

Centre de Recherches Sémiologiques

Travaux de logique

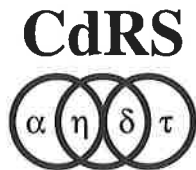
N° 15 – octobre 2003



**"MAISON HILBERT": UN TRÈS
JOLI ÉDIFICE SANS TOIT NI SOL**

Analyse model-théorique d'un échec

Alessandro FACCHINI



Université de Neuchâtel

Comité de lecture

Jean-Pierre DESCLÉS, Paris

Gerhard HEINZMAN, Nancy

Frédéric NEF, Rennes

Denis MIÉVILLE, Neuchâtel

Denis VERNANT, Grenoble

Henri VOLKEN, Lausanne

Centre de Recherches Sémiologiques

Université de Neuchâtel

Espace Louis-Agassiz 1

CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

© 2003 by Centre de Recherches Sémiologiques. Tous droits réservés

LA CASA*

*Era una casa molto carina
senza soffitto, senza cucina;
non si poteva entrarci dentro
perché non c'era il pavimento.
Non si poteva andare a letto
in quella casa non c'era il tetto;
non si poteva far la pipì
perché non c'era vasino lì.
Ma era bella, bella davvero
in Via dei Matti numero zero;
ma era bella, bella davvero
in Via dei Matti numero zero.*

* Texte d'une chanson de Sergio Endrigo, publiée dans un album issu de la collaboration avec Vinicius De Moraes, Toquinho et Giuseppe Ungaretti. Comme tout bon enfant de langue maternelle italienne, elle m'a été apprise à l'école enfantine.

[Il existait une maison très charmante / sans plafond, sans cuisine; / on ne pouvait pas y entrer / car il n'y avait pas de sol. / On ne pouvait pas aller au lit / dans cette maison il n'y avait pas de toit; / on ne pouvait pas faire de pipi / puisqu'il n'y avait pas de toilette. / Mais elle était belle, vraiment belle / en Rue des fous numéro zéro; / Mais elle était belle, vraiment belle / en Rue des fous numéro zéro.]

✓

Ai miei genitori,
il mio tetto e il mio pavimento

Remerciements

Cette publication est issue d'un mémoire en logique présenté en octobre 2002 sous la direction de M. Denis Miéville, professeur à l'Université de Neuchâtel, et M. Pierre Joray, maître assistant, qui a tenu lors de la soutenance le rôle d'expert.

Je tiens à remercier M. le professeur Denis Miéville pour la patience qu'il m'a témoignée et les critiques constructives qu'il a émises vis-à-vis de cette recherche. Que Cédric Degrange, Nadine Gessler et Pierre Joray acceptent également l'expression de ma cordiale reconnaissance pour avoir relu, en suggérant des améliorations, les différentes versions de ce travail. Je remercie aussi Mme Christiane Tripet pour son aide précieuse dans la mise en forme de ce texte.

Toute ma gratitude va enfin à Mme Béatrice Godart-Wendling, qui m'a permis d'améliorer ce texte par son constant soutien et la confiance qu'elle m'a prodiguée.

Mais bien évidemment je reste le seul responsable de la présence d'au moins une erreur dans cette publication.

Sommaire

Avant-propos de Denis Miéville

0. Introduction	1
0.1. «Serendipity»	1
0.2. Une petite histoire: à Königsberg	2
0.3. Ce dont il est question, autrement dit: du fini et de l'infini (ou inversement)	4
1. Quelques concepts essentiels de métalogue	6
1.1. Le système formel	6
1.2. La notion d'interprétation	8
1.3. La notion de valuation	8
1.4. La notion de satisfaction	9
1.5. La notion de vérité	9
1.6. La notion de validité logique	10
1.7. La notion de modèle	10
1.8. Quelques propriétés des systèmes formels	10
2. Le programme de Hilbert	11
2.1. Le problème des fondements	11
2.2. La preuve de consistance et le rapport formel/intuitif	13
2.2.1. <i>Le point de départ du programme de Hilbert</i>	13
2.2.2. <i>«Au commencement est le signe, telle est la loi ici»</i>	15
2.2.3. <i>L'intelligibilité du transfini et l'analyse hilbertienne de la quantification</i>	19
2.2.4. <i>Fonction de choix, axiome transfini et quantification</i>	21
2.2.5. <i>La quête du Graal de la non-contradiction</i>	26
2.2.6. <i>La compréhension par l'élimination</i>	29
2.2.7. <i>Forme et contenu chez Hilbert</i>	32
2.3. La question de la complétude	33
2.3.1. <i>Préambule</i>	33
2.3.2. <i>La logique comme langage</i>	34
2.3.3. <i>La logique comme calcul</i>	36
2.3.4. <i>Esquisse d'une typologie de la complétude</i>	37
2.3.5. <i>La complétude sémantique comme question essentielle du projet hilbertien</i>	39

3. La quantification du point de vue sémantique.....	41
3.1. Enjeu de la discussion du résultat de complétude de Gödel	41
3.2. L'incomplétude descriptive des systèmes d'axiomes propres.....	43
3.2.1. <i>Un «paradoxe» dans la théorie formelle des ensembles</i>	43
3.2.2. <i>La non-catégoricité de l'arithmétique formelle élémentaire</i>	44
3.2.3. <i>Les conséquences sur le programme de Hilbert</i>	46
3.3. Quantification et fonction de choix: quel mariage?.....	46
3.3.1. <i>Préambule</i>	46
3.3.2. <i>Formes normales prénexes</i>	47
3.3.3. <i>La dépendance quantificationnelle.....</i>	48
3.3.4. <i>Les formes de Skolem.....</i>	49
3.3.5. <i>La nature de la quantification et la satisfaction dans un domaine dénombrable.....</i>	52
3.4. L'axiome du choix et les deux preuves du théorème de Löwenheim-Skolem	53
3.4.1. <i>Preuve du théorème avec axiome du choix.....</i>	53
3.4.2. <i>Preuve du théorème sans axiome du choix.....</i>	55
3.5. Ce que l'analyse model-théorique de la quantifica- tion ne nous permet pas encore de dire sur l'échec du programme hilbertien	57
4. Le fini du point de vue sémantique et ses enjeux	58
4.1. Une (autre) conséquence de la complétude sémantique: la compacité	58
4.2. À la recherche d'une définition du «fini»	60
4.3. Le nombre naturel, Skolem, Dedekind et l'induction	63
5. «Maison Hilbert»: un très joli édifice sans toit ni sol	65
6. La preuve de Kripke	68
7. Conclusion: de l'infini et du fini (mais pas inversement).....	72
8. Références bibliographie	74

Avant-propos

Le travail de M. Alessandro Facchini est l'expression même d'une excellence scientifique associée à une exigence et une volonté intellectuelles de très haut niveau.

M. Facchini a choisi d'étudier la logique et les mathématiques. Dans le cadre de ses études il a été fortement impressionné par les conséquences des théorèmes de Löwenheim-Skolem. Cet intérêt l'a littéralement projeté dans un champ de réflexions où se croisaient notamment les travaux de D. Hilbert et K. Gödel. Dans ce monde d'une grande abstraction qu'il s'est mis à ausculter, M. Facchini s'est déterminé à montrer les relations entre les travaux sur la théorie des modèles de Skolem et l'incomplétude de l'arithmétique élémentaire. Dans ce voyage au pays des merveilles, il y découvre des mystères logiques fondés, il y rencontre des situations acquises qui le provoquent, il y montre que l'infini ne peut se ramener au fini, il y habite enfin une maison du nom d'Hilbert dont il montre qu'elle est sans toit ni sol.

Au delà de la force d'une pensée puissante et exigeante en quête de réponses, le travail de M. Facchini est l'exemple type d'un travail intellectuel qui justifie l'existence d'un lieu où le savoir doit être continuellement interrogé.

Denis MIÉVILLE
Directeur du Centre de Recherches Sémiologiques
et de l'Institut de logique

0. Introduction

0.1. «Serendipity»¹

Il y a quelques années, pendant l'une de mes visites à la bibliothèque de l'École polytechnique de Lausanne, je tombais pas hasard sur un livre de logique traitant des fondements des mathématiques. L'année suivante, j'assistais au cours d'introduction aux systèmes formels à l'Université de Neuchâtel. C'est à ce moment que j'ai pris conscience des «limitations internes des formalismes», dénomination utilisée pour renvoyer, en particulier, au métathéorème de Löwenheim-Skolem² et aux résultats d'incomplétude de K. Gödel³.

Je dois avouer n'avoir pas immédiatement saisi la portée réelle de ces résultats car leur compréhension nécessitait de dépasser leur simple lecture. Ce fut le métathéorème de Löwenheim-Skolem qui exerça sur moi une fascination particulière⁴, alors

1 Terme conçu en 1754 par l'homme de lettres anglais Horace Walpole afin d'indiquer le mixte de sagacité et de chance avec laquelle on parvient à obtenir des découvertes. Dans les années 40, Robert K. Merton «redécouvre» le terme en l'introduisant dans les sciences sociales. Il voit dans la signification de ce mot une sorte de modèle capable d'expliquer la donnée imprévisible du processus de découverte scientifique. Pour plus d'informations: R.K. Merton, E.G. Barber (à paraître): *The Travels and Adventures of Serendipity; a Study in Historical Semantics and the Sociology of Science*, Princeton University Press [le livre a été publié en italien en 2002 par la maison Il Mulino, Bologna].

(Cela va de soi que, comme tout bon féru des lettres saura le reconnaître, le terme fait le bonheur des groupes politico-littéraires post-avantgardistes comme «Aleph-2».)

2 Le métathéorème, démontré par Löwenheim (1915) et ensuite «retrouvé» (et dont la preuve a été corrigée) en 1919 par Skolem (1920), affirme que:

- si une théorie T a un modèle, alors elle a un modèle dénombrable.

3 Rappelons que Gödel (1931) a démontré que, étant donné une théorie T dans laquelle on peut formaliser l'arithmétique, alors:

- si T est consistante, il existe un énoncé universel vrai mais non démontrable dans T (premier résultat d'incomplétude);

- si T est consistante, alors l'énoncé universel qui affirme la consistance de T n'est pas démontrable dans T (deuxième résultat d'incomplétude).

4 Peut-être est-ce dû au plaisir que j'éprouvais, comme beaucoup de logiciens, à «plonger», et «replonger», et «replonger»,... *ad infinitum*, des petits jeux formels dans différentes

qu'il semble jouer, dans la littérature spécialisée, un rôle plus mineur que les résultats de K. Gödel.

Ainsi, si les théorèmes de Gödel ont donné lieu à de très nombreuses discussions des plus fécondes, les travaux de L. Löwenheim, et tout particulièrement de T. Skolem, ont par contre souffert d'un certain silence qui m'intriguait puisqu'ils avaient été à l'origine d'une question fondamentale pour les logiciens, à savoir quel sens attribuer au terme de «limitation interne»? Ma curiosité me poussait alors à investiguer un des corollaires de cette problématique: était-il possible de mettre en relation les différents phénomènes de limitation qui avaient déjà été répertoriés?

Ma démarche fut alors la suivante: pour comprendre le caractère interne des métathéorèmes, il fallait d'abord analyser l'objet sur lequel portait la limitation et ceci exigeait de replacer cet objet dans son contexte d'apparition en retraçant la genèse de la théorie des systèmes formels. Des recherches ayant montré que les conséquences des résultats de Skolem pouvaient également être obtenues à partir des travaux de Gödel, je me proposais alors, dans un second temps, d'examiner si le parcours inverse était possible. La problématique à résoudre consistait donc à se demander si l'on pouvait prouver que les travaux de Skolem en théorie des modèles permettaient également de «retrouver» l'incomplétude des formalisations de l'arithmétique élémentaire.

Les trente premières années du siècle passé sont riches en passions, en curiosités et en échanges intellectuels. Baigné dans ce contexte stimulant, j'ai très humblement essayé de faire mien cet esprit.

0.2. Une petite histoire: à Königsberg⁵

Premier jour: 7 octobre 1930.

Lieu: Königsberg.

Contexte: lors des conférences sur les fondements des mathématiques.

structures visant à leur donner du sens pour ensuite confronter et analyser les résultats ainsi obtenus.

5 Cette histoire est aussi racontée par J.W. Dawson jr (1997) au chapitre 4 de son ouvrage.

Un jeune logicien provenant de Vienne, K. (24 ans, né à Brno, ou Brünn, et appelé «der Herr warum» par sa famille), montre ce que tous les logiciens pensaient savoir: la logique dit bien tout ce qu'elle a à dire.

Deuxième jour: le 8 octobre 1930.

Lieu: toujours Königsberg.

Contexte: des discussions générales sur les présentations qui ont eu lieu. K. (encore lui!) affirme que, bien qu'aucune proposition fausse ne peut être démontrée dans un système d'axiomes formalisant les mathématiques, il y a malheureusement des propositions vraies qui ne sont pas des théorèmes de ce système. Et il l'avait prouvé.

Curieusement, la personne qui résuma les discussions⁶, un certain Hans R., ne mentionna pas K. Les faits montrent que seul un certain J. von N., qui avait été présent au colloque et qui était connu pour sa «rapidité mentale», avait compris la portée des travaux de K. Une fois retourné aux USA, J. von N. continua de méditer sur ces résultats. Le 20 novembre 1930 J. von N. informa K. qu'à travers ses réflexions il était parvenu à prouver qu'on ne pouvait pas démontrer la consistance des systèmes d'axiomes formalisant les mathématiques. K. le remercia et lui expliqua qu'il était déjà parvenu au même résultat.

Que s'était-il passé?

La portée de ces découvertes fut de répondre aux deux questions qui étaient sous-tendues par l'un des programmes les plus ambitieux (intellectuellement parlant)⁷ du XX^e siècle. Formulé par le plus grand mathématicien de l'époque, D. H., ce programme présupposait:

- qu'il fallait montrer qu'un jeu de signes permet de transcrire toutes les formes de raisonnement valide des mathématiques,
- et que le mathématicien ne peut pas démontrer n'importe quoi.

En répondant positivement à la première exigence, ce diable de K. avait prouvé que la réponse à la seconde ne pouvait pas résider en un seul jeu sur des signes⁸.

6 La synthèse en question fut publiée dans: *Die Naturwissenschaft*, vol. XVIII, 1930: 1093-94.

7 Et qui, pour moi, ne manque pas d'un brin de "géniale folie".

8 Notez l'ironie de l'Histoire: D. H. est né à Königsberg.

0.3. Ce dont il est question, autrement dit: du fini et de l'infini (ou inversement)

En 1931 Gödel publia ses théorèmes d'incomplétude. Ces résultats entraînèrent la ruine de la tentative hilbertienne de fonder l'ensemble des mathématiques grâce à l'élaboration d'une théorie ancrée dans un cadre finitiste.

Mais la perspective de Hilbert – qui visait à justifier l'usage de la notion d'«infini» dans la pensée mathématique en montrant comment celle-ci peut être appréhendée en fonction de considérations finies accessibles par l'intuition – ne se réduisait pas à la simple recherche d'une preuve de non-contradiction. En effet, l'entreprise du mathématicien de Königsberg soulève explicitement le problème de la formalisation de la logique propre au raisonnement mathématique; problème qui précède programmatiquement celui de la non-contradiction. Il s'agit certes d'une étape préparatoire, mais qui s'avère fondamentale pour pouvoir poser la question cruciale de la non-contradiction. La résoudre nécessitait pour Hilbert de comprendre le concept de «transfini». Pour ce faire, il fallait montrer que dans la pratique mathématique l'emploi des termes transfinis n'est pas indispensable dans les démonstrations des assertions finitistes. Du point de vue de la formalisation, cela signifie que l'on doit pouvoir les éliminer.

Ainsi que le résume G. Kreisel, l'idée sous-tendue par cette approche syntaxique est que:

[...] l'intelligibilité d'un concept consiste simplement dans la technique du raisonnement sur ce concept à l'intérieur d'un contexte bien défini. (Kreisel 1951: 470)

Une fois ce travail accompli, la preuve de la non-contradiction aurait dû en découler naturellement.

Le but de ce travail est de mettre en évidence que le programme hilbertien – qui repose sur une conception «forte» du fini et qui présuppose que l'intelligibilité syntaxique du concept d'«infini» doit être établie sur la démonstration de l'adéquation de la logique du premier ordre pour représenter le raisonnement mathématique – était voué à l'échec pour des raisons intrinsèques. Nous

montrerons ainsi que la stratégie préconisée par Hilbert pour prouver la non-contradiction de l'arithmétique formelle élémentaire, était inadéquate de par le caractère «non élémentaire» du concept de finitude et de par la nature même de l'outil utilisé pour représenter formellement le «transfini». En effet, en faisant reposer sa démonstration finitiste sur les affinités que la quantification entretient avec les fonctions de choix, Hilbert néglige la dimension sémantique de cette corrélation qui conduit à l'incomplétude descriptive des théories formelles. Nous montrerons alors que l'incomplétude prouvée par Gödel peut être vue comme une conséquence de ce type d'incomplétude.

Dans un premier temps, notre argumentation consistera à dégager les idées du projet hilbertien supportant la représentation formelle du transfini et l'enjeu dont elles furent porteuses dans la question de la non-contradiction. Nous mettrons en évidence que le programme de Hilbert comprend deux étapes:

- démontrer la complétude sémantique de la logique du premier ordre,
- démontrer la non-contradiction de l'arithmétique formelle.

Nous soulignerons alors que la preuve de la complétude, donnée par K. Gödel (1929 et 1930), contenait déjà les raisons de l'impossibilité de formaliser complètement l'arithmétique élémentaire. Pour ce faire, nous mettrons en évidence que Gödel obtint ce résultat en montrant que la satisfaction implique la satisfaction dans un domaine dénombrable, et ce faisant, il retrouva ce que L. Löwenheim et T. Skolem avaient déjà découvert respectivement en 1915 et 1920⁹. Ce dernier résultat a pour conséquence que lorsqu'une théorie intuitive est formalisée, il n'y a plus aucune assurance que l'on représente uniquement le domaine du discours visé (la complétude descriptive). En effet, il y a toujours des interprétations qui satisfont la théorie formelle, mais dont les propriétés structurelles sont différentes de celles de l'interprétation recherchée.

Nous montrerons qu'afin de démontrer ce type de phénomène pour l'arithmétique, il est nécessaire de s'interroger sur la nature

9 Grâce à cette antériorité chronologique, ce résultat est couramment nommé «théorème de Löwenheim-Skolem».

du cadre finitiste adopté par Hilbert à travers l'analyse du méta-théorème dit de compacité. L'étude des interprétations non standard de l'arithmétique formelle élémentaire permettra alors de penser le premier résultat d'incomplétude comme une conséquence du théorème de Löwenheim-Skolem et de celui de compacité.

L'idée directrice de notre argumentation sera de montrer que l'analyse de la quantification et du fini en théorie des modèles permet de comprendre pourquoi la critique hilbertienne de l'infini actuel est intrinsèquement inadéquate. Autrement dit, nous nous placerons du point de vue de la sémantique afin d'explicitier pourquoi il aurait été impossible pour Hilbert de démontrer la possibilité d'éliminer des éléments transfinis dans les démonstrations formelles.

De cette étude model-théorique, il ressortira que le monde sûr et doré auquel visait Hilbert était dès le départ peuplé de miroirs et d'objets au comportement inattendu.

1. Quelques concepts essentiels de métalogue

Afin de faciliter la compréhension, nous rappellerons un certain nombre de concepts de la théorie des systèmes formels qui seront utilisés par la suite.

1.1. Le système formel

Nous distinguerons *langage formel* et *structure logique* du système formel. Un langage formel est une structure algébrique¹⁰ $L = \langle A, R \rangle$, où A est un ensemble fini ou dénombrable de symboles, et R est un ensemble non vide et fini de règles de formation qui permettent de définir de manière récursive l'ensemble des formules atomiques et des expressions bien for-

10 Une structure est un couple $\langle D, R \rangle$, où D est un ensemble non vide et R est au moins une relation se définissant sur D . On appelle R une opération binaire si, les ensembles M_1 , M_2 et M posés, on a R telle que $R: M_1 \times M_2 \rightarrow M$; R sera appelée interne (dans M) ssi $M_1 = M_2 = M$. Ainsi une structure algébrique est une structure $\langle A, B \rangle$ où au moins une opération binaire interne B est définie sur A . (cf. Leroux 1998: 327-329)

mées (ebf). **Al** se compose de cinq sous-ensembles non vides à partir desquels on engendre l'ensemble des termes de **S** de la manière usuelle:

- un ensemble **C** de constantes d'objet,
- un ensemble **Var** de variables d'objet,
- un ensemble **Pr** de symboles de prédicat $p(i, n)$, où n indique l'arité de p ,
- un ensemble **Fct** de symboles de foncteur $f(i, n)$,
- un ensemble **Cnl** de connecteurs logiques¹¹.

La structure logique d'un système formel est constituée:

- d'un ensemble fini ou dénombrable **Ax** d'ebf de **L** qu'on appellera axiomes¹²,
- et d'un ensemble fini **Rtf** de règles de transformation.

Un système formel est donc un quadruple $S = \langle \mathbf{Al}, \mathbf{Rf}, \mathbf{Ax}, \mathbf{Rtf} \rangle$. Soulignons que par la notion de système formel du premier ordre nous envisageons une classe très grande de structures. Nous distinguons deux types de systèmes: le premier formalise la logique des propositions et des prédicats; le second les théories comme celles de l'arithmétique. Les systèmes qui formalisent des théories se différencient de ceux qui ont un usage purement logique par le fait qu'ils contiennent également des constantes non logiques ainsi qu'un ensemble d'axiomes propres permettant d'insérer la signification primitive de ces constantes.

Étant donné que nous privilégierons le point de vue de la théorie des modèles, nous nous permettrons de «transférer» certaines propositions issues des systèmes «appliqués» dans des systèmes de «logique pure». Nous nous autorisons à procéder de cette manière car en substituant les constantes non logiques présentes dans l'expression d'un système appliqué par une variable de prédicat du calcul des prédicats, nous gardons l'interprétation de cette ex-

11 Puisque par la suite nous considérerons des systèmes formels du premier ordre, on supposera que cet ensemble est constitué des connecteurs usuels: $\supset$ (la conditionnelle), $\equiv$ (la biconditionnelle), $\sim$ (la négation), $\wedge$ (la conjonction), $\vee$ (la disjonction), $\forall$ (le quantificateur universel), $\exists$ (le quantificateur existentiel).

12 Nous supposons connue la distinction entre système formel pur et système formel appliqué du premier ordre.

pression dans la structure mathématique (le fait qu'elle ne soit plus un théorème du système n'est pas pertinent pour nous).

1.2. La notion d'interprétation

Si la notion d'interprétation est habituellement utilisée pour caractériser l'aspect sémantique d'un système formel, nous lui préférons, ainsi que nous allons le justifier, celle de «valuation».

Une interprétation **I** pour un système formel du premier ordre **S** est un couple (Ω_I, ψ) , où:

- Ω_I est un ensemble non vide d'objets, que l'on notera aussi $\Omega_I(S)$, et qui constituera le domaine de **I**,
- une application ψ qui caractérise l'interprétation des sous-ensembles suivants de **Al**:
 - (a) $\psi C(c_i) = a_i \in \Omega_I(S)$,
 - (b) $\psi Pr(p(i, n)) = A_i \in \wp(\Omega_{Id}(S))$, l'organisation relationnelle de $\Omega_I(S)$,
 - (c) $\psi Fct(f(i, n)) = B_i \in \wp(\Omega_{Id}(S) \times \Omega_I(S))$, l'organisation fonctionnelle de $\Omega_I(S)$.

Ainsi, fixée l'interprétation de **S** signifie assigner à chaque constante individuelle, à chaque prédicat ou fonction de **S** sa dénotation dans l'univers (domaine) du discours visé.

