel», en ce qui concerne:

	recul	statu quo	progrès
la compréhension de la numération en base dix	10%	27%	63%
la rapidité et la sûreté du calcul	72%	22%	6%

Enquête 3P	N = 820

Si les moyens d'enseignement de 3e année devaient être adaptés, les domaines suivants seraient à votre avis…

Le travail dans les bases différentes de dix

à supprimer	7%
à réduire	41%
à laisser tel quel	36%
modifier sans réduire	3%
développer	12%

(annexe 3)

Enquête 4P	N = 710

Pour tenter d'expliquer les difficultés que rencontrent les élèves dans l'avenue «Numération», marquez votre degré d'accord à chacune des raisons mentionnées ici:

	pas du tout			très nettement		
	1	2	3	4	4	5
- l'utilisation des bases différentes de dix embrouille les enfants pour la compréhension du système de numération en base dix	28%	20%	18%	19%		14%
- les exigences de 4[e] sont trop élevées dans cette avenue	13%	18%	18%	25%		25%

Enquête 4P	N = 718

En fonction de votre expérience du programme renouvelé de mathématique, auriez-vous plutôt tendance à augmenter ou à diminuer le temps consacré à...
...l'étude des bases différentes de dix (codage, décodage, comptage)

diminuer	54%
statu quo	36%
augmenter	10%

(Annexe 3)

Enquête 4P	N = 725

En fonction de votre expériences, constatez-vous:

	pas du tout			très nettement		
	1	2	3	4	4	5
- l'utilisation des bases différentes de dix permet aux élèves de mieux comprendre le système de numération de position en base dix	20%	22%	20%	22%	16%	
- l'étude des bases différentes de dix demande trop de temps par rapport aux résultats obtenus	7%	10%	15%	20%	47%	
- les activités en base différentes de dix ne profitent qu'aux élèves forts	14%	12%	16%	20%	37%	

Annexe 4

Les objectifs de l'avenue «Numération»

Extraits des ouvrages méthodologiques l'intention des enseignants de Suisse romande.

«L'étude de la numération de position dans différentes bases a pour but de conduire à la découverte des conventions qui régissent notre système décimal.

Certains enfants sont déjà conditionnés par la base dix; cela ne signifie pas pour autant qu'ils connaissent le système de numération de position. Un tel système repose sur le choix d'une base déterminée (nombre d'éléments permettant de former un groupement, puis un groupement de groupements, etc.).

Pour l'enfant, les avantages de cette étude sont:

- qu'il domine mieux la numération décimale parce qu'il en comprend la construction grâce au travail exécuté dans d'autres bases;
- qu'il reste attentif à la valeur positionnelle de chaque chiffre dans l'écriture d'un nombre;
- qu'il peut écrire très tôt des nombres de plusieurs chiffres et comprendre la signification de cette écriture en manipulant une collection restreinte d'objets;
- qu'il comprend les techniques des opérations en découvrant que les démarches sont les mêmes quelle que soit la base choisie.».

(«Mathématique 1P» et «Mathématique 2P»)

«Dès la premiére année, l'idée de groupement selon une base choisie est introduite. En deuxième année, le processus récurrent est abordé avec les groupements de premiére et de deuxième espéces. En troisième année, c'est la prise de conscience du processus récurrent lui-même qui est favorisée.»

Pour bien connaître notre système de numération il est nécessaire d'avoir saisi les idées fondamentales qui le régissent: groupement, récurrence, valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre, etc.

«Le choix de la base dix est arbitraire; ce n'est pas lui qui rend notre numération commode et les techniques opératoires relativement simples: en base neuf ou en base six, par exemples, les principes restent les mêmes qu'en base dix. Afin de mettre l'accent sur les idées fondamentales plutôt que sur un apprentissage rapide de la numération décimale, on propose, dans le JEU 2, de travailler dans des bases autres que dix.»

(«Mathématique 3P»)

«La priorité est accordée à la base dix. C'est dans cette base que sont poursuivies les recherches proposées à l'activité O. Les élèves sont conduits à adopter une stratégie de comptage efficace et commode qui leur permet d'annoncer le résultat obtenu avec sécurité et assez rapidement. Grâce à l'introduction de collections comprenant plus de mille objets, la nécessité de procéder à des échanges et d'ordonner les groupements obtenus devient évidente. La communication du nombre obtenu par une équipe aux élèves de la classe donne l'occasion de faire des comparaisons, de procéder à des sériations.»

