Espace des groupes marqués et groupes de Baumslag-Solitar

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences pour obtenir
le grade de docteur ès sciences, par

Yves Stalder

La soutenance a été réussie le 5 décembre 2005,
devant les membres du jury :

Prof. Alain Valette	directeur de thèse
Dr. Paul Jolissaint	rapporteur (Neuchâtel)
Prof. Goulnara Arjantseva	rapporteur (Genève)
Prof. Thomas Delzant	rapporteur (Strasbourg)
Prof. Bruno Colbois	(Neuchâtel)

Institut de mathématiques, Université de Neuchâtel,
Rue Emile-Argand 11, CH-2007 Neuchâtel (Suisse)

Université de Neuchâtel

IMPRIMATUR POUR LA THESE

Espace des groupes marqués et groupes de Baumslag-Solitar

Yves STALDER

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

FACULTE DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury

Mme G. Arjantseva (Genève)
MM. A. Valette (directeur de thèse)
B. Colbois,
P. Jolissaint et
T. Delzant (Strasbourg F)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 12 décembre 2005 Le doyen :

J.-P. Derendinger

Faculté des Sciences
■ Rue Emile-Argand 11 ■ CP 2 ■ CH-2007 Neuchâtel
■ Téléphone : +41 32 718 21 00 ■ Fax : +41 32 718 21 03 ■ E-mail : secretariat.sciences@unine.ch ■ www.unine.ch

Table des matières

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier très chaleureusement mon directeur de thèse, Alain Valette. Il a toujours fait preuve d'une grande disponibilité pour discuter de mes problèmes de recherche et m'a toujours encouragé à poursuivre mes travaux, même dans la période où ceux-ci ne produisaient rien de concret. En outre, il m'a laissé une grande liberté scientifique, notamment en me laissant réorienter ma thèse vers des problèmes qui me convenaient mieux. C'est donc en bonne partie grâce à lui que je suis parvenu à surmonter cette mauvaise période et à mener mon travail de doctorat à terme.

Mes remerciements vont en second aux autres membres du jury de thèse, Goulnara Arjantseva, Bruno Colbois, Thomas Delzant et Paul Jolissaint. Leur lecture attentive a permis d'améliorer la qualité du texte, tandis que leurs suggestions me donnent des pistes de développements futurs.

C'est ensuite à Luc Guyot que je souhaite exprimer ma profonde gratitude. Après avoir terminé l'article [42], j'allais chercher d'autres problèmes auxquels me consacrer, lorsque Luc est venu me proposer de poursuivre dans la même direction. Cette collaboration a engendré l'article commun [27], qui contient les résultats de la thèse qui me plaisent le plus.

Je remercie encore Pierre de la Harpe, dont les suggestions ont permis d'améliorer sensiblement la qualité de la présentation du texte présenté à l'annexe A, ainsi que toutes les personnes qui m'ont transmis des remarques sur mes textes.

À côté de la recherche, l'enseignement a joué un rôle important pour moi durant toutes ces années. Cela m'a donné l'opportunité de toucher à des domaines variés des mathématiques, sous la responsabilité de différents professeurs. Je les remercie pour cet enrichissement.

Les contacts avec mes collègues et ex-collègues du corps intermédiaire ont été très fructueux, tant sur le plan de la recherche que de l'enseignement ou de discussions plus personnelles. Je tiens donc à les remercier très chaleureusement. Plus généralement, je remercie tous les collaborateurs de l'institut car ils contribuent tous à la très bonne ambiance qui y règne.

De manière plus personnelle, je tiens à remercier mes parents, ainsi que ma famille et mes amis, qui m'ont toujours soutenu moralement au cours de mes années de thèse.

Enfin, je souhaite remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce projet.

Yves Stalder
Neuchâtel, décembre 2005

Introduction

Mots clés. Groupes de Baumslag-Solitar, moyennabilité intérieure, extensions HNN, espace des groupes marqués, groupes agissant sur des arbres, propriété de Haagerup, présentations.

Keywords. Baumslag-Solitar groups, inner amenability, HNN extensions, space of marked groups, groups acting on trees, a-T-menability, presentations.

Les groupes de Baumslag-Solitar sont des groupes très naturels. Dès qu'on introduit la notion d'extension HNN, ils apparaissent car ce sont des exemples parmi les plus simples d'une telle structure. Ils sont donnés par les présentations

$$BS(m,n) = \left\langle a, b \;\middle|\; ab^m a^{-1} = b^n \right\rangle \;\; (m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \; .$$

Autrement dit, le groupe $BS(m,n)$ est engendré par deux éléments qu'on note a et b, qui sont soumis à la relation $ab^m a^{-1} = b^n$. Gilbert Baumslag et Donald Solitar se sont intéressés aux groupes qui portent maintenant leur nom en raison du caractère non hopfien de la majorité d'entre-eux [4]. On connaissait alors peu de groupes non hopfiens de présentation finie et il s'agissait des premiers exemples de tels groupes à un relateur.

Il apparaît que les groupes de Baumslag-Solitar se scindent naturellement en deux classes : les $BS(\pm 1, n)$ et les $BS(m,n)$ avec $|m|, |n| \geqslant 2$. Les premiers sont métabéliens, et donc résolubles et moyennables tandis que les seconds ne possèdent aucune de ces propriétés.

Les groupes de Baumslag-Solitar ont été classés à isomorphisme près par Moldavanskiĭ [35]. Farb et Mosher [23], puis Whyte [45], ont traité la classification à quasi-isométrie près.

La moyennabilité intérieure d'un groupe Γ équivaut à la moyennabilité (au sens d'Eymard, ou de Bekka) de l'action par conjugaison de Γ sur $\Gamma \setminus \{1\}$

(voir la section 1.4). Parmi les exemples banals de groupes intérieurement moyennables, on trouve les groupes moyennables et les groupes possédant une classe de conjugaison finie non triviale.

Cela a motivé, pour les extensions HNN, l'étude d'une part de la propriété d'être *à classes de conjugaison infinies*, et d'autre part de la moyennabilité intérieure. Cette étude est réalisée au chapitre 2, où l'on démontre en particulier :

Théorème 0.0.1 *1. Le groupe $BS(m,n)$ est à classes de conjugaison infinies si et seulement si $|m| \neq |n|$;*

2. Le groupe $BS(m,n)$ est intérieurement moyennable pour tous $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Dans ce chapitre, on montre encore l'existence d'éléments qui définissent des automorphismes elliptiques non triviaux de l'arbre de Bass-Serre associé dont le sous-arbre des points fixes est non borné.

Dans [24], Gal et Januszkiewicz ont montré que les groupes de Baumslag-Solitar possèdent la propriété de Haagerup.[1] De plus, les auteurs de [1] ont prouvé que les groupes de Baumslag-Solitar ne sont pas uniformément non moyennables. Il suit que les groupes de Baumslag-Solitar non moyennables satisfont néanmoins plusieurs propriétés connues pour être des formes faibles de moyennabilité.[2]

Le second acteur principal de cette thèse, présenté dans le chapitre 3, est l'*espace de groupes marqués de type fini*. On peut en faire remonter l'origine jusqu'à Chabauty [11], mais la topologie de cet espace est souvent appelée *topologie de Cayley* ou *topologie de Grigorchuk* [26]. De manière informelle, on peut dire que deux groupes marqués sont proches si les boules de leurs graphes de Cayley sont les mêmes pour un grand rayon.

Cette topologie a permis d'établir plusieurs résultats dont les énoncés ne font pas directement appel à elle. Par exemple :

– l'existence de groupes moyennables non élémentairement moyennables, démontrée par Stepin dans [44] ;

[1] En fait ce résultat peut également se déduire du fait que le second groupe dérivé de $BS(m,n)$ est libre [31, Corollaire 2], combiné avec un résultat de stabilité par certaines extensions [14, Exemple 6.1.6]

[2] Le célèbre groupe F de Thompson, dont on ne sait toujours pas s'il est moyennable, est également faiblement moyennable dans plusieurs sens.

– l'existence, pour chaque groupe de Kazhdan de type fini, d'un groupe de Kazhdan de présentation finie dont le groupe de départ est un quotient, prouvée par Shalom dans [40].

Elle permet encore de caractériser les groupes limites de Sela [13].

La topologie de Cayley-Grigorchuk a par ailleurs été étudiée de manière plus interne par Champetier [12] puis par Champetier et Guirardel [13].

Nous nous sommes consacré à l'étude des groupes de Baumslag-Solitar dans l'espace des groupes marqués, d'abord seul puis en collaboration avec Luc Guyot (voir [42, 27] et le chapitre 4). Une nouvelle différence entre les groupes de Baumslag-Solitar moyennables et non moyennables est apparue au cours de ces travaux :

Théorème 0.0.2 *1. Les groupes marqués $BS(\pm 1, n)$ convergent vers le produit en couronne $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ pour $|n| \to \infty$;*

2. Soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et soit $(k_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Z}^*$ telle que $|k_n| \to \infty$ pour $n \to \infty$. La suite $(BS(m, k_n))_n$ converge dans $\mathcal{G}_2$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) il existe d tel que $\mathrm{pgcd}(m, k_n) = d$ pour n assez grand ;

(ii) la suite $(\frac{k_n}{d})_n$ est stationnaire dans $(\mathbb{Z}/\frac{m}{d}\mathbb{Z})^h$ pour tout $h \in \mathbb{N}^*$.

Cela a donné lieu à la définition de groupes marqués $\overline{BS}(m, \xi)$, où ξ est un entier m-adique, obtenus comme limites de suites $(BS(m, k_n))_n$. Ces limites agissent sur des arbres obtenus comme « limites » des arbres de Bass-Serre des $BS(m, k_n)$. En étudiant cette action, on voit que les limites $\overline{BS}(m, \xi)$ possèdent la propriété de Haagerup et sont résiduellement résolubles. Cela permet également d'en donner des présentations.

Les limites de quelques autres familles de groupes à paramètres entiers (groupes de noeuds toriques, groupes de Baumslag-Solitar avec marquages changeants, etc.) ont été étudiées, ainsi que les liens topologiques entre l'espace $\mathbb{Z}_m$ des entiers m-adiques et la partie $\{\overline{BS}(m, \xi) : \xi \in \mathbb{Z}_m\}$ de l'espace des groupes marqués.

Avertissement

Les résultats de l'auteur présentés dans cette thèse ont déjà été acceptés pour publication [42, 43] ou prépubliés [27]. Ce texte sert donc avant tout à présenter le travail effectué dans sa globalité. Nous en avons profité pour

développer certains aspects des bases de la théorie. Ainsi le chapitre 1, qui introduit les concepts de théorie des groupes et des graphes sur lesquels la thèse repose, et le chapitre 3, qui introduit l'espace des groupes marqués de type fini, ne contiennent aucun résultat original dû à l'auteur. En général, des références sont citées, sauf pour les résultats les plus simples et évidents.

Le chapitre 2 présente les résultats de [43] tandis que le chapitre 4 est consacré à ceux de [42] et [27]. Le contenu des articles est reproduit, avec quelques corrections, dans les annexes A, B et C. Les résultats cités dans les chapitres sont en général donnés sans preuve (dans certains cas, on trouvera un commentaire de la démonstration ou une esquisse de la stratégie de preuve), mais sont munis de renvois précis aux annexes, où les preuves figurent en bonne et due forme.

L'annexe D présente quant à elle un petit résultat concernant la K-théorie des groupes à un relateur qui n'est pas lié de près au reste de la thèse. Pour cette raison, les notions de base utilisées dans cette annexe ne sont pas rappelées. Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Alain Valette.

Chapitre 1

Groupes et actions de groupes

Ce chapitre recense les définitions et résultats fondamentaux dont nous aurons besoin dans la suite. L'espace des groupes marqués de type fini sera cependant traité dans un chapitre séparé.

Bien qu'il présente certaines définitions de base, ce texte ne saurait être considéré comme une introduction à la théorie des groupes, avec laquelle le lecteur est supposé être relativement familier.

1.1 Définitions de base

Dans cette première section, seuls des thèmes très classiques sont abordés. Nous nous permettrons donc de donner certains résultats sans preuve ni référence particulière.

1.1.1 Premiers rappels et conventions

À moins qu'il ne soit fait mention du contraire, les groupes apparaissant dans la présente thèse seront toujours supposés être (au plus) dénombrables. Si Γ est un groupe, on note 1 son élément neutre et $\Gamma^* = \Gamma \setminus 1$. On donne maintenant la définition d'une action pour fixer les notations.

Définition 1.1.1 *Soit Γ un groupe et X un ensemble. Une* action *de Γ sur X est une application $\Gamma \times X \to X; (\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x$ telle que :*

- *pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ et $x \in X$, on a $(\gamma_2\gamma_1) \cdot x = \gamma_2 \cdot (\gamma_1 \cdot x)$;*
- *pour tout $x \in X$, on a $1 \cdot x = x$.*

On vérifie facilement que les actions de Γ sur X sont en bijection avec les homomorphismes de Γ vers $\mathrm{Sym}(X)$.

Exemple 1.1.2 *Soit Γ un groupe. Les trois applications suivantes définissent des actions, dites* par translations à gauche, par translations à droite *et* par conjugaison *:*

1. $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma; \gamma \cdot \gamma' = \gamma\gamma'$;
2. $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma; \gamma \cdot \gamma' = \gamma'\gamma^{-1}$;
3. $\Gamma \times \Gamma^* \to \Gamma^*; \gamma \cdot \gamma' = \gamma\gamma'\gamma^{-1}$.

On donne maintenant les définitions de quelques propriétés essentielles des actions de groupes :

Définition 1.1.3 *Soit Γ un groupe agissant sur un ensemble X :*

1. *l'action est dite* fidèle *si l'homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Sym}(X)$ est injectif, c'est-à-dire si pour tout $\gamma \in \Gamma^*$, il existe $x \in X$ tel que $\gamma \cdot x \neq x$;*
2. *elle est dite* fortement fidèle *si, pour toute partie finie $F \subseteq \Gamma^*$, il existe $x \in X$ tel que, pour tout $\gamma \in F$, on ait $\gamma \cdot x \neq x$;*
3. *elle est dite* libre *si pour tous $\gamma \in \Gamma^*$ et $x \in X$ on a $\gamma \cdot x \neq x$;*

Étant donnés un groupe Γ et un sous-groupe H, on peut construire l'*espace homogène* Γ/H, formé des classes γH avec $\gamma \in \Gamma$. L'action de Γ sur Γ/H donnée par $\gamma \cdot (\gamma' H) = (\gamma\gamma')H$ est :

- fidèle si et seulement si on a $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma H \gamma^{-1} = \{1\}$;
- fortement fidèle si et seulement si, pour toute partie finie $F \subseteq \Gamma^*$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma F \gamma^{-1} \cap H = \varnothing$.

1.1.2 Orbites et stabilisateurs

Passons maintenant à quelques nouvelles définitions concernant les actions. Étant donnés une action de Γ sur X et $x \in X$, on appelle *orbite* de x, l'ensemble $\Gamma \cdot x = \{\gamma \cdot x : \gamma \in \Gamma\}$. Le *stabilisateur* de x, noté $\mathrm{Stab}(x)$ est le sous-groupe de Γ formé des éléments γ qui satisfont la relation $\gamma \cdot x = x$.

Définition 1.1.4 *Soit Γ un groupe agissant sur deux ensembles X et Y. Une application $f : X \to Y$ est dite* Γ-équivariante *si on a $f(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot f(x)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in X$.*

Rappelons que si un groupe Γ opère sur un ensemble X, l'application $\gamma \mapsto \gamma \cdot x$ induit une application Γ-équivariante inversible entre $\Gamma/\mathrm{Stab}(x)$ et $\Gamma \cdot x$ pour tout $x \in X$. Donc toute action transitive est équivalente à une action sur un espace homogène.

1.1.3 Groupes libres

Soit S un ensemble. On appelle *mot* sur S une suite finie (éventuellement vide) d'éléments de $S^{\pm 1} = S \sqcup S^{-1}$ et on note $\mathcal{M}(S)$ l'ensemble des mots sur S. Dans ce cadre, on appelle *lettres* les éléments de $S^{\pm 1}$ et *longueur* d'un mot son nombre de lettres. Un mot w sur S est dit *librement réduit*, ou *réduit*, s'il ne contient aucun sous-mot de type xx^{-1} ou $x^{-1}x$ (avec $x \in S$).

Posons $\mathbb{F}(S) = \mathcal{M}(S)/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les couples $(wxx^{-1}w', ww')$ et $(ww', wxx^{-1}w')$ pour $w, w' \in \mathcal{M}(S)$ et $x \in S^{\pm 1}$ (on convient que $(x^{-1})^{-1} = x$). L'opération de concaténation passe au quotient et fait de $\mathbb{F}(S)$ un groupe, appelé *groupe libre* de base S.

Tout élément x de $\mathbb{F}(S)$ contient exactement un mot librement réduit, dont la longueur est appelée *longueur* de x et notée $|x|$. En outre, l'ensemble des mots réduits sur S, muni de la loi de composition consistant à concaténer les deux mots puis à réduire le résultat, est un groupe qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}(S)$.

À partir de maintenant, on ne distinguera plus ces deux groupes. On se permettra également d'identifier un mot w sur S avec l'élément de $\mathbb{F}(S)$ qu'il représente si le contexte est suffisamment clair. Si S et T ont le même cardinal, les groupes $\mathbb{F}(S)$ et $\mathbb{F}(T)$ sont isomorphes. On désignera donc dès maintenant par $\mathbb{F}_n$ (respectivement $\mathbb{F}_\infty$) le groupe libre sur un ensemble à n éléments (respectivement une infinité dénombrable d'éléments).

1.1.4 Présentations de groupes

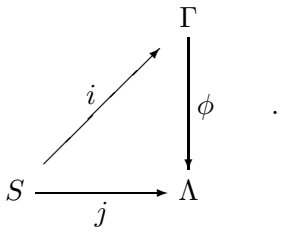
Soit S un ensemble, Γ un groupe et $f : S \to \Gamma$ une application. On définit alors une application, encore notée f, de $\mathcal{M}(S)$ vers Γ en posant $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$. Cette dernière passe au quotient et définit un homomorphisme $f : \mathbb{F}(S) \to \Gamma$.

On remarquera au passage que cette construction montre que tout groupe s'obtient comme quotient d'un groupe libre : il suffit de prendre pour S une partie qui engendre Γ pour avoir $\Gamma = \mathbb{F}(S)/\mathrm{Ker}(f)$ grâce à la construction ci-dessus.

Définition 1.1.5 *Soit S un ensemble et $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(S)$. Un groupe* Γ admet la présentation $\langle S \mid \mathcal{R} \rangle$ *si :*

1. *il existe une application $i : S \to \Gamma$ telle que $i(S)$ engendre Γ et qu'on ait $i(r) = 1$ pour tout $r \in \mathcal{R}$;*

2. *pour tout groupe* Λ *et pour toute application* $j : S \to \Lambda$ *satisfaisant* $j(r) = 1$ *pour tout* $r \in \mathcal{R}$, *il existe un homomorphisme* $\phi : \Gamma \to \Lambda$ *qui fait commuter le diagramme suivant :*



.

Les éléments de S (ou leurs images) sont appelés *générateurs* de la présentation et les éléments de $\mathcal{R}$, *relateurs*. Il suit immédiatement de la définition précédente que tous les groupes admettant une présentation donnée sont isomorphes entre eux.

Un groupe Γ est dit *de présentation finie* s'il admet une présentation $\langle S \mid \mathcal{R} \rangle$ avec S et $\mathcal{R}$ finis.

Exemple 1.1.6 *Le groupe libre* $\mathbb{F}(S)$ *admet la présentation* $\langle S \mid \varnothing \rangle$.

Exemple 1.1.7 *Le groupe* $\mathbb{Z}^n$ *admet la présentation*

$$\left\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1} \ (1 \leqslant i, j \leqslant n) \right\rangle \ .$$

On donne maintenant l'exemple universel de groupe admettant une présentation donnée.

Exemple 1.1.8 *Soit* $\langle S \mid \mathcal{R} \rangle$ *une présentation. Si on note* $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ *le plus petit sous-groupe normal de* $\mathbb{F}(S)$ *contenant* $\mathcal{R}$, *le groupe quotient* $\mathbb{F}(S)/\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ *admet la présentation* $\langle S \mid \mathcal{R} \rangle$.

Notons que le sous-groupe normal $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ est constitué exactement des éléments de $\mathbb{F}(S)$ représentés par les mots de la forme $w_1 r_1^{\pm 1} w_1^{-1} \cdots w_k r_k^{\pm 1} w_k^{-1}$ avec $w_i \in \mathcal{M}(S)$ et $r_i \in \mathcal{R}$. Par ailleurs, on écrira souvent dans la suite $\Gamma = \langle S \mid \mathcal{R} \rangle$ en lieu et place de $\Gamma = \mathbb{F}(S)/\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$. Les éléments de $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$ sont appelés *relations* du groupe Γ.

Exemple 1.1.9 *Soit* Γ *un groupe et* S *une partie génératrice de* Γ. *On a vu plus haut qu'on peut écrire* $\Gamma = \mathbb{F}(S)/\operatorname{Ker}(f)$. *Il suit de l'exemple 1.1.8 que* Γ *admet la présentation* $\langle S \mid \operatorname{Ker}(f) \rangle$.

1.1.5 Groupes de Baumslag-Solitar

Ces groupes, qui sont au centre de la présente thèse, doivent leur nom à Gilbert Baumslag et Donald Solitar, qui les ont introduits en 1962 dans [4].

Définition 1.1.10 *Soit $m, n \in Z^*$. Le* groupe de Baumslag-Solitar *associé à m et n est $BS(m,n) = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} b^{-n} \rangle$.*

L'intérêt pour ces groupes a été motivé en particulier par le caractère non hopfien de nombre d'entre eux.

Définition 1.1.11 *Un groupe Γ est* hopfien *s'il n'est isomorphe à aucun quotient propre de lui-même.*

Si p et q sont premiers entre eux, il est aisé de voir que le groupe $BS(p,q)$ n'est pas hopfien. On montre que l'homomorphisme $\phi : BS(p,q) \to BS(p,q)$ donné par $\phi(a) = a$ et $\phi(b) = b^p$ est surjectif, mais non injectif [33, théorème IV.4.9]. Baumslag et Solitar avaient donné une caractérisation des $BS(m,n)$ hopfiens dans [4]. Celle-ci s'est avérée être fausse lorsque Meskin a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.1.12 *[34, Théorème C] Soit $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Le groupe $BS(m,n)$ est résiduellement fini si et seulement si $|m| = 1$, $|n| = 1$ ou $|m| = |n|$.*

Définition 1.1.13 *Soit Γ un groupe et (P) une propriété de groupes : le groupe Γ est* résiduellement (P) *si, pour tout $\gamma \in \Gamma^*$, il existe un groupe Λ possédant la propriété (P) et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \Lambda$ tel que $\phi(\gamma) \neq 1$.*

Le lien entre la finitude résiduelle et la propriété de Hopf est donné par le résultat suivant, dû à Malcev :

Théorème 1.1.14 *[33, Théorème IV.4.10] Tout groupe de type fini et résiduellement fini est hopfien.*

La caractérisation exacte des groupes de Baumslag-Solitar hopfiens est énoncée dans [15] (où elle est attribuée à Baumslag, Solitar et Meskin). Dans l'énoncé qui suit, $\pi(k)$ désigne l'ensemble des diviseurs premiers de k.

Théorème 1.1.15 *[41, Théorème A.4] Soit $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Le groupe $BS(m,n)$ est hopfien si et seulement si $|m| = 1$, $|n| = 1$ ou $\pi(m) = \pi(n)$.*

D'autre part, les groupes de Baumslag-Solitar ont été classés à isomorphisme près par Moldavanskiĭ.

Théorème 1.1.16 *[35],[41, théorème A.2] Étant donnés $m, n, r, s \in \mathbb{Z}^*$, les groupes $BS(m,n)$ et $BS(r,s)$ sont isomorphes si et seulement si on a $\{m,n\} = \{r,s\}$ ou $\{m,n\} = \{-r,-s\}$.*

Pour terminer cette brève introduction aux groupes de Baumslag-Solitar, citons encore à titre culturel les résultats obtenus par Farb et Mosher d'une part, et par Whyte d'autre part, concernant les conditions auxquelles deux groupes de Baumslag-Solitar sont *quasi-isométriques* (voir [18] pour une introduction à la notion de quasi-isométrie).

Théorème 1.1.17 *[23, Théorème 7.1] Étant donnés des entiers $m, n \geqslant 2$, les groupes $BS(1,m)$ et $BS(1,n)$ sont quasi-isométriques si et seulement s'il existe des entiers $r, j, k > 0$ tels que $m = r^j$ et $n = r^k$.*

Théorème 1.1.18 *[45, Corollaire 0.2] Tous les groupes $BS(m,n)$ avec $1 < m < n$ sont dans la même classe de quasi-isométrie.*

Une bonne référence concernant les groupes de Baumslag-Solitar est l'annexe de la thèse de doctorat d'Estelle Souche [41].

1.2 Constructions de groupes

1.2.1 Extension HNN

Soit Λ un groupe, H, K des sous-groupes et $\phi : H \to K$ un isomorphisme. On définit l'*extension HNN* de Λ relativement à H, K et ϕ comme dans [33] :

$$HNN(\Lambda, H, K, \phi) = \left\langle \Lambda, t \;\middle|\; t^{-1}ht = \phi(h)\ \forall h \in H \right\rangle \ .$$

Par convention, on sous-entend que les relations de Λ sont toujours valables, même si on ne les a pas écrites dans la présentation. Plus précisément, il faudrait donc écrire $\Lambda = \langle \Lambda \mid \mathcal{N} \rangle$ (selon exemple 1.1.9), puis poser

$$HNN(\Lambda, H, K, \phi) = \left\langle \Lambda \sqcup \{t\} \;\middle|\; \mathcal{N} \cup \{t^{-1}ht\phi(h)^{-1} : h \in H\} \right\rangle \ .$$

Le groupe Λ est la *base* de l'extension HNN et le symbole t en est la *lettre stable*.