L'absence du traitement de l'interprétation des variables (qui peuvent prendre n'importe quel élément de Ω_I comme valeur) s'explique par le fait que nous voulons explicitement déterminer leur comportement du point de vue sémantique, de façon à pouvoir distinguer clairement entre le comportement d'une variable, libre et liée, et celui d'une constante. Nous dirons qu'assigner une valeur aux v_i constitue une assignation de valeur, ou une valuation, des v_i .

1.3. La notion de valuation

Une valuation des termes de **S** sous une interprétation donnée **I** est une fonction VAL des termes de **S** dans Ω_I telle que:

- $VAL(c_i) = \psi C(c_i)$;
- $VAL(v_i) = a_i \in \Omega_I$;

- si $t_1, \dots, t_n$ sont des termes de S , alors $VAL(f_{(i, n)}(t_1, \dots, t_n)) = \psi Fct(f_{(i, n)})(VAL(t_1), \dots, VAL(t_n))$.

Une valuation (des termes de S) ne s'effectue donc que sous une interprétation donnée. En général, il y aura plusieurs valuations possibles dans un Ω_I donné, et elles dépendront de l'assignation des valeurs aux v_i .

Une valuation VAL' sera dite équivalente à VAL pour v_i , ssi, Étant donné une ebf M et v_i une variable libre dans M , VAL' est identique à VAL ou, pour toute $v_j \neq v_i$, $VAL'(v_j) = VAL(v_j)$, et $VAL'(v_i) \neq VAL(v_i)$.

Grâce à cette notion de valuation, nous pouvons maintenant définir les notions essentielles de satisfaction, de vérité et de validité logique.

1.4. La notion de satisfaction

Soient F une ebf de S et I une interprétation donnée de S . Une valuation VAL des termes de S satisfait une ebf F dans Ω_I ssi:

1. si F est une formule atomique $p_{(i, n)}(t_1, \dots, t_n)$, VAL satisfait F ssi $\langle VAL(t_1), \dots, VAL(t_n) \rangle \in \psi Pr(p_{(i, n)})$,
2. si F est de la forme $\sim E$, VAL satisfait $\sim E$ ssi VAL ne satisfait pas E ,
3. si F est de la forme $(E \supset G)$, VAL satisfait F ssi VAL satisfait $\sim E$ ou VAL satisfait G ,
4. si F est de la forme $(\forall v_i)M$, VAL satisfait F ssi toute valuation VAL' équivalente à VAL pour v_i satisfait M ,
5. si F est de la forme $(\exists v_i)M$, VAL satisfait F ssi au moins une valuation VAL' équivalente à VAL pour v_i satisfait M .

1.5. La notion de vérité

Une ebf de S sera dite vraie sous I ssi toute valuation de F dans Ω_I satisfait F .

Une ebf de S sera dite fausse sous I ssi aucune valuation de F dans Ω_I satisfait F .

Cela signifie qu'il y aura des expressions de S qui ne seront ni vraies ni fausses sous I .

1.6. La notion de validité logique

Une ebf de S sera dite logiquement valide ssi F est vraie sous toute interprétation I de S .

Une ebf de S sera dite contradictoire ssi F est fausse sous toute interprétation I de S .

1.7. La notion de modèle

Le concept de modèle peut être obtenu à partir de la notion d'interprétation. On dit qu'une interprétation I est un modèle pour un ensemble d'ebf Γ de S ssi pour toute ebf $\alpha \in \Gamma$, α est vraie sous I . Il est possible d'étendre la notion de modèle à celle de système formel. On dit alors qu'une interprétation I est un modèle pour un système S ssi elle l'est pour l'ensemble Θ des théorèmes de S ¹³.

1.8. Quelques propriétés des systèmes formels

Nous rappellerons aussi quelques propriétés essentielles des systèmes formels.

- un système S est *non contradictoire* ssi il n'y a aucune ebf α telle que $\alpha \in \Theta(S)$ et $\sim\alpha \in \Theta(S)$ ¹⁴;
- un système formel S est *sémantiquement complet* ssi toute ebf α logiquement valide est telle que $\alpha \in \Theta(S)$;
- un système formel S est *catégorique* ssi tous ses modèles sont isomorphes; si S est un système formel appliqué catégorique, nous dirons que le système d'axiomes propres de S est catégorique.

13 Par la suite, l'ensemble des théorèmes de S sera noté $\Theta(S) = \Theta(Ax(S))$. On notera en général $\Theta(\Gamma)$ l'ensemble des ebf qui peuvent être déduites de l'ensemble Γ .

14 Nous nous permettons d'utiliser consistance et non-contradiction comme des termes synonymes.

2. Le programme de Hilbert

2.1. Le problème des fondements

L'entreprise de formalisation qui permit l'édification, dans les années 20 et 30, de la théorie des systèmes formels constitue le point d'aboutissement de la réflexion portant sur l'axiomatisation des théories déductives. L'exemple paradigmatique de ce cheminement est celui de la géométrie. On constate en effet que si le système d'Euclide fut longtemps considéré pour sa rigueur et son apparente perfection, le XIX^e siècle inversera cette perspective en soulignant que la déduction faisait appel à des termes non définis et à des raisonnements intuitivement reconnus comme valides. Constituée par dix propositions, cinq notions communes et cinq postulats, l'axiomatique d'Euclide a permis de déduire, à l'aide de définitions, 465 théorèmes. Les postulats étaient considérés comme des vérités naturellement évidentes et acceptées sans critique, puisqu'elles relevaient de l'expérience sensible issue de l'espace physique. De même, la déduction n'était pas explicitement définie, car elle admettait certaines formes de raisonnement considérées usuellement comme correctes. Ainsi l'axiomatique témoignait de l'accord entre une théorie déductive et la croyance en l'évidence des faits sur lesquels elle reposait.

Cependant, l'émergence au XIX^e siècle de géométries non euclidiennes montra que l'on peut nier un des postulats de la théorie euclidienne sans engendrer de théorie contradictoire. S'ensuivit alors un changement dans la manière d'effectuer les démonstrations: les axiomes n'étant plus nécessairement en conformité avec la représentation de la réalité, les déductions n'étaient plus tributaires de l'intuition spatiale. Il devint donc inutile de recourir à la visualisation graphique et à la signification intuitive des concepts géométriques. L'objet mathématique s'émancipait ainsi de sa relation avec le réel et pouvait acquérir le statut d'«objet de pure pensée», jouissant alors d'une extrême liberté. La seule contrainte à respecter était qu'il ne devait pas conduire à une contradiction.

Un mouvement analogue, visant le même objectif (explicitation des présupposés, rigueur dans les démonstrations, définitions

précises des concepts), eut lieu en Analyse ainsi que dans d'autres branches des mathématiques de l'époque.

L'axiomatique moderne est née de ce changement de perspective. Elle se caractérise par le fait que les concepts utilisés sont introduits explicitement et définis par les relations posées par les axiomes. L'appareil déductif est, de plus, systématisé afin, d'une part, de démontrer tout ce qui est susceptible de l'être et de mettre en évidence, d'autre part, l'interconnexion des différents théorèmes relatifs à la théorie axiomatisée. Il revient à D. Hilbert d'avoir donné naissance en 1899 à cette conception de l'axiomatique moderne. Dans les *Grundlagen der Geometrie* Hilbert présente un système complet d'axiomes issus de la géométrie euclidienne dans lequel aucune hypothèse n'est émise sur la nature des objets appelés «points», «lignes» et «plans». À partir d'une classification des différents types d'axiomes, il entreprend l'examen de leurs relations et dégage le rôle joué par un énoncé dans l'établissement d'une autre proposition.

Bien évidemment l'axiomatisation d'une théorie intuitive soulève la question métathéorique de sa cohérence interne. Dans l'axiomatique d'Euclide, celle-ci résidait dans son adéquation à l'espace physique. Il en va tout autrement chez Hilbert puisque celui-ci franchit un pas décisif en pensant la notion abstraite de «modèle». Un modèle est une réalisation arbitraire dans laquelle une interprétation cohérente permet de vérifier les axiomes posés, au sens où tout axiome du système est vrai dans le modèle. Par ce moyen, Hilbert montre que la cohérence de son axiomatique réside dans l'existence d'un modèle algébrique des coordonnées du plan cartésien prises dans le corps des réels. Cette approche utilise implicitement le fait que lorsqu'un système d'axiomes possède un modèle, alors il n'est pas contradictoire. Mais ce résultat ne fait que déplacer le problème, car la géométrie euclidienne est non contradictoire uniquement si la théorie des nombres réels l'est. La cohérence ainsi établie n'est donc que relative.

Concernant notre problématique, l'arithmétisation de l'Analyse, réalisée par K. Weierstrass, J.W.R. Dedekind, G. Cantor et A.L. Cauchy a joué un rôle important, car elle a mis en évidence que la question de la cohérence de la théorie des nombres réels revenait à résoudre le problème de la cohérence de

la théorie des nombres entiers par l'élimination de l'intuition géométrique. Toutefois cette réduction nécessitait de prendre en compte les opérations sur les ensembles finis ou infinis d'entiers; soulevant ainsi le problème du fondement de la théorie des ensembles. En effet, l'arithmétisation de l'Analyse exigeait une théorie du continuum, et – étant donné que les réels étaient traités comme des ensembles arbitraires d'entiers positifs satisfaisant un certain nombre de conditions – la résolution de la question du continuum passait par l'élaboration d'une théorie des ensembles.

L'issue de cette problématique est bien connue: la notion abstraite d'ensemble en tant qu'appréhension simultanée de tous les éléments jouissant d'une certaine propriété, permet à Cantor d'établir une théorie des nombres ordinaux et des cardinaux transfinis, qui allait donner lieu à l'émergence de toute une série de paradoxes.

2.2. La preuve de consistance et le rapport formel/intuitif

2.2.1. Le point de départ du programme de Hilbert

L'introduction de l'infini actuel et de la notion abstraite d'ensemble dans la théorie mathématique remet en question la définition de certaines notions mathématiques et bouleversa également les formes de raisonnement mises en jeu par cette discipline. Il fallait donc s'assurer que l'édifice mathématique était exempt de toute contradiction et que les règles de déduction ne pourraient pas en produire. Hilbert se donne pour but d'apporter une résolution selon la problématique suivante:

- étant donné que la preuve de consistance de la géométrie euclidienne peut se ramener à celle de la géométrie cartésienne à coordonnées réelles,
- et qu'on sait construire les nombre réels à partir des nombres naturels,
- comment démontrer la consistance d'une axiomatique de l'arithmétique, en proposant une preuve qui ne fasse pas appel à la notion de modèle?

C'est cette question qu'Hilbert pose au début du XX^e siècle à la communauté mathématique. Il s'agit donc de déterminer

comment une telle preuve directe de non-contradiction peut être obtenue.

L'histoire de la pensée axiomatique esquissée ci-dessus montre que les évidences sur lesquelles on s'était appuyé ne constituaient pas des critères de vérité. Toutefois toute démonstration repose sur un critère d'évidence. Et puisque l'évidence fait appel à l'intuition, il devient nécessaire de préciser le type d'intuition à assumer et de justifier le rôle qu'on lui accorde.

Le constat de départ de Hilbert est que le mathématicien est confronté à deux types d'entités:

- d'une part, les entités «réelles» ou «finitistes» qui sont contrôlables et obtenues par des moyens de combinatoire finie;
- d'autre part, les entités «idéales» qui ne renvoient à rien en terme physique, car elles n'ont qu'une interprétation abstraite.

Sur le premier type portent les propositions réelles, sur le second les propositions idéales.

Le concept d'infini actuel ou transfini relève de ce deuxième type d'entités; plus particulièrement les propositions contenant une quantification portant sur les individus d'un domaine infini appartiennent à l'ensemble des propositions idéales. Il s'ensuit que les mathématiques, qui expriment des propositions idéales, débordent le champ de la pensée intuitive.

Essayons de mieux éclaircir ce point. Dans son article «Über das Unendliche», Hilbert (1926; traduit par Largeault 1972: 229-230) présente un exemple où un simple raisonnement mathématique conduit à effectuer «un saut dans le transfini». Considérons le nombre premier suivant:

$$p=170141183460469231731687303715884105727$$

Par un procédé connu depuis Euclide, on peut démontrer par une série d'étapes contrôlables, que entre $(p+1)$ et $(p!+1)$, il existe de manière certaine un nombre premier. Or, dans ce cas l'expression quantifiée existentiellement n'est rien d'autre que l'abréviation de l'énoncé:

«certainement $p+1$ ou $p+2$ ou... ou $p !+1$ est un nombre premier»,

qui est un énoncé finitiste dans la mesure où il est effectivement contrôlable par un nombre fini d'étapes.

Envisageons maintenant le cas d'un nombre premier q tel que $q > p$ (au lieu d'un nombre premier existant entre $(p+1)$ et $(p !+1)$). L'affirmation de l'existence de q est, du point de vue de son contenu, plus faible que la précédente. Toutefois, en passant de l'une à l'autre¹⁵, sous forme d'assertion indépendante, la proposition réelle devient une proposition idéale. En effet, si dans le premier cas on prend en charge l'existence, parmi une collection finie, d'un objet ayant une certaine propriété, dans le deuxième cas, nous ne pouvons plus nous ramener au cas fini. «Il existe», dans le deuxième cas, détermine l'alternative:

$p+1$ ou $p+2$ ou...ou...*ad infinitum*,

qui est une somme logique infinie.

Or un tel passage à l'infini est, sauf explication et éventuelles précautions, aussi peu permis qu'en Analyse le passage d'une somme finie à une somme infinie. En principe c'est une opération dénuée de sens. (extrait de Largeault 1972: 230)

2.2.2. «Au commencement est le signe, telle est la loi ici»

À la différence de l'intuitionnisme, Hilbert ne veut pas bannir les propositions idéales. Il pense que leur utilisation est un gain théorique. Mieux encore: il reconnaît un contenu et une certaine «évidence» à ces propositions, dans la mesure où l'utilisation de celles-ci permet aux mathématiciens d'atteindre des résultats notables, bien que ce contenu et cette évidence ne soient pas capables de garantir aux mathématiques une sûreté complète. Toutefois Hilbert ne voit dans les propositions idéales qu'une «manière de parler», un simple «détour», commode en pratique dans la démonstration de propositions réelles, et en principe éliminables. Mais pour que les éléments idéaux puissent être éliminés, il faut

15 En faisant abstraction du contexte ci-dessous.

rendre intelligible le concept d'infini du point de vue purement finitiste.

Pour Hilbert cette intelligibilité passait par l'intuition du signe, de l'objet concret. C'est sur cette intuition qu'il fallait assurer la solidité de la pensée mathématique. L'entreprise est donc d'établir une réduction, un déplacement du discours mathématique vers une évidence du signe. Mais en quoi consiste cette intelligibilité? Pour Hilbert le présupposé implicite dans la pratique concrète des mathématiques, c'est que les objets de la théorie des nombres sont ce que nous avons appelé «signes», c'est-à-dire des objets:

dont nous savons toujours à coup sûr identifier la forme indépendamment du lieu, du moment et des circonstances particulières de leur production ainsi que des différences minimales de leur tracé. (...) Au commencement est le signe, telle est la loi ici. (extrait de Largeault 1992: 117)

Ainsi, ces objets sont en quelque sorte complètement transparents et ne peuvent plus être réduits à autre chose. Ils sont inanalysables et, de ce point de vue, ils n'ont pas de signification. À partir de ce principe, Hilbert propose une sorte d'idéalisation de la pratique mathématique ainsi conçue. La succession de ces signes est constituée par les configurations:

1, 11; 111, 1111, 11111,...

lesquelles commencent et se terminent par le signe 1 et un signe terminal ne peut être suivi par d'autres signes 1. Hilbert appelle ces configurations des *numéraux* (ou *chiffres*). Ils représentent complètement les nombres naturels, au sens où la construction de ces formes permet de disposer d'un procédé qui attribuera à tout nombre naturel une configuration calculée en fonction d'autres configurations¹⁶. Mis à part les numéraux, nous avons des signes qui permettent la communication, c'est-à-dire qui dénotent quelque chose, par exemple 1, 2, 3,..., a, b, c,..., +, =, >, <,... Ainsi 2 dénote le chiffre 11, et $3+2 = 2+3$, qui n'est pas une for-

16 Il est important de souligner que cette construction ne nous amène pas à considérer les numéraux comme étant une totalité actuelle.

mule, exprimera que la configuration finie dénotée par $3+2$ est la même de celle dénotée par $2+3$. C'est à ce genre d'expressions que correspondent ce qu'on a appelé les «propositions réelles». Par conséquent $a < b$, une fois fixées les références, sera une proposition réelle dans la mesure où elle affirme que la succession finie dénotée par a est une sous-partie de celle dénotée par b , et la vérité de cette expression peut être vérifiée en un nombre fini d'étapes.

L'idée de départ est donc de transformer les énoncés d'une théorie mathématique en objets réels, en configurations finies de signes. Étant donné que les objets peuvent être contrôlés par des moyens de combinatoire élémentaire, la preuve de leur consistance se ramène pour Hilbert à un simple problème d'arithmétique finitiste. Pour ce faire, il faut mettre sur un même plan les signes mathématiques et logiques de façon à ce qu'ils soient privés de leur signification intuitive. Les règles formelles qui déterminent l'agrégation de ces purs symboles sont alors également détachées de toute signification et deviennent objets d'investigation. Ainsi il devient possible d'appliquer directement la définition de la non-contradiction.

Plus précisément, le procédé est le suivant. Étant donné que les symboles logiques et mathématiques sont exempts de toute signification, on obtient un jeu de formules, réglé par les lois de l'inférence logique et conçu à l'image des mathématiques ordinaires. Dans ce jeu, les propositions idéales et finitistes ont toutes le statut de propositions idéales, car leur sens est nécessairement abstrait. Une fois ce passage établi, il faut prouver la non-contradiction de ces objets par des propositions réelles. Mais ceci implique que les propositions idéales soient complètement formalisées, c'est-à-dire exprimées par des combinaisons concrètes de signes typographiques. La formalisation complète de ces propositions s'obtient en conjuguant le symbolisme utilisé couramment en mathématiques avec le traitement symbolique de la logique élaboré dans les travaux de B. Russell et A.N. Whitehead (1910-1913). Il devient alors possible d'établir la réduction symbolique souhaitée qui permettra d'opérer l'analyse des opérations logiques purement formelles intervenant dans les preuves, lesquelles seront des suites finies de combinaisons finies de signes. En spécifiant à

la fois les règles de formation du langage et sa logique par les règles de déduction, on obtient un système formel. L'élaboration d'un système formel comprend ainsi deux étapes: il faut le définir à l'aide de la spécification des règles susmentionnées, puis en étudier le résultat. Mais, comme il a été dit, cette discussion doit être faite dans un autre langage ne comportant que des propositions réelles. L'étude s'effectuera donc dans une métalangue distincte de la langue objet propre au système formel. Cette métalangue est appelée par Hilbert «métamathématique». Cette entreprise fondationnelle est ainsi explicitée par le logicien allemand.

Premièrement:

Toutes les propositions qui constituent la mathématique seront transformées en des formules. Ces formules se distinguent de celles qu'on utilise habituellement par le fait que, outre les signes courants, on y rencontre les signes logiques:

« $\rightarrow$ »	« $\wedge$ »	« $\vee$ »	« $\neg$ »	« $(\forall x)$ »	« $(\exists x)$ »
(implique)	(et)	(ou)	(non)	(tous)	(il y a)

Certaines formules qui jouent le rôle de pierres angulaires de l'édifice formel des mathématiques seront nommées axiomes. Une démonstration est un dessin qui se présente à nous comme tel dans l'intuition et consiste en des inférences conformes au schéma d'inférences:

$$\frac{\begin{array}{c} S \\ S \rightarrow T \end{array}}{T}$$

où chaque fois chacune des prémisses, *i.e.* chacune des formules S et $S \rightarrow T$, ou bien est un axiome, ou bien résulte directement d'une substitution dans un axiome, ou bien est une formule finale d'une inférence, ou bien coïncide avec une formule qui figure plus haut dans la démonstration, ou bien est issue d'une telle formule par substitution. Une formule sera dite démontrable si elle est soit un axiome soit une formule finale d'une démonstration.

Les axiomes et les propositions démontrables, *i.e.* les formules qu'on obtient ainsi, sont l'image des pensées qui constituent les mathématiques courantes traditionnelles. (extrait de Largeault 1992: 146-147)

Deuxièmement:

À la mathématique proprement dite ainsi formalisée se superpose une sorte de seconde mathématique – une métamathématique – nécessaire pour assurer la première, et dans laquelle, par contraste avec les formes d'inférence purement formelles de la mathématique proprement dite, on applique l'inférence à contenu, mais seulement à prouver la consistance des axiomes. Dans cette métamathématique on travaille sur les démonstrations qui deviennent l'objet de l'étude contentuelle. (extrait de Largeault 1992: 133)

2.2.3. *L'intelligibilité du transfini et l'analyse hilbertienne de la quantification*

Mais pour que la preuve de non-contradiction puisse être appliquée au système formel, il faut comprendre, du point de vue métamathématique, l'emploi de la «machinerie transfinie» par l'élimination de l'usage des symboles susceptibles de renvoyer à l'infini actuel.

Or:

Où la transgression de l'intuitif concret et du finitiste a-t-elle lieu? Visiblement dès qu'on emploie le concept de «tous» et «il y a». (extrait de Largeault 1992: 135)

Ainsi qu'en témoigne le passage ci-dessus, Hilbert considère la quantification comme un moyen d'exprimer l'infini.

Essayons de mieux comprendre comment Hilbert envisage cette compréhension et quel est son rôle dans la recherche de la preuve de non-contradiction.

Hilbert note tout d'abord, comme nous l'avons aperçu dans la section précédente 2.2.1, que, pour des collections finies, les quantificateurs universel et existentiel peuvent être éliminés en utilisant une conjonction ou une disjonction d'expressions. À

l'aide du principe du tiers exclu appliqué à un domaine fini quelconque, il infère que les expressions de type $\sim(x) A(x)$ sont équivalentes à celles de type $(\exists x)\sim A(x)$. Il affirme ensuite que ces équivalences sont admises en mathématiques comme

[...] valides également pour des individus en nombre infini; là nous quittons le domaine finitiste et entrons dans celui du raisonnement transfini. Mais si nous appliquons constamment et sans précaution à des collections infinies un procédé recevable dans le domaine finitiste, nous ouvririons en grand la porte à l'erreur. C'est la même source d'incorrection que celle bien connue en Analyse: extrapoler à des sommes et des produits infinis les théorèmes valables pour des sommes et des produits finis n'est licite que sous réserve qu'une étude circonstanciée de la convergence assure le passage. De même ici nous n'avons pas le droit de traiter les sommes et les produits logiques infinis:

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \dots$$

$$A_1 \& A_2 \& A_3 \& \dots$$

comme nous faisons avec ceux qui sont finis; il s'en faut que la théorie de la démonstration (...) autorise pareille chose. (extrait de Largeault 1992: 135-136)

Pour Hilbert il fallait donc répondre à cette dernière question. Essayons de voir les différentes tentatives entreprises par le mathématicien dans les années 20. Comme nous l'avons vu dans la citation précédente, les équivalences quantificationnelles ne sont plus justifiables telles quelles lorsqu'on passe d'un domaine fini d'objets à un domaine infini. Ce phénomène se manifeste tout particulièrement lorsque l'on considère la négation d'un jugement universel et celle d'un jugement existentiel. En effet, supposons que l'on trouve un contre-exemple à $(x)A(x)$ ou qu'à partir de cette expression – ou de $(\exists x)A(x)$ – l'on soit amené à conclure une contradiction. Pourtant, nous ne pouvons pas affirmer que de telles éventualités s'opposent de manière contradictoire, car:

si $A(x)$ n'est pas vrai pour tous les x , nous ne savons pas encore qu'un objet qui a la propriété $\sim A$ est réellement donné; nous n'avons pas da-

vantage le droit de dire sans plus: ou bien $(x)A(x)$ – resp. $(\exists x)A(x)$ – est vrai, ou bien ces assertions conduisent réellement à une contradiction. (extrait de Largeault 1992: 136)

Ce constat amène Hilbert à affirmer que:

pour les collections finies, “il y a” et “est donné” signifient la même chose; pour les collections infinies, seul le second de ces deux concepts est directement clair. (*ibidem*).