Les recherches proposées dans des bases autres que dix mettent en valeur les principes fondamentaux qui régissent notre système de numération. En effet ces bases:

- permettent de faire ressortir le processus de récurrence et la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre; une base choisie est introduite;

- constituent un moyen simple et efficace d'introduire la notation des puissances;

- donnent la possibilité de consolider la compréhension de la technique de la multiplication;

- rendent aisées les manipulations qui aident à comprendre la technique de la division. Par ailleurs, elles favorisent ultérieurement l'introduction des unités de mesure et celles des codes à virgule.

(«Mathématique 4P»)

Annexe 5

La numération parlée

(Extrait de Ermel «Apprentissages mathématiques à l'école primaire, cycle préparatoire», Sermap-OCDL, 1977, p.89-90).

«La numération parlée comporte de nombreuses anomalies: on dit vingt et un et non vingt-un, soixante-dix et non septante, quatre-vingts et non octante (ni comme il pourrait encore se dire plus économiquement, huit-dix sur le modèle de huit cents, huit mille, etc.) On peut également dire mille deux cents ou douze cents, deux millions cinq cent mille ou deux millions cinq, etc.

Mais au-delà de ces exemples qui montrent que la part de mémorisation est plus grande qu'on ne pourrait le penser, le principe de la numération parlée est double puisque y apparaissent à la fois les puissances de la base et les coefficients multiplicateurs de ces puissances, que ce soit de façon distincte (deux mille, trois cents, dix, sept) ou en un seul mot (soixante où l'on pourrait dire logiquement «six-dix», treize là où l'on pourrait avoir «dix-trois»).

Dans tous les cas, le O écrit n'est jamais lu (2 OO3 se lit deux mille trois) et lorsque le coefficient de la puissance de la base la plus élevée est un, il n'est pas prononcé (1 OOO se lit mille et non «un mille»).Comme la numération chinoise, notre numération parlée décompose le nombre: 2 3O8 se lit spontanément (2 X 1 OOO) + (3 X 1OO) + 8, deux mille trois cent huit. Enfin quand nous arrivons aux nombres supérieurs à mille, nous observons que ce système fonctionne à la fois en base dix et en base mille. Si on lit le nombre: 34 2O7 454 on lit trente quatre (comme si rien ne suivait) puis millions, deux cent sept mille quatre cent cinquante quatre. Ce qui correspond à la décomposition:

$$(34 \, . \, 10^6) + (207 \, . \, 10^3) + 454 \quad \text{ou} \quad (34 \, . \, 10^3)^2 + (207 \, . \, 10^3) + 454$$

Mille apparaît donc comme nouvelle base, mais on utilise toujours la base dix pour écrire les coefficients des puissances de mille. Ceci est à rapprocher du système d'écriture des nombres qui mesurent le temps où l'on trouve la combinaison d'un système sexagésimal et du système décimal. Cette particularité de la numération parlée a des conséquences dans notre pratique intuitive de la comparaison des nombres: si nous comparons oralement des petits nombres (par exemple 65 et 87), nous ne sommes pas réellement sortis de la comptine qui met «quatre-vingt-sept» après «soixante-cinq» dans la suites des «noms» de nombres que nous avons appris. En revanche la comparaison de grands nombres (23 2O3 et 8 312) se fait directement par comparaison des puissances de la base et de leur coefficient. Le critère qui joue si pertinemment à l'écrit (la longueur de l'écriture) n'est évidemment pas valable oralement («neuf cent quatre-vingt dix-neuf» est beaucoup plus long à dire et pourtant plus petit que «mille»).»

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ackermann-Valladao E., Audéta J., Giddey C., Lock N., Piguet-Chevalley D., Reith E, Saada-Robert M.
Formation et actualisation des modèles du sujet en situation de résolution de problème. *Archives de psychologie*, 1983, 51(196), 61-70.

Assogba Y. Modèle d'analyse pour l'étude sociologique de l'innovation pédagogique. *Revue des sciences de l'éducation*, 1982, 8(1), 120-134.

Audigier M.N., Colomb J., Gorlier S., Guillaume J.C., Hamelin P., Levelut M., Richard J.F., Sebillotte S.
Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Vol. 1: Comportement des élèves. Paris, INRP, 1979.