Exemple 1.2.1 *Pour $m, n \in \mathbb{Z}^*$, on a $BS(m,n) = HNN(\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, \phi)$ où ϕ est donné par $\phi(nk) = mk$.*

Pour une extension $HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ et pour tout $j \geqslant 1$, définissons comme suit des homomorphismes ϕ^j. On pose $\phi^1 = \phi$ (et en particulier $\mathrm{Dom}(\phi^1) = \mathrm{Dom}(\phi) = H$). Pour $j \geqslant 2$, on définit récursivement

$$\mathrm{Dom}(\phi^j) = \phi^{-1}\big(\mathrm{Dom}(\phi^{j-1}) \cap K\big) \subseteq H \ ,$$

et naturellement $\phi^j(h) = \phi(\phi^{j-1}(h))$ pour tout $h \in \mathrm{Dom}(\phi^j)$.

Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ un élément de $HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $n \geqslant 0$, $\lambda_i \in \Lambda$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. L'écriture est dite *réduite* si elle ne contient aucun sous-mot de type $t^{-1}ht$ avec $h \in H$ ou tkt^{-1} avec $k \in K$. L'énoncé suivant est une variante du théorème de la forme normale dans les extensions HNN [33, théorème IV.2.1], Nous nous y référerons (un peu abusivement) sous le nom de *lemme de Britton*.

Théorème 1.2.2 *Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ comme avant. Si l'écriture est réduite et si $\gamma = 1$, alors $n = 0$ et λ_0 est l'élément neutre de Λ.*

Grâce au lemme IV.2.3 de [33], on peut en outre définir une *fonction longueur* $\ell : HNN(\Lambda, H, K, \phi) \longrightarrow \mathbb{N}$, en posant $\ell(\gamma) = n$ si l'écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ est réduite.

1.2.2 Produit libre et produit amalgamé

Soit A, H, K des groupes et $i : A \to H, j : A \to K$ des homomorphismes injectifs. Le *produit amalgamé* de H et K relativement à A est donné par

$$H *_A K = \big\langle H, K \ \big| \ i(a) = j(a) \ \forall a \in A \big\rangle \ .$$

Comme pour les extensions HNN, il faudrait plus précisément écrire des présentations $H = \big\langle H \ \big| \ \mathcal{N}_H \big\rangle$ et $K = \big\langle K \ \big| \ \mathcal{N}_K \big\rangle$, puis définir le produit amalgamé par

$$H *_A K = \big\langle H \sqcup K \ \big| \ \mathcal{N}_H \sqcup \mathcal{N}_K \sqcup \{i(a)^{-1} j(a) : a \in A\} \big\rangle \ .$$

Lorsque le groupe A est trivial, on parle de *produit libre* et on note $H * K$.

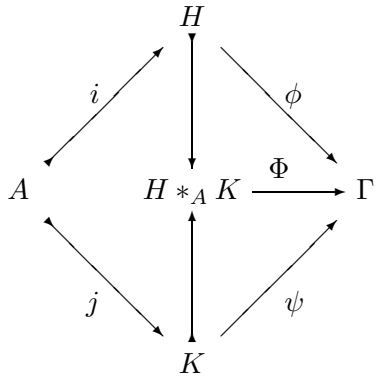
Comme pour les extensions HNN, on a une notion d'écriture réduite. Si γ est un élément non trivial de $H *_A K$, on peut toujours écrire $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ avec $\gamma_i \in H \sqcup K$ de telle sorte que γ_i et γ_{i+1} ne soient jamais dans le

même groupe. L'écriture est dite *réduite* si $n = 1$ et $\gamma_1 \neq 1$, ou si $n \geqslant 2$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \notin i(A) \sqcup j(A)$. Le pendant du lemme de Britton pour les produits amalgamés est l'énoncé suivant [33, théorème IV.2.6] :

Théorème 1.2.3 *Soit $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n \in H *_A K$ comme ci-dessus. Si l'écriture est réduite, alors γ n'est pas l'élément neutre de $H *_A K$.*

En outre, les produits amalgamés satisfont la propriété universelle suivante, dont nous omettons la preuve, qui est directe.

Théorème 1.2.4 *Soit $i : A \to H$ et $j : A \to K$ des homomorphismes injectifs. Étant donnés des homomorphismes $\phi : H \to \Gamma$ et $\psi : K \to \Gamma$ tels que $\phi \circ i = \psi \circ j$, il existe un unique homomorphisme $\Phi : H *_A K \to \Gamma$ tel que le diagramme suivant commute :*



1.2.3 Produit semi-direct et produit en couronne

Soit deux groupes H et N, ainsi qu'un homomorphisme $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$. Le *produit semi-direct* associé est le groupe, noté $H \ltimes N = H \ltimes_\alpha N$, constitué de l'ensemble $H \times N$ et de la loi de composition

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = \big(h_1 h_2, n_1 \alpha_{h_1}(n_2)\big) \ .$$

On peut vérifier à la main que les axiomes des groupes sont satisfaits, mais on peut également observer que $H \ltimes N$ est isomorphe à un sous-groupe de $H \times \mathrm{Sym}(N)$, via l'application $(h, n) \mapsto (h, \tau_n \circ \alpha_h)$, où $\tau_n(x) = nx$. Notons que si l'action α est triviale, on retrouve la définition du produit direct.

Parmi les exemples de produits semi-directs, on trouve les *produits en couronne* : si Γ et H sont des groupes, on pose

$$\Gamma \wr H = \Gamma \ltimes_\alpha \left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma \right) \text{ avec } \alpha_g(h)(\gamma) = h(g^{-1}\gamma) \ ,$$

où $H_\gamma = H$ pour tout γ et $(\oplus_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions $\Gamma \to H$ à support fini.

L'exemple de produit en couronne qui nous intéressera le plus dans la suite est $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \ltimes_s (\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$. L'action est le décalage donné par $s_m(h)(n) = h(n-m)$. Si on note δ_n la masse de Dirac en n, c'est-à-dire la fonction prenant la valeur 1 en n et 0 ailleurs, l'action s'écrit $s_m(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\delta_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\delta_{m+n}$.

On peut également identifier $(\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$ à l'ensemble des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ via l'application $\delta_n \mapsto t^n$. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ correspondant au décalage est la multiplication par des puissances de t, à savoir $s_m(p) = t^m p$.

1.3 Graphes et arbres

Pour définir ces notions, nous nous basons essentiellement sur [39].

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 *Un* graphe X *est la donnée :*

- *d'un ensemble de* sommets, *noté* $\mathrm{Som}(X)$ *;*
- *d'un ensemble d'*arêtes, *noté* $\mathrm{Ar}(X)$ *;*
- *d'une involution sans point fixe* $\mathrm{Ar}(X) \to \mathrm{Ar}(X), e \mapsto \bar{e}$ *;*
- *de deux fonctions* $o, t : \mathrm{Ar}(X) \to \mathrm{Som}(X)$ *telles que* $t(\bar{e}) = o(e)$ *et* $o(\bar{e}) = t(e)$ *pour toute arête* e*.*

On écrira parfois e^-, respectivement e^+, au lieu de $o(e)$, respectivement $t(e)$. Étant donnée une arête e, le sommet e^- est l'*origine* de e et le sommet e^+ est son *sommet terminal*.

On notera qu'une arête e peut satisfaire la relation $e^- = e^+$, auquel cas on parle de *boucle*. Par ailleurs, il se peut que les relations $t(e') = o(e)$ et $o(e') = t(e)$ soient satisfaites sans qu'on ait pour autant $e' = \bar{e}$. Dans un tel cas, on parle d'*arêtes multiples*.

Un graphe sans boucle ni arête multiple est dit *combinatoire*. Un tel graphe est totalement déterminé par ses sommets et l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe une arête entre x et y.

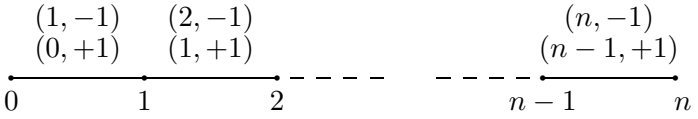
Un graphe est dit *fini* si les ensembles $\mathrm{Som}(X)$ et $\mathrm{Ar}(X)$ sont finis.

Définition 1.3.2 *Soit* X *un graphe. Une* orientation *sur* X *est une partie* $A \subseteq \mathrm{Ar}(X)$ *telle que* $\mathrm{Ar}(X) = A \sqcup \bar{A}$*. Un* graphe orienté *est un graphe muni d'une orientation.*

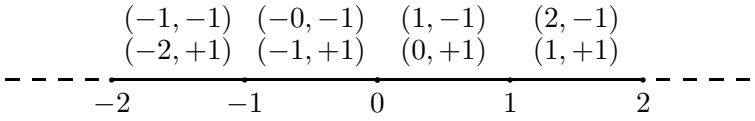
En d'autres termes, orienter un graphe revient, pour chaque couple d'arêtes $(e, \bar{e})$, à choisir l'une des deux. Nous donnons maintenant les exemples les plus simples et fondamentaux de graphes.

Exemple 1.3.3 *Soit $n \in N^*$. Les graphes Dr_n, Dr_∞ et Cir_n sont :*

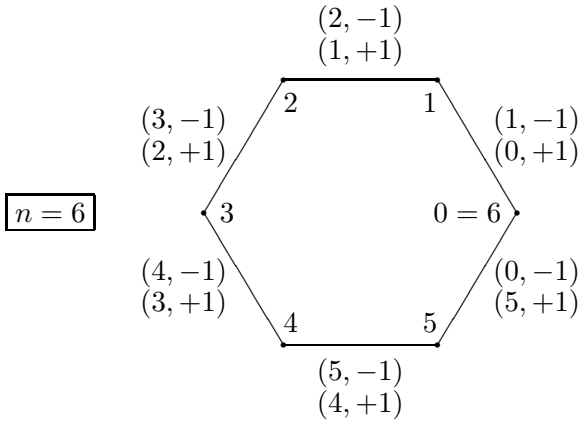
1. $\mathrm{Som}(Dr_n) = \{0, 1, \ldots, n\}$;
   $\mathrm{Ar}(Dr_n) = \big(\{0, \ldots, n-1\} \times \{+1\}\big) \cup \big(\{1, \ldots, n\} \times \{-1\}\big)$
   $\overline{(i,+1)} = (i+1,-1)$; $\overline{(j,-1)} = (j-1,+1)$;
   $(i,+1)^- = i$; $(i,+1)^+ = i+1$; $(j,-1)^- = j$; $(j,-1)^+ = j-1$.



2. $\mathrm{Som}(Dr_\infty) = \mathbb{Z}$;
   $\mathrm{Ar}(Dr_\infty) = \mathbb{Z} \times \{-1, +1\}$;
   $\overline{(i,+1)} = (i+1,-1)$; $\overline{(j,-1)} = (j-1,+1)$;
   $(i,+1)^- = i$; $(i,+1)^+ = i+1$; $(j,-1)^- = j$; $(j,-1)^+ = j-1$.



3. $\mathrm{Som}(Cir_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
   $\mathrm{Ar}(Cir_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \{-1, +1\}$;
   $\overline{(i,+1)} = (i+1,-1)$; $\overline{(j,-1)} = (j-1,+1)$;
   $(i,+1)^- = i$; $(i,+1)^+ = i+1$; $(j,-1)^- = j$; $(j,-1)^+ = j-1$.



Dans chaque cas on munit le graphe de l'orientation donnée par les arêtes de la forme $(*, +1)$.

Dans chacune des représentations graphiques ci-dessus, un couple d'arêtes $(e, \bar{e})$ est représenté par un seul trait. Ce sera dorénavant notre convention.

Définition 1.3.4 *Soit X un graphe et $x \in \mathrm{Som}(X)$. On appelle* valence *(ou* degré*) de x le cardinal $v(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ donné par*

$$v(x) := |\{e \in \mathrm{Ar}(X) : e^- = x\}| = |\{e \in \mathrm{Ar}(X) : e^+ = x\}| \ .$$

Si $v(x)$ est fini pour tout sommet x, le graphe X est dit localement fini.

Dans l'exemple 1.3.3, tous les graphes sont localement finis (tous leurs sommets sont de valence 2) ; le seul graphe infini est Dr_∞.

Définition 1.3.5 *Un* morphisme de graphes $f : X \to Y$ *est un couple d'applications*

$$f_0 : \mathrm{Som}(X) \to \mathrm{Som}(Y) \text{ et } f_1 : \mathrm{Ar}(X) \to \mathrm{Ar}(Y)$$

*telles que $f_1(\bar{e}) = \overline{f_1(e)}$ et $f_0(e^\pm) = f_1(e)^\pm$ pour toute arête e. Lorsque le morphisme est inversible, on parle d'*isomorphisme de graphes.

Si les graphes sont orientés, disons par $A \subseteq \mathrm{Ar}(X)$ et $B \subseteq \mathrm{Ar}(Y)$, on appelle morphisme de graphes orientés *un morphisme de graphes $f : X \to Y$ qui respecte l'orientation, c'est-à-dire tel que $f_1(A) \subseteq B$.*

Cette notion permet de donner des définitions compactes des concepts de chemins et circuits dans les graphes.

Définition 1.3.6 *Soit X un graphe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Un* chemin *de longueur n dans X est un morphisme $Dr_n \to X$;*
- *Un* chemin infini *dans X est un morphisme $Dr_\infty \to X$;*
- *Un* circuit *de longueur n dans X est un isomorphisme $Cir_n \to Y$, où Y est un sous-graphe de X.*

Remarque 1.3.7 *Un chemin (de longueur n) est totalement déterminé par les arêtes images de $(0, +1), \ldots, (n-1, +1)$. Si le graphe est combinatoire, il est également totalement déterminé par les sommets images de $0, \ldots, n$.*

Un chemin $f : Dr_n \to X$ vérifiant de plus $f_1(i,+1) \neq f_1(i,-1)$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ est dit *sans aller-retour* ou *sans rebroussement*. Les sommets $f_0(0)$ et $f_0(n)$ sont l'*origine* et le *sommet terminal* du chemin. Si l'origine et le sommet terminal coïncident, le chemin est dit *fermé*.

Définition 1.3.8 *On appelle* tour de taille *d'un graphe l'infimum des longueurs de ses circuits.*

On calculera le tour de taille de graphes liés aux groupes de Baumslag-Solitar au chapitre 4.

Définition 1.3.9 *Un graphe X est* connexe *si pour tous sommets x, y il existe un chemin d'origine x et de sommet terminal y.*

Sur un graphe connexe X, on obtient une distance sur $\mathrm{Som}(X)$ en définissant $d(x,y)$ comme l'infimum des longueurs des chemins de x à y.

Définition 1.3.10 *Un chemin (éventuellement infini) $f : Dr_* \to X$ est* géodésique *si l'application $f_0 : \mathrm{Som}(Dr_*) \to \mathrm{Som}(X)$ est isométrique (la composante connexe de X contenant l'image est munie de la distance ci-dessus).*

Les géodésiques entre deux sommets x, y sont exactement les chemins joignant x et y de longueur minimale.

Lorsqu'un groupe agit sur un graphe X, on supposera (sauf mention du contraire) qu'il agit par automorphismes de graphes.

Définition 1.3.11 *Soit un groupe Γ agissant sur un graphe X. On appelle* inversion *une paire (γ, e) avec $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathrm{Ar}(X)$ telle que $\gamma e = \bar{e}$.*

1.3.2 Graphes de Cayley

La définition qui suit n'est pas tout à fait classique et peut sembler inutilement compliquée, mais il s'agit de la bonne notion lorsqu'on veut étudier l'espace des groupes marqués (voir chapitre 3).

Définition 1.3.12 *Soit Γ un groupe et $S = (s_i)_{i\in I} \in \Gamma^I$. Le* graphe de Cayley *associé à Γ et S est le graphe X donné par :*

$$\mathrm{Som}(X) = \Gamma \ ; \ \mathrm{Ar}(X) = \Gamma \times (I \sqcup I^{-1}) \ ;$$
$$\overline{(\gamma, i)} = (\gamma s_i, i^{-1}) \ ; \ \overline{(\gamma, i^{-1})} = (\gamma s_i^{-1}, i) \ ;$$
$$(\gamma, i)^- = \gamma \ ; \ (\gamma, i)^+ = \gamma s_i \ ; \ (\gamma, i^{-1})^- = \gamma \ ; \ (\gamma, i^{-1})^+ = \gamma s_i^{-1} \ .$$

où I^{-1} désigne une seconde copie de I. Ce graphe sera noté $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$. *On choisit l'orientation donnée par $\Gamma \times I$.*

Les arêtes du graphe de Cayley sont donc étiquetées par les éléments de $I \sqcup I^{-1}$. Il suit de la construction que chaque sommet de $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est de valence exactement $2|I|$. La remarque suivante est une adaptation de [39, proposition 7].

Remarque 1.3.13 *Étant donnés une famille $S = (s_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un groupe Γ, il est facile de vérifier que le graphe* $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ *est :*

- *sans boucle si et seulement si $1 \notin S$;*
- *sans arête multiple si et seulement si $i \neq j$ implique $s_i \neq s_j^{\pm 1}$;*
- *connexe si et seulement si S engendre Γ.*

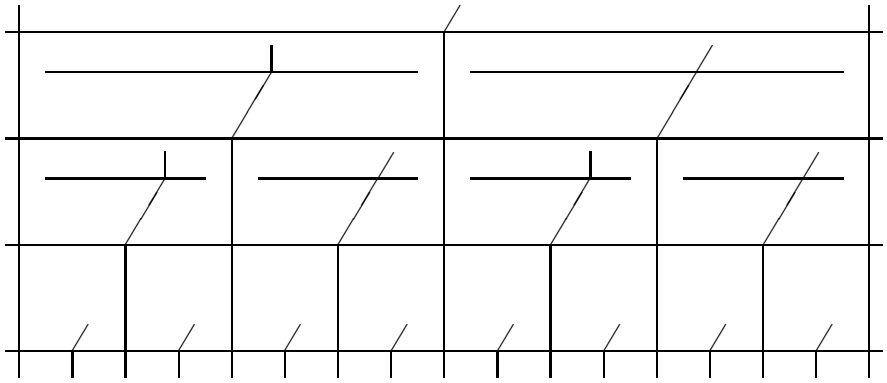
Lorsque S engendre Γ, la distance obtenue sur $\Gamma = \mathrm{Som}\,\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est donnée par $d(\gamma_1, \gamma_2) = |\gamma_1^{-1}\gamma_2|$ où

$$|\gamma| = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists s_1, \ldots, s_n \in S^{\pm 1} \text{ tels que } \gamma = s_1 \cdots s_n\} \ .$$

Définition 1.3.14 *Les fonctions $|.| : \Gamma \to \mathbb{N}$ et $d : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{N}$ sont la* longueur des mots *et la* métrique des mots *associées à Γ et S*

Exemple 1.3.15 *Le graphe de Cayley associé à $(\mathbb{Z}, 1)$ est Dr_∞ ; pour $n \in \mathbb{N}$, le graphe de Cayley associé à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 1)$ est Cir_n.*

Exemple 1.3.16 *Le graphe de Cayley de $BS(1,2) = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^2 \rangle$, par rapport aux générateurs a et b, est le suivant :*



Étant donnée une famille $S = (s_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un groupe Γ, chaque mot sur I (voir section 1.1.3) définit canoniquement un chemin dans le graphe $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$: Si $w = i_1^{\varepsilon_1} \dots i_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{M}(I)$, on définit un chemin $f = f^w : Dr_n \to \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ en posant :

$$f_0(0) = 1 \ ; \ f_0(j) = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_j}^{\varepsilon_j} \text{ si } j = 1, \dots, n \ ;$$
$$f_1(j, +1) = (f_0(j), i_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}) \ ; \ f_1(j, -1) = (f_0(j), i_j^{-\varepsilon_j}) \ .$$

Par construction même, le sommet terminal du chemin f^w est l'image de w dans Γ par l'application définie par $i \mapsto s_i$. Les éléments du noyau correspondent donc aux chemins fermés. En outre, le chemin f^w est sans rebroussement si et seulement si w est réduit.

1.3.3 Arbres et groupes libres

Les graphes qui nous intéresseront le plus dans cette thèse sont les arbres. En plus de leur définition, nous donnerons leurs liens avec les groupes libres.

Définition 1.3.17 *Un* arbre *est un graphe connexe sans circuit.*

Il est évident que dans un arbre, un chemin est géodésique si et seulement s'il est sans rebroussement et que deux sommets sont reliés par une unique géodésique.

Soit ϕ un automorphisme d'un arbre X. Il est dit *elliptique* s'il existe un sommet v tel que $\phi(v) = v$. Il est dit hyperbolique s'il existe un chemin infini $f : Dr_\infty \to X$ tel que $\phi(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{Im}\, f$ et ϕ induise sur $\mathrm{Im}\, f$ une translation d'amplitude non-nulle. L'image de f est appelée *axe* de ϕ. Les automorphismes d'arbres satisfont les propriétés suivantes :

1. l'axe d'un automorphisme hyperbolique est unique ;
2. un automorphisme sans inversion est soit elliptique soit hyperbolique [39, proposition 25].

Concernant les liens entre arbres et groupes libres, nous citons les deux résultats fondamentaux suivants. Le premier est une adaptation de la proposition 14 de [39].

Proposition 1.3.18 *Soit Γ un groupe et $S = (s_i)_{i\in I} \in \Gamma^I$. Le graphe $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ est un arbre si et seulement si l'homomorphisme $\mathbb{F}(I) \to \Gamma$ donné par $i \mapsto s_i$ est un isomorphisme.*

Théorème 1.3.19 *[39, théorème 4] Un groupe Γ est libre si et seulement s'il existe un arbre muni d'une action libre et sans inversion de Γ.*

1.3.4 Arbres de Bass-Serre

Les actions de groupe sur des arbres peuvent permettre de caractériser des structures telles que le produit amalgamé ou l'extension HNN. En toute généralité, lorsqu'un groupe Γ est le groupe fondamental d'un graphe de groupes [39, chapitre I.5], on peut construire un arbre, le revêtement universel du graphe de groupes, sur lequel Γ agit avec des conditions bien précises sur les stabilisateurs des sommets et des arêtes. Nous nous bornerons cependant à traiter ici pour eux-mêmes les cas du produit amalgamé et de l'extension HNN.

Cas du produit amalgamé

À un produit amalgamé $\Gamma = H *_A K$, on associe le graphe X suivant :

$$\mathrm{Som}(X) = \big(\Gamma/H\big) \sqcup \big(\Gamma/K\big) \ ; \ \mathrm{Ar}_+(X) = \Gamma/A \ ;$$
$$(\gamma A)^- = \gamma H \ ; \ (\gamma A)^+ = \gamma K \ .$$

Par la notation $\mathrm{Ar}_+(X)$, on indique qu'on a choisi une orientation sur les arêtes et qu'on ne donne explicitement que les arêtes orientées positivement. Cela signifie que $\mathrm{Ar}(X)$ est constitué de deux copies de Γ/A qui se correspondent via l'involution $e \mapsto \bar{e}$.

Théorème 1.3.20 *[39, théorème 7 et sa preuve] Le graphe X est un arbre.*

Cet arbre est appelé *arbre de Bass-Serre* du produit amalgamé. On remarque que l'action évidente de Γ sur X est transitive sur les arêtes orientées et possède deux orbites sur les sommets : les origines et les sommets terminaux (des arêtes de l'orientation). Les stabilisateurs des arêtes (respectivement des origines et des sommets terminaux) sont les conjugués de Γ/A (respectivement Γ/H et Γ/K).

Réciproquement, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.21 *[39, théorème 6] Soit Γ un groupe qui agit sans inversion sur un arbre T, transitivement sur les arêtes orientées et avec deux orbites de sommets. Si $e \in \mathrm{Ar}(T)$, alors Γ est isomorphe au produit amalgamé $\mathrm{Stab}(e^-) *_{\mathrm{Stab}(e)} \mathrm{Stab}(e^+)$.*

Cas de l'extension HNN

Comme ce cas n'est pas traité explicitement et pour son propre compte dans [39], nous donnerons des preuves des énoncés qui suivent.

À une extension $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, on associe le graphe Y suivant :

$$\mathrm{Som}(Y) = \Gamma/\Lambda \ ; \ \mathrm{Ar}(Y) = \left(\Gamma/H \sqcup \Gamma/K\right) \ ;$$
$$\overline{\gamma H} = \gamma t K \ ; \ \overline{\gamma K} = \gamma t^{-1} H \ ;$$
$$(\gamma H)^- = \gamma\Lambda \ ; \ (\gamma H)^+ = \gamma t\Lambda \ ; \ (\gamma K)^+ = \gamma\Lambda \ ; \ (\gamma K)^+ = \gamma t^{-1}\Lambda \ .$$

On munit Y de l'orientation $\mathrm{Ar}_+(Y) = \Gamma/H$.

Théorème 1.3.22 *Le graphe Y est un arbre.*

Cet arbre est appelé *arbre de Bass-Serre* de l'extension HNN. On remarque que l'action évidente de Γ sur Y est transitive sur les arêtes orientées et sur les sommets. Les stabilisateurs des arêtes orientées (respectivement des sommets) sont les conjugués de Γ/H (respectivement Γ/Λ). Avant de prouver le théorème 1.3.22, on a besoin d'étudier le lien entre les éléments de Γ et les chemins dans le graphe Y.