La difficulté fondationnelle est donc claire: si l’on se propose de fonder les mathématiques, il n’est pas possible d’accepter comme allant de soi du point de vue logique les inférences qui font appel à des éléments idéaux. Au contraire, la tâche de l’entreprise fondationnelle hilbertienne est:

de nous assurer pourquoi et en quelle mesure l’application des inférences transfinies (...) n’en conduit pas moins toujours à des résultats corrects. En restant sur le terrain finitiste, il s’agit donc d’arriver à manier librement et à dominer entièrement le transfini! Comment un tel problème est-il résoluble? (*ibidem*)

2.2.4. Fonction de choix, axiome transfini et quantification

Pour répondre à cette difficulté, Hilbert établit une parenté de fonctionnement entre quantification et fonction de choix. Il perçoit que les opérations qui régissent les quantificateurs sont analogues à celles qui permettent, à partir de la vérité d’une expression quantifiée existentiellement, de choisir un terme pour lequel cette expression vaut.

Ainsi il reformule les lois quantificationnelles par le biais des ϵ -symboles: un ϵ -terme $\epsilon_x(A(x))$ signifie un élément x pour lequel $A(x)$ vaut (en supposant qu’il y en a). Par conséquent, si A contient des variables libres, ϵ_x représente une fonction portant sur les valeurs de ces variables, qui permet de choisir une valeur de x convenable, de manière à ce que A soit satisfaite. À partir de cette notation, qui exhibe la «véritable» nature de la quantification, Hilbert formule le schéma d’axiome transfini:

$$A(t) \rightarrow A(\epsilon_x(A(x)))$$

qui peut être lu: «si A vaut pour un certain terme t, alors il est possible de choisir une valeur de ϵ_x en fonction de la propriété A qui, substituée à t dans A, satisfait A». Afin d'illustrer le rôle de 2.2.4. Fonction de choix, axiome transfini et quantification cette fonction, Hilbert présente dans «Die Grundlagen der Mathematik», trois types d'application.

Premièrement, il montre qu'à l'aide du schéma d'axiome il est possible de reformuler les règles usuelles de la quantification en définissant les équivalences suivantes:

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(\epsilon_x(A(x)))$$

$$(x)A(x) \Leftrightarrow A(\epsilon_x(\sim A(x)))$$

En se souvenant que, étant donné un domaine d'objets infini, le concept dénoté par «étant donné» est «directement plus clair» que celui dénoté par «il y a», nous voyons que le schéma d'axiome transfini, et en particulier la première équivalence, permet de ramener l'intelligibilité du deuxième à celle immédiate du premier. Pour justifier la deuxième équivalence, laquelle est moins immédiatement compréhensible, effectuons le raisonnement suivant: soit l'expression $\sim A(x)$, où x est une variable libre quelconque dans $\sim A$; supposons maintenant que $\sim A(x)$ soit fausse. Cela signifie qu'il n'est pas possible d'assigner une valeur à x qui satisfasse $\sim A$; autrement dit, l'expression en question affirme qu'il n'est pas possible de trouver une valeur $\epsilon_x(\sim A(x))$ pour la fonction ϵ_x sur $\sim A$ qui satisfait $\sim A$; d'où la vérité de $\sim(\sim A(\epsilon_x(\sim A(x))))$, et donc de $A(\epsilon_x(\sim A(x)))$. Par conséquent $A(\epsilon_x(\sim A(x)))$ affirme que nous ne pouvons pas opérer un choix, parmi ceux possibles, de la valeur de x qui soit un contre-exemple pour A. Grâce à ces équivalences, Hilbert pouvait rendre valides les équivalences quantificationnelles $\sim(x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\sim A(x)$ et $\sim(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (x)\sim A(x)$, ainsi que l'application du principe du tiers exclu à des collections infinies¹⁷.

17 Notons en passant que Hilbert a essayé de démontrer le tiers exclu dans un travail assez obscur: "Beweis des tertiur non datur" *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse* (1931), 120-125.

Deuxièmement, la fonction ε , laquelle, il faut bien le comprendre, est une fonction du deuxième ordre (elle prend comme argument des variables prédicatives), permet de résoudre le problème de «mettre la main» sur l'objet lorsqu'on est en présence d'une expression $A(x)$ qui est satisfaite par un seul objet. En effet, si une propriété A vaut pour un seul objet a , alors $\varepsilon(A)$ est cette chose pour laquelle $A(x)$ vaut, car $\varepsilon(A)=a$.

Troisièmement, comme nous l'avons déjà souligné, pour Hilbert ε_x a le rôle d'une fonction de choix, c'est-à-dire:

dans le cas où A est vraie de plusieurs objets, $\varepsilon(A)$ est un quelconque parmi les objets a dont A est vraie. (Hilbert 1927: 148)

Ainsi la lecture que nous venons d'effectuer suggère l'évaluation (sémantique) de ε_x par une fonction du choix.

Il est intéressant, relativement à ce dernier point, d'effectuer une brève mais importante digression sur la question de l'axiome du choix¹⁸ dans le projet hilbertien, sans toutefois prétendre à

18 L'Axiome du Choix (AC) est généralement formulé de cette manière:

AC1: "Pour chaque ensemble x , dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble dont l'intersection avec chaque élément de x est un ensemble à un seul élément" (d'où l'appellation de Russell de "Axiome cumulatif").

L'énoncé suivant, qui explicite l'existence d'une fonction dite "de choix", est équivalent, dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel-Skolem, à la formulation de AC1:

AC2: "Pour tout ensemble x , il existe une application f de l'ensemble des parties non vides de x dans x telle que, pour toute partie y non vide de x , $f(y) \in y$ ".

Faisons un bref historique du problème lié à l'axiome du choix.

Dès 1882 Georg Cantor (cf. Cantor 1932) introduit la notion d'ensemble bien ordonné, c'est-à-dire la notion d'ensemble ordonné tel que chaque sous-ensemble non vide possède un premier élément. En même temps il conjecture que tout ensemble peut être bien ordonné. Toutefois ce principe contraste avec le fait qu'on ne réussit pas à donner un bon ordonnancement pour certains ensembles, notamment pour les nombres réels. C'est pour cette raison que Hilbert, dans sa liste des 23 problèmes mathématiques donnée à Paris en 1900, pose explicitement la question de l'existence d'un bon ordonnancement pour les réels. En 1904 Zermelo (cf. Zermelo 1904 et 1908) donne une preuve à l'aide de AC2 du principe du bon ordonnancement. Toutefois, dès sa formulation, cet axiome est reçu avec une certaine suspicion par une grande partie de la communauté mathématique, car il affirme l'existence d'une fonction sans fournir les moyens effectifs de la construire. Cela signifie que le principe du bon ordonnancement présente lui aussi un caractère fortement non constructif. L'acceptabilité de la démonstration de Zermelo entraîne par conséquent une vaste discussion parmi les mathématiciens et les philosophes. En 1938, Kurt Gödel

l'exhaustivité. Dans son article «Die logischen Grundlage der Mathematik», Hilbert s'applique à souligner dès le début un point qui émerge dans le courant de ses travaux avec P. Bernays. Ce point porte sur la relation qui occure entre quantification et fonction de choix. La possibilité de dériver les règles quantificationnelles à partir du schéma d'axiome transfini, fait écrire à Hilbert que l'analyse logique effectuée dans sa théorie:

fait apparaître que l'idée logique essentielle sous-jacente au principe de choix est un principe logique général, déjà nécessaire et indispensable aux inférences mathématiques élémentaires. (extrait de Largeault 1992: 132)

Avec cette remarque, Hilbert s'oppose donc aux critiques de l'époque portant sur l'utilisation faite par Zermelo de l'axiome du choix dans sa preuve du bon ordonnancement du continu. En effet, Hilbert prétend qu'en assurant la non-contradiction de l'appareillage formel de sa théorie, on pouvait du même coup prouver l'admissibilité du principe de choix. De plus, à la fin de «Die logischen Grundlage der Mathematik», il estime réussir à dériver une version de AC à partir de l'axiome transfini appliqué à des nombres réels pris comme variables d'individu¹⁹. En réalité, comme l'indiquent V. M. Abrusci (1978) et H. Wang (1970a), la question est loin d'être résolue. Au-delà de la question de la démontrabilité de l'axiome au sein de la théorie des ensembles, il faut souligner que J. von Neumann a indiqué dans son article de 1927 qu'étant donnés les axiomes transfinis utilisés par Hilbert²⁰:

on exprime un choix effectué sur les intensions. Ceci implique que, étant donné deux propriétés intensionnellement différentes mais extensionnellement équivalentes, le choix d'un opérateur transfini peut don-

(cf. Gödel 1940) démontre que l'axiomatique de Zermelo-Fraenken avec AC est consistante. En 1963 Paul Cohen (cf. Cohen 1966), prouve le même résultat avec la négation de AC. Ces résultats impliquent que AC est indépendant des autres axiomes de la théorie des ensembles.

19 cf. Hilbert (1923), traduit dans Largeault 1992: 143-144.

20 On notera que Hilbert utilise aussi d'autres opérateurs transfinis. L'un d'entre eux sera présenté par la suite.

ner lieu en général à des résultats différents. (Abrusci 1978: 37, traduction de l'auteur)

Cette remarque s'explique de la manière suivante. La fonction définie par le symbole ε s'applique à une expression, par exemple $A(x)$, qui, du point de vue sémantique, détermine un ensemble. Or, à un certain ensemble peuvent correspondre différentes expressions du langage formel et donc différentes valeurs de l'application de la fonction. Ainsi, le choix effectué à travers l' ε n'est pas indépendant de la définition de l'ensemble²¹. Pour surmonter cette difficulté, il est donc nécessaire d'ajouter à l'axiome transfini l'axiome:

$$(\forall x) ((\alpha(x) \equiv \beta(x)) \rightarrow \varepsilon_x(\alpha(x)) = \varepsilon_x(\beta(x)))^{22}.$$

De cette manière, Étant donné une expression $A(x)$, il est possible de choisir une valeur $\varepsilon_x(A(x))$ telle que sa «détermination» procède de la même façon pour toutes les expressions du langage qui définissent le même ensemble. Cela signifie que les axiomes transfinis ne permettent pas de dériver le principe de Zermelo.

D'autre part, si la nature des axiomes en question suggère l'évaluation de ε par une fonction de choix, Wang (1970a: 320-321) a bien mis en évidence comment, du point de vue sémantique, les axiomes en question, qui devraient permettre de «capturer» cette signification, ne rendent pas pour autant déductible le principe de choix. Si tel était le cas, on obtiendrait que AC serait démontrable dans la théorie des ensembles grâce à l'ajout d'un axiome qui pose:

$$(H) \quad \text{Pour tout ensemble } A \text{ non vide, } \varepsilon_x (x \in A) \in A^{23}.$$

Or, Hilbert a établi un résultat fondamental qui affirme que si une expression sans symbole transfini est démontrable dans un

21 Il est intéressant de remarquer que, dans son article de 1929, Hilbert relève cette difficulté (cf. p. 295-297 de l'édition italienne).

22 α et β sont des métavariabiles de prédicat.

23 «Évidemment, afin que le raisonnement ait du sens, il est nécessaire que l' ε n'apparaisse que dans [H] et non pas dans les axiomes de remplacement et de séparation. Dans ce cas, l'axiome de choix serait déductible [dans le formalisme en question] par le constat banal que sa présence aurait déjà été supposée.» (Moriconi 1987: 80).

système formel SF auquel on ajoute des axiomes comportant des symboles transfinis, elle l'est déjà dans SF²⁴. Mais on sait que AC est indépendant relativement aux autres axiomes de la théorie. Donc AC n'est pas démontrable dans la théorie des ensembles avec H.

Ces remarques s'expliquent par le fait que la fonction ε_x , qu'on peut appeler la «fonction logique de choix», permet de choisir un élément d'un ensemble donné, sans conduire toutefois à former un nouvel ensemble avec les éléments ainsi choisis.

Mais arrêtons-nous ici sur ce point, que nous développerons par la suite.

2.2.5. *La quête du Graal de la non-contradiction*

Nous avons vu de quelle manière Hilbert réussit à coder dans son formalisme les éléments idéaux présents dans le discours mathématique. La question est maintenant d'entreprendre la démonstration de la non-contradiction de l'édifice mathématique, par le biais des formalismes constitués. Il est intéressant de suivre le développement de cette quête en commençant par la démarche présentée dans «Die logischen Grundlage der Mathematik».

Dans un premier temps, Hilbert donne une méthode générale pour des formalismes relativement restreints, et par conséquent capables d'engendrer seulement une partie de l'arithmétique élémentaire. Les groupes d'axiomes sont les suivants:

1. axiomes de l'implication;
2. axiomes de la négation;
3. axiomes de l'identité;

24 Le résultat en question est connu comme étant le 2ème metathéorème transfini et se situe dans les travaux sur l' ε de l'école hilbertienne à la fin des années 20.

L'énoncé du métathéorème est le suivant:

soit SF un système formel du premier ordre obtenu en ajoutant à un système formel pur quelconque S l' ε et d'autres symboles individuels, fonctionnels et prédicatifs à L(S), et l'axiome transfini à sa structure logique. Alors, si α ne contient pas d'occurrence de ε , et si $\{E_1, \dots, E_k\} \text{ SF} \vdash \alpha$, alors $\{E_1, \dots, E_k\} \text{ S} \vdash \alpha$.

À son tour, le premier métathéorème transfini répond positivement à la question de savoir si une formule du premier ordre sans ε et quantificateurs est déductible dans le calcul du premier ordre avec ε à partir de formules sans ε et quantificateurs.

Pour une discussion plus approfondie de la valeur de ces résultats dans la critique de la théorie hilbertienne de la démonstration, je renvoie à l'ouvrage de Moriconi (1987).

4. axiomes du nombre.

Il s'ensuit par conséquent que le formalisme ne présente pas d'élément transfini.

La preuve est la suivante: on suppose que de 1-4, on peut déduire $0 \neq 0$. Faisons l'hypothèse d'une telle preuve. Elle doit nécessairement constituer une suite finie P d'expressions dont la dernière est $0 \neq 0$. Ensuite, on construit à partir de P une preuve P' de $0 \neq 0$ telle que:

- tout élément de P' dépend de l'élément qui précède;
- il n'y a pas de variable (libre²⁵) dans P' ;
- tout élément de P' est une expression numérique, dans le sens où tout élément de P' , outre les connecteurs logiques, ne contient que des combinaisons de 0, 1 et +;
- tout élément de P' est sous forme normale²⁶.

À partir de cette transformation, il est possible d'interpréter toute expression de P' dans l'arithmétique finitaire. On peut donc vérifier par un nombre fini d'étapes si ces expressions sont vraies ou fausses. Mais, puisqu'on peut démontrer que dans cette interprétation tout axiome est vrai et que la règle d'inférence (le *modus ponens*) préserve le vrai, il s'ensuit que tout élément (aussi $0 \neq 0$) de P' est vrai. Or, $0 \neq 0$ est faux. Donc, il n'existe pas de preuve de $0 \neq 0$.

Avec cette méthode, Hilbert réussit à prouver la consistance de tout formalisme du même type ne contenant pas de ε -termes. L'enjeu est maintenant d'étendre la méthode aux formalismes qui possèdent le schéma d'axiome transfini. Avant de présenter cette extension, il est important de faire une remarque quant à l'opérateur transfini. Ici Hilbert utilise l'opérateur τ . Le schéma d'axiome qui le définit est le suivant:

$$A(\tau(A)) \rightarrow A(x)$$

Ce schéma permet à Hilbert de déduire les équivalences suivantes:

$$A(\tau(A)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)$$

25 Bien que ce soit un truisme de le souligner, il convient de le rappeler.

26 Pour la définition de forme normale cf. la section 3.4.

$$A(\tau(\sim A)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)$$

On voit tout de suite que l'opérateur τ n'est rien d'autre que le dual de ε . En effet, avec le premier on exprime l'idée que, pour toute expression universellement quantifiée, il est possible de choisir dans l'univers de discours un objet prototypique pour lequel l'expression vaut²⁷. La relation de dualité entre les opérateurs permet de prendre en compte les formalismes qui mettent en jeu soit les ε -termes, soit les τ -termes.

Voyons donc la stratégie hilbertienne. Comme dans le cas du formalisme restreint, on suppose qu'il existe une preuve P de $0 \neq 0$. On transforme alors de la même manière que précédemment la preuve P en une preuve P' dont les éléments ne possèdent pas de variable libre, mais peuvent contenir des opérateurs transfinis. Cela implique qu'à ce stade on ne peut pas interpréter P' dans l'arithmétique finitaire, où une méthode effective d'évaluation de ces expressions eut été disponible. Pour ce faire, Hilbert a besoin d'un procédé qui permette de substituer à tout τ -terme (et donc à tout ε -terme) ou un numéral, ou une fonction calculable²⁸. De cette manière toute expression de P' peut être transformée en une expression numérique qui peut être évaluée dans l'arithmétique finitaire. Ainsi, d'une manière analogue aux formalismes restreints, on peut ici prouver la consistance.

On se rend compte tout de suite que le pas décisif est donné par l'élimination des τ -termes (respectivement des ε -termes). Souvenons-nous de ce que nous avons dit au début de ce chapitre. Pour Hilbert, afin que la preuve de non-contradiction puisse être appliquée au système formel, il faut comprendre l'emploi de la «machinerie transfinie» du point de vue métamathématique en éliminant l'usage des symboles susceptibles de renvoyer à l'infini actuel. Par conséquent la question de l'élimination des symboles transfinis dans les démonstrations se ramène à celle de

27 Autrement dit, avec la fonction τ , on exprime l'idée que, pour toute expression $(\forall x)A(x)$, il est possible de trouver un élément "prototypique" $\tau(A)$ tel que si $\tau(A)$ satisfait la propriété A , alors cette propriété vaut pour tout élément du domaine.

28 Une fonction n -aire est dite calculable ssi il existe un algorithme (une procédure mécanique qui permet de parvenir à un résultat en un nombre fini d'étapes, en se basant sur un ensemble de règles de manipulation de symboles) qui, étant donné n'importe quel n -uple d'arguments, permet de déterminer la valeur correspondant à ses arguments.

l'élimination des τ -symboles (respectivement des ε -symboles). Nous avons mis le doigt sur le point fondamental du projet hilbertien: le procédé de remplacement des τ (respectivement des ε). Comme l'écrit Abrusci:

si pour un certain formalisme donné on réussit à établir ce procédé, alors on peut démontrer la non-contradiction de ce formalisme. En outre, on obtient comme corollaire que (dans ce formalisme) toute démonstration d'une expression numérique peut être transformée en une démonstration (de la même expression numérique) dans laquelle toutes les expressions sont des expressions numériques vraies. (Abrusci 1978: 40, traduction de l'auteur)

Dans (1923), Hilbert se borne à donner le procédé de remplacement pour un langage formel restreint dans lequel il ne considère que des instances simples des axiomes transfinis. En effet, Hilbert considère le cas où les expressions $A(x)$ sont des équivalences numériques de type $f(x)=0$, où f est une fonction numérique unaire de manière à ce que l'axiome:

$$A(\tau(A)) \rightarrow A(x)$$

corresponde à l'axiome:

$$f(\tau(f))=0 \rightarrow f(x)=0.$$

La méthode hilbertienne de l'élimination des symboles transfinis pour ce type de formalisme ayant fait ses preuves, Hilbert chercha alors des démonstrations de non-contradiction de l'arithmétique pour des langages plus riches.

2.2.6. La compréhension par l'élimination

L'hypothèse méthodologique qui sous-tend le programme fondationnel hilbertien est donc: étant donné la démonstration d'une proposition idéale, il est possible d'associer des propositions réelles aux expressions présentes dans la démonstration de manière à ce que celle-ci devienne une démonstration privée de tout élément idéal qui ne contiendra de plus que des expressions numériques vraies. Autrement dit, Hilbert fait l'hypothèse que toute expression arithmétique (réelle ou idéale) peut être démon-

trée sans faire usage du transfini. C'est par conséquent dans ce sens qu'il faut comprendre le caractère «fondationnel» du projet: on ne veut pas simplement éliminer le transfini, mais le comprendre du point de vue finitaire en dévoilant sa signification «réelle». D'où l'importance de l'introduction dans l'appareillage déductif des axiomes sur les symboles transfinis tels que l' ε . En effet, supposons que nous disposons d'un langage qui permette de formaliser l'arithmétique élémentaire. On s'aperçoit alors que les raisonnements employés n'utilisent jamais la totalité de la signification des ε , et par conséquent de l'élément idéal capté par la quantification. Autrement dit, cette «transcription» a pour Hilbert le mérite de rendre évident le fait que:

dans le raisonnement logique on n'utilise jamais la totalité du sens attendu donné aux symboles transfinis. (extrait de Largeault 1992: 475)

Ce point est fondamental. En effet, nous savons comment réécrire les expressions quantifiées et sommes assurés, par l'axiome transfini, que $A(x,t) \rightarrow A(x,\varepsilon_y(A(x,y)))$ est valide. Or, dans une démonstration, qui présente toujours un nombre fini d'étapes, l'extension de la fonction de choix $\varepsilon_y(A(x,y))$ n'est jamais utilisée pour tous les x , car l'axiome n'intervient qu'un nombre fini de fois. D'autre part, si l'on suppose qu'une preuve ne présente qu'une seule application de $A(x,t) \rightarrow A(x,\varepsilon_y(A(x,y)))$, nous pouvons tout simplement utiliser t à la place de $\varepsilon_y(A(x,y))$, de façon à formuler une preuve ne contenant aucun symbole transfini. L'élimination des ε -termes est ainsi justifiée.

Ces constats auraient dû permettre l'élaboration d'une preuve finitiste de non-contradiction. Étant donné n'importe quelle déduction, il s'agit d'opérer des assignations de valeur aux ε -termes de manière effective. Aboutir aurait signifié atteindre la simple manipulation d'expressions sans quantificateurs. De cette manière on aurait eu affaire à des formules exprimant des relations arithmétiques élémentaires effectivement calculables²⁹.

29 Il est intéressant de remarquer, comme le fait Moriconi (1987: 98-99), que Hilbert, afin d'expliquer la nature de la preuve de non-contradiction à l'aide de la méthode de substitution des ε , établit un parallèle avec le rôle que joue l'axiome de réductibilité dans l'entreprise russellienne, tout en soulignant certaines dissimilitudes:

Toutefois on se rend vite compte de la difficulté de la recherche d'une maîtrise finitiste de l'infini.

Considérons, à titre d'exemple simple, l'expression:

$$(a) (x)(\exists y) A(x, y),$$

et supposons qu'elle appartienne à l'arithmétique formelle élémentaire, dont on veut prouver la non-contradiction. Cette expression s'écrira:

$$A(\varepsilon_x \sim A(x, \varepsilon_z A(x, z)), \varepsilon_y A(\varepsilon_x \sim A(x, \varepsilon_z A(x, z)), y))$$

Comme Hilbert le reconnaît lui-même, cette réécriture est lourde et manque d'élégance. Toutefois son but est de montrer que la formulation à l'aide des ε indique quels choix progressifs de valeurs doivent être faits dans l'évaluation de (a) et quelles dépendances subsistent entre ces choix. C'est une simplification «conceptuelle» qu'il vise. Mais nous nous apercevons que même dans un exemple apparemment simple comme celui-ci, les choix progressifs ne semblent pas se faire de manière complètement linéaire. Le problème apparaît clairement dans le cas d'expressions plus complexes qui présentent plusieurs emboîtements de ε -termes, car la procédure d'assignation de valeurs se complique. En effet, l'assignation faite à un ε -terme présent à l'intérieur de l'expression peut invalider une assignation précédente pour un ε -terme extérieur, ce qui implique son abandon. Par conséquent il convient de savoir si la méthode peut toujours se terminer avec des assignations de valeurs qui satisfont l'expression. Or, il n'est pas évident que le processus de remplacement des ε -fonctions puisse toujours s'arrêter (Hilbert 1927; dans Largeault 1992: 160-162).