Ausubel D.P. *Educational psychology: a cognitive view.* New York, Holt and Winston, 1968.

Ausubel D.P., Robinson F.G.
School Learning. London, Holt, Rinehart and Winston, 1971.

Ausubel D.P. Is There a discipline of educational psychology? In stones E (ed): *Educational objectives and the teaching of educational psychology.* London, Methuen, 1972, 257-277.

Avanzini G. *Immobilisme et novation dans l'éducation scolaire.* Toulouse, Privat, 1975.

Baker N. Les représentations sociales dans la relation maître-élève: une lecture de l'effet des attentes de l'enseignant. *Cahiers de la section des Sciences de l'Education*, Université de Genève, 1981, 22, 39-60.

Baldwin J.M. *Interprétation sociale et morale des principes du développement mental.* Paris, Giard et Brière, 1899.

Balkan L. Projet de caractérisation d'une pédagogie de la science. *Science et pédagogie*. Document de travail n° 12, Centre de recherches sémiologiques, Université de Neuchâtel, 1972.

Bang V. The psychology of Jean Piaget and its relevance to education. In: Bruce Rusk (ed), *Alternatives in education*. London, University of London Press, 1972, 16-17.

Bang V. Didactique et acquisition des notions. Actes des 2e Journées internationales sur l'éducation scientifique, Chamonix, 1980.

Bennet S.N. *Teaching styles and pupil progress*, London, Open Books, 1976.

Berberat M.A. Le «drill». Le rôle du drill et de la mémorisation dans l'apprentissage des mathématiques. *Educateur*, 1980, 9, 224-227.

Berlyne D.E. *Conflict, arousal and curiosity*. New York, McGraw-Hill, 1960.

Bernadz N. et Janvier B.
La numération, son apprentissage au primaire et les difficultés qu'il suscite; développement d'une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension de cette notion. Texte dactylographié, Université du Québec, Montréal, 1984.

Brandt P.Y. Réflexions concernant l'enseignement de la numération en 3P et 4P. *Ecole valaisanne*, 1984.

Berman P. et McLaughlin M.W.
Federal programs supporting educational change. Vol. I: a model of educational change, Santa Monica, California: Rand Corporation, 1974.

Blanchet A. Etude génétique des significations et des modèles utilisés par l'enfant lors de résolutions de problèmes. Thèse de doctorat, FAPSE, Université de Genève, n° 102, 1980.

Bouazzaoui H.E. Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 1982.

Bouvet D. — Reconnaissance des définitions dans un texte didactique. *Science et pédagogie*. Document de travail n°5, Centre de recherches sémiologiques, Université de Neuchâtel, 1970.

Brousseau G. — Processus de mathématisation. In: *La mathématique à l'école élémentaire*. Ed. Association des Professeurs de Mathématique, Paris 1972, 428-442.

Brousseau G. — Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1981, 2(1), 37-128.

Brousseau G. — Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1983, 4(2), 164-197.

Brun J. — Education mathématique et développement intellectuel. Thèse de doctorat, Université de Lyon, 1975.

Brun J. — Pédagogie des mathématiques et psychologie: analyse de quelques rapports. *Cahiers de la Section des Sciences de l'Education,* Université de Genève, 1979, 12, 1-24.

Brun J. — Remarques sur le rôle du matériau didactique. In: Mathématiques et réalité, (IRDP/R 83.10), Neuchâtel, IRDP, 1983.

Brun J., Giossi J.M. et Henriquès A.
A propos de l'écriture décimale. *Math-Ecole*, 1984, 23(112), 2-11.

Cardinet J., Rübner C.
Enquête romande auprès du corps enseignant de première année primaire sur l'enseignement de la mathématique. Premiers résultats. (IRDP/R 75.11), Neuchâtel, IRDP, 1975.

Cardinet J., Weiss J.
L'enseignement de la lecture dans le canton de Neuchâtel. (IRDP/R 75.04), Neuchâtel, IRDP, 1975.

Cardinet J., Jaquet F.
Enquête romande auprès du corps enseignant de deuxième année primaire sur l'enseignement de la mathématique. Premiers résultats. (IRDP/R 76.11), Neuchâtel, IRDP, 1976.