Étant donné une écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n}\lambda_n$ avec $\lambda_i \in \Lambda$ et $\varepsilon_i = \pm 1$, on peut définir un chemin $f^\gamma = f : Dr_n \to Y$ par $f_0(i) = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_i}\lambda_i\Lambda$ et

$$f_1(i,+1) = \begin{cases} \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_i}\lambda_i H \text{ si } \varepsilon_{i+1} = 1 \ ; \\ \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_i}\lambda_i K \text{ si } \varepsilon_{i+1} = -1 \ . \end{cases}$$

Lemme 1.3.23 *Pour tout chemin f dans Y d'origine Λ et de longueur n, il existe une écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n}\lambda_n$ tel que $f = f^\gamma$.*

PREUVE. On procède par induction sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Posons $v_i = f_0(i)$ et $e_i = f_1(i, +1)$. Par hypothèse d'induction, le chemin f' constitué des $n-1$ premiers segments de f peut s'écrire sous la forme $f' = f^{\gamma'}$ avec $\gamma' = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}}\lambda_{n-1}$. Comme $v_{n-1} = \gamma'\Lambda$, l'arête e_n est de la forme $\gamma'\lambda H$ ou $\gamma'\lambda K$, avec $\lambda \in \Lambda$. Dans le premier (respectivement second) cas, on pose $\varepsilon_n = 1$ (respectivement -1). Il suffit alors de prendre $\gamma = \gamma'\lambda t^{\varepsilon_n}$. □

Lemme 1.3.24 *Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n}\lambda_n$. Le chemin f^γ est sans rebroussement si et seulement si l'écriture est réduite.*

PREUVE. Posons $\gamma_i = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_i}\lambda_i$, $v_i = f_0^\gamma(i)$ et $e_i = f_1^\gamma(i, +1)$. Si $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, on a $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$. Si $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_{i+1} = -1$, on a $e_{i+1} = \bar{e}_i$ si et seulement si $\gamma_{i+1}K = \overline{\gamma_i H} = \gamma_i tK$, c'est à dire si $\lambda_i \in K$. Si $\varepsilon_i = -1, \varepsilon_{i+1} = 1$, on a $e_{i+1} = \bar{e}_i$ si et seulement si $\gamma_{i+1}H = \overline{\gamma_i K} = \gamma_i tH$, c'est à dire si $\lambda_i \in H$.

Au total, on a $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ pour tout i si et seulement si l'écriture est réduite. □

PREUVE DU THÉORÈME 1.3.22. Commençons par montrer que le graphe Y est connexe, en montrant que tout sommet $\gamma\Lambda$ peut être relié à Λ. On procède par induction sur la longueur $\ell(\gamma)$. Si $\ell(\gamma) = 0$, on a $\gamma\Lambda = \Lambda$. Si $\ell(\gamma) = n \geqslant 1$, on écrit $\gamma = \lambda_0 t_1^\varepsilon \lambda_1 \ldots t_n^\varepsilon \lambda_n$ (forme réduite). Sans changer le sommet $\gamma\Lambda$, on peut supposer que $\lambda_n = 1$. Si on pose $\gamma' = \lambda_0 t_1^\varepsilon \lambda_1 \ldots t_{n-1}^\varepsilon \lambda_{n-1}$, une des arêtes $\gamma' H, \gamma' K$ (selon le signe de ε_n) connecte $\gamma'\Lambda$ et $\gamma\Lambda$. Par hypothèse d'induction $\gamma'\Lambda$ est connecté à Λ.

On montre ensuite que Y est sans circuit, en montrant que tout chemin fermé $f : Dr_n \to T$ (avec $n \geqslant 2$) possède un rebroussement. On écrit $f = f^\gamma$ avec $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n}\lambda_n$. Comme le chemin est fermé, on a $\gamma \in \Lambda$, ce qui montre que l'écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n}\lambda_n$ n'est pas réduite. Par le lemme 1.3.24, le chemin f possède un rebroussement. □

Réciproquement, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.25 *Soit Γ un groupe qui agit sur un arbre orienté T, transitivement sur les arêtes orientées et sur les sommets. Si $e_1, e_2 \in \mathrm{Ar}_+(T)$ et $t \in \Gamma$ vérifient $v := e_1^+ = e_2^-$ et $t \cdot e_1 = e_2$, alors Γ est isomorphe à*

$$\Gamma' = HNN\big(\mathrm{Stab}(v), \mathrm{Stab}(e_2), \mathrm{Stab}(e_1), \phi\big)$$

où $\phi : \mathrm{Stab}(e_2) \to \mathrm{Stab}(e_1)$ est donné par $\phi(g) = t^{-1}gt$.

PREUVE. Si on note encore t la lettre stable de Γ', on peut définir un homomorphisme $\Phi : \Gamma' \to \Gamma$ par $t \mapsto t$ et $g \mapsto g$ pour tout $g \in \mathrm{Stab}(v)$. On montre d'abord qu'il est surjectif. Pour ce faire, on montre par induction sur $d(\gamma v, v)$ que tout $\gamma \in \Gamma$ est dans le sous-groupe engendré par t et $\mathrm{Stab}(v)$. Si $d(\gamma v, v) = 0$, on a $\gamma \in \mathrm{Stab}(v)$. Si $d(\gamma v, v) = n \geqslant 1$, on considère un chemin géodésique f d'origine v et de sommet terminal γv. Notons ses arêtes (orientées) $a_0, \dots a_{n-1}$. Si a_0 est orientée positivement dans T, il existe $g \in \mathrm{Stab}(v)$ tel que $ga_0 = e_2$. On a par construction $d(g\gamma v, v) = n$ et les arêtes $e_2 = ga_0, ga_1, \dots, ga_n$ définissent une géodésique entre v et $g\gamma v$. Dès lors, $t^{-1}g\gamma v$ est à distance $n-1$ de v. Par hypothèse d'induction $t^{-1}g\gamma$ est dans le sous-groupe de Γ engendré par t et $\mathrm{Stab}(v)$, et donc γ aussi. Si a_0 est orientée négativement dans T, il existe $g \in \mathrm{Stab}(v)$ tel que $ga_0 = e_1$. On montre alors de manière analogue que $tg\gamma$ est dans le sous-groupe de Γ engendré par t et $\mathrm{Stab}(v)$, et donc γ aussi.

Montrons maintenant que Φ est injectif. Soit $\gamma' = s_n t^{\varepsilon_n} s_{n-1} \cdots t^{\varepsilon_1} s_0 \in \Gamma'$ avec $s_i \in \mathrm{Stab}(v)$ et $\varepsilon_i = \pm 1$ (écriture réduite). Si $n = 0$ et $s_0 \neq 1$, il est clair que $\Phi(s_0) = s_0 \neq 1$. Il faut donc montrer que si $n \geqslant 1$, alors $\Phi(\gamma') \neq 1$. On pose donc $\gamma_0 = s_0$, $\gamma_i = s_i t^{\varepsilon_i} \gamma_{i-1}$ pour $i = 1, \dots, n$ et il suffit de montrer que $d(\gamma_i v, v) = i$ pour tout i.

Supposons que des sommets $v_0 = v, v_1, \dots, v_k$ déterminent un chemin géodésique (de longueur k) dans T. Si $v_1 \neq e_1^-$, alors la suite de sommets $(v, e_2^+ = tv_0, tv_1, \dots, tv_k)$ détermine une géodésique de longueur $k+1$. De même, si $v_1 \neq e_2^+$, alors la suite $(v, e_1^- = t^{-1}v_0, t^{-1}v_1, \dots, t^{-1}v_k)$ détermine un chemin géodésique de longueur $k+1$.

La géodésique de v_0 à $\gamma_0 v_0$ est formée du seul sommet v_0. Ensuite, on construit récursivement des chemins (de longueur i) joignant v_0 à $\gamma_i v_0$: si le chemin de v_0 à $\gamma_{i-1}v_0$ a pour sommets $v_0, v_1, \dots, v_{i-1}$, alors le chemin de v_0 à $\gamma_i v_0$ est déterminé par la suite $(s_i v_0 = v_0, s_i t^{\varepsilon_i} v_0, \dots, s_i t^{\varepsilon_i} v_{i-1})$.

On montre (récursivement) que ces chemins sont géodésiques. Grâce aux considérations qui précèdent, il suffit de vérifier que pour tout $i = 1, \dots, n$, le chemin $v_0, \dots, v_{i-1}$ joignant v_0 à $\gamma_{i-1}v_0$:

- satisfait $v_1 \neq e_1^-$ si $\varepsilon_i = 1$;
- satisfait $v_1 \neq e_2^+$ si $\varepsilon_i = -1$.

Supposons d'abord que $\varepsilon_i = -1$. Si $\varepsilon_{i-1} = -1$, l'arête joignant v_0 et $v_1 = s_{i-1}t^{\varepsilon_{i-1}}v$ est orientée négativement dans T. On a donc $v_1 \neq e_2^+$. Si $\varepsilon_{i-1} = 1$, on a $s_{i-1} \notin \mathrm{Stab}(e_2)$ car l'écriture de γ' est réduite. On obtient donc également $v_1 = s_{i-1}t^{\varepsilon_{i-1}}v \neq e_2^+$. Si on suppose que $\varepsilon_i = -1$, on montre de

manière analogue que $v_1 \neq e_1^-$.

Ainsi, on obtient $d(\gamma_i v, v) = i$ pour tout i comme souhaité. □

1.4 Actions moyennables et propriété de Haagerup

1.4.1 Actions moyennables

Étant donné un ensemble X, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est dite *positive* si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in X$. On note $f \geqslant 0$. On désignera par 1 la fonction constante $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto 1$.

Définition 1.4.1 *Une* moyenne *sur un ensemble X est une forme linéaire $m : \ell^\infty(X) \to \mathbb{C}$ positive (c'est-à-dire telle que $m(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$) et normalisée par $m(1) = 1$.*

Il résulte de la définition que m est automatiquement continue : on obtient en effet $|m(f)| \leqslant \|f\|_\infty$ pour toute $f \in \ell^\infty(X)$.

Exemple 1.4.2 *Si $x_1, \ldots, x_n \in X$. La forme linéaire m sur $\ell^\infty(X)$ donnée par $m(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$ est une moyenne sur X.*

Si un groupe Γ agit sur X, on obtient une action, dite induite, sur $\ell^\infty(X)$ en posant $(\gamma \cdot f)(x) = f(\gamma^{-1} \cdot x)$.

Définition 1.4.3 *Considérons un groupe Γ qui agit sur un ensemble X. Une moyenne m sur X est* Γ-invariante *si*

$$m(\gamma \cdot f) = m(f) \text{ pour tous } \gamma \in \Gamma \text{ et } f \in \ell^\infty(X) \ .$$

S'il existe une moyenne Γ-invariante sur X, l'action est dite moyennable.

La définition ci-dessus correspond à la moyennabilité au sens d'Eymard [22], ou de Bekka [10]. En fait, du moins lorsque Γ et X sont discrets et dénombrables, l'action de Γ sur X est moyennable si et seulement si la représentation

$$\alpha_X : \Gamma \to \mathcal{U}(\ell^2 X) \ ; \ \alpha_X(\gamma)(f)(x) = f(\gamma^{-1} \cdot x)$$

est moyennable au sens de la définition 1.1 de [10]. Notre terminologie correspond à celle de Glasner et Monod dans [25].

Toutefois, beaucoup d'auteurs écrivent que *la paire (X, Γ) est moyennable*, et non que l'action de Γ sur X est moyennable (voir par exemple [28],

en particulier le corollaire 3.3, ou [46]). De plus, Zimmer a donné une définition d'action moyennable qui n'est pas cohérente avec la définition 1.4.3 (voir par exemple [47]).

Les actions moyennables au sens de Zimmer n'apparaîtront pas dans le cadre de la présente thèse, de sorte que le terme *action moyennable* renverra toujours à la définition 1.4.3.

Remarque 1.4.4 *On obtiendrait la même notion d'action moyennable en remplaçant $\ell^\infty(X)$ par $\ell^\infty(X,\mathbb{R})$. Les moyennes ne prendraient alors plus des valeurs complexes, mais réelles.*

Exemple 1.4.5 *Si l'action possède une orbite finie (constituée des points $x_1,\dots,x_n$), elle est moyennable. En effet, la moyenne $m(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$ est Γ-invariante.*

La moyennabilité des actions est fonctorielle, dans le sens suivant :

Lemme 1.4.6 *Soit Γ un groupe opérant sur deux ensembles X et Y et $f:X\to Y$ une application Γ-équivariante. Si l'action sur X est moyennable, alors l'action sur Y aussi.*

PREUVE. On obtient une application Γ-équivariante $f^*:\ell^\infty(Y)\to\ell^\infty(X)$ en posant $f^*(\varphi)(x)=\varphi(f(x))$. En effet,

$$\begin{aligned} f^*(\gamma\cdot\varphi)(x) &= (\gamma\cdot\varphi)\big(f(x)\big)=\varphi\big(\gamma^{-1}\cdot f(x)\big)\ ,\\ \big(\gamma\cdot f^*(\varphi)\big)(x) &= f^*(\varphi)(\gamma^{-1}\cdot x)=\varphi\big(f(\gamma^{-1}\cdot x)\big)\ , \end{aligned}$$

et donc la Γ-équivariance de f donne $f^*(\gamma\cdot\varphi)=\gamma\cdot f^*(\varphi)$.

Soit maintenant m une moyenne Γ-invariante sur X. La moyenne μ sur Y définie par $\mu:\ell^\infty(Y)\to\mathbb{C}\ ;\ \varphi\mapsto m\big(f^*(\varphi)\big)$ est Γ-invariante car

$$\mu(\gamma\cdot\varphi)=m\big(f^*(\gamma\cdot\varphi)\big)=m\big(\gamma\cdot f^*(\varphi)\big)=m\big(f^*(\varphi)\big)=\mu(\varphi)$$

pour tous $\gamma\in\Gamma$ et $\varphi\in\ell^\infty(Y)$. □

Les notions de groupe moyennable et de groupe intérieurement moyennable se définissent en termes d'actions moyennables.

Définition 1.4.7 *Un groupe Γ est* moyennable *si l'action sur lui-même par translations (à gauche) est moyennable. Il est dit* intérieurement moyennable *s'il est trivial ou si l'action par conjugaison est moyennable.*

Remarque 1.4.8 *Soit Γ un groupe.*

1. *L'action de Γ par translations à droite est moyennable si et seulement si Γ est moyennable.*
2. *Si Γ est moyennable, il est intérieurement moyennable.*

PREUVE. Pour (1), on voit que l'application $\Gamma \to \Gamma\ ;\ \gamma \mapsto \gamma^{-1}$, où la première copie de Γ est munie de l'action par translations à gauche et la seconde de l'action par translations à droite, est Γ-équivariante et inversible.

Pour (2), si Γ est non trivial, on fixe $g \in \Gamma^*$. L'application $\Gamma \to \Gamma^*\ ;\ \gamma \mapsto \gamma g \gamma^{-1}$, où Γ est muni de l'action par translations à gauche et Γ^* de l'action par conjugaison, est alors Γ-équivariante.

Dans les deux cas, on utilise le lemme 1.4.6 pour conclure. □

Pour terminer cette section sur les actions moyennables, citons le résultat suivant, qui résulte des théorèmes 4.4 et 4.9 de [38].

Théorème 1.4.9 *Une action de Γ sur X est moyennable si et seulement si elle possède une* suite généralisée de Følner, *c'est-à-dire une suite généralisée $(F_i)_{i\in I}$ de parties finies non vides de X telle que $\lim_{i\to\infty} |F_i \triangle \gamma F_i| \cdot |F_i|^{-1} = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Le lecteur souhaitant consulter la référence notera que la moyennabilité d'une action de Γ sur X s'exprime dans la terminologie de [38] par l'existence d'un invariant pour (Γ, X, X).

Remarque 1.4.10 *Si le groupe Γ est dénombrable, on peut toujours remplacer la suite généralisée de Følner $(F_i)_{i\in I}$ par une suite $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les mêmes conditions. On parle de* suite de Følner.

PREUVE. On se donne une fonction surjective $\mathbb{N} \to \Gamma\ ;\ n \mapsto \gamma_n$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $i_n \in I$ tel que $|F_{i_n} \triangle \gamma_j F_{i_n}| \cdot |F_{i_n}|^{-1} < 1/n$ pour $j = 0, 1, \ldots, n$. La suite donnée par $F'_n = F_{i_n}$ a les propriétés voulues. □

1.4.2 Propriété de Haagerup

La propriété de Haagerup est une forme faible de moyennabilité qui se définit usuellement pour les groupes topologiques localement compacts. Nous nous contenterons ici du cas des groupes discrets (dénombrables).

Une action de Γ par isométries sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est *métriquement propre* si, pour toute partie bornée $B \subseteq \mathcal{H}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma B \cap B \neq \varnothing\}$ est fini.

Définition 1.4.11 *Un groupe* Γ *a la* propriété de Haagerup *s'il existe une action métriquement propre de* Γ *sur un espace de Hilbert. On dit aussi que* Γ *est* a-T-moyennable.

Dans [9], Bekka, Cherix et Valette ont prouvé que les groupes moyennables ont la propriété de Haagerup. Ceci est néanmoins facile à voir si on dispose de la caractérisation suivante :

Théorème 1.4.12 *[14, théorème 2.1.1] Un groupe* Γ *a la propriété de Haagerup si et seulement s'il existe une représentation unitaire* C_0 *de* Γ *qui possède presque des vecteurs invariants.*

On dit qu'une représentation unitaire $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ est C_0 si, pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, la fonction

$$\varphi_{\xi,\eta} : \Gamma \to \mathbb{C} \ ; \ \gamma \mapsto \langle \pi(\gamma)\xi \mid \eta \rangle$$

est nulle à l'infini, c'est à dire que l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \varphi_{\xi,\eta}(\gamma) > \varepsilon\}$ est fini pour tout $\varepsilon > 0$. Une représentation unitaire possède *presque des vecteurs invariants* s'il existe une suite $(\xi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{H}$, tous de norme 1, telle que $\lim_{n\to\infty} \|\pi(\gamma)\xi_n - \xi_n\| = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Remarque 1.4.13 *[30] Étant donné un groupe* Γ*, il est facile de vérifier que sa représentation régulière* λ*, donnée par*

$$\lambda : \Gamma \to \mathcal{U}(\ell^2\Gamma) \ ; \ \lambda(\gamma)\xi(x) = \xi(\gamma^{-1}x) \ ,$$

est C_0*. Si* Γ *est moyennable, elle possède de plus presque des vecteurs invariants (qu'on peut facilement construire à partir d'une suite de Følner). Il suit qu'un groupe moyennable est a-T-moyennable.*

On rappelle pour terminer le résultat suivant concernant les extensions de groupes a-T-moyennables [14, proposition 6.1.5].

Proposition 1.4.14 *Soit* Γ *un groupe et* H *un sous-groupe. Si* H *a la propriété de Haagerup et si l'action de* Γ *sur l'espace homogène* Γ/H *est moyennable, alors* Γ *a la propriété de Haagerup.*

On en déduit immédiatement [14, exemple 6.1.6] :

Corollaire 1.4.15 *Considérons une suite exacte courte de groupes*

$$1 \to N \to \Gamma \to \Gamma/N \to 1 \ .$$

Si N a la propriété de Haagerup et si Γ/N est moyennable, alors Γ a la propriété de Haagerup.

Chapitre 2

Moyennabilité intérieure et propriété CCI

Ce chapitre est dédié principalement à la présentation des résultats de l'auteur concernant la moyennabilité intérieure et la propriété CCI pour les extensions HNN, qui proviennent de [43], dont le texte a été reproduit à l'annexe A. La structure du chapitre sera très similaire à celle de la prépublication.

2.1 Rappels et définitions supplémentaires

La plupart des rappels ont été faits au chapitre 1. On se cantonnera donc ici aux notions les plus proches du sujet. On rappelle qu'un groupe Γ est dit *intérieurement moyennable* si l'action par conjugaison sur Γ^* est moyennable ou si $\Gamma = \{1\}$.

Définition 2.1.1 *Un groupe Γ est* à classes de conjugaison infinies (CCI) *s'il est infini et si l'action par conjugaison sur Γ^* ne possède aucune orbite finie, c'est-à-dire si, pour tout $g \in \Gamma^*$, l'ensemble $\{\gamma g \gamma^{-1} : \gamma \in \Gamma\}$ est infini.*

On rappelle qu'un groupe non intérieurement moyennable est nécessairement CCI (exemple 1.4.5) et non moyennable (remarque 1.4.8). Le résultat suivant suit directement du théorème 1.4.9 et de la remarque 1.4.10.

Théorème 2.1.2 *[6, théorème 1] Un groupe non trivial Γ est intérieurement moyennable si et seulement s'il existe une suite $(F_n)_n$ de parties finies non vides de Γ^* telle que $\lim_{n\to\infty} |F_n \triangle \gamma F_n \gamma^{-1}| \cdot |F_n|^{-1} = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

L'article [6] donne une très bonne introduction au sujet de la moyennabilité intérieure. On y trouve plusieurs autres caractérisations de cette propriété, ainsi que de nombreux exemples de groupes intérieurement moyennables et non intérieurement moyennables.

Historiquement, Murray et von Neumann avaient remarqué que l'algèbre de von Neumann d'un groupe Γ est un facteur de type II_1 si et seulement si Γ est à classes de conjugaison infinies ; ils avaient aussi défini la « propriété Gamma » pour un tel facteur. (Voir le lemme 5.3.4 et la définition 6.1.1 de [36].) Plus tard, Effros [21] a défini la notion de moyennabilité intérieure et montré que la propriété Gamma pour un facteur de type II_1 de la forme $W^*(\Gamma)$ implique que le groupe Γ est intérieurement moyennable.

2.2 Propriété CCI

Comme nous l'avons vu à la section 1.3.4, une extension HNN agit sur son arbre de Bass-Serre. Il est donc possible dans certains cas d'utiliser le résultat suivant, dû à Guyan Robertson, pour montrer qu'une extension HNN est CCI.

Proposition 2.2.1 *[Proposition A.2.8] Soit X un arbre dont les sommets sont de valence au moins trois. Si un groupe Γ agit fidèlement sur X de telle manière que le quotient $\Gamma\backslash X$ soit fini, alors il est CCI.*

Les principaux résultats que nous ayons obtenu dans ce domaine font bien plus explicitement appel à la structure d'extension HNN :

Théorème 2.2.2 *[Théorème A.0.1] Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$. Pour que Γ soit à classes de conjugaison infinies, il suffit que toute classe de conjugaison finie de Λ incluse dans $(H \cap K)^*$ contienne un élément qui n'est point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$).*

En particulier, si le groupe Λ est CCI ou si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial, le groupe Γ est à classes de conjugaison infinies.

Les homomorphismes ϕ^j sont définis dans la section 1.2.1. Lorsque les homomorphismes ϕ^j sont sans point fixe non trivial, on peut se passer de l'hypothèse « $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$ ». Précisément, on a :

Proposition 2.2.3 *[Proposition A.2.3] Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si Λ est non trivial et si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial, alors Γ est CCI.*

Ces conditions suffisantes permettent de traiter les exemples suivants (voir les exemples A.2.4 et A.2.5) :

1. Soit $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Le groupe de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ est CCI si et seulement si $|m| = |n|$.
2. Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}^d = H$. Le groupe Γ est CCI si et seulement si aucune valeur propre complexe de ϕ (vu comme endomorphisme injectif $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$) n'est une racine de l'unité.

Dans les deux cas, la suffisance est obtenue par le biais de nos résultats, tandis que la nécessité se traite à la main.

On vérifie également que le théorème 2.2.2 et la proposition 2.2.3 ne sont pas des conséquences de la proposition 2.2.1 grâce à l'exemple qui suit :

Exemple 2.2.4 *[Exemple A.2.9] Considérons le groupe $\Lambda = \mathbb{F}_2 \times (\oplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$, de présentation*

$$\Lambda = \left\langle a, b, e_i \ (i \in \mathbb{Z}) \ \middle| \ [a, e_i], [b, e_i], [e_i, e_j] \ (i, j \in \mathbb{Z}) \right\rangle \ .$$

Soit H le sous-groupe engendré par les e_i et $\phi : H \to H$ l'homomorphisme donné par la formule $\phi(e_i) = e_{i+1}$. Soit encore $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$.

Alors les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial (en particulier Γ est CCI par le théorème 2.2.2), mais l'action de Γ sur son arbre de Bass-Serre n'est pas fidèle.

Enfin, notre dernier exemple montre que la condition suffisante du théorème 2.2.2 n'est pas nécessaire :

Exemple 2.2.5 *[Exemple A.2.6] Posons $\Lambda = BS(m, m)$, avec $|m| \geqslant 2$. Les éléments a et b^m engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, qu'on note H. On considère $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$, où $\phi : H \to H$ est défini par $\phi(a) = b^m$ et $\phi(b^m) = a$.*

(1) Le groupe Γ est CCI.

(2) Il existe une classe de conjugaison finie de Λ contenue dans H^* et dont tous les éléments sont des points fixes d'homomorphismes de la forme ϕ^j, avec $j \in \mathbb{N}$.

2.3 Moyennabilité intérieure

Nous obtenons une condition suffisante pour qu'une extension HNN soit intérieurement moyennable.

Proposition 2.3.1 *[Proposition A.0.2] Soit* $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. *Si pour tout* $n \geqslant 1$ *il existe* $h_0^{(n)},\ h_1^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)} \in (Z(\Lambda) \cap H \cap K)^*$ *tels que* $h_i^{(n)} = \phi(h_{i-1}^{(n)})$ *pour* $i = 1, \ldots, n$, *alors* Γ *est intérieurement moyennable.*

On donne une preuve directe de la moyennabilité intérieure dans l'annexe A. Il est cependant plus court de constater que la suite formée des parties $F_n = \{h_1^{(n)},\ h_1^{(n)}, \ldots, h_{n-1}^{(n)}\}$ est une suite de Følner pour l'action par conjugaison (voir remarque A.3.1).