Mis à part ces difficultés, dont on soulignera par la suite l'importance, l'espoir hilbertien d'aboutir à une démonstration de la non-contradiction par l'élimination progressive des ε -termes, et

«À l'axiome de réductibilité de Russell répond dans ma théorie la règle de manipulation des variables de fonction. Seulement dans ma théorie la réductibilité n'est pas présupposée, elle s'opère plutôt compensativement: ce n'est que dans le cas d'une démonstration donnée d'une contradiction que la réduction est exigée, et ma théorie de la démonstration indique qu'alors la réduction doit toujours aboutir.» (Hilbert 1927; dans Largeault 1992: 155-156)

donc des inférences transfinies, montre bien que le programme ne se limite pas à protéger les mathématiques du danger des paradoxes. Hilbert veut expliquer la manipulation de l'infini et la formalisation des éléments idéaux au moyen de la quantification. La véritable signification de l'élément idéal à l'intérieur des démonstrations, est captée de manière purement finitiste par sa réinterprétation sous forme des ε -termes. Ainsi, Hilbert croit avoir atteint la compréhension de l'emploi de la machinerie transfinie en mathématique d'un point de vue finitiste en montrant que l'intelligibilité du concept d'infini réside dans la technique syntaxique du raisonnement appliquée à ce concept. Et comme le veut son programme, cette intelligibilité une fois atteinte, la preuve de non-contradiction devrait surgir naturellement par le constat de l'impossibilité de déduire une formule numérique et sa négation. *A posteriori* nous savons pourtant qu'il s'agit là d'une erreur et la question consiste à en trouver les causes.

2.2.7. *Forme et contenu chez Hilbert*

Arrêtons-nous sur ce que nous venons d'esquisser. Notre présentation du programme d'Hilbert montre de quelle manière était conçu le rapport forme/contenu, ou autrement dit comment Hilbert conçoit la signification des méthodes formelles qu'il utilisait. En employant la métamathématique dans le but de résoudre le problème de la consistance, Hilbert tente de justifier l'infini par le fini, le formel par le contenu. Or, cette démarche réductionniste a pour Hilbert une orientation syntaxique. Mais pour que cette orientation soit justifiée, il faut postuler une coïncidence entre contenu et forme. En effet:

[ce n'est qu'après] un processus par lequel un contenu préalable avait été déployé dans une forme (le système formel), qui le prolongeait et qui, une fois montrée sa consistance, aurait dû le capter entièrement [que cette coïncidence aurait pu être postulée]. (H. Sinaceur 1998: 139)

Cette dernière idée s'explique par la conception model-théorique de Hilbert en philosophie des mathématiques, conception issue de son travail sur l'axiomatique de la géométrie (Hilbert 1889). En effet, comme l'a remarqué J. Hintikka:

le rôle crucial du problème de la consistance chez Hilbert est une conséquence non de son prétendu formalisme, mais de son point de vue model-théorique (Hintikka 1994b: 218)

car pour Hilbert ce qui importe dans un système axiomatique, ce sont les modèles qu'il détermine, et:

démontrer la consistance du système autorise l'utilisation du système pour étudier ses modèles. (Sinaceur 1998: 139)

Par conséquent, on voit tout l'enjeu de l'analyse de la quantification hilbertienne. La formalisation doit reproduire le discours mathématique; l'élimination des symboles transfinis en rendre intelligible l'utilisation. Une fois établie cette élimination, l'application naturelle de la preuve de consistance aurait justifié l'emploi des propositions idéales dans les démonstrations mathématiques au même titre que les réelles. Ainsi il n'aurait pas été possible d'être chassé du «paradis cantorien».

2.3. La question de la complétude

2.3.1. Préambule

Ce n'est que dans la deuxième moitié des années 20 que les idées hilbertiennes reçurent une formulation relativement précise et aboutie. Si nous avons insisté sur le problème central de la consistance des axiomes des mathématiques, il reste que celui-ci ne constitue pas la seule question. En effet il suit programmatiquement celui qui touche à la formalisation de la logique propre au raisonnement mathématique ainsi que du discours mathématique lui-même. Or, pour que cette étape soit acquise, il faut s'assurer que le langage logique satisfait effectivement à toutes les exigences des raisonnements mathématiques. Cette question d'adéquation entre pensée formelle et pensée intuitive se traduit aujourd'hui par la recherche de la complétude sémantique. On exige ainsi qu'une expression soit un théorème si et seulement si elle est logiquement valide. Toutefois, nous savons bien que les notions sémantiques telles que «être logiquement valide» ne sont pas de nature finitiste. De plus, pour que l'on puisse s'interroger

sur la complétude sémantique, il faut, outre la possibilité d'interroger métathéoriquement le système formel, que la distinction entre syntaxe et sémantique soit explicitement posée. Qu'en est-il chez Hilbert? La question est difficile et nécessiterait un travail sur les textes hilbertiens – en partie mal connus – qui précèdent la période des années 20. Dans cette perspective, il serait également intéressant d'examiner les notes de cours d'Hilbert, comme par exemple celles qui se trouvent à la bibliothèque de l'Institut de mathématiques de l'Université de Göttingen. Nous pouvons toutefois essayer d'éclaircir cette question en regardant l'évolution de la conception de la nature de la logique dans la période historique où s'inscrit le paradigme fondationnel hilbertien.

2.3.2. *La logique comme langage*

Nous avons vu que Hilbert reprend le traitement symbolique de la logique élaboré dans les *Principia Mathematica* (1910, 1912, 1913) de Russell et Whitehead. Ceci montre bien que la notion de système formel existait en germes avant les travaux d'Hilbert, et son émergence peut en effet être attestée dès la *Begriffsschrift* (1879) de G. Frege. Or, ainsi que l'écrit Gödel, lorsqu'on introduit un système formel:

[...] la question qui surgit naturellement est de savoir si le système d'axiomes et des principes d'inférence initialement posés est suffisant à dériver toute proposition logico-mathématique. (Gödel 1930 [1999]: 83; traduction de l'auteur)

Mais ni Frege, ni Russell et Whitehead n'ont jamais pensé la complétude sémantique comme étant un problème, car dans la conception «logiciste», la logique est un langage universel:

[...] dans toute formulation explicite de la logique devait être formulé tout le raisonnement déductif, y compris l'analyse classique et une partie de la théorie cantorienne des ensembles. (J. Van Heijenoort, B. Dreben 1989 [1999]: 47; traduction de l'auteur)

Ainsi, nous ne pouvons pas sortir du langage logique pour l'interroger méta-systémiquement, ni le réinterpréter, ni par conséquent en exprimer la sémantique. Nous sommes assujettis à ce que W. Sheffer appelait «*la prédication logocentrique*». Elle implique qu'on ne peut pas, dans un certain sens, échapper au langage formel, car tout ce qui est dans celui-ci le présuppose:

[...] y compris les relations sémantiques en vertu desquelles il peut être utilisé pour dire quelque chose. (Hintikka 1994a: 11)

Nous sommes dans la logique et nous ne pouvons pas la regarder de l'extérieur. La seule chose que nous pouvons faire est de dériver des théorèmes. Hilbert n'est bien évidemment pas un adepte du logicisme, car il objectait, entre autres, que même les constructions logiques les plus élémentaires reposent au moins implicitement sur la notion de nombre (cf. Hilbert 1925; trad. dans Largeault 1972: 228), et par conséquent il refusait la réduction des mathématiques à la logique. Toutefois, ainsi que l'écrit R. Zach (1999: 355), en 1917 Hilbert était encore influencé par Russell et Whitehead. En effet, bien que les règles de déduction soient explicitement formulées, que les expressions du système soient définies de manière récursive, et qu'un certain nombre de résultats métathéoriques soient établis, le système axiomatique d'Hilbert est construit de manière interprétée. Il s'ensuit que la distinction entre syntaxe et sémantique n'est pas encore stabilisée. De ce point de vue, on comprend pourquoi, au début des années 20, Hilbert pose la question de la complétude des axiomes logiques d'un point de vue syntaxique. Ces passages, cités par Sieg, le montrent bien:

As for any other axiomatic system, one can raise also for the system the questions concerning consistency, logical dependencies, and completeness. The most important question is here that concerning completeness. After all, the goal of symbolic logic is to develop ordinary logic from the formalized assumptions. Thus, it is essential to show that our axiom system suffices for the development of ordinary logic. (Sieg 1999: 20)

Autrement dit, le but d'Hilbert était d'obtenir la complétude au sens de E. Post (cf. Post 1921), *i.e.* la complétude syntaxique:

[...] we will care the presented axiom system complete, if the addition of a formula, hitherto unprovable, to the system of basic formulas always leads to an inconsistent system. (Sieg 1999: 20)

2.3.3. *La logique comme calcul*

Paradoxalement, les travaux de Hilbert sur l'axiomatique de la géométrie ont été considérés *a posteriori* comme l'un des points de départ de la théorie des modèles, qui, rappelons-le, constitue une conception de la logique opposée au logicisme. La théorie des modèles conçoit la logique comme un calcul qui peut être réinterprété dans différentes structures. Les théoriciens les plus connus de ce paradigme sont C. S. Peirce, E. Schröder (et leurs disciples) ainsi que L. Löwenheim.

Cette tradition logique est à l'origine de l'idée que:

[...] la pierre d'angle de toute sémantique est la relation d'une phrase à ses modèles. (Hintikka 1994: 213)

Dans cette perspective, la signification d'une expression S se définit par rapport à la classe de ses modèles $M(S)$. Hintikka écrit:

[...] savoir que S est vraie dans un modèle M_0 , c'est savoir que $M_0 \in M(S)$. [...] Ainsi, en dernière analyse, tout revient à la relation d'une phrase (ou d'un ensemble de phrases) à ses modèles. (Hintikka 1994: 213-214).

Toutefois, bien que chez Peirce, Schröder et Löwenheim, les expressions quantificationnelles soient au centre de leurs études, la notion de système formel n'est pas formulée. Le travail de Löwenheim (1915) est à cet égard remarquable, puisque les expressions quantificationnelles avec identité n'y sont traitées que dans le cadre de la théorie des modèles. En recourant au concept fondamental de «vérité d'une expression dans une interprétation donnée», Löwenheim ne définit aucun axiome ou règle

d'inférence formelle. Il s'ensuit que la question de la complétude ne peut même pas être posée.

Pour aborder la complétude il fallait donc dépasser la conception omni-compréhensive de la logique de Frege et Russell et faire en sorte que l'analyse métamathématique d'un système formel inclut les outils de la théorie des modèles.

2.3.4. *Esquisse d'une typologie de la complétude*

Lorsque nous avons présenté la complétude, nous avons précisé que nous pensions à la complétude *sémantique*. Toutefois il ne s'agit pas de la seule manière de concevoir du point de vue sémantique la complétude d'un système formel. Par exemple, dans le travail sur les fondements de la géométrie euclidienne, Hilbert visait avec son axiomatisation à la *complétude descriptive*. Cette notion repose sur la distinction entre constante non logique et constante logique d'un langage formel, distinction qui est fondamentalement sémantique. On dit qu'une constante est non logique si son interprétation peut varier d'un modèle à un autre. Inversement une constante sera dite logique si sa signification reste invariante. Dans cette dernière catégorie, on trouve habituellement les connecteurs et les quantificateurs³⁰. L'idée sous-jacente à la complétude descriptive peut être schématisée de la manière suivante. En suivant J. Corcoran (1980), supposons un certain ensemble de constantes non logiques C . Soit ensuite LC le système formel ayant C comme seul ensemble de ce type de symboles. Soit T une interprétation de LC (en général, T correspond à l'interprétation visée de C). On saura donc qu'il existe un certain ensemble $T(LC)$ d'expressions de LC qui sont vraies dans T . Alors une axiomatisation complète de T nécessite que l'on détermine un sous-ensemble S de $T(LC)$ dont ce dernier constitue l'ensemble des conséquences logiques. Ainsi:

une axiomatisation d'une interprétation donnée permet une *description* de l'interprétation. (Corcoran 1980: 189)

30 L'application d'un symbole de prédicat, ou l'appartenance, est logique ssi on utilise une sémantique standard. Avec une sémantique non standard, par exemple celle de L. Henkin (1950), elle est non logique. Ici on se référera toujours à la sémantique standard.

Supposons maintenant, par exemple, que l'on dispose comme Hilbert d'une description (au sens de Corcoran) de la géométrie euclidienne. La question que nous pouvons poser est de savoir si S décrit uniquement la géométrie euclidienne. Bien évidemment, comme le note Hilbert, avec C il est aussi possible de parler de chaises, de canapés ou bien de personnages du Muppets Show. Toutefois, si par exemple S décrit les personnages du Muppets Show (que l'on ne peut pas confondre avec les objets de la géométrie) et si l'on établit un isomorphisme entre les premiers et les deuxièmes, nous dirons que les deux descriptions sont identiques. Bien que les deux interprétations reposent sur des objets de nature différente, elles possèdent la même forme, la même structure puisqu'elles sont isomorphes. Et c'est bien la forme, la structure décrite par S qui est au cœur du travail en question. La complétude descriptive n'est donc rien d'autre que la catégoricité.

Ensuite, on peut aussi concevoir la complétude d'un point de vue syntaxique. Nous avons vu qu'Hilbert l'adopte pendant presque toutes les années vingt. Cette conception correspond à celle de la complétude *déductive*.

La différence entre ces deux types de complétude, lorsqu'elle se rapporte aux systèmes appliqués, n'est pas purement technique, mais dénote une différence dans la conception du rôle que la logique doit jouer dans la pensée mathématique. En effet, avec la complétude déductive, on met l'accent sur la possibilité de séparer mécaniquement ce qui est vrai de ce qui est faux relativement aux modèles du formalisme retenu. Par conséquent on privilégie la démarche du mathématicien consistant à prouver des théorèmes. Avec la complétude descriptive, au contraire, se trouve souligné ce qui, dans le travail du mathématicien, vise à caractériser une structure relativement aux autres.

Grâce à cette esquisse sommaire, nous comprenons mieux la conception d'Hilbert du rapport forme/contenu dans son programme. Avec la réduction formelle il présupposait en quelque sorte une définition complète des caractéristiques de l'arithmétique et par conséquent la possibilité de «déployer» exhaustivement un contenu connu dans une forme. La preuve de la non-contradiction du système aurait assuré les fondements de l'édifice mathématique et la possibilité de l'étudier du point de vue métamathématique.

La recherche d'une preuve syntaxique de la complétude semble, quant à elle, découler de la devise hilbertienne qu'en mathématiques il n'existe pas d'«ignorabimus»³¹.

2.3.5. La complétude sémantique comme question essentielle du projet hilbertien

La première esquisse d'une approche métamathématique d'un système formel à l'aide d'outils model théorétiques peut être trouvée dans le travail d'Habilitation (1918) de Bernays, qui, pendant ses années d'assistanat, influença Hilbert. Bernays y démontre la complétude sémantique pour le calcul propositionnel des *Principia*, et distingue, de plus, pour la première fois syntaxe et sémantique. Dans ses notes de cours de la période 1917/1918, co-écrites avec Bernays, Hilbert suppose également que la logique du premier ordre n'est pas syntaxiquement complète. Or, nous savons que si un système formel consistant est syntaxiquement complet, alors il est sémantiquement complet³². Ainsi, en démontrant la possibilité de prouver ou de réfuter toute expression de la logique du premier ordre, on aurait pu en même temps démontrer l'adéquation du formalisme relativement au raisonnement mathématique. Dans les années 20, W. Ackermann prouve, dans un écrit non publié³³, que la logique du premier ordre n'est pas syntaxiquement complète. Aussi le problème de l'adéquation du système se ramène à sa formulation «sémantique». Ce problème est pour la première fois formulé par Hilbert lors d'une

31 En effet la complétude au sens de Post est équivalente à la formulation suivante de la complétude syntaxique: un système formel SF est syntaxiquement complet ssi pour tout ebf A, ou bien A est démontrable dans SF, ou bien sa négation l'est.

«Comme exemple de traitement de questions de principe, je citerai la thèse de la résolubilité de tout problème mathématique. C'est une thèse qui reflète notre conviction à tous. Le charme des problèmes mathématiques est en effet que nous pouvons nous dire constamment; s'il y a un problème, cherchez la solution; cette solution, vous la trouverez rien qu'avec les ressources de la pensée; car en mathématiques il n'y a point d'ignorabimus!» (Hilbert 1925; extrait de Largeault 1972: 236-237)

32 Soit un système formel S consistant et syntaxiquement complet. Puisque S est consistant, il admet un modèle M. Supposons S sémantiquement incomplet. Alors il existe une ebf A de S valide dans M et qui n'est pas un théorème de S. On peut donc ajouter A aux axiomes de S et obtenir une extension S' de S qui admet M comme modèle. S' est donc consistante, ce qui contredit la consistance syntaxique de S. Donc S est sémantiquement complet.

33 Le résultat est repris dans D. Hilbert, W. Ackermann (1928).

conférence donnée au Congrès International des mathématiciens à Bologne en 1928:

La question de la complétude du système des règles logiques, posée sous une forme générale, est un problème de logique théorique. Nous y accédons en partant de l'arithmétique, à condition d'exclure, du cercle des formules que nous considérons et en particulier des axiomes, toutes celles où figure le signe "+1" et d'y admettre en retour l'occurrence de variables de prédicat. [...]

Dans ce domaine de formules on distingue celles qui ne sont réfutables pour aucune détermination des prédicats susceptibles d'être choisis. Ces formules sont les propositions logiques valides universellement.

Alors la question se pose de savoir si toutes ces formules sont démontrables à partir des règles du raisonnement logique avec adjonction des axiomes de l'égalité susmentionnés, en d'autres termes si le système des règles logiques usuelles est complet. (extrait de Largeault 1972: 184)³⁴

Mais, pourquoi a-t-il fallu attendre presque 20 ans pour qu'Hilbert pose explicitement ce problème?

Son finitisme donne une première réponse; la difficulté à distinguer les niveaux syntaxique et sémantique en fournit une autre. Il est aussi probable qu'une réponse affirmative au problème a été présupposée. Mais cela ne doit pas occulter l'importance de la complétude sémantique pour l'entreprise hilbertienne: si la logique du premier ordre n'avait pas été sémantiquement complète, le projet aurait perdu une grande partie de son intérêt, car il aurait pu y avoir des expressions contradictoires parmi les conséquences logiques des axiomes du système. Ainsi, il n'aurait pas été certain que le système formel possède un modèle.

La voie est enfin tracée de façon claire. Le programme d'Hilbert s'articule maintenant en fonction de deux questions essentielles pour sa concrétisation:

34 Nous ne nous intéressons pas ici de savoir si la preuve recherchée par Hilbert devait être finitiste.

- garantir que le formalisme du premier ordre satisfait à toutes les exigences des formes du raisonnement mathématique en montrant qu'il est sémantiquement complet;
- s'assurer que ce formalisme permet d'établir la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique.

3. La quantification du point de vue sémantique

3.1. Enjeu de la discussion du résultat de complétude de Gödel

Nous savons aujourd'hui que le programme d'Hilbert fut mis en échec, puisque Gödel (1931) démontra qu'il est impossible de formaliser complètement l'arithmétique élémentaire et d'en prouver la consistance. Nous aimerions apporter un éclairage nouveau sur les raisons de l'échec du rêve hilbertien, en argumentant que l'inadéquation de l'analyse syntaxique du concept d'infini provient de la réponse positive qui fut apportée à la question de la complétude sémantique.

Rappelons tout d'abord que la question de l'adéquation entre formalisme logique du premier ordre et raisonnement mathématique est résolue par Gödel en 1929 dans sa thèse. Gödel montre ainsi la correspondance entre les notions de la théorie de la démonstration et celles de la théorie des modèles. Ceci signifie qu'il réussit à démontrer qu'à des notions finitistes telles que «être un théorème» correspondent des concepts hautement transcendants comme «être valide» et «être satisfait». De cette façon, le calcul du premier ordre s'avérait un outil suffisant pour exprimer tout ce qui est du ressort de la logique. Mais, du point de vue de la théorie des modèles, la réflexion de Gödel porte également sur la cardinalité du domaine d'interprétation. En effet, dès le début de son travail il souligne que sa démonstration ne portera pas directement sur l'énoncé standard de la complétude (*i.e.* que toute formule logiquement valide est un théorème «démonstrable»), mais sur l'énoncé équivalent suivant:

une expression A est réfutable (*i.e.* $\vdash \sim A$) ou satisfaite dans un domaine dénombrable³⁵.

Par conséquent, ce théorème donne une indication sur la cardinalité des modèles, en corrélant la notion de satisfaction avec celle de satisfaction dans un domaine dénombrable. La preuve de Gödel repose en effet sur un résultat intermédiaire:

toute ebf (ou tout ensemble d'ebf) ou bien est satisfaite dans un domaine dénombrable, ou bien n'est satisfaite dans aucun domaine d'interprétation.

Ceci revient à dire que si une ebf (ou un ensemble d'ebf) est satisfaite dans une interprétation I , alors elle l'est aussi dans une interprétation I' ayant un domaine infini dénombrable.

Considérons les conséquences de cette preuve en fonction de l'enjeu de départ que nous rappellerons brièvement. Nous avons vu que la réponse positive à la question de l'adéquation de la formalisation du raisonnement mathématique permet, du point de vue hilbertien, de traiter le problème de la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique (ou, en général, de toute formalisation d'une théorie intuitive, ou pré-formelle). D'autre part, nous avons également vu que pour Hilbert, l'établissement de la consistance d'un système formel autorise l'utilisation de ce système pour étudier ses modèles. Mais cette approche syntaxique présuppose la complétude descriptive du système, c'est-à-dire que les modèles soient structurellement équivalents, de telle façon qu'ils soient isomorphes à l'interprétation visée. C'est seulement à cette condition qu'on pourra affirmer que «le contenu déployé dans le système formel a été entièrement capté». (Sinaceur 1998: 139)³⁶

35 Gödel considère ainsi la complétude sémantique comme une conséquence de "*la complétude forte*". Ce théorème énonce que: si une ebf A (resp. si un ensemble E d'ebf) est consistant, alors il possède un modèle. Les deux résultats sont équivalents.

36 On notera en passant que la catégoricité d'un système formel implique sa complétude syntaxique. En effet: soit S un système catégorique. Supposons que S n'est pas syntaxiquement complet. Alors, il existe une ebf A de S telle que: 1) A n'est pas un théorème de S et si l'on adjoint A aux axiomes de S , on obtient un système S' consistant; 2) si on adjoint $\sim A$ aux axiomes de S on obtient une extension S'' consistante. S' et S'' possèdent ainsi des modèles M' et M'' qui sont aussi des modèles de S mais qui ne peuvent

3.2. L'incomplétude descriptive des systèmes d'axiomes propres

3.2.1. Un «paradoxe» dans la théorie formelle des ensembles

Considérons le cas paradigmatique de la théorie des ensembles à partir d'un langage du premier ordre **Ens** défini par les axiomes de Zermelo-Fraenkel ou par une axiomatique finie à la von Neumann. Faisons l'hypothèse que l'axiomatique **AxEns** choisie est non contradictoire. Que l'on choisisse une axiomatique finie ou infinie dénombrable, nous savons que nous pouvons déduire un ensemble de théorèmes $\Theta(\text{AxEns})$. Puisque chaque démonstration est finie, nous pouvons construire un ensemble d'expressions hypothétiques $\mathbf{E} = \{E_1, \dots, E_n, \dots\}$ de théorèmes de la logique du premier ordre **P** dont l'antécédent sera la conjonction finie des hypothèses utilisées dans la déduction du conséquent dans **Ens**. Or, **E** et **AxEns** sont satisfaits dans l'interprétation visée, c'est-à-dire dans le cadre de la théorie pré-formelle des ensembles. Considérons maintenant **AxEns** en tant qu'ensemble d'ebf de **P**. Puisqu'en principe les $\alpha \in \text{AxEns}$ ne sont pas des théorèmes de **P**, **AxEns** déterminera deux ensembles du point de vue sémantique: l'ensemble **M** de ses modèles et l'ensemble **M'** des interprétations dans lesquelles au moins un $\alpha \in \text{AxEns}$ est faux. Rappelons que ce que nous visons avec **AxEns** est la formalisation de la théorie naïve des ensembles. Dans cette perspective, il est attendu que, pour tout $M_j, M_i \in \mathbf{M}$ distincts, il existe la possibilité d'établir un isomorphisme entre M_i et M_j afin de montrer qu'ils possèdent les mêmes propriétés structurelles. Autrement dit, nous voulons que l'ensemble d'axiomes soit descriptivement complet. **M** correspond ainsi à une classe d'équivalence déterminée par l'isomorphisme sur les domaines d'interprétation de ses éléments. Mais, puisque **M** contient l'interprétation visée **V**, notre langage formel n'aura qu'une seule interprétation, à savoir celle que nous cherchons à atteindre. **M** correspondra à la classe d'équivalence de **V**.

pas être isomorphes. S n'est donc pas catégorique. On conclut par l'absurde que S est syntaxiquement complet.