Cardinet J. — L'élargissement de l'évaluation. *Education et Recherche*, 1979, 1, 15-34.

Cardinet J., Weiss J. — L'observation interactive au confluent de la formation et de la recherche. *Les Sciences de l'Education*, 1979, *1-2*, 177-203.

Carpenter F., Haddan E.E. — *Systematic application of psychology to education*. New York, Macmillan Company, 1964.

Centre pour la recherche et l'innovation dans l'enseigement. — *Guide pour l'innovation pédagogique*. Paris, OCDE, 1975.

Chevallard Y. — *La transposition didactique*. Cours donné la première école d'été de didactique des mathématiques, Chamrousse, 1980.

Chevallard Y. — La réforme des années soixante. In: *La politique de l'ignorance*, Recherches, n° 41, 1980.

Chobaux J. — Innovation, école et société. In: C.O.P.I.E. *Ecoles de demain*, Montréal, Editions Hurtubise, HMH, 1976, 81-107.

Colardaci A.P. — The relevancy of educational psychology. In Stones E (ed), *Educational objectives and the teaching of educational psychology*. London, Methuen, 1972, 238-242.

Colmez F. — L'enseignement des mathématiques aux niveaux préélémentaire et primaire. *Annales du 3e Congrès de la CIEM*, Karlsruhe, CIEM, 1976.

Colomb J., Richard J.F. — Expérimentation sur les représentations ensemblistes au cours préparatoire. *Revue Française de Pédagogie*, 1976, 36.

Conne F. — La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. FAPSE, Université de Genève, 1981.

Crahay M., De Neve-Lejong M. — L'école, l'enseignant et l'innovation. Laboratoire de Pédagogie expérimentale, Université de Liège, 1982.

Cronbach L.J. — *Educational psychology*, 2e édition, New York, Harcourt, Brace and World, 1962.

Cronbach L.J., Furby L.
How should we measure «change» - or should we? *Psychological Bulletin*, 1970, 74(1), 68-80.

De Bie P. La recherche orientée. In: *Tendances principales de la recherche dans les sciences sociales et humaines*. Partie 1, Paris; Mouton-Unesco, 1970.

Degouys J., Postic M.
Les représentations des différents partenaires de la relation éducative à l'égard des mathématiques en sixième. *Revue Française de Pédagogie*, 1983, 62, 15-28.

Dienes Z.P. *Construction des mathématiques*, Paris, PUF, 1966.

Dienes Z.P. *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire*, 6e édition. Paris, OCDL, 1970.

Droz R., Paschoud J. Le comptage et la procédure «(+ 1)-itéré» dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue suisse de psychologie*, 1981, 40(3), 219-237.

Droz R. Psychogenèse des conduites de comptage. *Bulletin de l'Académie nationale de psychologie*, Paris, 1981, 1, 45-49.

Eggleston J. *The sociology of the curriculum*. London, Routlege and Kegan, 1977.

Ermel. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Paris, Sermap, 1977.

Fayol M. Nombre, numération et dénombrement: que sait-on de leur acquisition? *Revue Française de Pédagogie*, (à paraître).

Ferreiro E. «What is written in a written sentence?: a developmental answer. *Journal of education*, 160(4), 1978.

Fischer J.P. Developpement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1981, 2(3), 277-302.

Feyerabend P.K. Comment être un bon empiriste. Pladoyer en faveur de la tolérance en matière épistémologique. In: Jacob P., *De Vienne à Cambridge*, Paris, Gallimard, 1980.

Foxman D.D., Cresswell M.J., Ward M., Badger M.E., Tuson J.A., Bloomfield B.A. *Mathematical development. Primary survey report n° 1*. Department of Education and Science Welsh Office, APU, London, HMSO, 1980.

Freinet C. *Pour l'école du peuple.* Paris, Maspéro, 1977.

Fullan M., Pomfret A. Research on curriculum and instruction implementation. *Review of educational Research*, 1977, 47(2), 335-397.

Galpérine. Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. In: *Recherches psychologiques en URSS.* Edition du Progrès, Moscou, 1966, 114-132.

Garrison K.C. et Magoon R.A. *Educational psychology: An integration of psychology and educational practices.* Colombus, Ohio, Charles E. Merill, 1972.

Gelman R., Gallistel C.R. *The child's understanding of number.* Cambridge, Harvard University Press, 1978.