On obtient ainsi les exemples suivants d'extensions HNN intérieurement moyennables (voir les exemples A.3.2 et A.3.3) :

1. les groupes de Baumslag-Solitar ;
2. les extensions de la forme $HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ avec Λ abélien et $H = \Lambda$.

Notons que la première classe d'exemples infirme la proposition 4.3 de [8]. Nous y reviendrons dans la section 2.4.

Grâce au même type de techniques, on peut montrer que certains produits amalgamés sont intérieurement moyennables.

Exemple 2.3.2 *[Exemple A.3.6] Le groupe*

$$\Gamma = \left\langle a_1, a_2, b \;\middle|\; a_1 b^2 a_1^{-1} = b^3, a_2 b^2 a_2^{-1} = b^3 \right\rangle = BS(2,3) *_{\mathbb{Z}} BS(2,3)$$

est intérieurement moyennable.

En l'occurrence, la suite de parties $F_n = \{b^{2^n}, b^{2^{n-1}\cdot 3}, \ldots, b^{2\cdot 3^{n-1}}, b^{3^n}\}$ est une suite de Følner pour l'action par conjugaison.

2.4 Action sur l'arbre de Bass-Serre et moyennabilité intérieure

Définition 2.4.1 *Soit* T *un arbre. Deux automorphismes hyperboliques de* T *sont* transverses *si leurs axes n'ont qu'un nombre fini de sommets en commun.*

La proposition suivante fait le lien entre l'action d'un groupe sur un arbre et la moyennabilité intérieure.

Proposition 2.4.2 *[Proposition A.0.3] Soit T un arbre et Γ un sous-groupe de $Aut(T)$ contenant des automorphismes hyperboliques transverses. Si Γ est intérieurement moyennable, il existe un élément elliptique de Γ qui fixe un sous-arbre non borné de T.*

Cette proposition s'applique aux groupes de Baumslag-Solitar $BS(m,n)$ pour $|m|, |n| \geqslant 2$. Néanmoins, on peut exhiber explicitement des éléments des $BS(m,n)$ qui définissent des automorphismes elliptiques des arbres de Bass-Serre associés qui fixent des sous-arbres non bornés (voir l'exemple A.4.2).

La preuve de la proposition 2.4.2 se fait par contraposée (voir l'annexe A pour les détails). On suppose que les éléments elliptiques de Γ fixent des sous-arbres bornés. Cette hypothèse permet, pour chaque élément elliptique de définir le *centre* du sous-arbre formé de ses points fixes. L'existence de ces centres est ensuite essentielle pour prouver que Γ n'est pas intérieurement moyennable.

Il est donc essentiel de vérifier que les éléments elliptiques fixent des sous-arbres bornés de l'arbre de Bass-Serre si on veut montrer qu'une extension HNN (ou un produit amalgamé) n'est pas intérieurement moyennable au moyen de la proposition 2.4.2. Ce point a d'ailleurs été source d'erreurs dans la littérature.

Dans [6], les auteurs affirmaient (à de petites hypothèses techniques près) qu'une extension HNN (ou un produit amalgamé) agissant fortement fidèlement sur son arbre de Bass-Serre n'est pas intérieurement moyennable (théorème 5, (d) et (e)). Ces résultats sont infirmés par les contre-exemples suivants : les groupes de Baumslag-Solitar pour les extensions HNN et le groupe de l'exemple 2.3.2 pour les produits amalgamés. (Voir le lemme A.3.5 et l'exemple A.3.6). Les auteurs de [6] avaient supposé à tort que les éléments elliptiques de leurs groupes fixaient un unique sommet de l'arbre de Bass-Serre.

À propos de [8], nous avons vu que la proposition 4.3 de cet article, qui affirme que certains groupes de Baumslag-Solitar ne sont pas intérieurement moyennables, est fausse. Dans ce cas également, il avait été supposé à tort que les éléments elliptiques fixaient un unique sommet de l'arbre de Bass-Serre.

Chapitre 3

Espace des groupes marqués

L'objectif de ce chapitre est d'introduire brièvement l'espace des groupes marqués de type fini. On peut trouver d'autres introductions dans les articles [12, 42, 27] ; la plus complète à notre connaissance se trouve dans [13]. On terminera par une introduction aux entiers m-adiques en raison de leur importance dans l'étude de l'adhérence des groupes de Baumslag-Solitar.

3.1 Groupes marqués, quotients du groupe libre et graphes de Cayley

Soit k un nombre naturel non nul, qu'on fixe pour tout ce chapitre.

Définition 3.1.1 *Un* groupe marqué *sur k générateurs est un couple (Γ, S) où Γ est un groupe et $S = (s_1, \dots s_k) \in \Gamma^k$ est une famille génératrice (ordonnée) de Γ. Cette dernière est appelée* marquage *du groupe Γ.*

Soit (Γ_1, S) et (Γ_2, T) des groupes marqués sur k générateurs. Un *morphisme de groupes marqués (ou homomorphisme marqué)* entre (Γ_1, S) et (Γ_2, T) est un homomorphisme de groupes $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ tel que $f(S) = T$ (ou $(f, \dots, f)(S) = T$ pour être précis). On constate immédiatement qu'il existe au plus un homomorphisme marqué entre deux groupes marqués et que dans ce cas il est surjectif. Un *isomorphisme marqué* est un homomorphisme marqué inversible.

Notons $a_1, \dots, a_k$ les générateurs du groupe $\mathbb{F}_k$. La formule $\phi(a_i) = s_i$ fournit une correspondance bi-univoque entre les groupes marqués sur k générateurs et les homomorphismes surjectifs $\phi : \mathbb{F}_k \to \Gamma$. Étant donné un

groupe marqué sur k générateurs (Γ, S) et $w \in \mathbb{F}_k$ tel que $\phi(w) = 1$, on écrira « $w = 1$ dans (Γ, S) » ou « $w \underset{(\Gamma,S)}{=} 1$ ».

Remarque 3.1.2 *Soit $(\Gamma_1, S), (\Gamma_2, T)$ des groupes marqués et $\phi_i : \mathbb{F}_k \to \Gamma_i$ $(i = 1, 2)$ les homomorphismes associés. Les groupes marqués (Γ_1, S) et (Γ_2, T) sont isomorphes si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{Ker}(\phi_2)$.*

PREUVE. Pour qu'il existe un homomorphisme marqué $(\Gamma_1, S) \to (\Gamma_2, T)$, il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{Ker}(\phi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_2)$. Pour qu'il soit inversible (s'il existe), il est nécessaire et suffisant que $\mathrm{Ker}(\phi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_1)$. □

Un morphisme de groupes marqués $f : (\Gamma_1, S) \to (\Gamma_2, T)$ induit un morphisme de graphes $\bar{f} : \mathrm{Cay}(\Gamma_1, S) \to \mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ donné par $\bar{f}_0 = f$ et $\bar{f}_1(\gamma, i^{\pm 1}) = (f(\gamma), i^{\pm 1})$. En particulier, pour tout groupe marqué (Γ, S), l'homomorphisme $\phi : \mathbb{F}_k \to \Gamma$ associé induit un morphisme de graphes $\bar{\phi} : \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_k, (a_1, \ldots, a_k)) \to \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$.

Notons que cette construction est *fonctorielle* : au morphisme identité $(\Gamma, S) \to (\Gamma, S)$ correspond le morphisme identité $\mathrm{Cay}(\Gamma, S) \to \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ et si f_1, f_2 sont deux homomorphismes marqués, on a $\overline{f_2 \circ f_1} = \bar{f}_2 \circ \bar{f}_1$. En particulier, si f est un homomorphisme marqué comme ci-dessus et si ϕ_i est l'homomorphisme associé à (Γ_i, S_i), on a $\bar{\phi}_2 = \bar{f} \circ \bar{\phi}_1$.

Rappelons que les graphes de Cayley sont des graphes pointés (par le sommet 1) et que leurs arêtes sont étiquetées par les éléments $1, 1^{-1}, \ldots, k, k^{-1}$. Par construction, le morphisme $\bar{f}$ défini ci-dessus respecte toujours les étiquettes des arêtes et les points bases.

Lemme 3.1.3 *Soit $(\Gamma_1, S), (\Gamma_2, T)$ des groupes marqués sur k générateurs et ϕ_1, ϕ_2 les homomorphismes associés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un (iso)morphisme marqué entre (Γ_1, S) et (Γ_2, T) ;

(ii) il existe un (iso)morphisme de graphes $F : \mathrm{Cay}(\Gamma_1, S) \to \mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ tel que $\bar{\phi}_2 = F \circ \bar{\phi}_1$;

(iii) il existe un (iso)morphisme de graphes $F : \mathrm{Cay}(\Gamma_1, S) \to \mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ qui préserve les étiquettes des arêtes.

PREUVE. On commence par traiter le cas des morphismes.

(i)⇒(ii) : Il suffit de prendre $F = \bar{f}$.

(ii)⇒(iii) : Le morphisme F de (ii) convient pour (iii).

(iii)⇒(i) : Soit $\gamma_2 = F_0(1) \in \Gamma_2$ et soit t l'automorphisme de $\mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ induit par la translation (à gauche) de γ_2^{-1}. Quitte à remplacer F par $t \circ F$, on peut supposer que $F_0(1) = 1$. On montre alors que l'application $f = F_0$ est un homomorphisme marqué de Γ_1 vers Γ_2 .

Posons $S = (s_1, \ldots, s_k)$ et $T = (t_1, \ldots, t_k)$. Comme $f(1) = 1$, on a $F_1(1, i) = (1, i)$ pour tout i, ce qui entraîne $f(s_i) = t_i$ pour tout i. La fonction f respecte donc les marquages. De même, on a $F_1(1, i^{-1}) = (1, i^{-1})$ pour tout i, ce qui entraîne $f(s_i^{-1}) = t_i^{-1}$ pour tout i. Par induction sur n, on obtient $f(s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}) = t_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots t_{i_n}^{\varepsilon_n}$ pour tout n, pour tous indices $i_1, \ldots, i_n$ et pour tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$. Par suite, f est un morphisme de groupes marqués.

On remarque finalement que dans les trois cas, si on part d'un isomorphisme, on obtient par construction un isomorphisme. □

Remarque 3.1.4 *Il ne suffit pas que les graphes* $\mathrm{Cay}(\Gamma_1, S)$ *et* $\mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ *soient isomorphes pour que les groupes marqués* (Γ_1, S) *et* (Γ_2, T) *le soient.*

Preuve. Il suffit de considérer deux groupes finis Γ_1, Γ_2 de même cardinal mais non isomorphes. Si S et T sont des marquages de Γ_1 et Γ_2 qui comprennent exactement une fois chaque élément du groupe, les graphes $\mathrm{Cay}(\Gamma_1, S)$ et $\mathrm{Cay}(\Gamma_2, T)$ sont isomorphes, tandis que les groupes marqués (Γ_1, S) et (Γ_2, T) ne le sont pas. □

Définition 3.1.5 *On appelle* espace des groupes marqués sur k générateurs *et on note* $\mathcal{G}_k$ *l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes marqués.*

Il ressort de la discussion qui précède qu'on peut identifier $\mathcal{G}_k$ à :

- l'ensemble des classes d'isomorphisme (respectant les étiquettes des arêtes) de graphes de Cayley de groupes marqués sur k générateurs ;
- l'ensemble des classes d'équivalence d'homomorphismes $\mathbb{F}_k \to \Gamma$ surjectifs, deux homomorphismes étant équivalents s'ils ont des noyaux égaux ;
- l'ensemble des sous-groupe normaux de $\mathbb{F}_k$.

3.2 Topologie sur l'espace des groupes marqués

Étant donnés $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$, on pose $d(X_1, X_2) = e^{-\nu(X_1, X_2)}$ où

$$\nu(X_1, X_2) = \inf \left\{ |w| : w \in X_1 \triangle X_2 \right\}$$

(on convient que $d(X_1, X_2) = 0$ si $\nu(X_1, X_2) = +\infty$).

Lemme 3.2.1 *L'application $d : \mathcal{P}(\mathbb{F}_k) \times \mathcal{P}(\mathbb{F}_k) \to \mathbb{R}$ est une distance ultramétrique.*

PREUVE. Le seul point non trivial à montrer est l'inégalité triangulaire forte $d(x,z) \leqslant \max\big(d(x,y), d(y,z)\big)$. Or, étant donnés $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$, si $w \in X_1 \triangle X_3$, on a nécessairement $w \in X_1 \triangle X_2$ ou $w \in X_2 \triangle X_3$. Par suite, on a $\nu(X_1, X_3) \geqslant \min\big(\nu(X_1, X_2), \nu(X_2, X_3)\big)$, d'où l'inégalité souhaitée. □

On s'intéresse maintenant aux propriétés de l'espace métrique $(\mathcal{P}(\mathbb{F}_k), d)$.

Proposition 3.2.2 *La topologie induite par d sur $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ est la topologie produit obtenue en identifiant $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ à $\{0,1\}^{\mathbb{F}_k}$.*

PREUVE. Pour $r \in \mathbb{N}$, notons B_r la boule (fermée) de rayon r dans $\mathbb{F}_k$ centrée en l'élément neutre. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une suite généralisée dans $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ et $X \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$. On a la chaîne d'équivalences suivante (pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on utilise la finitude des boules B_r) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{i \to \infty} X_i = X \text{ pour la topologie produit} \\
&\qquad \Leftrightarrow \text{ pour tout } w \in X \text{ (resp. } w \in \mathbb{F}_k \setminus X) \text{ on a } w \in X_i \text{ (resp.} \\
&\qquad\quad w \in \mathbb{F}_k \setminus X_i) \text{ pour } i \text{ grand} \\
&\qquad \Leftrightarrow \text{ pour tout } r, \text{ on a } B_r \cap (X \triangle X_i) = \varnothing \text{ pour } i \text{ grand} \\
&\qquad \Leftrightarrow \text{ pour tout } r, \text{ on a } d(X, X_i) < e^{-r} \text{ pour } i \text{ grand} \\
&\qquad \Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} X_i = X \text{ pour la distance } d\ .
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 3.2.3 *Une suite (X_n) dans $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ est convergente si et seulement si pour tout $w \in \mathbb{F}_k$ on a l'alternative suivante :*

- *soit $w \in X_n$ pour n suffisamment grand ;*
- *soit $w \notin X_n$ pour n suffisamment grand.*

Si c'est le cas, la limite est $X = \{w \in \mathbb{F}_k : w \in X_n \text{ pour } n \text{ grand }\}$.

PREUVE. C'est évident lorsqu'on munit $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ de la topologie produit. □

En fait, on peut remarquer que l'alternative du corollaire caractérise exactement les suites de Cauchy.

Corollaire 3.2.4 *L'espace $\mathcal{P}(\mathbb{F}_k)$ est compact et $\mathcal{G}_k$ en est une partie fermée (donc compacte).*

PREUVE. La première assertion provient du théorème de Tychonoff, combiné avec la proposition 3.2.2.

Pour montrer que $\mathcal{G}_k$ est fermé, prenons une suite convergente (N_n) de sous-groupes normaux de $\mathbb{F}_k$ et montrons que $N = \lim_{n\to\infty} N_n$ est un sous groupe normal. Si $v, w \in N$, alors pour n suffisamment grand on a $v, w \in N_n$. Il suit que $v^{-1}w \in N_n$ pour n grand, d'où $v^{-1}w \in N$. On a montré que N est un sous-groupe. Soit maintenant $g \in \mathbb{F}_k$ et $w \in N$. Pour n grand, on a $w \in N_n$ et donc $gwg^{-1} \in N_n$. Par suite, on obtient $gwg^{-1} \in N$, ce qui montre que N est normal. □

Si on se donne deux groupes marqués non isomorphes, la distance qui les sépare est égale à $e^{-|w|}$ où w est un des éléments de $\mathbb{F}_k$ de longueur minimale parmi ceux qui définissent l'élément neutre dans l'un des groupes et pas dans l'autre. Concernant la convergence des suites, le corollaire 3.2.3 se traduit comme suit (voir aussi la proposition B.2.1) :

Corollaire 3.2.5 *Une suite de groupes marqués sur k générateurs (Γ_n, S_n) converge si et seulement si pour tout $w \in \mathbb{F}_k$ on a l'alternative :*

- *soit $w = 1$ dans (Γ_n, S_n) pour n suffisamment grand ;*
- *soit $w \neq 1$ dans (Γ_n, S_n) pour n suffisamment grand.*

Si c'est le cas, la limite est $\mathbb{F}_k/N$ où $N = \{w \in \mathbb{F}_k : w = 1$ dans (Γ_n, S_n) pour n grand$\}$.

Passons maintenant à la description de la topologie en termes de graphes de Cayley. On note $B_r(\mathbb{F}_k)$ le sous-graphe de $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_k, (a_1, \ldots, a_n))$ ayant pour ensemble de sommets $\mathrm{Som}\, B_r(\mathbb{F}_k) = \{w \in \mathbb{F}_k : d(1, w) \leqslant r\}$ et pour arêtes les arêtes de $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_k, (a_1, \ldots, a_n))$ reliant ces sommets. Cela correspond à la boule (fermée) de rayon r de la réalisation géométrique de l'arbre $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_k, (a_1, \ldots, a_n))$.

Étant donné un groupe marqué (Γ, S) et $\phi : \mathbb{F}_k \to \Gamma$ l'homomorphisme associé, on note $B_r(\Gamma, S)$ le sous-graphe de $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ image de $B_r(\mathbb{F}_k)$ par le morphisme de graphes $\bar{\phi} : \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_k) \to \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$. Comme avant, cela correspond à la boule (fermée) de rayon r de la réalisation géométrique du graphe $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$.

Notons toutefois qu'une arête de $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ reliant deux sommets situés à distance r de 1 ne fera pas partie du sous-graphe $B_r(\Gamma, S)$.

Remarque 3.2.6 *Soit $(\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)$ des groupes marqués et $r \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tous $w_1, w_2 \in \mathbb{F}_k$ de longueur au plus r, on a $w_1 = w_2$ dans (Γ_1, S_1) si et seulement si $w_1 = w_2$ dans (Γ_2, S_2) ;

(ii) pour tout $w \in \mathbb{F}_k$ de longueur au plus $2r$, on a $w = 1$ dans (Γ_1, S_1) si et seulement si $w = 1$ dans (Γ_2, S_2).

Proposition 3.2.7 *Soit $(\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)$ des groupes marqués et $r \in \mathbb{N}$. On note Φ_i le morphisme de graphes $B_r(\mathbb{F}_k) \to B_r(\Gamma_i, S_i)$ induit (pour $i = 1, 2$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe un isomorphisme de graphe $F : B_r(\Gamma_1, S_1) \to B_r(\Gamma_2, S_2)$ tel que $\Phi_2 = F \circ \Phi_1$;

(ii) la distance $d\big((\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)\big)$ est inférieure ou égale à $e^{-(2r+1)}$.

PREUVE. La condition (i) est réalisée si et seulement si les applications Φ_1 et Φ_2 passent au quotient pour définir F et F^{-1}, c'est-à-dire si et seulement si la condition (i) de la remarque 3.2.6 est satisfaite.

La condition (ii), quant à elle, est équivalente à la condition (ii) de la remarque 3.2.6. □

Lorsque la condition (i) de la proposition est réalisée, on dit que les boules de rayon r des graphes de Cayley de (Γ_1, S_1) et (Γ_2, S_2) *sont les mêmes*. En termes de convergence des suites, on obtient alors le résultat suivant :

Corollaire 3.2.8 *Une suite de groupes marqués sur k générateurs (Γ_n, S_n) converge si et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, les boules de rayon r des graphes de Cayley sont les mêmes à partir d'un certain rang (qui dépend de r).*

3.3 Groupes de présentation finie

Pour terminer ce chapitre, nous donnons deux résultats classiques concernant les groupes de présentation finie dans l'espace des groupes marqués de type fini.

Proposition 3.3.1 *Les groupes marqués de présentation finie définissent une partie dénombrable dense de $\mathcal{G}_k$.*

PREUVE. Choisir un groupe marqué de présentation finie sur k générateurs (à isomorphisme près) revient à choisir un nombre fini de relateurs pour

la présentation (par [18, proposition V.2], si un groupe marqué admet une présentation finie, il en admet une dont les générateurs coïncident avec le marquage). Comme le cardinal des parties finies de $\mathbb{F}_k$ est dénombrable, celui des groupes marqués de présentation finie sur k générateurs l'est aussi.

En outre, si $N \lhd \mathbb{F}_k$, on pose $\Gamma_r = \langle a_1, \ldots, a_n \mid B_r \cap N \rangle$. Ces groupes sont de présentation finie et on a $\Gamma_r \to \mathbb{F}_k/N$ pour $r \to \infty$. Les groupes de présentation finie définissent donc une partie dense. □

Lemme 3.3.2 *Soit $\Gamma = \langle S \mid \mathcal{R} \rangle$ un groupe de présentation finie (avec $|S| = k$). Si une suite de groupes marqués (Γ_n, S_n) converge vers Γ, alors pour n assez grand, Γ_n est un quotient marqué de Γ.*

PREUVE. Notons $\phi_n : \mathbb{F}_k \to \Gamma_n$ l'homomorphisme associé à (Γ_n, S_n). Pour n assez grand, on aura $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}(\phi_n)$ car $\mathcal{R}$ est fini. Pour ces valeurs de n, le groupe Γ_n est un quotient marqué de Γ. □

3.4 Introduction aux entiers m-adiques

Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \geqslant 2$. L'anneau des entiers m-adiques $\mathbb{Z}_m$ est la complétion de $\mathbb{Z}$ par rapport à la distance ultramétrique donnée par la « valeur absolue » suivante :

$$|a \cdot m^k|_m := \left(\frac{1}{|m|}\right)^k \quad \text{si } a \text{ n'est pas un multiple de } m \text{ et si } k \geqslant 0 \ .$$

(Notons qu'elle n'est pas multiplicative, mais qu'on a $|-x|_m = |x|_m$, ce qui est suffisant pour définir une distance par $d_m(x,y) = |x-y|_m$.) L'espace $\mathbb{Z}_m$ hérite d'une structure d'anneau par extension des lois de $\mathbb{Z}$. C'est pourquoi on l'appelle *anneau des entiers m-adiques*. Le symbole $\mathbb{Z}_m^\times$ désignera l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_m$. La distance d_m sera quant à elle appelée *distance m-adique*. Notons qu'elle satisfait l'inégalité ultramétrique

$$|x-z|_m \leqslant \max\big(|x-y|_m, |y-z|_m\big) \ .$$

Dans la catégorie des anneaux topologiques, $\mathbb{Z}_m$ s'obtient comme limite projective du système

$$\ldots \to \mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m^{h-1}\mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

où les flèches représentent les homomorphismes (surjectifs) canoniques. Ceci montre que $\mathbb{Z}_m$ est compact. Par ailleurs, il est cohérent avec ce qui précède de poser $\mathbb{Z}_m = \{0\}$ si $m = \pm 1$.

Nous citons ici quelques énoncés faciles à propos des entiers m-adiques qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 3.4.1 *[Proposition C.1.1] Considérons un entier non nul m et sa décomposition en facteurs premiers $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$:*

(a) les anneaux topologiques $\mathbb{Z}_m$ et $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$ sont isomorphes. En particulier, si m n'est pas premier, l'anneau $\mathbb{Z}_m$ n'est pas intègre ;

(b) le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_m$ est

$$\mathbb{Z}_m^\times = \mathbb{Z}_m \setminus (p_1\mathbb{Z}_m \cup \ldots \cup p_k\mathbb{Z}_m) \ ;$$

(c) tout idéal de $\mathbb{Z}_m$ est principal. De plus, tout idéal de $\mathbb{Z}_m$ contenant un entier non nul s'écrit sous la forme $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$ avec $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$;

(d) si $|m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{Z} \cap p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}$ pour tous $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$.

Notons (voir la preuve à l'annexe C) que l'isomorphisme du point (a) est induit par les isomorphismes $\mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \cong \oplus_{s=1}^{\ell} \mathbb{Z}/p_s^{hk_s}\mathbb{Z}$.

L'anneau $\mathbb{Z}_m$ n'étant en général pas intègre, on ne peut pas utiliser la définition habituelle du plus grand diviseur commun (pgcd). On peut néanmoins définir une notion *ad hoc* de pgcd comme suit :

Définition 3.4.2 *[Définition C.1.2] Soit m un entier tel que $|m| \geqslant 2$ et soit $p_1, \ldots, p_\ell$ ses facteurs premiers. Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_m$ contenant un entier non nul, le* plus grand diviseur commun (pgcd) *des éléments de E est l'unique nombre $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}$ (avec $i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}$) tel que l'idéal engendré par E soit $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$.*

Si $|m| = 1$, on pose par convention $\mathrm{pgcd}(\mathbb{Z}_m) = 1$.

On remarque que si l'anneau est intègre, c'est-à-dire si $m = p^i$, notre notion est cohérente avec la notion habituelle de pgcd. Voici maintenant le dernier énoncé général dont nous aurons besoin.

Lemme 3.4.3 *[Lemme C.1.3] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et soit m' un diviseur de m. Soit $m' = \pm p_1^{j_1} \cdots p_{\ell'}^{j_{\ell'}}$ et $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ leur décomposition en facteurs premiers (avec $\ell' \leqslant \ell$ et $j_s \leqslant k_s$ pour $s = 1, \ldots, \ell'$) et soit $\pi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m'}$ le morphisme induit par les projections $\mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m'^h\mathbb{Z}$ (pour $h \geqslant 1$).*

(a) On a $\pi(n) = n$ pour tout entier n ;

(b) Si $d = \pm p_1^{i_1} \cdots p_{\ell'}^{i_{\ell'}}$ avec $i_1, \ldots, i_{\ell'} \in \mathbb{N}$, alors $\pi^{-1}(d\mathbb{Z}_{m'}) = d\mathbb{Z}_m$.