Le résultat relatif à la complétude du calcul des prédicats de Gödel permet de poser que $\mathbf{E} \cup \mathbf{AxEns}$ possède un modèle $\mathbf{I}$, dont le domaine Ω est dénombrable. De plus, puisque nous pouvons construire dans $\mathbf{Ens}$ la preuve formelle de l'énoncé du théorème de Cantor: «il existe un ensemble non dénombrable d'ensembles», il y aura une expression correspondante dans $\mathbf{E}$ qui est un théorème et qui est satisfaite dans $\mathbf{I}$. Étant donné que le «sens» des concepts que nous voulons exprimer formellement par les axiomes de $\mathbf{Ens}$ coïncident avec l'interprétation $\mathbf{V}$, il est nécessaire que le domaine de $\mathbf{V}$ ne soit pas dénombrable, car sinon le théorème de Cantor perdrait son sens intuitif dans $\mathbf{V}$. $\mathbf{V}$ n'est donc pas isomorphe à $\mathbf{I}$, ce qui implique que $\mathbf{AxEns}$ n'est pas un système catégorique d'axiomes propres. La non-catégoricité des axiomes du système signifie que $\mathbf{Ens}$, d'un point de vue formel, ne réussit pas à représenter de manière univoque les notions en jeu dans la théorie naïve, car celles-ci peuvent recevoir, en fonction de la structure du modèle, des interprétations différentes et irréductibles. $\mathbf{M}$ peut être réparti en plusieurs classes d'équivalence distinctes.

3.2.2. La non-catégoricité de l'arithmétique formelle élémentaire

La situation est analogue en arithmétique formelle élémentaire. L'ensemble des axiomes a pour but de définir la notion de nombre entier. Cela signifie que l'ensemble des modèles $\mathbf{M}$ doit coïncider avec la classe d'équivalence de l'interprétation standard sur l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$. Toutefois il est possible de démontrer que tout ensemble fini ou infini d'ebf de l'arithmétique formelle du premier ordre est satisfait dans une autre interprétation, dont la cardinalité du domaine peut être égale ou supérieure à celle de $\mathbb{N}$, sans que les deux modèles soient isomorphes (Skolem 1971). Dans ce cas nous retrouvons la non-catégoricité du formalisme et donc son incomplétude descriptive. Ce fait s'explique par la nature du schéma d'axiome d'induction, qui devrait servir à établir la catégoricité du formalisme. Le schéma d'axiome est le suivant:

$$(\alpha(0) \wedge (\forall y) (\alpha(y) \rightarrow \alpha(y+1))) \rightarrow ((\forall x) \alpha(x))$$

Dans ce schéma, la métavariable de prédicat α peut être remplacée par n'importe quel prédicat formel appartenant à l'ensemble des prédicats numériques du système formel. Toutefois l'ensemble des prédicats numériques doit être effectivement énumérable, conformément à nos exigences sur les langages formels. D'autre part, dans l'arithmétique pré-formelle, un prédicat naïf est défini par une application de $\aleph^n$ dans l'ensemble bivalent des valeurs de vérité, ce qui implique qu'il existe $2^{(\aleph^n)}$ prédicats numériques naïfs. Par conséquent, il n'est pas étonnant de constater que certains prédicats ne sont pas exprimables dans le système. Ainsi que l'a écrit R. Martin:

[...] ce sont les propriétés correspondant à ces prédicats qui ne peuvent pas être exprimées par le système qui distingue les divers modèles non isomorphes. (Martin 1964: 165)

Nous voyons donc se dessiner la possibilité d'exprimer le premier résultat d'incomplétude gödelien par la non-catégoricité du système d'axiomes propres et par la construction d'un modèle non standard dans lequel on pourra déterminer une proposition indécidable (Wang 1970a: 45; 379). Nous reconsidérerons cette possibilité par la suite (cf. chapitre 6).

Mais reprenons la question du schéma d'axiome d'induction. Nous pourrions supposer qu'il suffit d'utiliser la logique du deuxième ordre (afin de pouvoir quantifier sur les variables de prédicats) pour pouvoir résoudre le problème de la catégoricité. Or, le système ainsi obtenu n'est catégorique que si l'on interprète la quantification sur les variables de prédicats et de fonctions comme portant sur tous les sous-ensembles du domaine d'interprétation (Shapiro 1991: 80-88), et ceci en adéquation avec l'interprétation du langage du premier ordre. Mais ce faisant, nous perdons la complétude sémantique (Gödel 1931), propriété qui, du point de vue adopté ici, est essentielle. La seule façon de retrouver un résultat de complétude sémantique, serait de restreindre la quantification d'ordre supérieur à un ensemble fixé de sous-ensembles du domaine d'interprétation (Henkin 1950). Mais il serait alors possible de démontrer que l'interprétation ainsi adoptée est essentiellement la même que celle de la logique du

premier ordre (Shapiro 1991: 72-76), et que l'on retrouve avec la complétude sémantique, le problème de la non-catégoricité des systèmes d'axiomes propres (Shapiro 1991: 88-95). Autrement dit, seule l'apparence formelle aurait été modifiée, laissant invariant du point de vue sémantique le jeu syntaxique.

3.2.3. Les conséquences sur le programme de Hilbert

Ainsi, si le résultat de complétude sémantique constitue certes un résultat de complétude pour la logique, il révèle également l'incomplétude des systèmes d'axiomes propres, dans son acception descriptive. Il indique que le prix à payer pour que toutes les formes de raisonnement valide soient représentées par le formalisme est qu'il est impossible de disposer d'un ensemble dénombrable d'axiomes qui expriment syntaxiquement les notions de la théorie pré-formelle. Ainsi, la représentation de l'Univers des mathématiques qu'avait Hilbert, à savoir «une maison en pierre de taille, au plan bien tracé, chaque porte ayant sa clé» (A. Delessert 2000: 213) se révèle n'être qu'un Univers peuplé de miroirs reflétant des objets hors d'atteinte et dévoilant des entités au comportement inattendu. Mais nous n'avons pas encore montré pourquoi le caractère univoquement déterminé des significations des concepts des théories naïves est irrévocablement perdu lorsqu'on se place du point de vue des théories formalisées.

3.3. Quantification et fonction de choix: quel mariage?

3.3.1. Préambule

Dans le cas de la théorie des ensembles, nous avons vu que la question de la non-catégoricité s'ensuit de l'existence d'un modèle dénombrable. Cette existence s'explique par le fait qu'en établissant son théorème de complétude, Gödel a aussi montré que la notion de satisfaction implique celle de satisfaction dans un domaine infini dénombrable. D'autre part, nous avons rappelé que, dans l'arithmétique formelle élémentaire, les notions de complétude et de catégoricité sont intimement liées à la façon d'interpréter la quantification du point de vue de la théorie des modèles. Il est ainsi tentant d'établir un pont entre l'explication de

la nature de la quantification dans la théorie des modèles et la question de la satisfaction dans un domaine dénombrable.

Rappelons tout d'abord que le résultat de Gödel relatif à la satisfaction dans un domaine dénombrable avait déjà été établi une dizaine d'années plus tôt par le logicien norvégien T. Skolem, qui contribua – par l'ampleur de ses travaux – à asseoir l'idée d'une conception de la logique comme un calcul. Comme Hilbert, Skolem reconnut la connexion existant entre quantificateurs et fonctions de choix (cf. par exemple Skolem 1920 et 1928). Mais si le finitisme d'Hilbert l'empêcha de donner une analyse claire du phénomène de dépendance quantificationnelle (qui est définitoire de cette connexion), Skolem réussit par contre à l'expliciter. De cette manière il comprit la nature de la quantification, et montra que le résultat relatif à la satisfaction en découlait naturellement.

Nous allons brièvement exposer ce résultat à partir d'exemples très simples, qui mettent en jeu les notions métalogiques posées auparavant, jointes à de nouveaux concepts que nous allons définir.

3.3.2. Formes normales prénexes

Soit L un système formel du premier ordre. Nous allons montrer que chaque ebf de L est équivalente à une ebf sous forme normale prénexe. Donnons d'abord la définition de la forme normale prénexe:

Déf : une expression F de la logique du premier ordre est dite en forme normale prénexe ssi elle est de la forme $(Q_1 v_1)(Q_2 v_2) \dots (Q_n v_n)M$, où tout $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, et M est sans quantificateurs. La suite $(Q_1 v_1)(Q_2 v_2) \dots (Q_n v_n)$ sera appelée le préfixe de F , et M sera appelé la matrice de F .

Pour toute expression α, β de L , nous avons les équivalences logiques suivantes:

- (i) $\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- (ii) $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow (\sim \alpha \vee \beta)$
- (iii) $\alpha \Leftrightarrow \sim(\sim \alpha)$
- (iv) $\sim(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\sim \alpha \wedge \sim \beta)$
- (v) $(\sim \alpha \vee \sim \beta) \Leftrightarrow \sim(\alpha \wedge \beta)$

si $F(v)$ est une expression dans laquelle v est libre:

$$(vi) \quad \sim(\forall v F(v)) \Leftrightarrow (\exists v \sim F(v))$$

$$(vii) \quad (\forall v \sim F(v)) \Leftrightarrow \sim(\exists v F(v))$$

par le fait que $\forall$ se distribue sur $\wedge$, et que $\exists$ se distribue sur $\vee$, nous avons que, si $H(v)$ est une expression dans laquelle v est libre:

$$(viii) \quad (\forall v F(v) \wedge (\forall v H(v))) \Leftrightarrow (\forall v (F(v) \wedge H(v)))$$

$$(ix) \quad (\exists v F(v) \vee (\exists v H(v))) \Leftrightarrow \exists v (F(v) \vee H(v))$$

soient $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $o \in \{\vee, \wedge\}$, et G une expression dans laquelle v n'est pas libre; alors on a:

$$(x) \quad (Q_{1v} F(v)) o G \Leftrightarrow Q_{1v} (F(v) o G)$$

$$(xi) \quad \forall v F(v) \vee \forall v H(v) \Rightarrow \forall v (F(v) \vee H(v))$$

$$(xii) \quad \exists v F(v) \wedge \exists v H(v) \Leftarrow \exists v (F(v) \wedge H(v))$$

si w est libre pour v dans H , et w n'est pas libre dans H , alors:

$$(xiii) \quad (Q_{1v} F(v)) o (Q_{2v} H(v)) \Leftrightarrow (Q_{1v})(Q_{2w}) (F(v) o H(w))$$

Ainsi, par l'application de (i) à (xiii), on établit un algorithme qui, en préservant la valeur de vérité, permet de transformer toute expression de L en une expression sous forme normale prénexe. Autrement dit:

Thm: toute expression F de L est équivalente à une expression F_p sous forme normale prénexe (cette expression n'étant pas unique)

3.3.3. La dépendance quantificationnelle

Analysons maintenant la question de la dépendance quantificationnelle sur la base d'un exemple élémentaire.

Soit F une ebf de L telle que sa forme normale prénexe associée soit: $F_p = \forall v \exists w A(v, w)$. Supposons qu'il existe une interprétation quelconque I dans laquelle F_p est satisfaite. Nous aurons donc que F_p est vraie sous I .

Posons:

$$B(v) = \exists w A(v, w).$$

Puisque F_p est vraie sous I , il s'ensuit que $\forall v B(v)$ sera vraie sous I . Autrement dit, pour toute valuation VAL , VAL satisfait

$B(v)$ dans Ω_I . Soit maintenant une valuation VAL_i particulière; alors il existe un $a_i \in \Omega_I$ tel que $VAL_i(v) = a_i \in \psi Pr(B)$. Mais puisque Fp est vraie sous I , VAL_i doit satisfaire aussi $\exists w A(v, w)$. Par conséquent, il faut que $VAL_i(w) = b_i$ soit telle que $\langle a_i, b_i \rangle \in \psi Pr(A)$.

Généralisons ce que nous venons d'exposer. Puisque Fp est vraie sous I , étant donné la valuation VAL de v , il faut que pour chaque assignation de valeur VAL à w :

$$\langle VAL(v), VAL(w) \rangle \in \psi Pr(A).$$

Cela signifie que chaque assignation de valeur à la variable w dans Fp dépend de l'assignation de la valeur de la variable v dans Fp . La valeur de la variable liée par le quantificateur existentiel dans la matrice de Fp dépend du choix de la variable liée par le quantificateur universel dans la matrice de Fp qui précède le quantificateur existentiel dans le préfixe de Fp . Ce phénomène de dépendance quantificationnelle peut s'exprimer en «paraphrasant» Fp par $\forall v A(v, f(v))$. Cette paraphrase nécessite d'ajouter au langage formel de L , un symbole de fonction f tel que:

$$\psi Fct(f): \quad \Omega_I \rightarrow \Omega_I$$

$$VAL_i(v) \longmapsto b_i, \text{ tel que } \langle VAL(v), b_i \rangle \in \psi Pr(A), \text{ pour toute valuation } VAL_i \text{ dans } \Omega_I.$$

En résumé, dans la perspective de la théorie des modèles, nous avons vu que l'analyse du phénomène de dépendance quantificationnelle permet de mieux comprendre la nature de la quantification. Celle-ci met en évidence que la signification du quantificateur existentiel dans $\forall v \exists w A(v, w)$, peut être décrite comme une fonction (nous reviendrons sur la nature de celle-ci) qui transforme $A(v, w)$ en un prédicat monadique $A(v, f(v))$. Plus précisément, le quantificateur existentiel dans $\forall v \exists w A(v, w)$ a pour rôle d'affirmer l'existence d'une telle fonction. Par conséquent, $\forall v \exists w A(v, w)$ signifie $\exists f \forall v A(v, f(v))$, qui est bien évidemment une ebf de la logique du deuxième ordre.

3.3.4. Les formes de Skolem

D'une façon plus générale, tentons d'explicitier la «paraphrase» de la forme préfixe Fp associée à une ebf F de L .

Ainsi, soit une ebf F de L et sa forme prénexe associée F_p telle que:

$F_p = (Q_1 v_1)(Q_2 v_2) \dots (Q_n v_n)M$, où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et $v_1, \dots, v_n$ sont des variables deux à deux distinctes.

Supposons que dans le préfixe il y ait p quantificateurs existentiels, $n \geq p$. Appelons $j[k]$ les indices des p quantificateurs existentiels du préfixe de F_p , où $k \in [1, \dots, p]$.

On associe à F_p un langage L_{sk} tel que $L_{sk} = L \cup \{f_1, \dots, f_p\}$. Nous appelons f_i les symboles de fonction de Skolem associés à F_p . Chaque f_k correspond à une occurrence d'un $(Q_{j[k]})$, tel que $(Q_{j[k]}) = \exists$, dans le préfixe de F_p . Nous déterminons le nombre d'arguments de chaque f_k en fonction de la dépendance quantificationnelle du $(Q_{j[k]}) = \exists$ correspondant.

Nous obtenons que:

$$(Q_1 v_1)(Q_2 v_2) \dots (Q_{j[k]} v_k) \dots (Q_n v_n)M,$$

$(j[k] - k)$ sera le nombre d'occurrences de $\forall$ à gauche de $(Q_{j[k]})$. Dans le cas où $(j[k] - k) = 0$, alors f_k est une constante individuelle.

Nous pouvons maintenant construire la forme de Skolem F_{sk} associée à F , en transformant F_p .

À chaque v_k quantifiée existentiellement dans F_p , on substitue le nouveau terme $f_k(t_1, \dots, t_{(j[k]-k)})$, où chaque t_i correspond à la i -ème variable v_i liée par un quantificateur universel se trouvant à gauche de $(Q_{j[k]})$ dans le préfixe de F_p . Prenons un exemple. Dans L nous avons la forme prénexe suivante:

$$\forall x \exists y \forall v \exists w M(x, y, v, w),$$

nous pouvons ajouter à L deux symboles de foncteur de Skolem f et g tels que F_p se verra associée la F_{sk} suivante:

$$\forall x \forall v M(x, f(x), v, g(x, v)),$$

qui est une ebf de L_{sk} .

Comme nous venons de le souligner, il ne faut pas oublier que toute forme de Skolem d'une ebf F d'un langage L n'appartient pas à ce langage, puisqu'elle appartient à une extension L_{sk} de L . Par conséquent F et F_{sk} ne peuvent pas être équivalentes dans L .

Toutefois nous pouvons établir une certaine relation entre F et F_{sk} en regardant celle qui unit F_p et F_{sk} .

Reprenons notre exemple $F_p = \forall v \exists w A(v, w)$ d'un langage L . Alors, la formule de Skolem associée à F sera $F_{sk} = \forall v A(v, f(v))$. Cette dernière expression correspond à la paraphrase de F_p obtenue dans notre analyse «informelle» de la dépendance quantificationnelle de cette expression. F_{sk} est donc une ebf de $L_{sk} = L \cup \{f\}$.

Soit $M_{sk} = (\Omega_{sk}, \psi_{sk})$, un modèle de F_{sk} . Cela signifie que M_{sk} satisfait F_{sk} . Autrement dit, pour toute valuation VAL_i , nous avons:

$$\langle VAL_i(v), \psi_{sk}(f)(VAL_i(v)) \rangle \in \psi_{sk}(A).$$

Par conséquent, pour tout $VAL_i(v) = a_i \in \Omega_{sk}$, on peut trouver un $b_i = \psi_{sk}(f)(VAL_i(v))$ tel que $\langle a_i, b_i \rangle \in \psi_{sk}(A)$. Soit $b_i = VAL_i(w)$, pour toute valuation VAL_i , alors M_{sk} satisfait aussi F_p . Par conséquent ($F_{sk} \rightarrow F_p$) est vraie dans M_{sk} , et par conséquent ($F_{sk} \rightarrow F$) l'est aussi.

D'autre part, soit $M = (\Omega_m, \psi_m)$, un modèle de F . Nous savons que M est aussi un modèle de F_p . Par conséquent, pour toute valuation VAL_i :

$$\langle VAL_i(v), VAL_i(w) \rangle \in \psi_m(A).$$

Par conséquent $\psi_m(A)$ n'est pas vide. Nous allons appliquer l'axiome du choix relativement au domaine d'interprétation du domaine Ω_m . De cette manière, il existe une application $\varphi: \rho(\Omega_m) \setminus \emptyset \rightarrow \Omega_m$ telle que pour tout $E \subseteq \Omega_m$, $\varphi(E) \in E$.

À l'aide de φ nous allons construire une interprétation M_{sk} qui satisfait F_{sk} . Puisque $L_{sk} = L \cup \{f\}$, il suffit de donner une interprétation à f , de manière à ce que M_{sk} se détermine en fonction de M en lui ajoutant une interprétation appropriée de f .

Soit $\psi_{sk}(f) = \gamma$, où γ est la fonction sur Ω_m à déterminer. Nous la définissons de la manière suivante:

$$\text{pour tout } a \in \Omega_m, \gamma(a) = \varphi(\{b \in \Omega_m \mid \langle a, b \rangle \in \psi_m(A)\}).$$

M_{sk} ainsi défini est un modèle de F_{sk} .

Nous voyons ainsi que la fonction, dont le quantificateur existentiel dans $\forall v \exists w A(v, w)$ a pour rôle d'affirmer l'existence,

est une fonction de choix. La connexion entre quantificateurs et fonctions de choix devient maintenant manifeste.

3.3.5. La nature de la quantification et la satisfaction dans un domaine dénombrable

Regardons maintenant le lien qui existe entre la quantification et le fait que la satisfaction implique la satisfaction dans un domaine dénombrable (théorème de Löwenheim-Skolem).

À partir des deux résultats ci-dessus obtenus en théorie des modèles, nous pouvons établir d'autres résultats plus généraux. Parmi ceux-ci nous trouverons le théorème suivant:

Thm: F admet un modèle ssi F_{sk} en admet un.

Ce théorème signifie que, lorsque nous voulons analyser de point de vue sémantique un ensemble d'ebf, nous pouvons nous restreindre à l'étude de leurs formes de Skolem associées.

Supposons donc que nous ayons une ebf F satisfaite dans une interprétation I , dont le domaine est de cardinalité infinie quelconque. Nous savons que la forme de Skolem F_{sk} associée à F possède elle aussi un modèle. Nous savons aussi qu'étant donné le modèle I (dans lequel la forme normale prénexe F_p est aussi satisfaite), nous pouvons construire une interprétation appropriée M_{sk} qui aura comme domaine celui de I . Supposons que F_{sk} soit $\forall v A(v, f(v))$. Puisque $M_{sk} = (\Omega_I, \psi_{sk})$ est un modèle de F_{sk} , cela signifie que pour toute assignation de valeur de v , il existe un $\psi_{sk}(f(v))$ dans Ω_I tel que $\langle VAL(v), \psi_{sk}(f(v)) \rangle \in \psi_{sk}(A)$.

Fixons une assignation de valeur VAL_0 . Nous obtenons que VAL_0 satisfait F_{sk} sous M_{sk} . Appelons a_0 , $VAL_0(v)$. Alors il existe $\psi_{sk}(f(v))$ dans Ω_I tel que:

$$\langle VAL_0(v), \psi_{sk}(f(v)) \rangle \in \psi_{sk}(A).$$

Appelons a_1 , $\psi_{sk}(f(v))$. Puisque $a_1 \in \Omega_I$, il existe une assignation de valeur, que nous nommerons VAL_1 , telle que $VAL_1(v) = a_1$. Puisque VAL_1 satisfait F_{sk} sous M_{sk} , il existe $\psi_{sk}(f(v))$ dans Ω_I tel que $\langle VAL_1(v), \psi_{sk}(f(v)) \rangle \in \psi_{sk}(A)$.

Appelons a_2 , $\psi_{sk}(f(v))$. Puisque $a_2 \in \Omega_I$, il existe une assignation de valeur, que nous indiquerons par VAL_2 , telle que $VAL_2(v) = a_2$, et VAL_2 satisfait F_{sk} sous M_{sk} .

Nous voyons donc que nous pouvons construire une interprétation sur la base de **Msk**, qui aura comme domaine un ensemble dénombrable d'éléments $\{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ satisfaisant Fsk (où chaque $a_i \in \Omega_1$).

Bien évidemment ceci ne constitue pas une démonstration. Toutefois, par l'exposé de cet exemple, nous avons montré que si la quantification est pensée comme agissant de la même manière qu'une fonction de choix, alors un langage de la théorie de la quantification du premier ordre peut seulement – relativement à la satisfaction dans une interprétation quelconque – contraindre le choix de la valeur de la variable liée par le quantificateur existentiel, et ceci pour chaque valuation de la variable liée par le quantificateur universel dominant. Mais, puisqu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de fonctions de choix pour tout ensemble dénombrable d'expressions, il n'est pas possible de sortir du domaine du dénombrable de manière significative. En effet, nous pouvons toujours interpréter une théorie formelle consistante dans un domaine de cardinalité dénombrable en conservant tous les théorèmes de cette théorie. Autrement dit, la satisfaction dans un domaine quelconque et la satisfaction dans un domaine dénombrable sont des propriétés équivalentes de par la nature même de la quantification.