Gilliéron C. Décalages et sériations. *Archives de Psychologie*, 1976, 44, Monographie 3.

Gilly M. *Maître-élève. Rôles institutionnels et représentations.* PUF, Paris, 1980.

Giordan A. *L'élève et/ou les connaissances scientifiques*, coll. Exploration, Berne, Peter Lang, 1983.

Golby M., Greenwald J., West R. (édit) *Curriculum design.* London, The Open University Uress, 1975.

Gonzales E.G., Kolers P.A. Mental manipulation of arithmetic symbols. *Journal of experimental psychology: Learning, Memory and Cognition.* 1982, 8(4), 308-319.

Gordon G. et Mosse E. Evaluation Research. *Annual Review of sociology*, 1975, 2I, 339-361.

Goutard M. *Les mathématiques et les enfants.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1963.

Gréco P., Morf A. *Structures numériques élémentaires.* Etudes d'épistémologie génétique, vol. XIII, Paris, PUF, 1962.

Greeno. Trends in the theory of knowledge for problem solving. In: Tuma D.T., Reif F., (éd): *Problem solving and education: Issues in teaching and research.* Lawrence Erlbaum Associates, 1980, 9-24.

Grize J.B. Hilare Giroflée, pédagogue diplômé. Editions Richème, Neuchâtel, 1941.

Grize J.B. Analyse sémiologique de manuels scolaires. *Techniques d'instruction*, 1972, 4, 3-6.

Halbwachs F. Faut-il tuer les cardinaux? *Revue française de Pédagogie*, 1979, 46, 5-9.

Halbwachs F. Apprentissage des structures et apprentissage des significations. *Revue française de Pédagogie*, 1981, 57, 15-21.

Hameline D. *Les objectifgs pédagogiques en formation initiale et en formation continue.* Paris, Editions ESF, 1979.

Hamilton D. *Curriculum évaluation.* London, Open Books, 1976.

Hassenforder J. *L'innovation dans l'enseignement.* Paris, Casterman, 1972.

Hayes J.R. and Simon H.A. Understanding written problem instructions. In: Giegg L.W., *Knowledge and cognition*, Lawrence Erlbaum Associates, 1974.

Hilgard E.R. A perspective on the relationship between learning theory and educational practives. In: Stones E. (ed.) *Reading in educational psychology.* London, Methuen, 1970, 87-97.

Holt M. *Evaluating the evaluators.* London, Hodder and Stoutghton, 1981.

Howson A.E. *A review of research in mathematical education. Part C; Curriculum development and curriculum research: a historical and comparative view.* Windsor, NFER-Nelson, 1983

Huberman M. *Comment s'opèrent les changements en éducation: Contribution à l'étude de l'innovation.* Expériences et innovations en éducation n° 4, Unesco: BIE, 1973.

Huberman M. Teaching, learning and coping in «progressive» schools: a discrepancy analysis. Texte dactylographié, FAPSE, Université de Genève, 1976.

Huberman M. L'utilisation de la recherche éducationnelle: vers un mode d'emploi. *Education et Recherche*, 1982, 4(2), 136-153.

Huberman M. Répertoires, recettes et vie de classe: Comment les enseignants utilisent l'information. *Education et recherche*, 1983, 5(2), 154-177.

Huberman M. S'évaluer pour s'illusionner? Promesses et écueils de l'évaluation «adaptative/interactive» des innovations scolaires. (IRDP/R 83.08), Neuchâtel, IRDP, 1983.

Hutin R. *L'enseignement de la mathématique. Contribution à la réalisation d'une réforme de l'enseignement à l'école primaire.* Delta, Vevey, 1974.

Hutin R. Mathématique 4P. Enquête intercantonale sur le degré d'assimilation de quelques notions mathématiques au terme de la 4e année. *Collection SRP*, no 21, Service de la recherche pédagogique, Genève, 1980.

Hutmacher W. Pourquoi l'innovation? Communication à la 6e Conférence de l'Association for Teacher Education in Europe (ATEE), (IRDP/S 81.07), Neuchâtel, IRDP, 1981.

Ifrah G. *Histoire universelle des chiffres*. Seghers, Paris, 1981.