Chapitre 4

Fermeture des groupes de Baumslag-Solitar

Ce dernier chapitre sera consacré aux études que l'auteur a menées sur les limites de groupes de Baumslag- Solitar, d'abord seul [42] puis en collaboration avec Luc Guyot [27]. (Ces références ont été reprises dans les annexes B et C.) Nous traiterons en premier lieu l'existence et l'identification des limites de certaines familles de groupes marqués, avant de passer à une étude topologique de l'adhérence des groupes de Baumslag-Solitar dans $\mathcal{G}_2$. Même si nous n'avons pas pu identifier les limites à des groupes connus, nous avons pu déterminer certaines de leurs propriétés, que nous donnerons en fin de chapitre.

4.1 Limites de familles de groupes à paramètres

Dans [42], seul le cas des groupes de Baumslag-Solitar est traité (voir l'annexe B). Cependant, les groupes de noeuds toriques s'avèrent être plus simples, raison pour laquelle nous en discuterons en premier.

4.1.1 Groupes de noeuds toriques

Étant donnés deux entiers premiers entre eux p et q, on considère la courbe plane donnée par $\tilde{K}_{p,q}(t) = (pt, qt)$. Elle définit une courbe fermée simple sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, qui fournit un noeud $K_{p,q}$, dit *noeud torique*, par plongement (habituel) de $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Comme on pourrait le faire pour n'importe quel noeud, on associe aux $K_{p,q}$ leur *groupe de noeud*, qui est

défini par $T_{p,q} = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_{p,q})$. Il est bien connu que le groupe $T_{p,q}$ admet la présentation $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$ (voir [16], exercice VI.3 ou [32], p. 118). On pose $T_{m,n} = \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$ pour étendre la définition à tous les couples d'entiers non nuls. On supposera dans la suite que $T_{m,n}$ est marqué par les générateurs a et b.

La classification des groupes de noeuds toriques à isomorphisme près est bien connue. Nous en donnerons néanmoins une preuve.

Proposition 4.1.1 *(a) Si $|m| = 1$ ou $|n| = 1$, on a $T_{m,n} \cong \mathbb{Z}$.*

(b) Si $|m|, |n| \geqslant 2$, on a $T_{m,n}/Z(T_{m,n}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(c) Si $|m|, |n| \geqslant 2$, les groupes $T_{m,n}$ et $T_{m',n'}$ sont isomorphes si et seulement si $\{|m|, |n|\} = \{|m'|, |n'|\}$.

PREUVE. L'assertion (a) est triviale.

Concernant (b), on remarque d'abord que pour $|m|, |n| \geqslant 2$, le centre de $T_{m,n}$ est le sous-groupe (normal) $C_{m,n}$ engendré par $a^m = b^n$. En effet, on a évidemment $C_{m,n} \subseteq Z(T_{m,n})$. D'autre part, le quotient $T_{m,n}/C_{m,n}$ est un produit libre $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, d'où en particulier $Z(T_{m,n}/C_{m,n}) = \{1\}$. Or, $Z(T_{m,n})$ est inclus dans l'image réciproque de $Z(T_{m.n}/C_{m,n})$ par la projection canonique $T_{m,n} \to T_{m.n}/C_{m,n}$, d'où $Z(T_{m,n}) = C_{m,n}$. Ainsi, on a $T_{m,n}/Z(T_{m,n}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et en particulier, $T_{m,n}$ n'est pas cyclique infini.

Pour le point (c), on remarque d'abord que si $\{|m|, |n|\} = \{|m'|, |n'|\}$, on a évidemment $T_{m,n} \cong T_{m',n'}$.

On suppose maintenant que les groupes $T_{m,n}$ et $T_{m',n'}$ sont isomorphes. On obtient $|m'|, |n'| \geqslant 2$ par (a) et (b). Les groupes $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z})$ sont alors également isomorphes. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que n' est maximal en valeur absolue parmi m, n, m', n' et que $|n| \geqslant |m|$. Le produit libre $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ doit posséder un élément d'ordre $|n'|$. Par [33, théorème IV.1.6], l'un au moins des facteurs $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ doit posséder un élément d'ordre $|n'|$. Avec les hypothèses ci-dessus, il vient $|n| = |n'|$. Comme le cardinal de l'abélianisé de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, respectivement $(\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n'\mathbb{Z})$, est $|mn|$, respectivement $|m'n'|$, il vient $|m| = |m'|$. □

Nos résultats concernant les limites des groupes $T_{m,n}$ sont les suivants :

Proposition 4.1.2 *[Proposition C.2.1]*

(a) Les groupes $T_{m,n}$ tendent dans $\mathcal{G}_2$ vers $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(a,b)$ pour $m,n \to \infty$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} T_{m,n} = T_m := \langle a, b \mid [a^m, b] = 1\rangle$.

Les groupes sont tous marqués par (a,b).

Nous avons également pu classer les limites à isomorphisme près. Le résultat est le suivant :

Proposition 4.1.3 *[Proposition C.2.2] Les groupes T_m et $T_{m'}$ sont isomorphes si et seulement si $|m| = |m'|$.*

Les techniques de preuve sont les mêmes que pour la proposition 4.1.1.

4.1.2 Groupes de Baumslag-Solitar

Le cas des limites de groupes de Baumslag-Solitar est plus compliqué par le fait que les limites de suites naturelles n'existent pas toujours. On peut néanmoins identifier facilement deux limites :

Théorème 4.1.4 *[Théorèmes B.1.1 et B.1.2]*

(a) Pour $|m|, |n| \to \infty$, on a $BS(m,n) \to \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(a,b)$.

(b) Pour $|n| \to \infty$, on a $BS(1,n) \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.

Dans cet énoncé comme dans la suite, les groupes de Baumslag-Solitar sont marqués par (a,b) (sauf mention explicite du contraire). Le groupe $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z} = Z \ltimes Z[t,t^{-1}]$ (où le générateur de $\mathbb{Z}$ agit en multipliant les polynômes de Laurent par t) est quant à lui marqué par $(1,0)$ et $(0,1) = (0,t^0)$.

Étant donné un groupe marqué (Γ, S), notons $g_{(\Gamma,S)}$ le tour de taille (voir définition 1.3.8) du graphe de Cayley associé. L'énoncé (a) signifie exactement que les nombres $g_{BS(m,n)}$ tendent vers l'infini pour $|m|$ et $|n|$ tendant vers l'infini. Or ceci est très facile à voir.

Preuve de (a). Considérons un circuit de longueur $\ell \geqslant 1$ dans le graphe $\mathrm{Cay}(BS(m,n),(a,b))$. Soit w l'élément de $\mathbb{F}_2$ (librement réduit et de longueur ℓ) qui lui est associé. On a $w = 1$ dans $BS(m,n)$ et par conséquent w n'est pas réduit (par rapport à la structure d'extension HNN de $BS(m,n)$). Par le lemme de Britton, w contient un sous-mot de type $ab^{km}a^{-1}$ ou $a^{-1}b^{kn}a$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, ce qui entraîne $g_{BS(m,n)} \geqslant \min\{|m|,|n|\}$. □

On peut cependant calculer la valeur exacte du tour de taille des graphes de Cayley des groupes de Baumslag-Solitar. On donne une estimation valable dans le cadre plus général des extensions HNN.

Étant donné un groupe marqué (Λ, S) et $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, on convient de marquer Γ par t (la lettre stable) et S. On note $|.|$ la longueur des mots associée à Λ et S (voir définition 1.3.14) et on pose :

$$\begin{aligned} \alpha &:= \min\{|h| : h \in H^*\} \ ; \\ \beta &:= \min\{|k| : h \in K^*\} \ . \end{aligned}$$

Théorème 4.1.5 *[Théorème B.3.1] Si (Λ, S), Γ, α et β sont comme avant, on a* $\min\{g_\Lambda, \alpha+\beta+2, 2\alpha+6, 2\beta+6\} \leqslant g_\Gamma \leqslant g_\Lambda$.

Notons que la borne supérieure est triviale car le graphe de Cayley de Λ s'injecte dans celui de Γ.

Si on applique le théorème 4.1.5 au cas des groupes $BS(m,n)$, il vient $g_\Lambda = +\infty$, $\alpha = |n|$ et $\beta = |m|$. Il s'ensuit qu'on a

$$g_{BS(m,n)} \geqslant \min\{m+n+2, 2m+6, 2n+6\} \ .$$

D'autre part, le groupe $BS(m,n)$ a pour relations les mots $ab^m a^{-1} b^{-n}$, $ab^m a^{-1} bab^{-m} a^{-1} b^{-1}$ et $a^{-1} b^n aba^{-1} b^{-n} ab^{-1}$, qui sont respectivement de longueur $m+n+2$, $2m+6$ et $2n+6$. On obtient donc le résultat suivant, qui montre que la borne inférieure du théorème 4.1.5 est optimale.

Corollaire 4.1.6 *[Proposition B.3.3] Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}^*$, le tour de taille du graphe de Cayley de $BS(m,n)$ est* $\min\{|m|+|n|+2, 2|m|+6, 2|n|+6\}$.

Si on revient au point (b) du théorème 4.1.4, on voit facilement qu'il s'agit d'une particularité des groupes de Baumslag-Solitar résolubles.

Remarque 4.1.7 *Si on fixe un entier m tel que $|m| \geqslant 2$, la suite des groupes marqués $BS(m,n)$ ne converge pas pour $|n|$ tendant vers l'infini.*

Preuve. Soit $w = a^2 b^m a^{-2} b a^2 b^{-m} a^{-2} b^{-1}$. Pour $|n| \geqslant 2$, on voit facilement grâce au lemme de Britton que $w = 1$ dans $BS(m,n)$ si et seulement si n est multiple de m (c'est également une conséquence du lemme B.5.1). On conclut grâce au corollaire 3.2.5. □

L'espace $\mathcal{G}_2$ étant compact, les suites $(BS(m,n))_n$ doivent posséder des sous-suites convergentes. Il est donc naturel, étant donné une suite $(k_n)_n$

d'entiers non nuls, de se demander à quelles conditions la suite $(BS(m,k_n))_n$ va converger. Si le théorème B.1.3 donnait déjà une réponse partielle, la caractérisation complète est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.1.8 *[Théorème C.3.7] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et soit $(k_n)_n$ une suite d'entiers non nuls telle que $|k_n| \to \infty$ pour $n \to \infty$. La suite $(BS(m,k_n))_n$ converge dans $\mathcal{G}_2$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) il existe d tel que $\mathrm{pgcd}(m,k_n) = d$ pour n assez grand ;

(ii) la suite $(\frac{k_n}{d})_n$ converge dans $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

L'hypothèse « $|k_n| \to \infty$ » sert a éviter des valeurs d'adhérence « pathologiques » provenant de suites qui passeraient une infinité de fois par certains points. Nous indiquons maintenant la stratégie générale de la preuve du théorème 4.1.8, sans entrer dans les détails.

Le principal ingrédient pour prouver que les conditions (i) et (ii) sont nécessaires, est le suivant :

Lemme 4.1.9 *[Lemme B.5.1] Soit $m,n \in \mathbb{Z}^*$, $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$, $m_1 = \frac{m}{d}$ et $n_1 = \frac{n}{d}$. Soit encore $k \in \mathbb{Z}$, $h \geqslant 1$ et*

$$w = a^{h+1}b^m a^{-1}b^{-k}a^{-h}ba^{h+1}b^{-m}a^{-1}b^k a^{-h}b^{-1} \ .$$

Si $|n| \geqslant 2$, on a $w = 1$ dans $BS(m,n)$ si et seulement si $n \equiv k \pmod{m_1^h d}$.

Pour établir la suffisance des conditions (i) et (ii), la stratégie est de montrer que si elles sont satisfaites, on peut exhiber une certaine forme de parallélisme dans la réduction d'un mot w dans les différents $BS(m,k_n)$ (voir les lemmes B.5.3 à B.5.5, C.3.2 et C.3.5). Ceci permet d'arriver à l'alternative suivante : soit $w = 1$ dans $BS(m,k_n)$ pour n grand, soit $w \neq 1$ dans $BS(m,k_n)$ pour n grand.[1] Le corollaire 3.2.5 montre alors que la suite $(BS(m,k_n))_n$ converge dans $\mathcal{G}_2$.

À partir du théorème 4.1.8, on peut facilement retrouver l'énoncé suivant, qui lui est antérieur :

Corollaire 4.1.10 *[Théorème B.5.2] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et soit $(k_n)_n$ une suite d'entiers non nuls telle que $|k_n| \to \infty$ pour $n \to \infty$. Si la suite $(k_n)_n$ converge dans $\mathbb{Z}_m$, alors la suite $(BS(m,k_n))_n$ converge dans $\mathcal{G}_2$.*

[1] Plus précisément, soit il existe n_0 tel que $w = 1$ dans $BS(m,k_n)$ pour tout $n \geqslant n_0$, soit il existe n_0 tel que $w \neq 1$ dans $BS(m,k_n)$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Dès lors on peut définir la famille suivante de groupes, obtenus comme limites des groupes de Baumslag-Solitar.

Définition 4.1.11 *[Définition C.1.6] Étant donnés $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, on définit un groupe marqué sur deux générateurs $\overline{BS}(m,\xi)$ par la formule*

$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,k_n)$$

où k_n est n'importe quelle suite d'entiers telle que $|k_n| \to \infty$ et $k_n \to \xi$ dans $\mathbb{Z}_m$ (pour $n \to \infty$).

Comme pour les groupes de noeuds toriques, la classification à isomorphisme près des groupes de Baumslag-Solitar est bien connue (voir le théorème 1.1.16). Par contre, nous n'avons pas été en mesure de classer les limites $\overline{BS}(m,\xi)$ à isomorphisme près dans la catégorie des groupes. Nous avons dû nous contenter d'une classification dans la catégorie des groupes marqués. Autrement dit, nous avons pu, grâce au théorème 4.1.8, déterminer quels entiers m-adiques définissent le même point de $\mathcal{G}_2$.

Corollaire 4.1.12 *[Corollaire C.3.10] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_m$. Les groupes marqués $\overline{BS}(m,\xi)$ et $\overline{BS}(m,\eta)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\mathrm{pgcd}(m,\xi) = d = \mathrm{pgcd}(m,\eta)$ et $\pi(\frac{\xi}{d}) = \pi(\frac{\eta}{d})$ dans $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.*

Comme au lemme 3.4.3, $\pi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$ est le morphisme induit par les projections $\mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(\frac{m}{d})^h\mathbb{Z}$, pour $h \geqslant 1$.

Remarque 4.1.13 *Si d est différent de 1, il n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}_m$. Par contre, l'équation $dx = 0$ admet $x = 0$ comme unique solution (bien que $\mathbb{Z}_m$ ne soit pas intègre). On peut donc définir $\frac{\xi}{d}$ comme l'unique élément $\zeta \in \mathbb{Z}_m$ tel que $\zeta d = \xi$. On procède de même pour $\frac{\eta}{d}$.*

Preuve de la remarque 4.1.13. Soit x tel que $dx = 0$. On prend une suite d'entiers $(x_n)_n$ telle que $x_n \to x$. On a $dx_n \to 0$ dans $\mathbb{Z}_m$, ce qui entraîne que les nombres dx_n sont multiples de puissances de plus en plus grandes de m. Les nombres x_n satisfont la même propriété, ce qui entraîne $x_n \to 0$ dans $\mathbb{Z}_m$, d'où $x = 0$. □

4.1.3 Autres familles de groupes à paramètres

Fixons $m \in \mathbb{Z}^*$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_{n,\ell}$ le sous-groupe de $BS(m,n)$ engendré par a et b^{m^ℓ} (on utilise ces deux éléments comme

marquage). On remarquera que si m et n sont premiers entre eux, on a $\Gamma_{n,\ell} = BS(m,n)$ comme groupes. Les éléments de la suite $(\Gamma_{n,\ell})_\ell$ ne varient alors que par leurs marquages. On s'intéresse maintenant aux points limites de la famille des groupes $\Gamma_{n,\ell}$.

Si on pose $\ell = 0$, on retrouve les groupes de Baumslag-Solitar traités dans la section précédente. Si $(k_n)_n$ est une suite d'entiers satisfaisant les conditions (i) et (ii) du théorème 4.1.8, notons L le point limite de la suite $(BS(m,k_n))_n$. Il est aisé de vérifier que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la suite $(\Gamma_{n,\ell})_n$ converge pour $|n| \to \infty$ vers le sous-groupe de L engendré par a et b^{m^ℓ} (on note encore a et b les éléments du marquage de L). Pour les autres limites, nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 4.1.14 *[Théorème C.2.4] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$.*

(a) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $\Gamma_{n,\ell} \to \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{\mathrm{pgcd}(m,n)}{\mathrm{ppmc}(m,n)}]$ pour $\ell \to \infty$, où le générateur de $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{Z}[\frac{\mathrm{pgcd}(m,n)}{\mathrm{ppmc}(m,n)}]$ en multipliant par $\frac{n}{m}$ et où le produit semi-direct est marqué par $(1,0)$ et $(0,1)$.

(b) Pour $|n| \to \infty$ et $\ell \to \infty$, on a $\Gamma_{n,\ell} \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ est comme avant marqué par les éléments $(1,0)$ et $(0,1)$.

La partie (a) était déjà connue de Baumslag et Strebel dans les années septante [5, sections 1.7 et 1.8]. En utilisant les suites de (a), Osin d'une part, et Arzhantseva et al. d'autre part, ont pu montrer que pour m et n premiers entre eux avec $|m|, |n| \geqslant 2$, les groupes $BS(m,n)$:

- sont *faiblement moyennables* (dans le sens que leur représentation régulière gauche n'est pas uniformément isolée de la triviale) [37] ;
- ne sont pas *uniformément non moyennables* (c'est-à-dire à constante de Følner uniforme non nulle) [1, proposition 13.3].

Une autre généralisation des groupes de Baumslag-Solitar est donnée par les $BS(m,n,\ell) = \langle a, b \mid (ab^m a^{-1} b^{-n})^\ell = 1 \rangle$, pour $m, n, \ell \in \mathbb{Z}^*$ (avec les éléments a et b comme marquage). Pour $\ell = \pm 1$, on retrouve les groupes de Baumslag-Solitar. Pour les autres valeurs de ℓ, on déduit facilement le résultat suivant de [33, proposition II.5.28] :

Proposition 4.1.15 *[Proposition C.2.5] Supposons $|\ell| \geqslant 2$. Les groupes marqués $BS(m,n,\ell)$ tendent vers $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(a,b)$ dès qu'un des trois paramètres $|m|$, $|n|$, $|\ell|$ tend vers l'infini.*

4.2 Étude topologique des groupes de Baumslag-Solitar dans $\mathcal{G}_2$

On a paramétré certaines limites des groupes de Baumslag-Solitar par les entiers m-adiques (définition 4.1.11). Si la structure d'anneau de $\mathbb{Z}_m$ n'a pas de pendant dans $\mathcal{G}_2$ à notre connaissance, la structure topologique peut naturellement être comparée à celle de son image.

Théorème 4.2.1 *[Théorème C.4.2] L'application $\overline{BS}(m,.) : \mathbb{Z}_m \to \mathcal{G}_2$ est continue et injective sur $\mathbb{Z}_m^\times$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$.*

L'injectivité sur $\mathbb{Z}_m^\times$ vient du corollaire 4.1.12. Il faut néanmoins remarquer que les $BS(m,n)$ ne sont pas dans l'image de cette application. En effet, le mot $ab^m a^{-1} b^{-n}$ définit un élément non trivial de $BS(m,k)$ pour k grand et donc un élément non trivial de $\overline{BS}(m,\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{Z}_m$. Par conséquent l'ensemble $Z_m = \mathrm{Im}(\overline{BS}(m,.))$ doit être vu comme une frontière des groupes de Baumslag-Solitar plutôt que comme leur adhérence.

Remarque 4.2.2 *Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \geqslant 2$. La fonction $\mathbb{Z}^* \to \mathcal{G}_2$ donnée par $n \mapsto BS(m,n)$ n'est continue en aucun point si on munit $\mathbb{Z}^*$ de la distance m-adique.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On a $n + m^k \to n$ (pour $k \to \infty$), ce qui entraîne $BS(m, n+m^k) \to \overline{BS}(m,n)$. Or, on a $\overline{BS}(m,n) \neq BS(m,n)$. Ceci montre que la fonction n'est pas continue en n. □

Par contre, on obtient une fonction continue en sens inverse : si on note X_m l'ensemble des groupes marqués $BS(m,n)$ avec n premier à m, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.2.3 *[Théorème B.1.4] Si $|m| \geqslant 2$, l'application $X_m \to \mathbb{Z}_m^\times$; $BS(m,n) \mapsto n$ est uniformément continue. De plus, elle admet un prolongement continu $\overline{X_m} \to \mathbb{Z}_m^\times$ qui est surjectif, mais non injectif.*

Finalement, nous pouvons décrire complètement la frontière de X_m.

Corollaire 4.2.4 *[Corollaire C.4.4] Pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$, la frontière de X_m dans $\mathcal{G}_2$ est l'ensemble $\left\{\overline{BS}(m,\xi) : \xi \in \mathbb{Z}_m^\times\right\}$, qui est homéomorphe à $\mathbb{Z}_m^\times$.*

4.3 Propriétés des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$

4.3.1 Problème du mot

Nous nous intéressons tout d'abord au problème du mot. Le *problème du mot est résoluble* dans un groupe marqué (Γ, S) s'il existe un algorithme qui, étant donné n'importe quel mot $w \in \mathcal{M}(S)$, dise en un temps fini si l'image de w dans Γ est l'élément neutre. Le temps de réponse peut dépendre de w.

Une lecture attentive de la preuve de la suffisance du théorème 4.1.8 permet d'obtenir un énoncé quantitatif (corollaire C.3.6) qui, à partir d'un entier non nul m et de $\xi \in \mathbb{Z}_m$, fournit un entier non nul n tel qu'on ait $w = 1$ dans $\overline{BS}(m,\xi)$ si et seulement si $w = 1$ dans $BS(m,n)$. Comme le problème du mot est résoluble dans les groupes de Baumslag-Solitar (grâce au lemme de Britton), cela a pour principale conséquence :

Proposition 4.3.1 *[Corollaire C.3.6] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, le problème du mot est résoluble dans le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$.*

4.3.2 Deux actions des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$

Un groupe de Baumslag-Solitar $BS(m,n) = \langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$ agit sur son arbre de Bass-Serre (voir section 1.3.4). Il agit également sur la droite réelle (ou sur $\mathbb{Q}$) de la manière suivante : $a \cdot x = \frac{n}{m}x$ et $b \cdot x = x + 1$. Cette action affine factorise par le groupe (marqué) $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{\text{pgcd}(m,n)}{\text{ppmc}(m,n)}]$ apparaissant dans le théorème 4.1.14.

À partir de ces actions naturelles des groupes de Baumslag-Solitar, on peut définir des actions des limites $\overline{BS}(m,\xi)$, sur un arbre et sur $\mathbb{Q}_p$ par affinités. De ces deux nouvelles actions, seule l'action sur l'arbre nous sera utile dans la suite. La question de l'existence de l'action affine est cependant naturelle.

Pour le cas de l'action affine, nous nous restreignons au cas où m est un nombre premier, qu'on note p.

Théorème 4.3.2 *[Théorème C.5.1] Soit p un nombre premier et soit $\xi \in \mathbb{Z}_p$, $\xi \neq 0$. On obtient une action affine de $\overline{BS}(p,\xi)$ sur $\mathbb{Q}_p$ en posant $a \cdot x = \frac{\xi}{p}x$ et $b \cdot x = x + 1$.*

Pour l'action sur un arbre, on repasse au cas général $m \in \mathbb{Z}^*$. Étant donné $\xi \in \mathbb{Z}_m$, on prend une suite $(k_n)_n$ d'entiers non nuls telle que $|k_n| \to \infty$ et $k_n \to \xi$ pour $n \to \infty$ et on note T_n l'arbre de Bass-Serre de $BS(m,k_n)$.

Si on note H_n, respectivement H_n^m le sous-groupe de $BS(m,k_n)$ engendré par b, respectivement b^m, on a $\mathrm{Som}(T_n) = BS(m,k_n)/H_n$ et pour les arêtes $\mathrm{Ar}_-(T_n) = BS(m,k_n)/H_n^m$.

On choisit d'utiliser ici les arêtes orientées négativement par commodité car elles « dépendent moins de n ». En effet, l'ensemble des arêtes orientées positivement est le quotient de $BS(m,k_n)$ par le sous-groupe engendré par b^n (seconde dépendance en n). Dans l'annexe C, nous avons choisi de définir $BS(m,k_n)/H_n^m$ comme étant l'ensemble des arêtes orientées *positivement*.

On pose maintenant

$$\begin{array}{rcccl} Y & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Som}(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n\right)/\sim \\ Y^m & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ar}_-(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n^m\right)/\sim \end{array}$$

où $\sim$ est définie dans les deux cas par $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 : x_n = y_n$. On obtient alors un graphe orienté $X = X_{m,\xi}$ en posant :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Som}(X) & = & \{x \in Y : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ tel que } (x_n)_n \sim (wH_n)_n\}\ ; \\ \mathrm{Ar}_+(X) & = & \{y \in Y^m : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ tel que } (y_n)_n \sim (wH_n^m)_n\}\ ; \\ \left((wH_n^m)_n\right)^- & = & (wH_n)_n = \left((wH_n^m)^-\right)_n\ ; \\ \left((wH_n^m)_n\right)^+ & = & (wa^{-1}H_n)_n = \left((wH_n^m)^+\right)_n\ . \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que ce graphe est bien défini. On « renverse l'orientation » par rapport aux arbres de Bass-Serre afin d'obtenir la même orientation sur $X_{m,\xi}$ que dans l'annexe C.