3.4. L'axiome du choix et les deux preuves du théorème de Löwenheim-Skolem

3.4.1. Preuve du théorème avec axiome du choix

Dans les paragraphes précédents, nous avons mis en évidence que pour démontrer le théorème de complétude, Gödel a dû en quelque sorte «retrouver» le théorème de Löwenheim-Skolem. D'autre part nous avons vu que ce théorème peut être vu comme une conséquence de la reconnaissance des affinités entre quantification, ou mieux dépendance quantificationnelle, et fonction de choix. Toutefois, lorsque nous avons discuté de la tentative hilbertienne de démontrer l'axiome du choix à partir des axiomes transfinis, nous avons relevé que l'impossibilité d'une telle démonstration était liée au fait que la fonction ϵ permet de choisir un seul élément d'un ensemble donné tandis que l'axiome permet

la constitution d'un ensemble à partir de choix simultanés sur les éléments des ensembles posés. La question qui surgit tout naturellement est donc de savoir si l'esquisse de démonstration d'un cas particulier du théorème de Löwenheim-Skolem n'est pas, en quelque sorte, fautive dans la mesure où elle interprète les fonctions de Skolem, qui sont équivalentes aux fonctions ε de Hilbert³⁷, comme des fonctions de choix.

La preuve donnée par Skolem en 1920 de son résultat, qui fut repris dans Skolem (1928, 1929), utilise cette interprétation et, par conséquent, fait usage de l'axiome du choix. Reprenons l'esquisse de démonstration faite auparavant, mais supposons que F soit $\forall x \exists y A(x, y)$, où $A(x, y)$ est une expression quelconque ayant comme variables libres x et y ³⁸. Soit M un modèle de F . Alors on peut considérer pour chaque valeur de x les assignations à y pour lesquelles F est vraie dans M . Les $\psi(y)$ formeront donc un sous-ensemble Ω_x non vide de Ω . Soit α la fonction qui associe à chaque valeur de x l'ensemble Ω_x . Par conséquent, nous obtenons une suite d'ensembles (pas forcément disjoints) inclus dans Ω . Soit X l'ensemble de tous ces ensembles. Alors par l'axiome du choix, il existe une fonction β qui associe à chaque Ω_x de X l'un de ses éléments. Puisque M est un modèle de F , M est aussi un modèle de $F_{sk} = \forall x A(x, f(x))$.

De l'existence de β , il existe une fonction γ , où $\gamma = \psi(f)$, qui permet d'associer à toute valeur de x une valeur de $y = f(x)$ telle que A soit satisfaite dans M . γ n'est rien d'autre que la composition de β et α . Soit maintenant un $a \in \Omega$ tel que $a = \psi(x)$. Si $M^* = (\cap(\Omega_x), \psi)$, où $\cap(\Omega_x)$ est l'intersection des Ω_x qui contiennent a et tels que pour tout $v \in \Omega_x$, $\gamma(v) \in \Omega_x$, alors M^* constitue un modèle au plus dénombrable de F_{sk} , et par conséquent de F . En effet, supposons que F ne soit pas vraie dans M^* (F est vraie dans M). Alors F_{sk} n'est pas vraie dans M^* . Il existe donc une valuation VAL qui ne satisfait pas F_{sk} , autrement dit il existe une assignation de valeur de x qui ne satisfait pas A dans M^* . Soit une telle $\psi(x)$. Or, puisque $\psi(f) = \gamma$, nous avons que $\psi(f(x)) \in$

37 L'équivalence en question peut être exemplifiée de la manière suivante; soit $F = \forall x \exists y A(x, y)$, il suffit de poser $f(x) = \varepsilon y(A(x, y))$ pour trouver le résultat recherché.

38 La preuve de ce cas particulier est reprise de Skolem (1929), qui est publiée dans Largeault (1972: 162-163)

$\cap(\Omega x)$. Par construction de $\cap(\Omega x)$, VAL satisfait Fsk. Donc M^* est un modèle de F.

Cette démonstration, facilement généralisable, nous amène à faire plusieurs remarques. Premièrement, elle explicite l'enjeu pour la preuve du métathéorème de voir une corrélation entre les fonctions de Skolem, et donc la dépendance quantificationnelle, et les fonctions de choix, car c'est justement cette corrélation qui permet d'exhiber un modèle dénombrable de l'expression F. Deuxièmement, nous pouvons voir qu'en réalité, grâce à l'interprétation posée pour les fonctions de Skolem, nous démontrons un énoncé plus fort que: «s'il existe un modèle de F, alors il existe un modèle dénombrable de F», puisque nous établissons que:

si F possède un modèle M, alors F possède un sous-modèle dénombrable M^* de M.

En effet dans la preuve, à travers l'axiome du choix, on réduit le domaine Ω de M à un domaine $\Omega^* = \cap(\Omega x) \subset \Omega$ contenant une assignation de valeur de x, domaine qui est clos pour l'interprétation des fonctions de Skolem. Nous pouvons donc extraire un modèle dénombrable d'un modèle donnée.

3.4.2. Preuve du théorème sans axiome du choix

Toutefois Skolem, en 1923, a aussi prouvé son métathéorème sans utiliser l'axiome du choix. Le but du logicien était d'utiliser son résultat dans l'étude des fondements des mathématiques. Notamment il envisageait de discuter la question de la «relativité» des concepts de la théorie des ensembles, dont il estimait qu'elle était une conséquence du paradoxe exposé en 3.2.1; paradoxe qui prend son nom. Nous allons esquisser la démarche démonstrative sans axiome du choix sur un cas restreint emprunté à Skolem (1928).

Soit $F = \forall x \exists y \exists z A(x, y, z)$, où A est une expression quelconque (qui présente dans sa structure interne des symboles de prédicat P, Q, R, ...). Supposons que F possède un modèle M. Nous allons construire un ensemble dénombrable et une valuation VAL qui satisfait F dans un modèle ayant cet ensemble comme domaine. Choisissons un élément quelconque du domaine Ω de M et

appelons-le 1. Puisque F est vraie dans M , il doit exister des assignations de valeur pour y et z telles que $A(x,y,z)$ avec $\psi(x)=1$ est vraie dans M . Appelons-les 2 et 3. De manière analogue, il est possible de choisir des valeurs pour y , z telles que la conjonction de $A(x,y,z)$ avec $\psi(x)=1$, de $A(x,y,z)$ avec $\psi(x)=2$ et de $A(x,y,z)$ avec $\psi(x)=3$, soient vraies dans M . On associe donc 4 et 5 à 2, et 5 et 7 à 3. Cette procédure peut être poursuivie. Au stade n , on obtient les objets $1, 2, \dots, 2^{n+1}-1$ tels que, en nous permettant un abus d'écriture pour faciliter la compréhension, la conjonction $K(n)$ de $A(1, 2, 3)$, $A(2, 4, 5)$, $A(3, 6, 7)$, ..., $A(2^n-1, 2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1)$ soit vraie. Autrement dit, si F a un modèle, il existe pour tout n des «solutions de niveau n » telles que $K(n)$ est satisfaite. La suite d'objets est appelée «segment $R(n)$ ». Ensuite Skolem montre que si pour n il existe une solution de niveau n , alors F a un modèle dénombrable. Ainsi, considérons toutes les valuations possibles des formules atomiques de $K(n)$, et appelons les $W(n,i)$, où $i=1, 2, \dots, r(n)$. L'ensemble des $W(n,i)$ est clairement fini. Skolem donne alors un procédé pour ordonner linéairement les $W(n,i)$ pour chaque niveau n . Ce procédé permet de montrer que chaque valuation d'un niveau donné est l'extension d'une valuation du niveau inférieur qui préserve l'ordre (deux solutions d'un certain niveau pouvant avoir la même extension de niveau supérieur). Puisque pour chaque n il y a des solutions, il existe des valuations $W(n,i)$ dans $R(n)$ qui satisfont $K(n)$. Toutefois, si le fait que F possède un modèle permet de s'assurer que pour tout n , $K(n)$ est satisfaite dans une interprétation ayant $R(n)$ comme domaine, cela ne permet pas de dire que F est vraie dans cette interprétation, étant donné qu'elle est seulement un modèle partiel de F . Pour résoudre ce problème, Skolem procède de la manière suivante³⁹. Nous savons que chaque niveau possède un nombre fini de solutions et que celles-ci, excepté le premier niveau, sont des extensions de solutions précédentes. Par conséquent, à chaque niveau il existe au moins une solution qui est indéfiniment extensible. Soit $L(1,n), \dots, L(s(n),n)$, la liste de ces solutions

39 Comme le commente Largeault, Skolem exploite le fait que, en passant d'un niveau à un autre, le nombre de solutions se réduit dans la mesure où toute solution d'un niveau donné est un prolongement d'au moins une des solutions du premier niveau qui sont en nombre fini. «D'où une certaine convergence.» (Largeault 1972: 141)

pour tout n . Alors, pour chaque n , $L(1,n+1)$ doit être une extension de $L(1,n)$, car la propriété d'être une extension d'une solution du niveau précédent préserve l'ordre. À partir de là, Skolem conclut que lorsque, pour tout n , la valuation des formules atomiques est déterminée en tenant compte de la valuation $L(1,n)$, alors la conclusion s'ensuit. Autrement dit les éléments de la suite dénombrable $L(1,1)$, $L(1,2)$, ..., $L(1,n)$, ... satisfont simultanément F . Par conséquent F est vraie dans un modèle ayant comme domaine la suite des symboles correspondant aux nombres naturels.

Ainsi, on montre qu'il existe une preuve du métathéorème en question qui ne fait pas appel à l'axiome de choix. Toutefois, cela n'implique pas que le phénomène de la dépendance quantificationnelle soit absent. Au contraire, il est évident que la construction du modèle dénombrable se fait en exploitant la construction de domaines successifs sur la base des choix de la valeur des variables quantifiées existentiellement. Or, ces choix dépendent de ceux des variables liées par un quantificateur universel. La preuve utilise donc le fait que le quantificateur existentiel dans $\forall x \exists y A(x,y)$ a pour rôle d'affirmer l'existence d'une fonction qui permet de choisir, pour toute valeur de x donnée, *une* valeur de y , sans pour autant former un nouvel ensemble avec les éléments ainsi choisis. Donner son sens propre au phénomène de la dépendance, ne nous permet toutefois pas d'extraire comme dans le cas précédent, un sous-modèle à partir d'un modèle donné. Mais nous avons montré que le résultat de Skolem, tel qu'il se trouve énoncé dans le métathéorème, est bel et bien une conséquence des affinités entre quantificateurs et fonctions de choix.

3.5. Ce que l'analyse model-théorique de la quantification ne nous permet pas encore de dire sur l'échec du programme hilbertien

L'analyse des conséquences de la perspective quantificationnelle dans le cadre de la théorie des modèles montre qu'une première inadéquation intrinsèque du projet fondationnel hilbertien provient de l'outil même (la quantification) qui est utilisé par Hilbert pour comprendre d'un point de vue strictement finitiste

l'utilisation du concept d'«infini actuel» dans la pratique mathématique.

Mais, il faut bien l'admettre, à ce stade de notre discussion nous n'avons pas démontré – si l'on retient le sens strict du terme «démonstration» (Hilbert docet) – que cette inadéquation implique les résultats de Gödel relatifs à l'incomplétude. Nous avons juste indiqué qu'il est possible de démontrer – à partir de l'existence de modèles non standard de l'arithmétique – l'existence d'une proposition indécidable. Le métathéorème de Löwenheim-Skolem ne permet pas tel quel d'inférer la non-catégoricité de la formalisation de l'arithmétique élémentaire, car le domaine de l'interprétation visée est de cardinalité dénombrable. Afin de caractériser de manière exhaustive l'inadéquation de la critique hilbertienne du transfini nous devons mieux cerner les fondements de l'incomplétude descriptive que nous avons évoquée.

4. Le fini du point de vue sémantique et ses enjeux

4.1. Une (autre) conséquence de la complétude sémantique: la compacité

Nous avons vu que la complétude sémantique est un résultat de complétude pour la logique, mais d'incomplétude (descriptive) pour les systèmes d'axiomes propres. Toutefois, il reste à comprendre pourquoi ce constat vaut également pour les axiomes de l'arithmétique élémentaire. En effet, si la non-catégoricité s'ensuit du métathéorème de Löwenheim-Skolem, on ne sait toujours pas comment postuler l'existence d'un modèle arithmétique non isomorphe au modèle standard sur la seule base de la présence d'un modèle dénombrable, puisque l'interprétation visée possède elle aussi un domaine dénombrable. Afin d'éclaircir ce point, il faut donc considérer si d'autres conséquences du résultat de complétude peuvent être dégagées qui permettent d'apporter un éclairage nouveau sur le projet de Hilbert.

Parmi les corollaires directs il en existe un qui porte le nom de «*métathéorème de compacité*»:

Thm: soit E un ensemble d'ebf; si toute partie finie de E possède un modèle, alors E possède un modèle.

Pour démontrer la compacité, du point de vue adopté ici⁴⁰, il est nécessaire de passer par un résultat intermédiaire connu sous le nom de «*métathéorème de finitude*». Celui-ci n'énonce rien d'autre que le caractère fini de toute démonstration dans un système formel, autrement dit le «postulat finitiste» de Hilbert:

Thm: pour tout ensemble d'ebf E et toute ebf F , si $E \vdash F$, alors il existe un sous-ensemble fini E' de E tel que $E' \vdash F$.

Illustrons la preuve de ce résultat. Soit D une démonstration de F à partir de E . Alors, par définition, D est une suite finie d'ebf. Par conséquent D ne fait appel qu'à un nombre fini d'ebf de E . Soit donc E' l'ensemble de ces expressions. Il s'ensuit que D est une démonstration de F à partir de E' . Par conséquent $E' \vdash F$.

La preuve de la compacité devient alors une conséquence banale des métathéorèmes de finitude et de complétude (forte) démontrés par Gödel.

Preuve du métathéorème de compacité: Soit E un ensemble d'ebf tel que tout sous-ensemble fini E' de E possède un modèle. Alors tout E' est consistant. Puisque tout E' est consistant, il s'ensuit que E aussi est consistant. En effet, supposons E inconsistent. Alors $E \vdash F \wedge \neg F$, où F est une ebf quelconque. Par le métathéorème de finitude, il existe un sous-ensemble fini E' de E tel que $E' \vdash F \wedge \neg F$. Mais on sait que E' est consistant. Par conséquent E est consistant. Alors, par la complétude forte, E possède un modèle. D'où le résultat.

La propriété de compacité, propriété qui, comme le montre son énoncé, est purement model-théorique, peut, à première vue, ne pas apparaître problématique. En réalité elle est très surprenante, car en corrélant au niveau du contenu le fini à l'infini, elle semble

40 Ce métathéorème peut être aussi prouvé de manière indépendante.

engendrer l'impossibilité de caractériser une notion simple comme la finitude par des moyens mathématiques élémentaires. L'énoncé suivant, lequel n'est rien d'autre qu'une «extension» du résultat en question, explicite bien ce constat:

Thm: si une théorie du premier ordre T possède des modèles finis (arbitrairement grands), alors T possède aussi un modèle infini.

Par conséquent, il n'est pas possible d'exprimer formellement la finitude d'un modèle d'une théorie. Considérons à titre d'exemple un système qui formalise la théorie des ensembles finis. On peut supposer que, bien que la théorie des ensembles usuelle ne soit pas descriptivement complète, celle des ensembles finis le soit, étant donné le caractère «intuitivement évident» de la notion de finitude. Or, par le théorème susmentionné, il est clair que même la propriété «être un ensemble fini» ne peut pas être formellement caractérisée (au sens de la complétude descriptive), car il existe (au moins) un modèle non isomorphe à celui visé⁴¹. On dira que la propriété «être un ensemble fini» n'est pas *axiomatisable* au premier ordre⁴².

Comment expliquer ce phénomène? Quelles en sont les conséquences sur la tentative hilbertienne de comprendre l'infini par le fini, si ce dernier ne peut pas être saisi par les outils même de la mathématique élémentaire?

4.2. À la recherche d'une définition du «fini»⁴³

Procédons par étapes. Tout d'abord, illustrons les tentatives qui ont été faites dans l'histoire des mathématiques pour définir la notion de finitude.

Dans son travail sur les paradoxes de l'infini, B. Bolzano (1851) explora l'univers de ce concept volatile, polymorphe et,

41 On peut trouver les preuves de ces résultats dans R. Cori, D. Lascar (1993: 200-205).

42 Il est aussi possible de démontrer que si une propriété n'est pas axiomatisable, sa négation ne l'est pas non plus. Cela implique que la propriété «être un ensemble infini» n'est pas axiomatisable au premier ordre.

43 Nous suivons ici la discussion proposée par Delessert (2000: 190-191) et Moore (1982: 22-30).

somme toute, obscur. Le philosophe et mathématicien bohême chercha à définir les notions d'ensemble infini et d'ensemble fini. S'il n'atteignit pas complètement son objectif, il réussit néanmoins à cerner deux propriétés servant ce but. La première est qu'un ensemble E est fini si, pour un certain entier n , il peut être mis en correspondance avec un sous-ensemble propre $\{1, \dots, n\}$ de N . Si ce n'est pas le cas, l'ensemble E est infini. Le deuxième constat, esquissé par Bolzano, fut repris dans la deuxième partie du XIX^e siècle par Cantor et plus particulièrement par Dedekind dans le but de donner une définition précise de la finitude (resp. de l'infinitude) d'un ensemble; ce dernier nous dit qu'un ensemble E est fini si on ne peut pas établir une bijection avec l'un de ses sous-ensembles propres. Ces propriétés permettent aujourd'hui de définir deux manières de concevoir le caractère fini d'un ensemble:

- un ensemble A est fini si, pour un certain entier n , A est équipotent à $\{1, \dots, n\}$
- un ensemble A est dit Dedekind-fini s'il n'est équipotent à aucun de ses sous-ensembles propres.

La première définition fait appel à la notion de nombre naturel et ramène par conséquent le sens d'un concept à celui d'un autre apparemment plus simple. Au contraire, la deuxième se situe dans la perspective ensembliste, qui – nous l'avons vu – cerne difficilement, d'un point de vue formel, la notion d'ensemble. Bien que les deux point de vue semblent distincts, l'opinion de la communauté mathématique fut celle de postuler l'équivalence de ces deux définitions. Bien évidemment, la question est de savoir si une telle équivalence peut être démontrée, et, si oui, de quelle manière. Ce faisant, on pourrait affirmer que l'évidence du fini se ramène, en fin de compte, à l'évidence de la suite des nombres naturels.

La tâche revint à Zermelo, qui, après avoir formulé son fameux axiome du choix, démontra que l'équivalence pouvait être démontrée en faisant appel à cet axiome. La conséquence est évidente: une définition claire et univoque de la finitude déborde le champ des mathématiques élémentaires.

Comme le note Delessert (2000: 190), ce constat nous amène à distinguer deux sortes de finitude:

- l'une, qui peut être appelée *forte*, est celle d'Hilbert. Elle concerne ce qu'on a appelé «numéral», et se ramène donc à l'effectivité des agrégats de signes;
- l'autre (*faible*) est, à proprement parler, «mathématique» et fait référence à la définition (1). Elle est donc liée aux nombres naturels pris dans leur totalité actuelle.

Les différents métathéorèmes discutés jusqu'à maintenant reposent sur l'acception forte de la finitude, puisque celle-ci sous-tend toute l'approche hilbertienne et par conséquent guide la construction et l'étude syntaxique des systèmes formels. Toutefois, l'emploi qu'en fait Hilbert a pour but d'engendrer une idéalisation de la pratique des mathématiques. Le processus de construction des configurations graphiques est associé à celui engendrant la suite des nombres naturels. Aussi, nous pouvons dire que la finitude forte implique la finitude faible. Par conséquent:

les énoncés [des métathéorèmes] sont valides quel que soit le sens donné au mot «fini». Lorsqu'on choisit la finitude faible, les [méta]théorèmes considérés sont irréprochables du point de vue mathématique. Lorsqu'on se tient à la finitude forte, on dispose d'un outil particulièrement adapté à l'étude de la logique du premier ordre. (Delessert 2000:190)

Pourtant, bien que les résultats de complétude sémantique ou de compacité soient «irréprochables du point de vue mathématique», nous comprenons mieux la «raison d'être» du métathéorème de compacité dans le cadre hilbertien: la dissymétrie entre les deux conceptions du fini, l'une relative au monde du numéral, l'autre à celle du nombre naturel, ne permet pas de réduire la deuxième à la première. Autrement dit la finitude du formel échoue à «décrire» celle du contentuel. Mais puisque le fini mathématique est intimement lié au nombre naturel, quelles conséquences doit-on en tirer vis-à-vis de la possibilité d'axiomatiser cette notion? L'enjeu est capital, car souvenons-

nous que pour Hilbert ce n'est qu'après qu'une forme eut été entièrement captée par un contenu que celle-ci permet son étude.

4.3. Le nombre naturel, Skolem, Dedekind et l'induction

Les conséquences de la compacité sont désastreuses: la notion même de nombre naturel devient obscure. Ceci fut démontré Skolem lorsqu'il construisit en 1933 un modèle dénombrable non standard de l'arithmétique formelle élémentaire (cf. Skolem 1971). Pire: il est possible de démontrer qu'il existe une suite illimitée de modèles dénombrables distincts et emboîtés, non isomorphes à celui visé (cf. Delessert 2000: 191)⁴⁴. Plus précisément, si la formalisation de l'arithmétique est consistante, nous sommes en présence d'une infinité de domaines qui contiennent comme sous-partie propre les nombres naturels (les nombres naturels *standard*), et qui possèdent aussi d'autres objets succédant à la suite des entiers positifs (les nombres naturels *non standard*). La notion de nombre naturel n'est pas axiomatisable dans le cadre d'un système formel du premier ordre. La situation n'est pas très heureuse: ou bien l'arithmétique formelle élémentaire est contradictoire, ou bien elle ne réussit pas à caractériser, à isomorphisme près, la notion de nombre naturel.

Essayons de mettre en lumière ce qui pose problème dans la formalisation de cette notion. À l'école nous apprenons à nommer et à écrire les nombres naturels, et aussi à «évoquer» leur totalité actuelle en faisant suivre par exemple à 1, 2 et 3 «...et cetera». Or, lorsqu'on nous demande de préciser ce que l'on entend par cette écriture, nous faisons appel à l'induction complète. Celle-ci consiste à dire que si un sous-ensemble S de l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ est tel que $0 \in S$ et que si $n \in S$, alors son successeur $n+1 \in S$, il s'ensuit que $S = \mathbb{N}$. L'appel à l'induction s'explique par le fait que dans l'expression «1, 2, 3,... et cetera», on sous-entend la définition suivante de $\mathbb{N}$:

44 Tous ces résultats peuvent être démontrés de manière directe en faisant appel à la compacité. On notera aussi que la preuve originale de Skolem n'utilise pas la compacité mais la méthode des ultraproducts.

Déf: l'ensemble des nombres naturels est le sous-ensemble commun de tous les ensembles qui comprennent 0 ainsi que le successeur de chacun de leurs éléments.