Inhelder B., Ackermann-Valladao E., Blanchet A., Karmiloff-Smith A., Kilcher-Hagedorn H., Montangero J., Robert M.: Des structures cognitives aux procédures de découverts. *Archives de psychologie*, 1976, 44(171), 57-72.

Inhelder B. et Piaget J. Procédures et structures. *Archives de Psychologie*, 1979, 47(181), 156-176.

Jaquet F., Georges E. Que pensez-vous du nouvel enseignement de la mathématique? (IRDP/R 77.16), Neuchâtel, IRDP, 1977.

Jenkins and Shipman. *Curriculum: an introduction*. London, Open Books, 1976.

Kamii C. La connaissance physique et le nombre à l'école enfantine: approche piagétienne. *Cahiers de la section des sciences de l'éducation*, n° 21, Université de Genève, 1980.

Kamii M. Children's graphic representation of numerical concepts: a developmental study. Thèse de doctorat, Harvard University, 1982.

Lawton D. *Class, culture and the curriculum*. London, Routledge and Kegan, 1975.

Lawton D., Gordon P., Ing M., Gibby B., Pring R., Moore T.
Theory and practice of curriculum studies London, Routledge and Kegan, 1978.

Leduc, A. Les compétences minima qu'un adulte doit avoir acquises pour être autonome. *Apprentissage et Socialisation*, 1980, 3(3), 180-188.

Legrand L. Réformes pédagogiques, à quelles conditions? *Techniques d'instruction*, 1979, 3, 3-18.

Le Ny J.F. Les lois psychologiques fondamentales et l'activité psychologique de l'écolier. In: Debesse M. et Mialaret G.: *Traité des sciences pédagogiques*, vol.4, Paris, PUF, 1974.

Léon A. Psychologie et action éducative: la notion de psychopédagogie. *Année psychologique*, 1966, 2, 461-474.

Leoni M.L. Les activités de classement. Recherche sur l'emploi de diagrammes pour la représentation d'un classement. Collection SRP, n° 12, Service de la Recherche pédagogique, Genève, 1976.

Lépine G. *Analyse des modèles utilisés en éducation au Québec*. Montréal Editions coopératives, Albert St-Martin, 1977.

Leseir P., Cellerier G., Ducret J.J.
Une étude de la fonction représentative. *Archives de Psychologie*, 1976, 44(171), 83-96.

Lindgren H.C. *Educational psychology in the classroom*, 3e édition, New York, John Wiley and Sons, 1967.

Marc P. Trajet du maître et prégnance de la note scolaire. Eléments d'une problématique sur l'attente. *Dossier de psychologie*, Université de Neuchâtel, 1981.

Marc P. *Autour de la notion d'attente pédagogique*. Berne, Peter Lang, coll. Exploration, 1983.

Marc P. *Quand juge le maître ...* Cousset (Fribourg), Editions Delval, 1984.

Mc Donald B. and Walker R. *Changing the curriculum*. London, Open Books, 1976.

Mc Laughlin M. Implementation as mutual adaptation: Change in classroom organisation. *Teachers College Record*, 1976, 77(3), 339-351.

Meljac C. *Décrire, agir et compter*. Paris, PUF, 1979.

Mentshinskaïa N. Les problèmes psychologiques de l'activité de la personnalité dans l'enseignement. In: *Recherches psychologiques en URSS*, Editions du Progrès, Moscou, 1966, 181-190.

Mialaret G. Introduction. In: Debesse M. et Mialaret G., *Traité des sciences pédagogiques. Vol. 4. Psychologie de l'éducation*, Paris, PUF, 1974.

Morf A., Grize J.B., Pauli L. Pour une pédagogie scientifique. *Dialectica*, 1969, 23(1).

Morf A. La formation des connaissances et la théorie didactique. *Dialectica*, 1972, 26(1).

Mosimann O., Bovay M., Dallenbach J.F., Droz R. Les nombres d'Alex. Les comptages d'un enfant de quatre ans. *Archives de psychologie*, 1982, 50(193), 91-164.

Mouvement populaire des familles. *L'école en question*. Imprimeries populaires, Lausanne et Genève, 1978.

Newel A. One final word. In: Tuma DT, Reif F. (éd.), *Problem solving and education: Issues in teaching and research*. Lawrence Erlbaum Associates, 1980, 175-192.