Théorème 4.3.3 *[Théorème C.5.3] Soit $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ et $(\xi_n)_n$ une suite d'entiers non nuls telle que $|\xi_n| \to \infty$ et $\xi_n \to \xi$ dans $\mathbb{Z}_m$. Le graphe $X_{m,\xi}$ (vu ici comme graphe non orienté) possède les propriétés suivantes :*

(a) c'est un arbre ;

(b) il ne dépend pas (à isomorphisme équivariant près) de la suite $(\xi_n)_n$;

(c) l'action évidente de $\mathbb{F}_2$ sur $X_{m,\xi}$ factorise par la projection canonique $\mathbb{F}_2 \to \overline{BS}(m,\xi)$.

4.3.3 Propriété de Haagerup et résolubilité résiduelle

Pour montrer que les groupes limites $\overline{BS}(m,\xi)$ ont la propriété de Haagerup et sont résiduellement résolubles, on les écrit comme extension de groupes plus simples.

Théorème 4.3.4 *[Théorème C.6.2] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, le groupe $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ est un quotient marqué de $\overline{BS}(m,\xi)$. De plus, la suite exacte courte*

$$1 \longrightarrow N_{m,\xi} \longrightarrow \overline{BS}(m,\xi) \xrightarrow{q_{m,\xi}} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

a un groupe noyau libre.

Pour prouver la seconde assertion, on montre que l'action de $N_{m,\xi}$ sur l'arbre $X_{m,\xi}$ construit ci-dessus est libre. Comme le groupe $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ est métabélien, le second groupe dérivé de $\overline{BS}(m,\xi)$ est inclus dans $N_{m,\xi}$ et est donc un groupe libre. Cette dernière propriété était déjà connue pour les groupes de Baumslag-Solitar et certaines généralisations [31]. Grâce au corollaire 1.4.15, on obtient alors :

Corollaire 4.3.5 *[Corollaire C.6.4] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ possède la propriété de Haagerup.*

On rappelle qu'un groupe Γ est *résiduellement résoluble* si, pour tout $\gamma \in \Gamma^*$, il existe un groupe résoluble Λ et un homomorphisme $\phi : \Gamma \to \Lambda$ tel que $\phi(\gamma) \neq 1$ (voir la définition 1.1.13). Il est facile de voir que Γ est résiduellement résoluble si et seulement si on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{(n)} = \{1\}$ (où $\Gamma^{(n)}$ désigne le n^{e} groupe dérivé de Γ).

On sait qu'un groupe libre est résiduellement résoluble [33, proposition I.4.4] et qu'une extension d'un groupe résiduellement résoluble par un groupe résoluble est résiduellement résoluble [41, lemme A.20]. On obtient donc :

Corollaire 4.3.6 *[Corollaire C.6.4] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ est résiduellement résoluble.*

4.3.4 Présentation des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$

Rappelons que le corollaire 4.1.12 entraîne $\overline{BS}(m,\eta) = \overline{BS}(m,0)$ pour tout $\eta \in m\mathbb{Z}_m$. À l'exception de cet unique élément, on peut montrer que les $\overline{BS}(m,\xi)$ n'admettent pas de présentation finie.

Proposition 4.3.7 *[Proposition C.7.1] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$, le groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ n'est pas de présentation finie.*

Notons que cette proposition exclut également l'existence d'une présentation finie basée sur d'autres générateurs [18, proposition V.2]. La preuve consiste, à l'aide d'un lemme arithmétique, à montrer que les $BS(m,k_n)$ qui

approchent $\overline{BS}(m,\xi)$ n'en sont pas des quotients marqués. On conclut alors grâce au lemme 3.3.2.

Remarque 4.3.8 *[Remarque C.7.2], [2] Si $|m| = 1$ et si ξ est l'unique élément de $\mathbb{Z}_m$, le groupe $\overline{BS}(m,\xi) = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ n'est pas de présentation finie.*

Ainsi on ne trouve presque aucun groupe $\overline{BS}(m,\xi)$ de présentation finie. Seuls restent les $\overline{BS}(m,0)$ avec $|m| \geqslant 2$ pour lesquels la question est ouverte.

Nous avons également obtenu des présentations explicites des groupes $\overline{BS}(m,\xi)$. Pour les définir, notons v_0 le sommet privilégié de l'arbre $X_{m,\xi}$ défini à la section 4.3.2, c'est-à-dire posons $v_0 = (H_n)_n$. Définissons une application $^- : \mathcal{M}(a,b) \to \mathcal{M}(a,b)$ par $\bar{a} = a$ et $\bar{b} = b^{-1}$, qui induit un homomorphisme $^-\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$. On a alors :

Théorème 4.3.9 *[Théorème C.7.4] Pour tous $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\xi \in \mathbb{Z}_m$, le groupe marqué $\overline{BS}(m,\xi)$ admet la présentation $\langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle$ avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{m,\xi} \;=\; & \big\{ w\bar{w} : w = ab^{\alpha_1} \cdots ab^{\alpha_k} a^{-1} b^{\alpha_{k+1}} \cdots a^{-1} b^{\alpha_{2k}} \\ & \qquad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \ldots, 2k) \text{ et } w \cdot v_0 = v_0 \big\} \ . \end{aligned}$$

Cette présentation est un peu insatisfaisante car la condition $w \cdot v_0 = v_0$ n'est pas très explicite. Si on fixe une suite d'entiers non nuls $(k_n)_n$ telle que $|k_n| \to \infty$ et $k_n \to \xi$ dans $\mathbb{Z}_m$, on peut toutefois noter que le stabilisateur de v_0 dans $\mathbb{F}_2$ est constitué des éléments qui sont égaux à des puissances de b dans tous les $BS(m,k_n)$ sauf un nombre fini.

Lorsque le groupe $BS(m,k_n)$ agit sur son arbre de Bass-Serre, le stabilisateur du sommet privilégié H_n est le sous-groupe H_n lui-même, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par b. Dans le cas des $\overline{BS}(m,\xi)$ le stabilisateur du sommet privilégié est strictement plus grand que le sous-groupe engendré par b. En effet, l'élément $ab^m a^{-1}$ n'est pas égal à une puissance de b dans $\overline{BS}(m,\xi)$ car $ab^m a^{-1} b^{-k} \neq 1$ dans $BS(m,k_n)$ dès que $|k_n| \geqslant m + k$. Par contre, on a $ab^m a^{-1} = b^{k_n}$ pour tout n, et donc $ab^m a^{-1}$ stabilise v_0.

Les éléments de $\mathcal{R}_{m,\xi}$ sont par construction des relations de $\overline{BS}(m,\xi)$. Il suit qu'on a un homomorphisme marqué $\Gamma := \langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle \to \overline{BS}(m,\xi)$. Pour prouver le théorème 4.3.9, il suffit de vérifier que cet homomorphisme est injectif, ce qui est équivalent à la proposition suivante :

Proposition 4.3.10 *[Proposition C.7.5] Soit $w \in \mathcal{M}(a,b)$. Si $w = 1$ dans $\overline{BS}(m,\xi)$, alors $w = 1$ dans Γ.*

L'ingrédient principal de la preuve de cette proposition est l'étude des chemins dans $X_{m,\xi}$ donnés par les éléments de $\mathcal{M}(a,b)$. Un mot w induit des chemins dans les graphes $\mathrm{Cay}(\Gamma,(a,b))$ et $\mathrm{Cay}(\overline{BS}(m,\xi),(a,b))$, qu'on note $p_\Gamma(w)$ et $p_{\overline{BS}}(w)$. Définissons une application

$$f : \mathrm{Som}\,\mathrm{Cay}(\overline{BS}(m,\xi),(a,b)) \to \mathrm{Som}(X_{m,\xi}) \ ; \ g \mapsto g\cdot v_0 \ .$$

Étant donnés deux sommets adjacents g, g' de $\mathrm{Som}\,\mathrm{Cay}(\overline{BS}(m,\xi),(a,b))$, on a l'alternative suivante :

- soit $g' = gb^{\pm 1}$, auquel cas $f(g') = gb^{\pm 1}\cdot v_0 = g\cdot v_0 = f(g)$;
- soit $g' = ga^{\pm 1}$ et les sommets $f(g'), f(g)$ sont reliés dans $X_{m,\xi}$ par une des deux arêtes $(gH_n^m)_n, (g'H_n^m)_n$.

Le chemin $p_{\overline{BS}}(w)$ définit donc une suite de sommets $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ de $X_{m,\xi}$ (commençant par le sommet privilégié) où chacun est, soit adjacent, soit égal au précédent. En supprimant les redondances, on obtient une suite de sommets qui définit un chemin dans l'arbre $X_{m,\xi}$. On note ce chemin (ou la suite de sommets associée) $p_X(w)$.

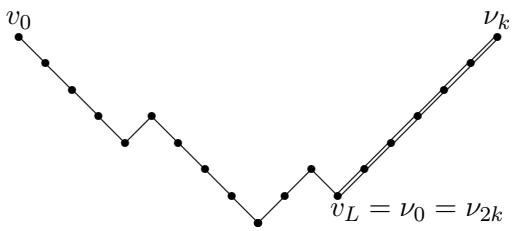
Définition 4.3.11 *Soit v un sommet de $X_{m,\xi}$. Si $v = g\cdot v_0$, on appelle* hauteur *de v le nombre $h(v) := \sigma_a(g)$, où $\sigma_a : \overline{BS}(m,\xi) \to \mathbb{Z}$ est l'homomorphisme donné par $\sigma_a(a) = 1$ et $\sigma_a(b) = 0$.*

La hauteur est bien définie car si $g\cdot v_0 = g'\cdot v_0$, l'élément $g^{-1}g'$ stabilise v_0, ce qui entraîne $\sigma_a(g) = \sigma_a(g')$ car tout élément de $\mathbb{F}_2$ représentant $g^{-1}g'$ est égal à une puissance de b dans une infinité de groupes de Baumslag-Solitar. Par construction, la différence de hauteur entre les extrémités d'une arête de l'arbre $X_{m,\xi}$ est toujours égale à 1.

Définition 4.3.12 *Soit $L, k \geqslant 1$. Une* vallée *de type (L,k) est un chemin p dans l'arbre $X_{m,\xi}$, de sommets $v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \ldots, \nu_{2k}$ (où v_0 est le sommet privilégié) et tel que :*

- *on ait $h(v_0) = 0 = h(\nu_k)$ et $h(\nu_0) = -k = h(\nu_{2k})$;*
- *pour tout autre sommet v de p, on ait $h(v) < 0$;*
- *on ait $\nu_0 = \nu_{2k}$.*

Dans une vallée de type (L,k), les chemins déterminés par les suites de sommets $(\nu_0, \ldots, \nu_k)$ et $(\nu_k, \ldots, \nu_{2k})$ sont géodésiques car la différence de hauteur entre leurs extrémités est égale à k. Par conséquent, il vient $\nu_1 = \nu_{2k-1}, \ldots, \nu_{k-1} = \nu_{k+1}$.



Une vallée de type $(12, 6)$

La première étape de la preuve de la proposition 4.3.10 consiste à montrer le lemme suivant par induction sur L.

Lemme 4.3.13 *[Lemme C.7.6] Soit $w \in \mathcal{M}(a, b)$ tel que le chemin $p_X(w)$ soit une vallée de type (L, k), disons $p_X(w) = (v_0, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$. Il existe un mot w' égal à w dans Γ et tel qu'on ait $p_X(w') = (v_0, \ldots, v_L)$.*

Pour en faire la démonstration on intercale des relateurs de la présentation définissant Γ aux bons endroits (ce qui a pour effet d'intercaler des circuits dans le chemin $p_X(w)$), de manière à rendre possible des simplifications.

La seconde étape de la preuve de la proposition 4.3.10, c'est-à-dire la preuve proprement dite, se fait par induction sur la longueur du mot w. On commence par montrer qu'on peut supposer que le chemin $p_X(w)$ ne passe que par des sommets à hauteur négative ou nulle puis on considère ceux qui sont à hauteur zéro. On distingue alors deux cas :

1. le chemin possède un rebroussement en l'un de ces points ;
2. le chemin ne possède pas de rebroussement en ces points.

Dans le premier cas, on peut faire apparaître (un translaté d') une vallée de type $(L, 1)$ dans le chemin $p_X(w)$ et on peut se ramener à un mot plus court grâce au lemme 4.3.13. Dans le second cas, on peut exhiber un sous-mot de w qui représente l'élément neutre de Γ, ce qui nous ramène également à un mot plus court.

Annexe A

Moyennabilité intérieure et extensions HNN

Cette annexe présente le contenu de l'article [43]. Quelques corrections minimes ont été introduites.

Abstract. We present sufficient conditions for HNN extensions to be inner amenable, respectively ICC, which give necessary and sufficient criteria among Baumslag-Solitar groups. We deduce that such a group, viewed as acting on its Bass-Serre tree, contains non trivial elements which fix unbounded subtrees.

Résumé. On présente des conditions suffisantes pour qu'une extension HNN soit intérieurement moyennable, respectivement CCI, qui donnent des critères nécessaires et suffisants parmi les groupes de Baumslag-Solitar. On en déduit qu'un tel groupe, vu comme groupe d'automorphismes de son arbre de Bass-Serre, possède des éléments non triviaux qui fixent des sous-arbres non bornés.

Introduction

Étant donné un groupe Γ, l'étude de son algèbre de von Neumann $W^*(\Gamma)$ suggère souvent des propriétés et des questions intéressantes concernant Γ. Par exemple, Murray et von Neumann avaient déjà remarqué que $W^*(\Gamma)$ est un facteur de type II_1 si et seulement si le groupe Γ est CCI, c'est-à-dire *à classes de conjugaison infinies* ; ils avaient aussi défini la « propriété

Gamma » pour un tel facteur. (Voir le lemme 5.3.4 et la définition 6.1.1 de [36].) Plus tard, Effros [21] a montré que cette propriété pour un facteur de type II_1 de la forme $W^*(\Gamma)$ implique que le groupe Γ est intérieurement moyennable (voir la section A.1 pour la définition ou [BH86] pour une introduction plus complète à cette notion). Il résulte immédiatement des définitions que les groupes non CCI et les groupes moyennables sont intérieurement moyennables. Parmi les groupes CCI, il en existe qui sont intérieurement moyennables, par exemple le célèbre groupe F de Thompson [29], et d'autres qui ne le sont pas, par exemple les groupes libres non abéliens. Dans le cas des produits libres, l'étude de ces propriétés est particulièrement simple. En effet, si $\Gamma = H * K$ est produit libre de deux groupes H et K non réduits à un élément, les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) Γ n'est pas CCI, (ii) Γ est intérieurement moyennable et (iii) H et K sont chacun d'ordre deux, de sorte que Γ est un groupe diédral infini. Pour des constructions plus générales, c'est un problème ouvert que de formuler (même conjecturalement) des conditions nécessaires et suffisantes pour les propriétés d'être CCI et d'être intérieurement moyennable. Notre objectif est d'établir des critères s'appliquant au moins à tous les groupes de Baumslag-Solitar (voir les exemples 2.4 et 3.2).

Pour un groupe G, nous posons $G^* = G \setminus \{1\}$ et nous notons $Z(G)$ le centre de G. Tous les groupes considérés dans cet article sont supposés être dénombrables.

Théorème A.0.1 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$. Pour que Γ soit à classes de conjugaison infinies, il suffit que toute classe de conjugaison finie de Λ incluse dans $(H \cap K)^*$ contienne un élément qui n'est point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$).*

En particulier, si l'un au moins des groupes Λ, H, K, $H \cap K$ est CCI ou si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial, le groupe Γ est à classes de conjugaison infinies.

Proposition A.0.2 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si, pour tout $n \geqslant 1$ il existe $h_0^{(n)}$, $h_1^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)} \in (Z(\Lambda) \cap H \cap K)^*$ tels que $h_i^{(n)} = \phi(h_{i-1}^{(n)})$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors Γ est intérieurement moyennable.*

On donne également un énoncé que nous devons à Guyan Robertson et qui assure la propriété CCI pour certains groupes agissant sur des arbres (voir la proposition A.2.8).

De la moyennabilité intérieure, on peut encore déduire des propriétés de l'action de certaines extensions HNN sur leur arbre de Bass-Serre :

Proposition A.0.3 *Soit T un arbre et Γ un sous-groupe de $Aut(T)$ contenant des automorphismes hyperboliques transverses. Si Γ est intérieurement moyennable, il existe un élément elliptique non trivial de Γ qui fixe un sous-arbre non borné de T.*

Ce dernier énoncé s'applique également à la plupart des groupes de Baumslag-Solitar. Pour ces derniers, on peut d'ailleurs exhiber explicitement des éléments qui fixent des sous-arbres non bornés.

Structure de l'article La section A.1 est consacrée aux rappels et définitions nécessaires, la section A.2 à la propriété CCI, et la section A.3 à la moyennabilité intérieure. Ces deux dernières sections sont agrémentées d'exemples. Enfin, la section A.4 fait le lien entre moyennabilité intérieure et actions sur les arbres.

Remerciements Je voudrais remercier Paul Jolissaint, qui m'a incité à étudier la moyennabilité intérieure des groupes de Baumslag-Solitar, ainsi que Pierre de la Harpe, dont les précieuses suggestions m'ont permis d'améliorer sensiblement la présentation de cet article. Je remercie également Alain Valette, qui m'a montré le lemme A.2.7 et la proposition A.2.8, dus à Guyan Robertson. Que les trois premières personnes soient en outre remerciées pour leurs commentaires sur les précédentes versions de ce texte.

A.1 Préliminaires

Moyennabilité intérieure et classes de conjugaison infinies Soit Γ un groupe (discret, dénombrable). Le groupe Γ agit sur Γ^* par conjugaison, ce qui s'exprime par la formule $\gamma \cdot x = \gamma x \gamma^{-1}$. Par abus de langage, on note encore γ l'application $x \mapsto \gamma \cdot x$.

Définition A.1.1 *Un groupe Γ est dit* à classes de conjugaison infinies (CCI) *s'il est infini et si toutes les orbites de l'action précitée sont infinies, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \Gamma^*$, l'ensemble $\{\gamma x \gamma^{-1} : \gamma \in \Gamma\}$ est infini.*

Une *moyenne* sur Γ est une forme linéaire $m : \ell^\infty(\Gamma^*) \to \mathbb{C}$ positive (c'est-à-dire vérifiant $m(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$) et normalisée par $m(1) = 1$.

Définition A.1.2 *Un groupe* Γ *est dit* intérieurement moyennable *si* $\Gamma = \{1\}$ *ou s'il existe une moyenne sur* Γ *qui soit invariante par automorphismes intérieurs, c'est-à-dire telle que* $m(f \circ \gamma^{-1}) = m(f)$ *pour tous* $\gamma \in \Gamma$ *et* $f \in \ell^\infty(\Gamma^*)$.

Un groupe non CCI est nécessairement intérieurement moyennable. En effet, si X est une partie finie non vide de Γ^* stable par conjugaison, il suffit de poser

$$m(f) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

pour obtenir une moyenne invariante par automorphismes intérieurs.

Extensions HNN Soit Λ un groupe, H, K des sous-groupes et $\phi : H \to K$ un isomorphisme. On définit l'*extension HNN* de *base* Λ relativement à H, K et ϕ comme dans [33, chapitre IV.2] :

$$HNN(\Lambda, H, K, \phi) = \left\langle \Lambda, t \;\middle|\; t^{-1}ht = \phi(h)\ \forall h \in H \right\rangle \ .$$

Pour tout $j \geqslant 1$, définissons comme suit des homomorphismes ϕ^j. On pose $\phi^1 = \phi$ (en particulier $\mathrm{Dom}(\phi^1) = \mathrm{Dom}(\phi) = H$). Pour $j \geqslant 2$, on définit récursivement

$$\mathrm{Dom}(\phi^j) = \phi^{-1}\big(\mathrm{Dom}(\phi^{j-1}) \cap K\big) \subseteq H \ ,$$

et naturellement $\phi^j(h) = \phi(\phi^{j-1}(h))$ pour tout $h \in \mathrm{Dom}(\phi^j)$.

Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ un élément de $HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $n \geqslant 0$, $\lambda_i \in \Lambda$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. L'écriture est dite *réduite* si elle ne contient aucun sous-mot de type $t^{-1}ht$ avec $h \in H$ ou tkt^{-1} avec $k \in K$. L'énoncé suivant est une variante du théorème de la forme normale dans les extensions HNN [33, théorème IV.2.1]. Nous nous y référerons (un peu abusivement) sous le nom de *lemme de Britton*.

Lemme A.1.3 *Soit* $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ *comme avant. Si l'écriture est réduite et si* $\gamma = 1$, *alors* $n = 0$ *et* λ_0 *est l'élément neutre de* Λ.

Grâce au lemme IV.2.3 de [33], on peut en outre définir une *fonction longueur* $\ell : HNN(\Lambda, H, K, \phi) \longrightarrow \mathbb{N}$ en posant $\ell(\gamma) = n$ si l'écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ est réduite.

Groupes de Baumslag Solitar Ils sont définis par les présentations

$$BS(m,n) = \left\langle a, b \;\middle|\; ab^m a^{-1} = b^n \right\rangle$$

où m et n sont des entiers non nuls. Ce sont des extensions HNN du groupe $\mathbb{Z}$. Plus précisément, on a $BS(m,n) = HNN(\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, \phi)$ où $\phi : n\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ est défini par $\phi(nk) = mk$. On vérifie facilement que dans ce cas

$$\mathrm{Dom}(\phi^j) = n_1^j d\mathbb{Z} \;\text{ pour tout } j \geqslant 1 \;,$$

où $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$ et $n_1 = \frac{n}{d}$.

Arbres et théorie de Bass-Serre Pour les définitions des notions de graphe et d'arbre, on renvoie le lecteur au chapitre I.2 de [39]. Un automorphisme d'arbre α est dit *sans inversion* si $\phi(e) \neq \bar{e}$ pour toute arête e. Étant donné un tel automorphisme, la proposition 25 de [39] montre que :

- soit α est *elliptique*, c'est-à-dire fixe au moins un sommet de l'arbre ;
- soit α est *hyperbolique*, c'est-à-dire tel qu'il existe une géodésique doublement infinie, appelée *axe*, sur laquelle α induit une translation d'amplitude non nulle.

Deux automorphismes hyperboliques sont dits *transverses* si leurs axes n'ont qu'un nombre fini (éventuellement nul) de sommets en commun.

Étant donné une extension $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, l'*arbre de Bass-Serre* associé est le graphe donné par

$$Som(T) = \Gamma/\Lambda \;;\; Ar(T) = \Gamma/H \sqcup \Gamma/K \;;\; \overline{\gamma H} = \gamma t K \;;\; \overline{\gamma K} = \gamma t^{-1} H \;;$$

$$(\gamma H)^- = \gamma\Lambda \;;\; (\gamma H)^+ = \gamma t\Lambda \;;\; (\gamma K)^- = \gamma\Lambda \;;\; (\gamma K)^+ = \gamma t^{-1}\Lambda$$

où, étant donné une arête e, on note e^- son origine et e^+ son sommet terminal. Le chapitre I.5 de [39] et le théorème 12 en particulier assurent qu'il s'agit bien d'un arbre.[1] On peut orienter T de manière à ce que l'action évidente de Γ sur T préserve l'orientation en posant

$$Ar_+(T) = \Gamma/H \;;\; (\gamma H)^- = \gamma\Lambda \;;\; (\gamma H)^+ = \gamma t\Lambda \;.$$

Relevons que cet arbre orienté est doublement régulier : en chaque sommet de T les arêtes sortantes sont en bijection avec Λ/H tandis que les arêtes entrantes sont en bijection avec Λ/K.

[1] Il convient de remarquer que la définition d'extension HNN dans [39] ne correspond pas à la nôtre qui est celle de [33] (on passe de l'une à l'autre en remplaçant t par t^{-1}).

A.2 Classes de conjugaison infinies

Le premier objectif de cette section est de prouver le théorème A.0.1. On traite séparément les éléments du sous-groupe $H \cap K$ et les autres.

Lemme A.2.1 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \cap K \neq \Lambda$. Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus (H \cap K)$, la classe de conjugaison de γ dans Γ est infinie.*

PREUVE. Si $\gamma \in \Lambda \setminus H$, les éléments $t^{-n}\gamma t^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont distincts deux à deux par le lemme de Britton. Si $\gamma \in \Lambda \setminus K$, il en est de même des éléments $t^n \gamma t^{-n}$. Il ne reste donc que le cas $\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda$ à traiter, pour lequel on supposera $K \neq \Lambda$, laissant la vérification du cas analogue $H \neq \Lambda$ au lecteur.

Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ une écriture réduite (avec $n \geqslant 1$) et soit C la classe de conjugaison de γ. Il suffit d'exhiber une suite (γ_j) d'éléments de C telle que $\lim_{j\to\infty} \ell(\gamma_j) = +\infty$.

Si $\varepsilon_1 = -1$, on trouve $\sigma \in \Lambda$ tel que $\sigma\lambda_0 \notin K$ grâce à l'hypothèse $\Lambda \neq K$. On pose ensuite

$$\gamma_1 = t^{-\varepsilon_n}\sigma\gamma\sigma^{-1}t^{\varepsilon_n} = t^{-\varepsilon_n}(\sigma\lambda_0)t^{-1}\lambda_1 t^{\varepsilon_2}\lambda_2 \cdots t^{\varepsilon_n}(\lambda_n\sigma^{-1})t^{\varepsilon_n}$$

et la dernière écriture est réduite par construction. Il suffit alors de poser $\gamma_j = t^{-\varepsilon_n}\gamma_{j-1}t^{\varepsilon_n}$ pour $j \geqslant 2$ car il vient $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$.