Dans les systèmes formels, ce rôle est joué par l'axiome d'induction qui est formulé sous forme d'un schéma⁴⁵:

$$(AI) \quad (\alpha(0) \wedge (\forall y)(\alpha(y) \rightarrow \alpha(y+1))) \rightarrow ((\forall x)\alpha(x))$$

Le fait que AI soit valide dans $\aleph$ mais aussi dans un modèle M qui n'appartient pas à la classe d'équivalence du modèle standard signifie donc que le domaine M possède des éléments inaccessibles par l'induction de $\aleph$, sinon le domaine de M pourrait être démontré être équivalent à $\aleph$. Ceci implique que, du point de vue de l'arithmétique formelle, on ne sait pas ce que «...et cetera» signifie. Autrement dit, puisque «...et cetera» est de l'ordre de l'«idéal», il apparaît impossible de réduire la compréhension du transfini au cadre finitiste. Dans ce cas, il devrait y avoir des propriétés qui ne sont pas définissables dans le formalisme en question. Nous retrouvons ainsi la remarque de Martin cité au paragraphe 3.2.2. Cette remarque s'explique en prenant en compte la preuve de Dedekind à propos de la catégoricité de l'arithmétique formelle du deuxième ordre⁴⁶ (cf. Shapiro 1991: 82-83 et 112-113). La preuve se construit en considérant deux modèles M1 et M2 quelconques du système d'axiomes du deuxième ordre $AxAF2$. Pour montrer que M1 et M2 sont isomorphes, il faut construire une bijection f entre les deux domaines D1 et D2. Pour ce faire, on considère le produit cartésien $D1 \times D2$, et on prend le plus petit sous-ensemble F de $D1 \times D2$ tel que $\langle 0_1, 0_2 \rangle \in D1 \times D2$, où $0_1 \in D1$, $0_2 \in D2$, et si $\langle n, m \rangle \in D1 \times D2$, alors $\langle n+1, m+1 \rangle \in D1 \times D2$. Ensuite on montre que F détermine une bijection f entre D1 et D2 (dans le sens que la fonction bijective f est telle que pour $\langle x, y \rangle \in D1 \times D2$, $f(x)=y$) de la manière suivante: on montre que, à partir de la construction de F, f est une bijection entre un sous-ensemble de D1 et un sous-ensemble de D2; ensuite, puisque M1 et M2 sont deux modèles de $AxAF2$, ils satis-

45 Puisqu'on utilise un formalisme du premier ordre.

46 L'axiome de l'induction n'est donc pas un schéma, mais il est une expression ayant une quantification du deuxième ordre, i.e. qui porte sur une variable prédicative.

font à l'axiome d'induction. Or, du point de vue de la sémantique standard, la quantification du deuxième ordre parcourt tous les sous-ensembles du domaine d'interprétation, donc en particulier les sous-ensembles définissant F . Autrement dit, à tout sous-ensemble du domaine d'interprétation correspond une interprétation possible de la variable prédicative liée dans l'axiome. Par le principe d'induction, on conclut que $F = D_1 \times D_2$. D'où le résultat.

Clairement le problème au niveau du premier ordre est celui de savoir si à tout sous-ensemble du domaine d'interprétation correspond une instanciation du schéma d'axiome, autrement dit si à tout sous-ensemble D du domaine correspond une lettre prédicative P du langage formel pouvant être substituée à la variable prédicative du schéma telle que $VAL(P(x))=1$, pour toute assignation de valeur de x dans D . Puisque le formalisme n'est pas catégorique, il s'ensuit que ce n'est pas le cas: toute théorie du premier ordre formalisant l'arithmétique élémentaire ne permet donc pas d'appliquer le principe d'induction à tout sous-ensemble de n'importe lequel de ses modèles.

Quelles sont les conséquences de cette situation sur la méthode d'élimination des ε -termes?

5. «Maison Hilbert»: un très joli édifice sans toit ni sol

L'édifice hilbertien que nous avons exploré ressemble bien à l'un de ces magnifiques palais pragois avec un goût marqué pour le «labyrinthe»: après avoir ouvert une porte, on se retrouve confronté à dix autres portes, apparemment perdu. Faisons donc un petit rappel.

La tentative hilbertienne de fonder l'ensemble des mathématiques repose sur la compréhension du transfini grâce à la notion de «finitude forte» et la reconnaissance des affinités entre quantificateurs et fonction de choix. Cette compréhension, comme nous l'avons vu, revient à démontrer que les éléments idéaux sont éliminables des démonstrations formelles. En montrant l'aboutissement de ce processus, la preuve de non-contradiction de l'arithmétique aurait dû être directe.

La complétude sémantique assure Hilbert que la logique du premier ordre réussit à engendrer toutes les formes de raisonnement valide des mathématiques. Il lui faut maintenant appliquer la méthode d'élimination des ε -termes à des systèmes assez puissants, capables de formaliser l'arithmétique élémentaire.

Soit donc un système d'axiomes AxAE comme celui de Peano. Parmi les expressions primitives, il y aura AI. Puisque AI est une expression de la forme $\forall xA(x)$, elle peut être reformulé grâce à l'opérateur transfini. Hilbert (cf. Hilbert, Bernays 1968: 83sqq.) a montré qu'une telle reformulation du schéma ne peut pas se faire directement sans aboutir à des expressions difficilement manipulables. Afin de surmonter cette difficulté, il est nécessaire d'ajouter au système (sans quantificateurs et avec l' ε) les deux axiomes suivant

$$(a) A(x) \rightarrow \varepsilon_x(A(x)) \neq x+1$$

$$(b) (x \neq 0) \rightarrow (\delta(x)+1)=x, \text{ où } \delta(x) = \varepsilon_z((z+1)=x)$$

Grâce à (a), (b) et aux définitions transfinies des quantificateurs, il est possible de déduire l'axiome d'induction dans le formalisme utilisé. La question consiste à démontrer l'éliminabilité des ε -termes. Si cela était possible, le processus d'élimination devrait comporter un nombre fini d'étapes. On disposerait ainsi d'une méthode capable de démontrer également le schéma d'induction par les outils de la mathématique finitaire.

Soit AxAE supposé non contradictoire. L'ensemble de théorèmes $\Theta(\text{AxAE})$ caractérise le système formel en question. Supposons ensuite que nous disposons de $\text{IND} = \{AI_1, AI_2, \dots\}$, une énumération des différentes instances du schéma d'axiome AI. On obtient alors que $\text{IND} \subset \Theta(\text{AxAE})$, et on peut se demander si, pour tout élément α de IND, il existe un sous-ensemble fini Γ de $\Theta(\text{AxAE})$ tel que $\Gamma \vdash \alpha$. Dans le cas d'une réponse affirmative nous serions bien placés pour trouver une procédure finie qui permette d'éliminer les éléments transfinis qui occurrent dans le schéma d'induction. En effet, supposons une traduction * de toute ebf de Γ et de tous les AI_i dans le calcul avec ε d'Hilbert. Il s'ensuit que nous avons une suite finie d'ebf constituant une déduction de AI_i* à partir de l'ensemble Γ^* . Si nous pouvons réduire chacune des ebf de la démonstration en question à une

expression numérique effectivement vérifiable, nous pourrions alors démontrer chaque instance du schéma d'axiome d'induction à l'aide des ressources de la mathématique finitaire. Par un résultat dû à Ryll-Nardzewski (1952)⁴⁷ (qui utilise les modèles non-standard de Skolem), nous savons qu'il existe des AIi qui ne sont

47 Ryll-Nardzewski (1952) a démontré le théorème suivant:

Thm: il n'existe aucun ensemble fini de théorème d'un système d'axiomes Z formalisant l'arithmétique (et donc aucun ensemble d'expressions vraies dans un modèle arithmétique standard) à partir duquel il soit possible de dériver tous les axiomes de Z .

La preuve exploite celle de l'existence d'un modèle non standard. L'idée est la suivante (cf. Wang 1970:378-379): supposons que nous éliminions un certain nombre d'axiomes de Z afin d'obtenir un système partiel S avec un nombre fini d'axiomes propres. (Nous pouvons songer à éliminer les quantificateurs des axiomes à l'aide, par exemple, des fonctions de Skolem). Puisque le nombre des axiomes est fini, il y a un nombre fini de fonctions dans ces expressions. Énumérons-les par: $f_1, \dots, f_n$. À partir de là, il faut déterminer une propriété A telle que $[S] \vdash A(1)$, $[S] \vdash A(x) \rightarrow A(x+1)$, mais pas $[S] \vdash A(x)$.

Prenons deux termes quelconques a et b du langage de S , et définissons un prédicat qui affirme:

- b est d'ordre i relativement à a et $f_1, \dots, f_n$, ou b est le i -descendant de a .

La propriété «être le i -descendant de» se définit de la manière suivante: soit un terme a ; on dira que a est le 1-descendant de a ; étant donné un terme b , b est un $(n+1)$ -descendant de a ssi $a = f_i(c, \dots, d)$, où les termes $c, \dots, d$ sont des n -descendants de a mais aucun d'entre eux n'est d'ordre supérieur à n relativement à a et $f_1, \dots, f_n$.

À partir de là, il est facile de définir une relation R telle que:

$R(x, y, z)$ ssi x est au plus d'ordre y relativement à z et $f_1, \dots, f_n$.

Soit maintenant:

$A(x) = (\forall y)(\exists z)(\forall w)(R(w, x, y) \rightarrow (w \leq z))$, autrement dit $A(x)$ affirme que «pour tout y , il existe z tel que pour tout w , si w est au plus d'ordre x relativement à y et $f_1, \dots, f_n$, alors w est inférieur ou égale à z ».

Alors, on a $[S] \vdash A(1)$, $[S] \vdash A(x) \rightarrow A(x+1)$, mais pas $[S] \vdash A(x)$.

(Pour faciliter la lecture, on ne distinguera pas entre numéral et nombre naturel, autrement dit entre l'élément de la syntaxe et son interprétation sémantique: « n » pourra être utilisé soit pour représenter la concaténation de n signes 1, soit pour symboliser l'élément n d'un modèle, standard ou non.)

Supposons que l'on dispose d'un modèle non standard M^* de S . On sait qu'il existe un sous-ensemble propre initial N du domaine $\Omega(M)$ de M^* isomorphe à $\mathbb{N}$. Soit $v \notin N$ ($v \in \Omega(M)$). Alors tous les descendants de v déterminent un modèle V de S . De plus, pour tout $n \in N$, $n < v$. Supposons $A(v)$ vraie dans V . Alors il existe $c \in \Omega(V)$ tel que $(\forall w)(R(w, v, v) \rightarrow (w \leq c))$. Or, le successeur de c , appelons-le c' , en tant qu'élément du modèle V , peut être obtenu à partir de v par la propriété de descendance. Autrement dit, on peut dire que c' est le k -descendant de v . Mais $R(c', v, v)$ est vraie dans V , ce qui n'est pas le cas de $c' \leq c$. Donc $A(v)$ n'est pas vraie dans V . D'où le résultat.

pas déductibles d'un ensemble fini d'hypothèses. Mais nous savons que AI_i est de la forme $\forall x A(x)$. Il s'ensuit que AI_i^* comporte des ε -termes. Ainsi, s'il existe des AI_i^* qui ne sont pas déductibles d'un ensemble fini d'hypothèses appartenant à $\Theta(AxAE)$, il est possible de prouver qu'on ne peut pas toujours démontrer l'éliminabilité des opérateurs transfinis dans le système permettant à Hilbert de formaliser l'arithmétique élémentaire. En effet, si tous les ε pouvaient être éliminés, nous pourrions toujours vérifier par des moyens finis si une certaine expression, et notamment chaque instance AI_i^* du schéma d'induction, est vraie ou fausse. Étant donné que chaque ebf serait alors mise en correspondance avec une expression vraie de la mathématique finitiste et qu'il serait possible de vérifier en un nombre fini d'étapes si un numéral donné satisfait à une propriété numérique donnée, nous pourrions établir, pour chaque AI_i^* , un ensemble fini d'expressions vraies dont AI_i^* serait une conséquence sémantique. Par la complétude sémantique de la logique du premier ordre, on pourrait alors toujours construire une déduction correspondante.

L'entreprise hilbertienne ne réussit donc pas à comprendre du point de vue finitiste l'emploi de «la machinerie transfinie». Mieux: en s'en tenant à un principe finitiste «strict» (dans le sens d'une conception forte du fini), elle n'aurait jamais pu le faire. Notre discussion le montre: le résultat de Löwehneim-Skolem s'ensuit de l'analyse de la quantification par les opérateurs transfinis, la compacité du caractère non élémentaire du fini mathématique et donc d'une faiblesse descriptive «intrinsèque» de l'approche choisie. La maison hilbertienne, qui voulait enfermer entre des murs de pierre les éléments idéaux des théories mathématiques, a été construite en oubliant le sol et le toit.

6. La preuve de Kripke

Que Gödel ait découvert ses résultats d'incomplétude n'est donc, *a posteriori*, pas surprenant. Il est toutefois tentant de se demander si une preuve de l'existence d'une expression mathématique vraie mais indémontrable, et qui fasse appel aux éléments

utilisés dans nos discussions, est possible en théorie des modèles⁴⁸. Or, elle existe! Elle a été obtenue par S. Kripke, et publiée par H. Putnam en 2002 (cf. Putnam 2000). Illustrons-la.

Nous allons construire une expression $F = \forall x \exists y A(x, y)$ du système qui formalise l'arithmétique et deux modèles tels que F soit vraie dans l'un et fausse dans l'autre⁴⁹.

Au départ, il s'agit de déterminer une manière d'interpréter les expressions qui permette de caractériser ces modèles. Pour ce faire, considérons une suite finie, monotone et croissante s de nombres naturels, par exemple $s(0)=186$, $s(1)=267$, $s(2)=349$, $s(3)=518, \dots$, $s(n-1)=3987654345$. Nous dirons que s *satisfait* F ssi le deuxième joueur du jeu que nous allons décrire possède une «*stratégie gagnante*».

Le jeu est le suivant. Supposons deux joueurs, l'un (le premier, ou l'attaquant) associé au quantificateur universel de F , l'autre (le deuxième, ou le défendant) associé au quantificateur existentiel de F . Nous allons exploiter le phénomène de dépendance quantificationnelle existant dans toute expression de la même forme que F . Rappelons que ce phénomène repose sur le fait qu'à tout choix de la valeur de la variable universellement quantifiée, pour que F soit vraie dans une certaine interprétation, il faut choisir une valeur de la variable liée par le quantificateur existentiel qui satisfasse l'interprétation du prédicat en fonction de la précédente. Supposons donc que le premier joueur choisisse un nombre inférieur à la longueur de la suite s , par exemple 3. On examine la suite afin de déterminer le nombre occurrent à la troisième place de s (i.e. $s(2)$). Dans ce cas il s'agit de 349. Le même joueur doit maintenant choisir un nombre inférieur à $s(2)$. Supposons qu'il choisisse 17. Maintenant, c'est au défendant de jouer. Celui-ci doit prendre un nombre inférieur au successeur de $s(2)$, i.e. $s(3)=518$. Faisons l'hypothèse qu'il choisisse 56. Il faut maintenant évaluer le couple $\langle 17, 56 \rangle$ relativement à l'interprétation du prédicat numérique A . Si le couple satisfait A ,

48 Comme nous l'avons dit au paragraphe 3.2.2 Wang (1970a) avait songé à une démonstration basée sur la méthode employée par Ryll-Nardewski pour démontrer son résultat.

49 À la différence de la preuve de Gödel (1931), F n'est pas auto-référentielle.

alors le deuxième joueur gagne, sinon le gagnant sera le premier⁵⁰.

La proposition qu'une suite numérique s satisfait une ebf F peut elle-même être formulée dans le système par l'expression numérique suivante (où $\text{long}(s)$ signifie «la longueur de s »):

$$(\forall i \leq (\text{long}(s) - 1))(\forall n \leq s(i-1))(\exists m \leq s(i))A(n, m).$$

De même, étant donné une suite $A_1, \dots, A_n, \dots$ d'ebf, il est possible de formuler dans le système une expression numérique qui affirme que la n -ième ebf de la suite est satisfaite par la suite numérique s .

Rappelons que, par le procédé d'arithmétisation de la syntaxe dû à Gödel (1931), il est possible d'associer à tout objet linguistique du système formel un nombre naturel (dit *g-nombre*), et donc de déterminer des expressions numériques qui permettent, dans le langage formel, de parler de la syntaxe elle-même. Nous nous permettrons alors de poser, selon le cas, des expressions en langage informel et de les discuter comme s'il s'agissait d'objets de la syntaxe, puisqu'il est toujours possible de trouver une ebf du langage formel qui lui corresponde.

Restreignons notre attention à une certaine classe de suites numériques ayant les propriétés suivantes:

- $s(0)$ est supérieur à la longueur de la suite;
- toute somme ou produit entre nombres inférieurs ou égaux à $s(i)$ est inférieure ou égale à $s(i+1)$.

Toute suite qui possède ces deux propriétés sera dite être une «bonne suite».

On dira qu'une ebf est *n-satisfaisable* ssi il existe une bonne suite s de longueur n telle que l'expression est satisfaite par s . Or, si F est vraie dans une certaine interprétation, l'expression (G) suivante l'est aussi:

(G) : pour tout n , F est n -satisfaisable.

En effet, considérons à la place de F l'expression sous forme de Skolem F_{sk} correspondante (tout modèle de l'une est aussi un modèle de l'autre, et donc toute suite qui satisfait l'une satisfait

50 Le jeu peut être étendu à toute expression sous forme normale préfixe.

l'autre) et plaçons-nous du point de vue du jeu précédemment esquissé. Étant donné un n , nous faisons l'hypothèse que nous disposons d'une suite s de longueur n telle que $s(0)$ soit supérieure à sa longueur. Supposons aussi que tout $s(i+1)$ soit tel que:

- étant donné le choix de la part du joueur attaquant d'un nombre naturel inférieur à un $s(i)$ déterminé auparavant, $s(i+1)$ soit supérieur à toute assignation possible de valeur aux choix correspondant à la fonction de Skolem (une fois qu'on a assigné à x la valeur $s(i)$),
- $s(i+1)$ satisfait la propriété (2) d'une bonne suite;

le défendant pourra alors toujours choisir un nombre naturel inférieur à $s(i+1)$ de manière à ce que l'interprétation du prédicat de l'expression soit satisfaite. Puisque la suite ainsi définie est une bonne suite, par l'existence d'une fonction de Skolem, on peut toujours démontrer que si F est vraie, il existe, pour tout $n=1, 2, \dots$, une bonne suite de longueur n telle que F est n -satisfaisable.

Soit maintenant $E_1, \dots, E_n, \dots$ l'énumération des éléments de l'ensemble d'axiomes $AxAE$. L'expression que nous allons montrer être indécidable sera la suivante:

(K) pour tout n , la conjonction des n premiers axiomes est n -satisfaisable.

Évidemment K est vraie dans l'interprétation standard. En effet, puisque G et les axiomes sont vrais dans le modèle standard, K l'est aussi. Il faut donc construire un modèle non standard dans lequel K soit fausse. À partir du résultat de Skolem (1971), on sait comment construire de tel modèle. Appelons-le M . Or, il existe un théorème qui affirme:

Thm: soit E une ebf de l'arithmétique formelle; alors E ne peut pas être vraie pour tout nombre naturel standard d'un modèle non standard M et fausse pour tout nombre non standard de M .

Soit maintenant l'expression:

(K'): la conjonction de $E_1, E_2, \dots, E_n$ est n -satisfaisable.

Il doit alors exister au moins un nombre naturel non standard k du modèle pour lequel K' soit vraie, autrement dit tel que *dans M «la conjonction de $E1, E2, \dots, Ek$ est k -satisfaisable»* soit vraie. Par conséquent il existe (au moins) une bonne suite s de M de longueur k qui satisfait K' , et tout particulièrement E_k . Évidemment tout élément de s est un nombre non standard. Associons maintenant à toute bonne suite s de longueur k dans M un nombre σ en suivant la méthode de numérotation de Gödel. On notera que σ est plus grand que tout élément $s(i)$ de s . Choisissons une suite s de longueur k qui satisfait E_k et telle que, pour toute suite s' de même longueur telle que $\sigma' < \sigma$, s' ne satisfait pas E_k .

Soit maintenant H un sous-modèle de M tel que pour tout élément a du domaine de H , $a < s(i)$, pour quelques $s(i)$ de s . En tant que sous-modèle de M , H sera clos pour l'addition et la multiplication, autrement dit pour tout élément x, y du domaine de H , xy et $x+y$ seront encore des éléments du domaine.

Existe-t-il un g -nombre j d'une suite s de longueur k dans H telle que E_k soit satisfaite par s ? La réponse est négative.

En effet, on peut montrer que toute ebf de la forme $\exists x A(x)$ qui est vraie dans H l'est aussi dans M pour les mêmes choix de valeurs de la variable x . Or, supposons que l'expression existentielle «*il y a une suite s de longueur k qui satisfait E_k* » soit vraie dans H . Soit p une telle suite. Cette expression doit alors être satisfaite aussi dans M pour la même suite. Mais le g -nombre de p doit nécessairement être inférieur à celui de la suite s précédemment choisie, étant donné la construction du domaine de H . Cela contredit la définition de s .

H ne satisfait donc pas E_k , et K n'est pas vraie dans H . D'où le résultat.

7. Conclusion: de l'infini et du fini (mais pas inversement)

Nous voici parvenus à la fin de notre réflexion sur le programme d'Hilbert; une réflexion qui oblige à traverser presque tout le XX^e siècle, de la conférence d'Hilbert tenue à Paris en 1900, à celle de Putnam à Beijing en 1984. Nous sommes partis

de la recherche d'une preuve de consistance des mathématiques pour arriver à la démonstration model-théorique du premier résultat d'incomplétude de Gödel. Quelle est la moralité de cette histoire?

L'échec hilbertien est dû à l'irréductibilité dans le discours mathématique de l'élément idéal.

La conséquence de cette irréductibilité nous amène à prendre conscience du fait que l'infini ne peut pas se ramener au fini, car ce dernier n'est pas plus élémentaire que le premier. Il n'y a pas plus d'évidence dans la finitude que dans l'infinitude. Le méta-théorème de complétude est un cas paradigmatique de cette irréductibilité: tout en montrant que le monde du fini peut fonctionner comme un écran par rapport à celui de l'infini des mathématiques, sa preuve nécessite l'axiome de l'infini (cf. Gödel 1930). Autrement dit, il est nécessaire d'utiliser tout l'outillage non élémentaire de la théorie des ensembles, de briser, en quelque sorte, la *confusion* entre fini et infini, afin de montrer que la logique du premier ordre remplit le rôle qu'on lui a accordé. Le même genre de phénomène se retrouve dans la preuve de catégoricité de Dedekind: pour prouver que le système du deuxième ordre est descriptivement complet, il faut utiliser une métathéorie qui dépasse le cadre finitiste.

Dans cette perspective, par la tentative de voir en l'axiome du choix un principe logique, on trouve chez Hilbert une sorte d'aveu inconscient de ce que nous venons de dire. Comprendre l'élément transfini par le formalisme nécessitait l'appel à un axiome dont l'évidence n'est pas assurée⁵¹. Mais le «principe finitiste», la devise de la primauté du signe, ne permettait pas à Hilbert de le renfermer dans l'intuition du numéral. L'impossibilité d'éliminer les opérateurs transfinis n'est qu'une conséquence presque banale des raisons intrinsèques de l'échec d'Hilbert.

51 Il est intéressant de signaler le phénomène suivant:

on sait que, dans les cas finis, $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$. Or, il est facile de démontrer que cette identité, dans le cas des disjonctions et des conjonctions infinies, est équivalente à l'axiome du choix. Que l'on puisse penser la quantification universelle comme un produit infini et la quantification existentielle comme une somme infinie *démontre* le caractère non élémentaire de la dépendance quantificationnelle.

Nous avons adopté le point de vue de la théorie des modèles. Par conséquent la démonstration d'incomplétude que nous avons exposée ruine moins *fondamentalement* l'édifice hilbertien que la démonstration de Gödel. Mais notre but était autre. Nous avons voulu nous placer dans la perspective de la pensée naïve (ou pré-formelle) pour montrer l'inadéquation de la pensée formelle à capter cette approche naïve.