Moret J.R. et Patry J.L. Idéal et action chez les enseignants: une application du concept d'anomie à l'analyse de l'école. *Education et Recherche*, 1982, 4(2), 190-204.

Morris J.F., Lunzer E.A. (éd).
Development in learning, Vol.III Contexts of education, London, Staples Press, 1969.

Morris L.L., Fitz-Gibbon C.T.
How to measure program implementation, London, Sage publications, 1978.

Moscovici S. Réflexions et recherches sur le changement social. *Psychologie et éducation*, 1983, 7(1-2) 7-28.

Not L. L'enseignement des mathématiques au cycle d'observation. Toulouse, CRDP, 1963.

Office romand des éditions scolaires. *Plan d'études pour l'enseignement primaire de Suisse romande*, 1972.

Oléron P. Les activités intellectuelles. In: Fraisse P. et Piaget J. (éd.): *Traité de psychologie expérimentale. Vol VII*, 2e édition, Paris, PUF, 1969, 1-69.

Panchaud G. *Ces impossibles réformes scolaires*. Lausanne, Réalités sociales, 1983.

Pauli L. Le colloque de Royaumont. *Math-Ecole*, 1979, 90, 2-10.

Pelnard-Considere J., Levasseur J.
Pédagogie nouvelle en mathématiques et developpement intellectuel. *Revue Française de Pédagogie*, 1973, 23, 5-30.

Perrenoud P. L'innovation en éducation au service de la recherche? In: Actes du IVème Congrès de l'ASPELF, SRP, Genève, 1977, 62-75.

Perrenoud P. La pratique pédagogique entre l'improvisation et le bricolage. Essai sur les effets indirects de la recherche en éducation. *Education et Recherche*, 5(2), 1983, 198-212.

Perrenoud P. *La fabrication de l'excellence scolaire dans l'enseignement primaire: du curriculum aux pratiques d'évaluation*. Genève, Librairie Droz, 1984.

Perret J.F. Enquête romande auprès du corps enseignant detroisième année primaire sur l'enseignement de la mathématique. Description des résultats, (IRDP/R 78.26), Neuchâtel, IRDP, 1978.

Perret J.F. Groupes cantonaux d'examen des moyens d'enseignement, Mathématique 3e année. Recueil et analyse des remarques, (IRDP/R 79.1001), Neuchâtel, IRDP, 1979.

Perret J.F. Enquête auprès de parents d'élèves sur l'enseignement de la mathématique, (à paraître).

Perret J.F. *Connaissances mathématiques à l'école primaire.* Présentation et synthèse d'une évaluation romande. Peter Lang, Berne, (à paraître).

Perret-Clermont A.N., Mugny G., Doise W.
Une approche psychosociologique du développement cognitif. *Archives de psychologie*, 1976, 44(171), 135-144.

Perret-Clermont A.N., Brun J., Conne F., Schubauer-Leoni M.L.
Décontextualisation, recontextualisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves. *Interactions didactiques n° 1*, Université de Genève et Neuchâtel, 1982.

Perret-Clermont A.N., Brun J., Saada E.H., Schubauer-Leoni M.L.
Processus psychosociologiques, niveau opératoire et appropriation de connaissances. *Interactions didactiques*, n° 2, Université de Genève et Neuchâtel, 1982.

Perret-Clermont A.N.
Quel est l'enjeu des situations didactiques? In: Giordan A., Martinand J-L. (éd.) *Actes des 6e Journées internationales sur l'Education scientifique*, Chamonix, janvier 1983.

Perret-Clermont A.N.
Des conditions psychosociales d'émergence des connaissances scientifiques (du chercheur adulte à l'élève). In Giordan A., Martinand J.L. (éd.): *Actes des 5e Journées internationales sur l'éducation scientifique*, Paris, 1983.

Piaget J., Szeminska A.
La genèse du nombre. Neuchâtel et Paris, Delachaux et Nestlé, 1941.

Piaget J. *Psychologie et pédagogie*. Paris, Denoël Gauthier, 1969.

Piaget J. *Réussir et comprendre*. Paris, PUF, 1974.

Picard N. *Mathématique et jeux d'enfants*. Paris, Casterman, 1970.

Pieron H. *Vocabulaire de la psychologie*, 4e édition. Paris, PUF, 1958.