Si $\varepsilon_n = 1$, on trouve $\tau \in \Lambda$ tel que $\lambda_n\tau \notin K$ grâce à l'hypothèse $\Lambda \neq K$. On pose ensuite

$$\gamma_1 = t^{\varepsilon_1}\tau^{-1}\gamma\tau t^{-\varepsilon_1} = t^{\varepsilon_1}(\tau^{-1}\lambda_0)t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}}\lambda_{n-1}t(\lambda_n\tau)t^{-\varepsilon_1}$$

et la dernière écriture est réduite par construction. Il suffit alors de poser $\gamma_j = t^{\varepsilon_1}\gamma_{j-1}t^{-\varepsilon_1}$ pour $j \geqslant 2$ car il vient $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$.

Enfin, si $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_n = -1$, il suffit de poser $\gamma_j = t^j\gamma t^{-j}$ pour obtenir $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$. □

Lemme A.2.2 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ et soit $\gamma \in (H \cap K)^*$. On note C_Γ (respectivement C_Λ) la classe de conjugaison de γ dans Γ (respectivement Λ). Pour que la classe C_Γ soit infinie, il suffit qu'une au moins des conditions suivantes soit satisfaite :*

(a) la classe C_Λ est infinie ;

(b) la classe C_Λ contient un élément qui n'est point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$).

On convient qu'un élément situé hors du domaine de ϕ^j n'est pas un point fixe de cet homomorphisme.

PREUVE. Si C_Λ est infinie, il en est de même de C_Γ car $C_\Lambda \subseteq C_\Gamma$.

S'il existe un élément c de C_Λ qui n'est point fixe d'aucun ϕ^j (pour $j \in \mathbb{N}^*$), on a $t^{-n}ct^n \neq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, la relation $t^{-n}ct^n = c$ impliquerait $\phi^n(c) = c$ grâce au lemme de Britton. Par conséquent, l'ensemble $\{t^{-n}ct^n : n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Comme il est inclus dans la classe C_Γ, cette dernière est également infinie. □

PREUVE DU THÉORÈME A.0.1. Soit $\gamma \in \Gamma^*$. Si la classe de conjugaison de γ est contenue dans $(H \cap K)^*$ les hypothèses impliquent qu'une des conditions (a),(b) du lemme A.2.2 est satisfaite, ce qui entraîne que la classe de conjugaison de γ est infinie. Dans le cas contraire, on obtient la même conclusion grâce au lemme A.2.1. □

La proposition suivante s'applique à un des cas d'extension HNN non couverts par le théorème A.0.1, c'est-à-dire au cas d'un produit semi-direct $\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Lambda$ associé à un automorphisme ϕ de Λ (cas où $H = \Lambda = K$).

Proposition A.2.3 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si Λ est non trivial et si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial, alors Γ est CCI.*

PREUVE. Par le théorème A.0.1, il ne reste que le cas $H = \Lambda = K$ à traiter. Tout élément de Γ peut alors s'écrire sous la forme λt^n avec $\lambda \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément $\gamma \in \Gamma^*$ dont la classe de conjugaison est finie.

On peut supposer que $\gamma = \lambda t^n$ avec $\lambda \in \Lambda^*$. En effet, si $\gamma = t^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$, on prend $\mu \in \Lambda^*$ (ce qui est licite car Λ est non trivial) et on n'a plus qu'à remplacer γ par $\mu^{-1}\gamma\mu = \mu^{-1}\phi^{-n}(\mu)t^n$ puisque ϕ^{-n} est sans point fixe non trivial. (Remarquons que la définition des itérés de ϕ ne pose pas de problème ici puisqu'il s'agit d'un automorphisme de Λ.)

Comme la classe de conjugaison de γ est finie, il en est de même de l'ensemble $\{t^{-j}\gamma t^j : j \in \mathbb{N}\} = \{\phi^j(\lambda)t^n : j \in \mathbb{N}\}$, ce qui montre qu'il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\phi^j(\lambda) = \lambda$. On a obtenu la contradiction cherchée (avec les hypothèses). □

On passe maintenant à des exemples d'extensions HNN à classes de conjugaison infinies. Bien que nous n'en ayons pas trouvé trace dans la littérature, ils sont peut-être déjà connu des experts.

Exemple A.2.4 *Étant donnés deux entiers non nuls m et n, le groupe de Baumslag-Solitar $BS(m,n)$ est CCI si et seulement si $|m| \neq |n|$.*

PREUVE. Si $m = n$, l'élément b^m est central dans $BS(m,m)$ et donc seul dans sa classe de conjugaison. Si $m = -n$, l'ensemble $\{b^m, b^{-m}\}$ est une classe de conjugaison finie.

Si $|m| \neq |n|$, le théorème A.0.1 implique que $BS(m,n)$ est CCI. En effet, les homomorphismes ϕ^j associés à la structure d'extension HNN de $BS(m,n)$ sont sans point fixe non trivial. □

Exemple A.2.5 *Si $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}^d = H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) le groupe Γ est CCI ;

(ii) aucune des valeurs propres complexes de l'endomorphisme ϕ n'est une racine de l'unité.

PREUVE. $(i) \Rightarrow (ii)$: Par contraposition, supposons que ϕ possède une valeur propre μ telle que $\mu^j = 1$ ($j \in \mathbb{N}^*$). Comme 1 est valeur propre de ϕ^j, celui-ci possède un point fixe non nul dans $\mathbb{Q}^d$. Il possède donc aussi un point fixe non nul dans $\mathbb{Z}^d$, qu'on note λ. Par suite, l'ensemble $\{\lambda, \phi(\lambda), \ldots, \phi^{j-1}(\lambda)\}$ est une classe de conjugaison finie de Γ.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme ϕ^j est sans point fixe non trivial car 1 n'en est pas valeur propre. La proposition A.2.3 assure donc que Γ est CCI. □

Nous donnons maintenant un dernier exemple, qui montre que la condition du théorème A.0.1 n'est pas nécessaire.

Exemple A.2.6 *Posons $\Lambda = BS(m,m)$, avec $m \in \mathbb{Z}, |m| \geqslant 2$. Les éléments a et b^m engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, qu'on note H. On considère $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$, où $\phi : H \to H$ est défini par $\phi(a) = b^m$ et $\phi(b^m) = a$.*

(1) Le groupe Γ est CCI.

(2) Il existe une classe de conjugaison finie de Λ contenue dans H^* et dont tous les éléments sont des points fixes d'homomorphismes de la forme ϕ^j, avec $j \in \mathbb{N}$.

PREUVE. (1) Soit γ un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie. On doit montrer que $\gamma = 1$. Par le lemme A.2.1, γ est un élément de H,

et donc également de Λ. Mais on peut écrire $\Lambda = HNN(\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, \mathrm{id})$, où la base $\mathbb{Z}$ correspond au sous-groupe engendré par b. À nouveau grâce au lemme A.2.1 on a $\gamma = b^{\ell m}$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$. Par suite, $t^{-1}\gamma t = a^{\ell}$, ce qui montre que la classe de conjugaison de a^{ℓ} est finie. Toujours grâce au lemme A.2.1, on obtient alors $\ell = 0$, ce qui donne finalement $\gamma = 1$ comme désiré.

(2) L'élément b^m de H^* est central dans Λ. Il est donc seul dans sa classe de conjugaison. De plus, on a $\phi^2(b^m) = b^m$. □

Les deux énoncés suivants, dus à Guyan Robertson, montrent plus généralement que certains groupes d'automorphismes d'arbres sont à classes de conjugaison infinies.

Lemme A.2.7 *Soit Γ un groupe agissant fidèlement et isométriquement sur un espace métrique (X, d) de telle manière que le quotient $\Gamma\backslash X$ soit fini. Si γ est un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie, alors il existe $K_\gamma > 0$ tel que $d(x, \gamma x) \leqslant K_\gamma$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Soit $F \subseteq X$ un ensemble de représentants des orbites ; cet ensemble est fini. La classe de conjugaison de γ étant finie, on peut poser

$$K_\gamma = \max\{d(y, g\gamma g^{-1}y) : g \in \Gamma, y \in F\} \ .$$

Si x est un élément quelconque de X, on trouve g dans Γ et y dans F tels que $y = gx$. Alors $d(x, \gamma x) = d(g^{-1}y, \gamma g^{-1}y) = d(y, g\gamma g^{-1}y) \leqslant K_\gamma$. □

Proposition A.2.8 *Soit X un arbre dont tous les sommets ont au moins trois voisins. Si un groupe Γ agit fidèlement sur X de telle manière que le quotient $\Gamma\backslash X$ soit fini, alors il est CCI.*

Preuve. Soit γ un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie. On veut montrer que $\gamma = 1$. Comme l'action est fidèle, il suffit de montrer que γ agit trivialement sur X.

On commence par supposer (par l'absurde) que l'élément γ est hyperbolique. Comme tout sommet de X a au moins trois voisins, on peut trouver un sommet x_n à distance n de l'axe pour tout $n \geqslant 1$. Mais alors, $d(x_n, \gamma x_n) \geqslant 2n$, ce qui contredit le lemme A.2.7.

Par conséquent, γ fixe au moins un sommet de X. Notons T le sous-arbre de X formé des points fixes de γ. On suppose par l'absurde que $T \neq X$. Dans ce cas, comme tout sommet est de degré au moins trois, on trouve x_n à distance n de T pour tout $n \geqslant 1$. Comme γ ne fixe aucun sommet de

la géodésique joignant x_n à T, on a $d(x_n, \gamma x_n) = 2n$ pour tout n, ce qui contredit le lemme A.2.7.

Ainsi, $T = X$, ce qui signifie que γ agit trivialement sur X. □

La proposition A.2.8 s'applique en particulier au cas d'une extension $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ telle que $[\Lambda : H] \geqslant 3$, $[\Lambda : K] \geqslant 3$ et $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1} H \gamma = \{1\}$, et de même au cas d'un produit libre $H *_L K$ avec amalgamation au-dessus d'un sous-groupe commun L de H et K, tel que $[H : L] \geqslant 3$, $[K : L] \geqslant 3$ et $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1} L \gamma = \{1\}$. Terminons par un exemple d'extension HNN montrant que le théorème A.0.1 n'est pas conséquence de la proposition A.2.8.

Exemple A.2.9 *Considérons le groupe $\Lambda = \mathbb{F}_2 \times (\oplus_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$, de présentation*

$$\Lambda = \left\langle a, b, e_i \ (i \in \mathbb{Z}) \ \middle| \ [a, e_i], [b, e_i], [e_i, e_j] \ (i, j \in \mathbb{Z}) \right\rangle \ .$$

Soit H le sous-groupe engendré par les e_i et $\phi : H \to H$ l'homomorphisme défini par la formule $\phi(e_i) = e_{i+1}$. Soit encore $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$.

Alors les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial (en particulier Γ est CCI par le théorème A.0.1), mais l'action de Γ sur son arbre de Bass-Serre n'est pas fidèle.

Preuve. Il est évident que les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans point fixe non trivial. D'autre part, le sous-groupe H est normal dans Γ par construction. Notons T l'arbre de Bass-Serre de Γ. On a $Ar_+(T) = \Gamma/H$, de sorte que le sous-groupe H fixe toutes les arêtes de l'arbre de Bass-Serre. Ainsi, l'action de Γ sur T n'est pas fidèle. □

A.3 Moyennabilité intérieure

Nous nous intéressons maintenant à montrer que certaines extensions HNN sont intérieurement moyennables. La preuve qui suit s'inspire du corollaire 2.5. de [29].

Preuve de la proposition A.0.2. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que le groupe Γ est CCI. Il s'ensuit que pour tout n, les éléments $h_0^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)}$ sont deux à deux distincts. En effet, si $h_i^{(n)} = h_j^{(n)}$ (avec $i < j$), l'ensemble $\{h_i^{(n)}, \ldots h_{j-1}^{(n)}\}$ est une classe de conjugaison finie.

Nous allons construire une moyenne sur Γ qui soit invariante par automorphismes intérieurs. Soit ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^*$ plus fin que le filtre de

Fréchet[2]. On pose pour $f \in \ell^\infty(\Gamma^*)$:

$$\begin{aligned} \mu_n(f) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(h_i^{(n)}) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \mu_\omega(f) &= \lim_{n\to\omega} \mu_n(f)\ . \end{aligned}$$

La limite existe car la suite $(\mu_n(f))_n$ est bornée et ω est un ultrafiltre. La forme linéaire μ_ω sur $\ell^\infty(\Gamma^*)$ est positive et normalisée. Il reste à voir qu'elle est invariante par automorphismes intérieurs. Comme Γ est engendré par Λ et t, cela revient à montrer :

(1) $\mu_\omega(f \circ S_\lambda) = \mu_\omega(f)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, où $S_\lambda(\gamma) = \lambda^{-1}\gamma\lambda$;

(2) $\mu_\omega(f \circ T) = \mu_\omega(f)$, où $T(\gamma) = t^{-1}\gamma t$.

Comme les $h_i^{(n)}$ sont centraux dans Λ, on a $S_\lambda(h_i^{(n)}) = h_i^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$. Cela montre (1). Pour montrer (2), on constate d'abord que :

$$\begin{aligned} \mu_n(f \circ T) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T(h_i^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(t^{-1}h_i^{(n)}t) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \phi(h_i^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(h_{i+1}^{(n)}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(h_i^{(n)}) = \mu_n(f) + \frac{1}{n}\big(f(h_n^{(n)}) - f(h_0^{(n)})\big) \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 selon ω. Il suit que $\mu_\omega(f \circ T) = \mu_\omega(f)$. □

Remarque A.3.1 *Pour prouver la proposition A.0.2, il est plus rapide de vérifier la condition (F) du théorème 1 de [6]. On suppose comme avant que* Γ *est CCI, de sorte que les* $h_i^{(n)}$ *sont deux à deux distincts. On constate alors qu'on peut prendre* $F_n = \{h_1^{(n)}, \ldots, h_{n-1}^{(n)}\}$ *pour* $n \geqslant 2$. *En effet* $|\lambda F_n \lambda^{-1} \triangle F_n| = 0$ *pour* $\lambda \in \Lambda$ *et* $|t^{\pm 1} F_n t^{\mp 1} \triangle F_n| = 2$. *Par suite,* $|\gamma F_n \gamma^{-1} \triangle F_n| \leqslant 2\ell(\gamma)$ *pour tous* $\gamma \in \Gamma$ *et* $n \geqslant 2$. *Pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *il vient donc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\gamma F_n \gamma^{-1} \triangle F_n|}{|F_n|} = 0\ .$$

L'exemple suivant infirme la proposition 4.3 de [8].[3]

[2] Il est équivalent de demander que ω soit un ultrafiltre libre.

[3] Pour démontrer leur énoncé, les auteurs ont voulu utiliser la proposition 7 de [6]. Dans la vérification des hypothèses, ils ont supposé à tort que les éléments du groupe définissant des automorphismes elliptiques de l'arbre de Bass-Serre fixaient un unique sommet. Voir aussi l'exemple A.4.2

Exemple A.3.2 *Le groupe $BS(m,n)$ est intérieurement moyennable quels que soient les entiers non nuls m et n.*

PREUVE. Le groupe $BS(m,n)$ étant une extension HNN, il suffit de vérifier qu'on peut appliquer la proposition A.0.2. Pour tout $k \geqslant 1$, il suffit de poser $h_i^{(k)} = b^{m^{i+1}n^{k-i+1}}$ pour obtenir $h_i^{(k)} = \phi(h_{i-1}^{(k)})$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. En outre, la base étant commutative, ces éléments sont bien centraux. □

Exemple A.3.3 *Si Λ est abélien et si $H = \Lambda$, alors $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ est intérieurement moyennable.*

PREUVE. Si Λ est trivial, on a $\Gamma = \mathbb{Z}$ et ce groupe est intérieurement moyennable. Sinon, il suffit de prendre $\lambda \in \Lambda^*$ et de poser $h_i^{(n)} = \phi^i(\lambda)$ pour pouvoir appliquer la proposition A.0.2 □

Nous terminons cette section en donnant des exemples qui infirment les points (d) et (e) du théorème 5 de [6][4], qui donnaient des obstructions à la moyennabilité intérieure pour des groupes du type $\Gamma = H *_A K$, respectivement $\Gamma = HNN(H, A, B, \phi)$.

De nouvelles obstructions à la moyennabilité intérieure pour les extensions HNN et produits amalgamés peuvent par contre être obtenues en appliquant la proposition A.0.3 aux actions sur les arbres de Bass-Serre correspondants.

Remarque A.3.4 *L'hypothèse principale des points (d) et (e) dans [6] était : « pour toute partie finie $F \subseteq \Gamma^*$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma F \gamma^{-1} \cap A = \varnothing$ ». Géométriquement parlant, cette condition assure que les actions des groupes sur leur arbre de Bass-Serre et sur le bord de ce dernier sont fortement fidèles. Voir par exemple le lemme 9, sa preuve et la remarque précédent la proposition 11 dans [17].*

Le groupe $BS(2,3)$ fournit un contre-exemple au point (e). En effet, on a vu dans l'exemple A.3.2 que ce groupe est intérieurement moyennable tandis que le lemme qui suit montre que les hypothèses de (e) sont satisfaites.

[4] Dans cet article également, les auteurs ont supposé à tort que les éléments elliptiques (pour l'action sur l'arbre de Bass-Serre associé) fixaient un seul sommet. Dans le cas (c) du théorème visé, par contre, cette hypothèse est vérifiée car les stabilisateurs des arêtes sont triviaux.

Lemme A.3.5 *Si $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ est tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $\phi^k(\lambda) \notin H$, alors pour toute partie finie F de Γ^* et pour n suffisamment grand, on a $t^{-n}Ft^n \cap \Lambda = \varnothing$.*

PREUVE. Il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma^*$ et pour n suffisamment grand, on a $t^{-n}\gamma t^n \notin \Lambda$. On prend donc $\gamma \in \Gamma^*$ et on suppose pour éviter la trivialité qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $t^{-n_0}\gamma t^{n_0} \in \Lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\gamma_n = t^{-n_0-n}\gamma t^{n_0+n}$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_k \in \Lambda \setminus H$. Les écritures $\gamma_{k+n} = t^{-n}\gamma_k t^n$ sont alors réduites pour tout $n \geqslant 1$. Donc pour $n > n_0 + k$, on a bien $t^{-n}\gamma t^n \notin \Lambda$. □

Le contre-exemple au point (d) est le suivant :

Exemple A.3.6 *Considérons le groupe*

$$\Gamma = \left\langle a_1, a_2, b \;\middle|\; a_1 b^2 a_1^{-1} = b^3, a_2 b^2 a_2^{-1} = b^3 \right\rangle = BS(2,3) *_{\mathbb{Z}} BS(2,3) \;\; :$$

(1) il est intérieurement moyennable ;

(2) pour tout ensemble fini F d'éléments de Γ^*, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma F \gamma^{-1} \cap \langle b \rangle = \varnothing$.

PREUVE. (1) Il est facile de voir que la suite de parties

$$F_n = \{b^{2^n}, b^{2^{n-1}\cdot 3}, \ldots, b^{2\cdot 3^{n-1}}, b^{3^n}\}$$

satisfait la condition (F) du théorème 1 de [6].

(2) On se donne $g \in \Gamma^*$. Il suffit de montrer que, pour n suffisamment grand, l'élément $(a_1a_2)^n g (a_1a_2)^{-n}$ n'est pas une puissance de b. Pour écarter le cas trivial, on peut supposer qu'il existe n_0 tel que $(a_1a_2)^{n_0} g (a_1a_2)^{-n_0}$ soit une puissance de b. Vu les relations qui définissent Γ il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $(a_1a_2)^{n_1} g (a_1a_2)^{-n_1} = b^k$ avec k non divisible par 4. On aura dès lors :

$$\begin{aligned} (a_1a_2)^{n_1+1} g (a_1a_2)^{-n_1-1} &= a_1 b^{3\frac{k}{2}} a_1^{-1} \qquad \text{si } k \text{ est pair ;} \\ (a_1a_2)^{n_1+1} g (a_1a_2)^{-n_1-1} &= a_1 a_2 b^k a_2^{-1} a_1^{-1} \quad \text{si } k \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Les expressions $a_1 b^{3\frac{k}{2}} a_1^{-1}$ et $a_2 b^k a_2^{-1}$ ne sont pas réductibles dans $BS(2,3)$ (par le lemme de Britton). Pour $n > n_1 + 1$, l'élément $(a_1a_2)^n g (a_1a_2)^{-n}$ n'est donc pas une puissance de b [33, théorème IV.2.6]. □

A.4 Moyennabilité intérieure et arbres

Étant donné un arbre T, on note ∂T l'espace des bouts de T. Remarquons que les automorphismes de T définissent des homéomorphismes de l'espace $T \cup \partial T$. De plus un automorphisme de T est hyperbolique si et seulement s'il définit un homéomorphisme hyperbolique de $T \cup \partial T$ au sens de [6, pp. 151–152]. Notons également que deux automorphismes hyperboliques de T sont transverses au sens de la section A.1 si et seulement si les homéomorphismes hyperboliques de $T \cup \partial T$ associés sont transverses au sens de [6]. Le lien entre homéomorphismes hyperboliques et moyennabilité intérieure est le suivant :

Proposition A.4.1 *[6, proposition 7] Soit Ω un espace topologique séparé infini et Γ un groupe d'homéomorphismes de Ω. Si Γ contient des homéomorphismes hyperboliques transverses de Ω et s'il existe une application Γ-équivariante $\delta : \Gamma^* \to \Omega$ (où Γ opère sur Γ^* par conjugaison), alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.*

Rappelons en outre que les arbres sont des espaces métriques complets satisfaisant l'inégalité de la médiane [19, chapitre 3.b]. Le lemme 3.8 de [19] assure que toute partie bornée et non vide d'un arbre possède un *centre*, qui est le centre de la boule fermée de rayon minimal qui la contienne.

Preuve de la proposition A.0.3. Quitte à remplacer T par sa subdivision barycentrique, on peut supposer que Γ agit sans inversion.

Par contraposition, on suppose que, pour tout élément elliptique γ de Γ, le sous-arbre T_γ formé des points fixes de γ est borné. L'existence d'éléments hyperboliques implique que T n'est pas réduit à un sommet. Ainsi $\Omega = T \cup \partial T$ est un espace topologique séparé infini. Considérons l'application $\delta : \Gamma^* \longrightarrow \Omega$, définie comme suit :

- Si γ est hyperbolique, $\delta(\gamma)$ est le point attractif de γ ;
- Si γ est elliptique, $\delta(\gamma)$ est le centre de T_γ.

Si on fait agir Γ sur Γ^* par automorphismes intérieurs, l'application δ est Γ-équivariante. Grâce à la proposition A.4.1, on en déduit que Γ n'est pas intérieurement moyennable, ce qui contredit les hypothèses. □

Exemple A.4.2 *Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}^*$, il existe $\gamma \in BS(m, n)$ tel que γ fixe un sous-arbre non borné de l'arbre de Bass-Serre associé.*

Preuve. Remarquons pour commencer que, dans le cas qui nous occupe, l'arbre de Bass-Serre est localement fini. Les sous-arbres non bornés coïn-

cident donc avec les sous-arbres infinis. On distingue trois cas.

(1) Si $m = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, on peut prendre

$$\gamma = b^n = ab^m a^{-1} = ab^{kn}a^{-1} = a^2 b^{km} a^{-2} = a^2 b^{k^2 n} a^{-2} = \dots$$

On a $\gamma = a^\ell b^{k^\ell n} a^{-\ell}$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$. L'élément γ fixe (au moins) les sommets $a^\ell \langle b \rangle$ où ℓ parcourt $\mathbb{N}$ et donc un sous-arbre non borné de T.

(2) Si $n = km$ on constate de manière analogue que $\gamma = b^m$ fixe les sommets $a^{-\ell} \langle b \rangle$ où ℓ parcourt $\mathbb{N}$.

(3) Si les nombres m et n ne sont pas multiples l'un de l'autre (en particulier on a $|m|, |n| \geqslant 2$), on prend $\gamma = b^n$. Remarquons que

$$(aba^{-1}b^{-1})^\ell \gamma (aba^{-1}b^{-1})^{-\ell} = \gamma \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} .$$

Par suite, γ fixe tous les sommets $(aba^{-1}b^{-1})^k \langle b \rangle$. Les expressions $(aba^{-1}b^{-1})^k$ étant réduites, le lemme de Britton implique que ces sommets dont distincts deux à deux. L'élément γ fixe donc un sous-arbre non borné. □

Remarque A.4.3 *On laisse le soin au lecteur de vérifier par lui-même que la proposition A.0.3 s'applique si* $|m|, |n| \geqslant 2$.

Annexe B

Convergence of Baumslag-Solitar groups

Cette annexe présente le contenu de l'article [42]. Quelques corrections minimes ont été introduites.

Abstract. We study convergent sequences of Baumslag-Solitar groups in the space of marked groups. We prove that $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \to \mathbb{F}_2$ for $|\mathfrak{m}|, |\mathfrak{n}| \to \infty$ and $BS(1,\mathfrak{n}) \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ for $|\mathfrak{n}| \to \infty$. For $\mathfrak{m}$ fixed, $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$, we show that the sequence $(BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))_\mathfrak{n}$ is not convergent and characterize many convergent subsequences. Moreover if $X_\mathfrak{m}$ is the set of $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$'s for $\mathfrak{n}$ relatively prime to $\mathfrak{m}$ and $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$, then the map $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \mapsto \mathfrak{n}$ extends continuously on $\overline{X_\mathfrak{m}}$ to a surjection onto invertible $\mathfrak{m}$-adic integers.