Notre travail n'est pourtant pas achevé. Il existe encore plusieurs zones d'ombre. Par exemple, le programme d'Hilbert n'est pas du tout aussi transparent que l'on veut bien le croire. Il y a encore beaucoup de travail à faire, notamment dans la compréhension de ce qu'Hilbert entendait par «fini»⁵². Aussi, l'existence d'une preuve d'incomplétude qui ne semble pas faire appel à l'argument de la diagonale devrait faire l'objet d'une recherche approfondie sur le rôle de ce procédé dans la clarification des phénomènes de limitations des formalismes. Enfin, il serait aussi très intéressant, d'une part, de formuler une preuve rigoureuse de la non-éliminabilité des symboles transfinis sur la base du théorème de Ryll-Nardzewski, et d'autre part, d'examiner les relations qui existent entre ce théorème et la construction de la preuve de Kripke. Mais pour l'instant nous nous arrêterons ici, en espérant que d'autres travaux s'y emploieront.

8. Références bibliographiques

- ABRUSCI V. M.: Autofondazione della matematica: le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica, in: D. Hilbert (1978), 13-137-
- ANELIS I. H. (1991): The Löwenheim-Skolem Theorem, Theories of Quantification, and Proof Theory, in: T. Drucker (ed), *Perspectives on the History of Mathematical Logic*. Basel/Boston: Birkhauser, 71-83.
- BARWISE J. (ed.) (1977): *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland.

52 Ce qui montre une fois de plus la non-évidence de ce concept.

- BELL J.L., SLOMSON A.B. (1969): *Models and Ultraproducts: an introduction*. Amsterdam: North-Holland.
- BLANCHÉ R., DUBUCS J (1996): *La logique et son histoire*. Paris: A. Colin.
- BOLZANO B. (1851): Paradoxien des Unendlichen, trad. partielle en fr. in F. Rivenc, P. de Rouilhan (1992), 51-70.
- BORGA M., PALLADINO D. (1997): *Oltre il mito della crisi (fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo)*, Brescia: Editrice La Scuola.
- CANTOR G. (1932): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, éd. par E. Zermelo. Hildesheim : G. Olms, 1962.
- COHEN P.J. (1966): *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: W.A. Benjamin.
- CORCORAN J. (1980): Categoricity, *History and Philosophy of Logic* 1, 187-207.
- CORCORAN J. (1981): From Categoricity to Completeness, *History and Philosophy of Logic* 2, 113-119.
- CORI R., LASCAR D. (1993): *Logique mathématique*. Paris: Masson.
- DAWSON Jr. J.W. (1993): The compactness of First-Order Logic from Frege to Gödel, *History and Philosophy of Logic* 14, 15-37.
- DAWSON JR. J.W. (1997): *Logical Dilemmas; the Life and Work of Kurt Gödel*. Natick: A. K. Peters.
- DELESSERT A. (2000): *Gödel: une révolution en mathématiques: essai sur les conséquences scientifiques et philosophiques des théorèmes gödéliens*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- DEMOPOULOS W. (1994): Frege, Hilbert, and Conceptual Structure of Model Theory, *History and Philosophy of Logic* 15, 211-225.
- DUBARLE R.P. (1957): *Initiation à la logique*. Paris: Gauthier-Villars.
- FENSTAD J.E. (ed.) (1970): *Selected Works in Logic by Th. Skolem*. Oslo: Universitetsforlaget.
- GÖDEL K. (1929): Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, in: Gödel (1986) [1999], 63-82.

- GÖDEL K. (1930): Die Vollständigkeit des Axiome des logischen Funktionenkalküls, in: Gödel (1986) [1999], 83-93.
- GÖDEL K. (1931): Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, in: Gödel (1986) [1999], 113-138.
- GÖDEL K. (1940): The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 3, Princeton: Princeton University Press. Réimpression in: Gödel (1990), 33-101.
- GÖDEL K. (1986): *Collected Works*; vol. 1, publications 1929-1936, éd. par Solomon Feferman. Oxford: Oxford University Press. Trad. it. in: K. Gödel: *Opere*; vol. 1 1929-1935, Torino: Bollati Boringhieri [1999].
- GÖDEL K. (1990): *Collected Works*; vol. 2, publications 1938-1974, éd. par Solomon Feferman. Oxford: Oxford University Press. Trad. it. in: K. Gödel: *Opere*; vol. 2 1938-1974, Torino: Bollati Boringhieri [2002].
- GOLDFARB W.D. (1979): Logic in the Twenties: the Nature of the Quantifiers, *The Journal of Symbolic Logic* 44.3, 351-368.
- GRIZE J.-B. (1962): Remarques sur les limitations des formalismes, in: E. W. Beth (éd.), *Implication, formalisation et logique naturelle*. Paris: PUF, 103-127.
- GRZEGORCZYK A. (1962): On the Concept of Categoricity, *Studia Logica* 13, 39-65.
- HAILPERIN T. (1992): Herbrand Semantics, the Potential Infinite, and Ontology-Free Logic, *History and philosophy of logic*, 13, 69-90
- HENKIN L. (1950): Completeness in the Theory of Types, *The Journal of Symbolic Logic* 15, 81-91. Trad. fr. in: J. Largeault (1972), 199-211.
- HILBERT D. (1899): *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: B.G. Teubner Verlag. Trad. en fr. par P. Rossier (1971): *Les fondements de la géométrie*. Paris: Dunod; réimpression par les éditions Jacques Gabay en 1997.

- HILBERT D. (1922): Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung, *Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ.* 1, 157-177. Trad. fr. in: Largeault (1992), 107-130.
- HILBERT D. (1923): Die logischen Grundlagen der Mathematik, *Mathematische Annalen* 88, 151-166; trad. fr. in: Largeault (1992), 131-144.
- HILBERT D. (1926): Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* 95, 161-190. Trad. fr. in: Largeault (1972), 215-246.
- HILBERT D. (1927): Die Grundlagen der Mathematik, *Abh. aus d. Math. Sem. d. Hamb. Univ.* 6. Trad. fr. in: Largeault (1992), 145-164.
- HILBERT D. (1928): Probleme der Grundlegung der Mathematik (Conférence au Congrès International des mathématiciens, Bologne); publ. in: *Mathematische Annalen* 102, (1929), 1-9. Trad. fr. in: Largeault (1992), 175-186.
- HILBERT D. (1978): *Ricerche sui fondamenti della matematica*. Napoli: Bibliopolis.
- HILBERT D., ACKERMANN W. (1928): *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer.
- HILBERT D., BERNAYS P. (1934) [1ère ed 1968]: *Grundlagen der Mathematik I*, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag. Tr. fr. (2001), *Les fondements des mathématiques 1*. Paris: L'Harmattan.
- HILBERT D., BERNAYS P. (1939) [2nd ed 1970]: *Grundlagen der Mathematik II*, Berlin/Heidelberg: Springer Verlag. Tr. fr. (2001), *Les fondements des mathématiques 2*. Paris: L'Harmattan.
- HINTIKKA J. (1994a): *La vérité est-elle ineffable?* Paris: Édition de l'Éclat.
- HINTIKKA J. (1994b): La théorie des modèles en logique, tradition et perspective, in: J. Hintikka, *Fondements d'une théorie du langage*. Paris: PUF, 209-251.
- HINTIKKA J. (1996): *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge: Cambridge University Press.
- HINTIKKA J. (2000): *On Gödel*, Belmont: Wadsworth.
- HINTIKKA J., SANDU G. (1994): What is a Quantifier?, *Synthese*, 113-129.

- KANAMORI A. (1996): The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen, *The Bulletin of Symbolic Logic* 2.1, 1-71.
- KREISEL G. (1958): Hilbert's Programme, *Dialectica* 12, 346-372. Traduit in Largeault (1992), 465-500.
- LADRIÈRE J. (1957): *Les limites du formalisme*. Paris: Gauthier-Villars.
- LARGEAULT J. (éd.) (1972): *Logique mathématique – textes*. Paris: A. Colin.
- LARGEAULT J. (éd.) (1992): *Intuitionnisme et théorie de la démonstration – textes*. Paris: Vrin.
- LEROUX J. (1998): *Introduction à la logique*. Paris: Diderot éditeur.
- LÖWENHEIM L. (1915): Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematischen Annalen*, 447-470. Trad. fr. in: Largeault (1972), 116-138
- MACHOVER M. (1996): *Set Theory, Logic and their Limitations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MARTIN R. (1964): *Logique contemporaine et formalisation*. Paris: PUF.
- MENDELSON E. (1964): *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton: D. van Norstrand.
- MIÉVILLE D. (1991): *Introduction à la théorie des systèmes formel. 1ère partie*. Université de Neuchâtel: Travaux de logique 4.
- MIÉVILLE D. (1991): *Introduction à la théorie des systèmes formels. 2ème partie*. Université de Neuchâtel: Travaux de logique 5.
- MIRIMANOFF D. (1917): Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles, *L'enseignement mathématique*, 37-52.
- MOORE G.H. (1980): Beyond First-Order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Set Theory, *History and Philosophy of Logic* 1, 95-137.
- MOORE G.H. (1982): *Zermelo's Axiom of Choice (Its Origins, Development and Influence)*. Berlin/Heidelberg/New York, SpringerVerlag.

- MOORE G.H. (1998): The Emergence of First-Order Logic, in: W. Aspray, P. Kitcher (eds), *History and Philosophy of modern Mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, 95-135.
- MORICONI E. (1987): *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, Napoli: Bibliopolis.
- POST E.L. (1921): Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, *American Journal of Mathematics* 43, 163-183. Réimpression in van Heijenoort (1967b): 264-283.
- PUTNAM H. (2000): Nonstandard Models and Kripke's Proof of the Gödel Theorem, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 41.1, 53-58.
- READ S. (1997): Completeness and Categoricity: Frege, Gödel and Model Theory, *History and Philosophy of Logic* 18, 79-93.
- RIVENC F., DE ROUILHAN P. (éds) (1992): *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*, Paris: Payot.
- RYLL-NARDZEWSKI A. (1952): The Role of the Axiom of Induction in Elementary Arithmetic, *Fundamenta Mathematicae* 39, 239-263.
- ROSSER J.B. (1955): *Deux esquisses de logique*. Paris: Gauthier-Villars.
- SHAPIRO S. (1991): *Foundations without Foundationalism*. Oxford: Oxford University Press.
- SHAPIRO S. (ed.) (1996): *The Limits of Logic (Higher-Order Logic and the Löwenheim-Skolem Theorem)*. Dartmouth: Aldershot.
- SIEG W. (1999): Hilbert's Programs: 1917-1922, *The Bulletin of Symbolic Logic* 5.1, 1-44.
- SKOLEM T. (1920): Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Skifter utgit av det Norske Videnskapakademiet i Kristina*. I.4, 1-36. Trad. angl. in: van Heijenoort (1967), 252-263.

- SKOLEM T. (1928): Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Norsk Matematisk Tidsskrift* 10, 125-142. Trad. fr. in: J. Largeault (1972), 93-108
- SKOLEM T. (1929): Über die mathematischen Logik, *Skrifter utgitt av det Norske Videnskapakademiet i Oslo*. I.4, 1-49. Trad. fr. partielle in: Largeault (1972), 139-171.
- SKOLEM T. (1941): Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem, in: F. Gonseth (éd.): *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*. Zurich: Leemann, 25-52.
- SKOLEM T. (1971): Peano axioms and models of arithmetic, in: Brouwer, Beth, Heyting (eds) (1971), 1-14.
- SKOLEM T. et al. (eds) (1971): *Mathematical Interpretation of Formal Systems*. Amsterdam: North-Holland.
- SMORYNSKI C. (1977): The Incompleteness Theorems, in: Barwise (ed.) (1977), 821-865.
- SYNACEUR H. (1998): Différents aspects du formalisme, in: F. Nef, D. Vernant (éds), *Le formalisme en question*. Paris: Vrin, 103-128.
- TIEL C. (1977): Leopold Löwenheim: Life, Work, and Early Influence, in: R. Gandy, M. Hyland (eds.), *Logic Colloquium 76*. Amsterdam: North-Holland, 235-252.
- VAN HEIJENOORT J. (1967a): Logic as a Calculus and Logic as Language, *Synthese* 17, 324-330.
- VAN HEIJENOORT J. (ed.) (1967b): *From Frege to Gödel*. Cambridge: Cambridge University Press.
- VAN HEIJENOORT J. (1977): Set-Theoretic Semantics, in: R. Gandy, M. Hyland (eds): *Logic Colloquium 76*. Amsterdam: North-Holland.
- VAN HEIJENOORT J. (1982): L'œuvre logique de Jacques Herbrand et son contexte historique, in: J. Stearn (ed.), *Proceedings of the Herbrand Symposium Logic Colloquium 81*. Amsterdam: North-Holland.
- VAN HEIJENOORT J., DREBEN B. (1989): Introduction to Gödel 1929, 1930, 1930a, in: Gödel (1989), [1999], 47-62.
- VAUGHT R. L. (1974): Model Theory before 1945, in: L. Henkin, J. Addison, C. Chen Chung, W. Craig, D. Scott, R.L. Vaught: *Proceedings of the Tarski Symposium*, vol. 141

- of the Proceedings of Symposia in pure Mathematics, Providence, American Society Monthly, 153-172.
- VON NEUMANN J. (1927): Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift* 26, 1-46.
- WANG H. (1954): The Formalization of Mathematics, *The Journal of Symbolic Logic* 19.4, 241-266.
- WANG H. (1970a): *Logic, Computers and Sets*. New York: Chelsei Publishing Co,
- WANG H. (1970b): A Survey of Skolem's Work in Logic, in: Skolem (1970).
- WANG H. (1971): On Denumerable Base of Formal Systems, in: Brouwer, Beth, Heyting (eds) (1971), 57-84.
- WANG H. (1974): *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge & Kegan.
- WANG H. (1990): *Kurt Gödel*. Paris: A. Colin.
- WANG H. (1993): *Popular Lectures on Mathematical Logic*. Mineola: Dover.
- ZACH R. (1999): Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of propositional Logic, *The Bulletin of Symbolic Logic* 5.3, 331-366.
- ZERMELO E. (1904): Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Mathematische Annalen* 59, 514-516. Trad. angl. in van Heijenoort (1967b), 139-141.
- ZERMELO E. (1908): Neuer Beweis für das Möglichkeit einer Wohlgeordnung, *Mathematische Annalen* 65, 107-128. Trad. angl. in: van Heijenoort (1967b), 199-215.

**PUBLICATIONS DE
L'INSTITUT DE LOGIQUE ET DU
CENTRE DE RECHERCHES SÉMIOLOGIQUES**

Travaux de logique

Liste des numéros parus

1. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Septembre 1985 (épuisé).
2. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Janvier 1987 (épuisé).
3. James Gasser: La syllogistique d'Aristote à nos jours. Juin 1987.
4. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Avril 1991 (réédition du n° 1; épuisé).
5. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Avril 1991 (réédition du n° 2; épuisé).
6. Denis Miéville: La négation, une étude logique. Mai 1991 (épuisé).
7. Denis Miéville (éd.): Kurt Gödel. Actes du colloque, Neuchâtel, 13 et 14 juin 1991. Septembre 1992.
8. James Gasser: Introduction à la logique des relations de C.S. Peirce. Novembre 1993.
9. D. Miéville, P. Joray, D. Stauffer, N. Gessler: Études logiques. Port-Royal: une logique des idées. L'avènement de la théorie sémantique de la vérité de Tarski. George Boole et l'algèbre de la logique. Décembre 1994.
10. D. Bourquin, P. Joray, N. Gessler, D. Miéville: Analyse catégorielle et logique. Octobre 1996.
11. D. Miéville (éd.): Introduction aux logiques non classiques. Octobre 1997.
12. F. Vuissoz: La conception sémantique de la vérité. Logique et philosophie chez Alfred Tarski. Décembre 1998.
13. D. Miéville, P. Joray, F. Nef, M. Bourdeau, D. Bourquin, A. Lecomte, J. Lambek, B. Godart-Wendling: Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Actes du colloque organisé à Neuchâtel, les 16 et 17 octobre 1998. Septembre 1999.
14. F. Nef, C. Hughes, P. Giaretta, A. Bottani, N. Gessler, F. Correia, P. Simons, A. Varzi: Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements. Actes du colloque, Neuchâtel, 20-21 octobre 2000. Août 2001.
D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. I: La protothétique. Novembre 2001

Ces publications peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au prix de **Fr.s. 15.-; Fr. 20.-** dès le n° 14 (TVA comprise).

Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques

Liste des numéros parus

- *1. G. Vignaux: La nouvelle rhétorique. Revue critique et perspectives d'application. 1969-70.
- *2. G. Vignaux: L'argumentation antique: Aristote. Janvier 1970.
- *3. M.-J. Borel: Pour définir l'argumentation. 1969-70.
- *4. F. Bugniet: Remarques sur les notions d'assertion linguistiques et de proposition logique. Septembre 1970.
- *5. M.-J. Borel, G. Vignaux: L'étude de l'argumentation. Séminaire 1969-70.
- *6. G. Vignaux: L'argumentation: bibliographie sélective. Janvier 1971.
- *7. J.-B. Grize: Logique de l'argumentation et discours argumentatif. Mai 1971.
- *8. J.-L. Galay: La rhétorique du discours de philosophie systématique. Essais d'analyse. Mars 1971.
- *9. C. Morier: Charles Sanders Peirce et la sémiotique. Mars 1971.
- *10. G. Vignaux: L'argumentation et le résumé. Mars 1971.
- *11. C. Gillièron, C. Bonnet: Peut-on définir l'argumentation? Avril 1971.
- *12. J.-B. Grize: Notes sur l'ontologie et la méréologie de S. Lesniewski. Mars 1972.
- *13. M. Hirsbrunner, P. Fiala: Les limites d'une théorie saussurienne du discours et leurs effets dans la recherche sur l'argumentation. Avril 1972.
- *14. C. Gillièron, A.-M. Badonnel, J.-P. Iacazzi: Les recherches psychologiques et psycholinguistiques sur la négation et les relations d'opposition. Mai 1972.
- *15. J.-L. Galay: Esquisse pour une théorie figurale du discours. Septembre 1972.
- *16. Y. Oppel: Sémiotique littéraire, à propos de la coordination, répétition et opposition dans un texte littéraire. Mai 1973.
- *17. P. Fiala, C. Ridoux: Essai de pratique sémiotique. Juin 1973.
- *18. M. Hirsbrunner: Pour une critique de la sémiotique de Roland Barthes. Juillet 1973.
- *19. Y. Oppel: Colloque sur l'analyse du discours «Divergences et convergences». Février 1974.
- *20. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.
- *21. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.

- *22. A.-F. Schmid: Philosophie et sciences chez Henri Poincaré: lecture philosophique. Octobre 1974.
- *23. M.-J. Borel: Schématisation discursive et énonciation. Arguments théoriques et approche descriptive (LAD I). Octobre 1975.
- *24. A. Licitra: Les relations interpropositionnelles. Huit types d'après R. Longacre (LAD I). Octobre 1975.
- *25. (Collectif): Discours et structures sociales. Janvier 1977.
- *26. M. Ebel: Langage, histoire, action: les recherches de Jean Pierre Faye. Septembre 1975.
- *27. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes I. Juillet 1977.
- *28. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes II. Juillet 1977.
- *29. J.-B. Grize: Matériaux pour une logique naturelle (LAD I). Mai 1976.
- *30. D. Miéville, M.-J. Borel, A. Licitra: Discours et analogie (LAD II). Mai 1977.
- *31. J. Moeschler: Contribution linguistique à une sémiotique du cinéma. Mai 1977.
- *32. A. Lecomte: Paraphrase et thématization. Essais d'analyse logique. Décembre 1978.
- *33. (Collectif): Langue et discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
- *34. (Collectif): Langue et discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
- *35. P. Baldi, J. Moeschler: Comment contrôler le discours: interaction et réfutation dans le débat Giscard-Mitterrand (1974). Juillet 1979.
- *36. (Collectif): Quelques réflexions sur l'explication. Février 1980.
- 37. M. Sanchez-Mazas: Traduction arithmétique des graphes et des relations binaires et applications logiques et informatiques. Juin 1981.
- *38. (Collectif): Le discours explicatif I. Septembre 1981.
- *39. (Collectif): Le discours explicatif II. Septembre 1981.
- 40. C. Wülser: Actes de langage explicatifs. Février 1982.
- *41. (Collectif): Logique naturelle du raisonnement. Avril 1982.
- *42. (Collectif): Linguistique et sémiologie I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
- 43. (Collectif): Linguistique et sémiologie II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
- *44. (Collectif): Raisonnements et raisons. Avril 1983.
- 45. F. Albera: Problèmes de l'énonciation au cinéma. Février 1984.
- 46. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.

47. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
- *48. (Collectif): Analyse de texte assistée par ordinateur. Utilisation du logiciel DEREDec. Janvier 1985.
- *49. (Collectif): Problèmes et méthodes d'une analyse de texte articulant organisation cognitive, argumentation et représentations sociales. Juin 1985
50. (Collectif): Actes du colloque «Dialogisme et Polyphonie», 27/28 septembre 1985. Avril 1986.
- *51. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance I. Juillet 1986.
- *52. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance II. Juillet 1986.
- *53. (Collectif): La référence. Points de vue linguistique et logique. Mars 1987.
54. D. Apothéloz, J.-B. Grize: Langage, processus cognitif et genèse de la communication. Septembre 1987.
- *55. (Collectif): La schématisation descriptive. Types textuels, formes et fonctions discursives. Janvier 1988.
56. D. Miéville, R. Martin, A. Culioli, G.G. Granger, C. Gillieron, G. Seel, J. Molino, L. Frey, J.-B. Grize: La négation sous divers aspects. Actes du colloque, Neuchâtel 22-23 octobre 1987. Septembre 1988.
- *57. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt, G. Quiroz, J.-B. Grize: La négation. Contre-argumentation et contradiction. Septembre 1989.
- *58. M. Charolles: De l'art de nager et des différentes manières d'en parler. Septembre 1990.
- *59. D. Miéville, M.-J. Borel, J.-P. Desclés, J. Gasser, P.-Y. Brandt; D. Apothéloz, J. Moeschler, J. Jayez, M.F. Blès: La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement. Actes du colloque, Neuchâtel 11-12 octobre 1990. Septembre 1991.
60. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt: Les organisations raisonnées. Analyse de l'articulation de séquences discursives. Juin 1992.
61. D. Miéville, M. Chavaz, E. Gattico: Relations formelles et non formelles. Septembre 1993.
62. D. Miéville, C. Tiercelin, G. Heinzmann, G. Deledalle, J. Gasser, N. Everaert-Desmedt, J. Réthoré, M. Balat, J.-P. Kaminker: Charles Sanders Peirce. Apports récents et perspectives en épistémologie, sémiologie, logique. Actes du colloque, Neuchâtel, 16-17 avril 1993. Avril 1994.

63. D. Miéville, J.-P. Desclés, P. Engel, J.-L. Gardies, J.-C. Gardin, J. Gasser, J.-B. Grize, F. Nef: Raisonement et calcul. Actes du colloque, Neuchâtel, 24-25 juin 1994. Septembre 1995.
64. D. Apothéloz, U. Bähler, M. Schulz (éds), Analyser le musée. Actes du colloque international organisé par l'Association Suisse de Sémiotique (ASS/SGS), Lausanne 21-22 avril 1995. Août 1996.
65. D. Miéville, J.-L. Gardies, J.-B. Grize, O. Houdé, J.-P. Bronckart: Temps, logique et langage. Actes du Symposium tenu lors du colloque international «Penser le temps», Neuchâtel, 8-10 septembre 1996. Avril 1997.
00. A. Roulet Juan: Benno Besson en mouvement. Notes sur une mise en scène de «Lapin Lapin», comédie de Coline Serreau. Numéro spécial septembre 1998.
66. C. Salavastru: Identité et altérité. Les avatars de la rhétorique contemporaine. Novembre 1998.
67. D. Miéville, P. Joray, N. Gessler, B. Godart-Wendling, A. Bottani: Essais sur le nom et la nominalisation. Novembre 2000.

Les titres précédés d'un astérisque sont épuisés.

Les publications disponibles peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au **Fr.s. 15.-** , dès le n° 67 **Fr.s. 20.-** (TVA comprise).