Pochon L.O. Enquête romande auprès du corps enseignant de quatrième année primaire sur l'enseignement de la mathématique. Présentation des résultats. (IDRP/R 79.11), Neuchâtel, IRDP, 1979.

Pochon L.O., George E.
Recueil d'opinions sur les moyens d'enseignement de mathématique: 4e année, (IRDP/R 80.1007), Neuchâtel, IRDP, 1980.

Poisson, Y. Vers l'identification des compétences minima en éducation. *Apprentissage et socialisation*, 1980, 3(3), 158-174.

Resnick L.B., Ford W.W.
The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, 1981.

Resnick L.B. Syntax and semantic in learning to substract. In: Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (éds). *Addition and substraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, 1982, 136-155.

Retschitzki J., Perret J.F.
La résolution de problèmes dans l'apprentissage mathématique. *Education et recherche*, 1983, 5(3), 299-310.

Revuz A. *Mathématique moderne, mathématique vivante*, 5e éd., Paris, OCDL, 1976.

Rivière C. *L'analyse dynamique en sociologie*. Paris, PUF, 1978.

Robinson P. (éd) *Education curiosity and questioning*. Report of schools concil project. «Question and reponse in children aged eight to sixteen» 1968-1971. Departement of Psychology, The university Southampton, 1974.

Roller S., Metraux G.
La numération. Service de la Recherche, section de Pédagogie, Ecole du Mail, Genève, 1963, (rapport 63.08). (Extrait in: *Les nombres en couleurs*, 1963, 10, 1-5).

Roller S. *Mathématiques nouvelles*. Paris, Conseil de l'Europe, 1975.

Roller S. Pierre Bovet, l'éducateur. In: Cahiers de l'institut neuchâtelois *Pierre Bovet et l'école active*. Neuchâtel, Edition de la Baconnïère, 1978.

Sastre G., Moreno M.
Représentation graphique de la quantité. *Bulletin de psychologie*, 1977, 30, 346-355.

Schubauer-Leoni M.L., Perret-Clermont A.N.
Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1980, 1(3), 297-350.

Scriven M. Evaluation bias and its control. *Evaluation studies*, 1976, 1, 119-139.

Shelley P. The contributions of psychology to education. *Oxford Review of Education*, 1976, 2(2), 179-196.

Sieber S.D. and Wilder D.E.
Teaching styles: parental preferences and professionnal role definitions. In: Miles M.W. et Charters W.W. (éd.), *Learning in social setting*. Allyn and Bacon, 1970.

Sinclair A., Siegrist F., Sinclair H.
Young children's ideas about the written number system. Paper presented at: NAIO Conferences, Acquisition of symbolic strills, Keele, 1982.

Stievenart M., Tourneur Y.
Conception d'un programme de compétences fondamentales en vue d'une meilleure préparation des jeunes à la vie: méthodologies et résultats. Université de l'Etat de Mons, Département des Sciences et de la Technologie de l'Education, 1983.

Stones E. *Introduction à la psychopédagogie.* Paris; Les éditions ouvrières, 1973.

Talyzina N.F. The stage theory of the formation of mental operations. *Soviet Education*, 1968, 10(3), 38-42.

Talyzina N.F. Les fondements psychologiques de l'enseignement programmé. *Bulletin de psychologie*, 1974-1975, 28(7-8), 439-458.

Thorel-Cornut I. Problèmes liés à la numération: utilisation d'un compteur en 2P-3P. Mémoire de licence, FAPSE, Université de Genève, 1984.

Vergnaud G. Calcul relationnel et représentation calculable. *Bulletin de Psychologie*, 1974-1975, 28(7-8), 378-387.

Vergnaud G., Ricco G. Psychogenèse et programme d'enseignement: différents aspects de la notion de hiérarchie. *Bulletin de Psychologie*, 1976-1977, 30(17), 877-882.

Vergnaud G. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, Peter Lang, coll. Exploration, 1981a.

Vergnaud G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1981b, 2(2), 215-232.

Vergnaud G. Jean Piaget: Quels enseignements pour la didactique. *Revue Française de Pédagogie*, 1981c, 57, 7-14.

Vincent G. *L'école primaire française. Etude sociologique.* Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1980.

Ward M. *Mathematics and the 10-year-old*, Schools'Concil working paper 61, London, Evans/Methuen Educational, 1979.

TABLE DES MATIÈRES