B.1 Introduction

Let $\mathcal{G}_2$ be the space of finitely generated marked groups on two generators (see Section B.2 for definition) and let $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \mid \varnothing \rangle$ be the free group on two generators. Baumslag-Solitar groups are defined by the presentations

$$BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = \langle a, b \mid ab^\mathfrak{m}a^{-1} = b^\mathfrak{n} \rangle$$

for $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. The purpose of the present paper is to understand how Baumslag-Solitar groups are distributed in $\mathcal{G}_2$. More precisely, we determine convergent sequences and in some cases we are able to give the limit group. In the following results, we mark $\mathbb{F}_2$ and $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ by (a, b).

Theorem B.1.1 *For $|\mathfrak{m}|, |\mathfrak{n}| \to \infty$, we have $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \to \mathbb{F}_2$.*

In particular, the property of being Hopfian is not open in $\mathcal{G}_2$ since $BS(2^k, 3^k)$ is known to be non Hopfian for all $k \geqslant 1$ (see [33], Chapter IV, Theorem 4.9.) while $\mathbb{F}_2$ is Hopfian (see [33], Chapter I, Proposition 3.5). Theorem B.1.1 is not so surprising because the length of the relator appearing in the presentation of $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ tends to ∞ when $|\mathfrak{m}|, |\mathfrak{n}| \to \infty$. However, this relator is not the shortest relation in the group for many values of $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. To prove Theorem B.1.1, we give a lower bound for the length of shortest relations in the more general setting of HNN-extensions (see Section B.3).

We now fix the parameter $\mathfrak{m}$. In the case $\mathfrak{m} = \pm 1$, we show that the sequence $(BS(\pm 1, \mathfrak{n}))_{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}}$ is convergent and we can identify the limit.

Theorem B.1.2 *Let the wreath product $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \ltimes \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ be marked by the elements $(1, 0)$ and $(0, e_0)$ where $e_0 \in \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ is the Dirac mass at 0. Then $BS(\pm 1, \mathfrak{n}) \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ when $|\mathfrak{n}| \to \infty$.*

This illustrates the fact that a limit of metabelian groups is metabelian, see [13], Section 2.6.

In the case $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$, we show that the sequence $(BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}))_{\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}}$ is not convergent in $\mathcal{G}_2$. As $\mathcal{G}_2$ is compact, it has convergent subsequences. The next result we state in this introduction, among subsequences, characterizes many convergent ones. However we don't actually know what the limits are. Notice that the result also holds for $\mathfrak{m} = \pm 1$, even if it is in this case weaker than Theorem B.1.2.

Theorem B.1.3 *Let $\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}^*$ and let $(\mathfrak{k}_n)_n$ be a sequence of integers relatively prime to $\mathfrak{m}$. The sequence $(BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n))_n$ is convergent in $\mathcal{G}_2$ if and only if one (and only one) of the following assertions holds:*

(a) $(\mathfrak{k}_n)_n$ is eventually constant;

(b) $|\mathfrak{k}_n| \to \infty$ and $(\mathfrak{k}_n)_n$ is eventually constant modulo $\mathfrak{m}^h$ for all $h \geqslant 1$.

Note that for $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$, condition (b) precisely means that $|\mathfrak{k}_n| \to \infty$ and $(\mathfrak{k}_n)_n$ is convergent in $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$, the ring of $\mathfrak{m}$-adic integers. The link between Baumslag-Solitar groups and $\mathfrak{m}$-adic integers can be made more precise. We define $X_\mathfrak{m}$ to be the set of $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$'s, for $\mathfrak{n}$ relatively prime to $\mathfrak{m}$ and $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$ and we denote by $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}^\times$ the set of invertible elements of $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$.

Theorem B.1.4 *For $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$, the map $\Psi : X_{\mathfrak{m}} \to \mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}^{\times}$; $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \mapsto \mathfrak{n}$ extends continuously to $\overline{X_{\mathfrak{m}}}$. The extension is surjective, but not injective.*

An immediate corollary of Theorem B.1.3 or Theorem B.1.4 is that (for $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$) the sequence $(BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}))_{\mathfrak{n}}$ admits uncountably many accumulation points, namely at least one for each invertible $\mathfrak{m}$-adic integer.

We end this introduction by a remark on markings of Baumslag-Solitar groups. In this paper we always mark the group $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ by the generators coming from its canonical presentation given above. Nevertheless, it is also an interesting approach to consider different markings on $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$. For instance, take $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ greater than 2 and relatively prime, so that $\Gamma = BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ is non-Hopfian, the epimorphism $\phi : \Gamma \to \Gamma$ given by $a \mapsto a$ and $b \mapsto b^{\mathfrak{m}}$ being non-injective (see again [33], Chapter IV, Theorem 4.9.). In [1], the authors consider the sequence of groups $\Gamma_n = \Gamma/\operatorname{Ker}(\phi^n)$ (marked by a and b). They show that the sequence $(\Gamma_n)_n$ converges to an amenable group while, being all isomorphic to Γ as groups, the Γ_n's are not amenable. This allow them to prove that Γ is non-amenable, but not uniformly (cf. Proposition 13.3) and also shows that the property of being amenable is not open in $\mathcal{G}_2$.

Structure of the article. In Section B.2, we give the necessary preliminaries. In Section B.3, we estimate the length of the shortest relations in a HNN-extension and prove Theorem B.1.1. Section B.4 is devoted to the case $\mathfrak{m} = 1$, namely the proof of Theorem B.1.2, and Section B.5 to other one-parameter families of Baumslag-Solitar groups, i.e. the proof of Theorem B.1.3. Finally, we prove Theorem B.1.4 in Section B.6, linking Baumslag-Solitar groups and $\mathfrak{m}$-adic integers.

Acknowledgements. I would like to thank Luc Guyot and Alain Valette for their useful comments and hints, and Indira Chatterji, Pierre de la Harpe, Nicolas Monod and Alain Robert for comments on previous versions.

B.2 Preliminaries

In this Section, we collect some definitions and material which are needed in the rest of the paper. The reader who is familiar with the notions of $\mathfrak{m}$-adic integers, HNN-extensions and topology on the space of marked groups can skip this Section.

The ring of $\mathfrak{m}$-adic integers. For $\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}$, $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$ we define $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ to be the completion of $\mathbb{Z}$ with respect to the ultrametric distance given by the following "absolute value":

$$|a \cdot \mathfrak{m}^k|_\mathfrak{m} := \left(\frac{1}{|\mathfrak{m}|}\right)^k \quad \text{for } a \text{ not a multiple of } \mathfrak{m} \text{ and } k \geqslant 0 \ .$$

(Note that it is not multiplicative in general, but one has $|-x|_\mathfrak{m} = |x|_\mathfrak{m}$ which is sufficient to induce a distance.) The space $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ has a ring structure obtained by continuous extensions of the ring laws for $\mathbb{Z}$ and we call it the *ring of $\mathfrak{m}$-adic integers*. The symbol $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}^\times$ denotes the invertible elements of $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$. The distance induced by $|.|_\mathfrak{m}$ is called the *$\mathfrak{m}$-adic ultrametric distance*, since it satisfies the ultrametric inequality

$$|x - z|_\mathfrak{m} \leqslant \max\big(|x - y|_\mathfrak{m}, |y - z|_\mathfrak{m}\big) \ .$$

As a topological ring, $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ is the projective limit of the system

$$\ldots \to \mathbb{Z}/\mathfrak{m}^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathfrak{m}^{h-1}\mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z}/\mathfrak{m}^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathfrak{m}\mathbb{Z}$$

where the arrows are the canonical (surjective) homomorphisms. This shows that $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ is compact and it is coherent with this characterization to set $\mathbb{Z}_\mathfrak{m} = \{0\}$ for $\mathfrak{m} = \pm 1$. It becomes also nearly obvious that the group of invertible elements of $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ is given by

$$\mathbb{Z}_\mathfrak{m}^\times = \mathbb{Z}_\mathfrak{m} \setminus (p_1\mathbb{Z}_\mathfrak{m} \cup \ldots \cup p_k\mathbb{Z}_\mathfrak{m})$$

where $p_1, \ldots, p_k$ are the prime factors of $\mathfrak{m}$.

To conclude this short summary about $\mathfrak{m}$-adic integers, let us notice that, for $|\mathfrak{m}| > 1$ and $\mathfrak{m}$ not prime, the ring $\mathbb{Z}_\mathfrak{m}$ has zero divisors.

Marked groups and their topology. Introductory expositions of these topics can be found in [12] or [13]. We only recall some basics and what we need in following sections.

The free group on k generators will be denoted $\mathbb{F}_k$, or F_S (with $S = (s_1, \ldots, s_k)$) if we want to precise the names of (canonical) generating elements. A *marked group on k generators* is a pair (Γ, S) where Γ is a group and $S = (s_1, \ldots, s_k)$ is a family which generates Γ. A marked group (Γ, S) comes always with a canonical epimorphism $\phi : \mathbb{F}_S \to \Gamma$, giving an isomorphism of marked groups between $\mathbb{F}_S/\operatorname{Ker}\phi$ and Γ. Hence a class of marked groups can always be represented by a quotient of $\mathbb{F}_S$. In particular if a

group is given by a presentation, this defines a marking on it. The nontrivial elements of $\mathcal{R} := \operatorname{Ker}\phi$ are called *relations* of (Γ, S).

Let $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ be a reduced word in $\mathbb{F}_S$ (with $x_i \in S$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$). The integer n is called the *length* of w and denoted $\ell(w)$. The length of the shortest relation(s) of Γ will be denoted g_Γ, for we observe it is the girth of the Cayley graph of Γ (with respect to the generating set S). In case $\mathcal{R} = \varnothing$, we set $g_\Gamma = +\infty$.

If (Γ, S) is a marked group on k generators, and $\gamma \in \Gamma$ the *length* of γ is

$$\begin{aligned} \ell_\Gamma(\gamma) &:= \min\{n : \gamma = s_1 \cdots s_n \text{ with } s_i \in S \sqcup S^{-1}\} \\ &= \min\{\ell(w) : w \in \mathbb{F}_S,\ \phi(w) = \gamma\}\ . \end{aligned}$$

Let $\mathcal{G}_k$ be the set of marked groups on k generators (up to marked isomorphism). Let us recall that the topology on $\mathcal{G}_k$ comes from the following ultrametric: for $(\Gamma_1, S_1) \neq (\Gamma_2, S_2) \in \mathcal{G}_k$ we set $d\big((\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)\big) := e^{-\lambda}$ where λ is the length of a shortest element of $\mathbb{F}_k$ which vanishes in one group and not in the other one. But what the reader has to keep in mind is the following characterization of convergent sequences.

Proposition B.2.1 *Let (Γ_n, S_n) be a sequence of marked groups (on k generators). The following are equivalent:*

(i) (Γ_n, S_n) is convergent in $\mathcal{G}_k$;

(ii) for all $w \in \mathbb{F}_k$ we have either $w = 1$ in Γ_n for n large enough, or $w \neq 1$ in Γ_n for n large enough.

Proof. (i)⇒(ii): Set $(\Gamma, S) = \lim\limits_{n\to\infty} (\Gamma_n, S_n)$ and take $w \in \mathbb{F}_k$. For n sufficiently large we have $d\big((\Gamma, S), (\Gamma_n, S_n)\big) < e^{-\ell(w)}$, which implies that we have $w = 1$ in Γ_n if and only if $w = 1$ in Γ.

(ii)⇒(i): Set $N = \{w \in \mathbb{F}_k : w = 1 \text{ in } \Gamma_n \text{ for } n \text{ large enough }\}$, $\Gamma = \mathbb{F}_k/N$, and fix $r \geqslant 1$. For n large enough, Γ_n and Γ have the same relations up to length r (for the balls in $\mathbb{F}_k$ are finite) and hence $d(\Gamma, \Gamma_n) < e^{-r}$ (we drop the markings since they are obvious). This implies $\Gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} \Gamma$. □

HNN-extensions and Baumslag-Solitar groups. Suppose now that (H, S) is a marked group on k generators, and that $\phi : A \to B$ is an isomorphism between subgroups of H. The *HNN extension* of H with respect to A, B and ϕ is given by

$$HNN(H, A, B, \phi) := \frac{H * \langle t \rangle}{\mathcal{N}}\ .$$

where $\mathcal{N}$ is the normal subgroup generated by the $t^{-1}at\phi(a)^{-1}$ for $a \in A$. Unless specified otherwise, we always mark a HNN-extension by S and t. An element $\gamma \in HNN(H, A, B, \phi)$ can always be written

$$\gamma = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n \text{ with } n \geqslant 0,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ h_i \in H\ . \tag{B.2.1}$$

The decomposition of γ in (B.2.1) is called *reduced* if no subword of type $t^{-1}at$ (with $a \in A$) or tbt^{-1} (with $b \in B$) appears. We recall the following result, which is called *Britton's Lemma*.

Lemma B.2.2 *([33], Chapter IV.2.) Let $\gamma \in HNN(H, A, B, \phi)$ and write as in (B.2.1) $\gamma = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$. If $n \geqslant 1$ and if the decomposition is reduced, then $\gamma \neq 1$ in $HNN(H, A, B, \phi)$.*

This shows in particular that the integer n appearing in a reduced decomposition is uniquely determined by γ.

Let us finally recall that *Baumslag-Solitar groups* are defined by the presentations $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \left\langle a, b \;\middle|\; ab^{\mathfrak{m}}a^{-1} = b^{\mathfrak{n}} \right\rangle$ for $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^*$. Setting $\phi(\mathfrak{n}k) = \mathfrak{m}k$, we have $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = HNN(\mathbb{Z}, \mathfrak{n}\mathbb{Z}, \mathfrak{m}\mathbb{Z}, \phi)$.

B.3 Shortest relations in a HNN-extension and convergence of Baumslag-Solitar groups

Let (H, S) be a marked group and $\Gamma = HNN(H, A, B, \phi)$. In this Section we give a lower estimate for g_Γ. As a higher estimate, we obviously get $g_\Gamma \leqslant g_H$, because a shortest relation in H is also a relation in Γ. Let us define:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \min\left\{\ell_H(a)\ :\ a \in A \setminus \{1\}\right\}\ ; \\ \beta &:= \min\left\{\ell_H(b)\ :\ b \in B \setminus \{1\}\right\}\ . \end{aligned}$$

Theorem B.3.1 *Let (H, S), Γ, α and β be defined as above. Then we have*

$$\min\{g_H,\ \alpha + \beta + 2,\ 2\alpha + 6,\ 2\beta + 6\} \leqslant g_\Gamma \leqslant g_H\ .$$

As the case of Baumslag-Solitar groups (treated below) will show, the lower bound given in Theorem B.3.1 is in fact sharp. This sharpness is the principal interest of this Theorem, because the estimate $\min\{g_H,\ \alpha,\ \beta\} \leqslant g_\Gamma$, which follows easily from Lemma B.3.2 and Britton's Lemma, suffices to prove Theorem B.1.1 (replace Proposition B.3.3 by the estimate $g_{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})} \geqslant$

$\min(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$). I would like to thank the referee for having pointed this fact to me.

Before proving Theorem B.3.1, let us begin with a simple observation.

Lemma B.3.2 *Let (H, S) and Γ be defined as above and let r be a relation of Γ contained in $\mathbb{F}_S$. Then r is a relation of H. In particular, $\ell(r) \geqslant g_H$.*

PROOF. Since $r = 1$ in Γ and since the canonical map $H \to \Gamma$ is injective, we get $r = 1$ in H. Hence the first assertion. The second one follows by definition of g_H. □

PROOF OF OF THEOREM B.3.1. The second inequality has already been discussed. To establish the first one, let us take a relation r of Γ and show that $\ell(r) \geqslant m$, where we set $m := \min\{g_H,\ \alpha + \beta + 2,\ 2\alpha + 6,\ 2\beta + 6\}$.

Write $r = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$ with $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $h_i \in \mathbb{F}_S$ and $h_i \neq 1$ if $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$. Up to replacement by a (shorter) conjugate, we may assume that r is cyclically reduced. If $n \neq 0$, we may also assume that $h_0 = 1$. Since $r = 1$ in Γ, one clearly has $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$. In particular, n is even. Let us distinguish several cases and show $\ell(r) \geqslant m$ in each one:

Case $n = 0$: We get $r = h_0 \in \mathbb{F}_S$. Thus $\ell(r) \geqslant g_H \geqslant m$ by Lemma B.3.2.

Case $n = 2$: One gets $r = t^{\varepsilon} h_1 t^{-\varepsilon} h_2$. If we look at r in Γ, we have $r = 1$ and thus $h_1 \in A$ (if $\varepsilon = -1$) or $h_1 \in B$ (if $\varepsilon = 1$) by Britton's Lemma. Suppose $\varepsilon = -1$ (in case $\varepsilon = 1$ the proof is similar and left to the reader). Looking at h_1 in $\mathbb{F}_S$, there are two possibilities (remember that we assumed $h_1 \neq 1$).

- If $h_1 = 1$ in Γ, Lemma B.3.2 implies $\ell(r) \geqslant \ell(h_1) \geqslant g_H \geqslant m$.
- If $h_1 \neq 1$ in Γ, then $\ell(h_1) \geqslant \alpha$. On the other hand $h_2^{-1} = t^{-1} h_1 t \in B$; thus $\ell(h_2) \geqslant \beta$ and $\ell(r) \geqslant \alpha + \beta + 2 \geqslant m$.

Case $n \geqslant 4$: We have $r = 1$ in Γ. By Britton's Lemma, there is an index i such that either $\varepsilon_i = -1$, $\varepsilon_{i+1} = 1$ and $h_i \in A$, or $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_{i+1} = -1$ and $h_i \in B$. Since cyclic conjugations preserve length, we may assume $i = 1$, so that $r = t^{\varepsilon_1} h_1 t^{-\varepsilon_1} h_2 t^{\varepsilon_3} h_3 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$. Let us moreover assume $\varepsilon_1 = -1$ (again the case $\varepsilon_1 = 1$ is similar and left to the reader). Set $r' = w h_2 t^{\varepsilon_3} h_3 \cdots t^{\varepsilon_n} h_n$ where $w \in F_X$ is such that $w = t^{-1} h_1 t$ in Γ (in fact this element is in B). Applying Britton's Lemma to r', one sees there exists an index $j \geqslant 3$ such that either $\varepsilon_j = -1 = -\varepsilon_{j+1}$ and $h_j \in A$, or $\varepsilon_j = 1 = -\varepsilon_{j+1}$ and $h_j \in B$. There are three possibilities:

- If $h_1 = 1$ or $h_j = 1$ in Γ, Lemma B.3.2 implies $\ell(r) \geqslant g_H \geqslant m$ as above.
- If $h_1 \neq 1$ in Γ, $h_j \neq 1$ in Γ and $\varepsilon_j = 1$, then $\ell(h_1) \geqslant \alpha$ and $\ell(h_j) \geqslant \beta$. Thus $\ell(r) \geqslant \alpha + \beta + 4 > m$.
- If $h_1 \neq 1$ in Γ, $h_j \neq 1$ in Γ and $\varepsilon_j = -1$, then we write $r = t^{-1}h_1tw_1t^{-1}h_jtw_2$ with $\ell(h_1) \geqslant \alpha$ and $\ell(h_j) \geqslant \alpha$. The subwords w_1, w_2 are not empty because r is cyclically reduced. Thus $\ell(r) \geqslant 2\alpha+6 \geqslant m$ (Remark that $2\alpha + 6$ would be replaced by $2\beta + 6$ in the case $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_j = 1$).

The proof is complete. □

We now turn to prove that for Baumslag-Solitar groups, the lower bound coming from Theorem B.3.1 is in fact the length of the shortest relation. More precisely we have the following statement:

Proposition B.3.3 *Let $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^*$. We have*

$$g_{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})} = \min\left\{|\mathfrak{m}| + |\mathfrak{n}| + 2,\ 2|\mathfrak{m}| + 6,\ 2|\mathfrak{n}| + 6\right\}.$$

Proof. Set $m := \min\{|\mathfrak{m}| + |\mathfrak{n}| + 2,\ 2|\mathfrak{m}| + 6,\ 2|\mathfrak{n}| + 6\}$ and $\Gamma = BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. We have $g_{\mathbb{Z}} = +\infty$, $\alpha = |\mathfrak{n}|$ and $\beta = |\mathfrak{m}|$. Thus, Theorem B.3.1 implies $g_\Gamma \geqslant m$. To prove that $g_\Gamma \leqslant m$, we produce relations of length $|\mathfrak{m}| + |\mathfrak{n}| + 2$, $2|\mathfrak{m}| + 6$, and $2|\mathfrak{n}| + 6$. Namely:

- $ab^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-\mathfrak{n}}$ has length $|\mathfrak{m}| + |\mathfrak{n}| + 2$;
- $ab^{\mathfrak{m}}a^{-1}bab^{-\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-1}$ has length $2|\mathfrak{m}| + 6$;
- $a^{-1}b^{\mathfrak{n}}aba^{-1}b^{-\mathfrak{n}}ab^{-1}$ has length $2|\mathfrak{n}| + 6$.

The proof is complete. □

Theorem B.1.1 of introduction is now a consequence of Proposition B.3.3, since a sequence of groups $\Gamma_n = \langle a, b \mid \mathcal{R}_n\rangle$ converges to the free group on two generators (marked by its canonical basis) if and only if g_{Γ_n} tends to ∞.

B.4 Limit of Solvable Baumslag-Solitar groups

This section is entirely devoted to the proof of Theorem B.1.2. We notice first that $BS(1, \mathfrak{n}) = BS(-1, -\mathfrak{n})$ as marked groups. Thus we may assume

$\mathfrak{m} = 1$. Hence, we let $\Gamma_{\mathfrak{n}} = BS(1, \mathfrak{n})$ and $\Gamma = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, let us set $a = (1, 0)$ and $b = (0, e_0)$. We have to show that for all $w \in \mathbb{F}_2$:

(1) if $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, then $w = 1$ in $BS(1, \mathfrak{n})$ for $|\mathfrak{n}|$ large enough;

(2) if $w \neq 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, then $w \neq 1$ in $BS(1, \mathfrak{n})$ for $|\mathfrak{n}|$ large enough.

Let $w \in \mathbb{F}_2$. One can write $w = a^{\alpha} a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{-\alpha_1} \cdots a^{\alpha_k} b^{\beta_k} a^{-\alpha_k}$ in $\mathbb{F}_2$. The image of w in Γ is $(\alpha, \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_{\alpha_i})$, where $e_j \in \oplus_{h \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ is the Dirac mass at j. Let $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i$. In $\Gamma_{\mathfrak{n}} = BS(1, \mathfrak{n})$, we have

$$\begin{aligned} w &= a^{\alpha} a^{m} a^{\alpha_1 - m} b^{\beta_1} a^{m - \alpha_1} \cdots a^{\alpha_k - m} b^{\beta_k} a^{m - \alpha_k} a^{-m} \\ &= a^{\alpha} a^{m} b^{\beta_1 \mathfrak{n}^{\alpha_1 - m}} \cdots b^{\beta_k \mathfrak{n}^{\alpha_k - m}} a^{-m} \\ &= a^{\alpha} a^{m} b^{\sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\alpha_i = h} \beta_i \right) \mathfrak{n}^{h - m}} a^{-m} \end{aligned}$$

(1) As $w \underset{\Gamma}{=} 1$, we have $\alpha = 0$ and, $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\sum_{\alpha_i = h} \beta_i = 0$. Hence

$$w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} a^0 a^m b^{\sum_{h \in \mathbb{Z}} 0 \cdot \mathfrak{n}^{h-m}} a^{-m} = 1 \ \forall \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^* \ .$$

(2) As $w \underset{\Gamma}{\neq} 1$, either $\alpha \neq 0$ or $\exists h \in \mathbb{Z}$ such that $\sum_{\alpha_i = h} \beta_i \neq 0$. The image of w by the morphism $\Gamma_{\mathfrak{n}} \to \mathbb{Z}$ given by $a \mapsto 1, b \mapsto 0$ is α. Hence, if $\alpha \neq 0$, then $w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{\neq} 1 \ \forall \mathfrak{n}$. If $\alpha = 0$, we set h_0 to be the maximal value of h such that $\sum_{\alpha_i = h} \beta_i \neq 0$. For $|\mathfrak{n}|$ large enough, we have

$$\left| \sum_{\alpha_i = h_0} \beta_i \mathfrak{n}^{h_0 - m} \right| > \left| \sum_{h < h_0} \sum_{\alpha_i = h} \beta_i \mathfrak{n}^{h - m} \right| \ .$$

For those values of $\mathfrak{n}$, we get

$$w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} a^m b^{\left(\sum_{\alpha_i = h_0} \beta_i \right) \mathfrak{n}^{h_0 - m} + \sum_{h < h_0} \left(\sum_{\alpha_i = h} \beta_i \right) \mathfrak{n}^{h - m}} a^{-m} \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{\neq} 1 \ .$$

The proof is complete. □

B.5 General one-parameter families of Baumslag-Solitar groups

We now treat the case $|\mathfrak{m}| \geqslant 2$. More precisely, we begin the proof of Theorem B.1.3. We also have $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = BS(-\mathfrak{m}, -\mathfrak{n})$ as marked groups. This equality will allow us to assume $\mathfrak{m} > 0$ in following proofs. We begin with a Lemma which already shows that the sequence $(BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}))_{\mathfrak{n}}$ is not itself convergent.

Lemma B.5.1 *Let $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^*$, $d = gcd(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. We write $\mathfrak{m} = d\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n} = d\mathfrak{n}_1$. Let $k \in \mathbb{Z}$, $h \geqslant 1$ and*

$$w = a^{h+1}b^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-k}a^{-h}ba^{h+1}b^{-\mathfrak{m}}a^{-1}b^{k}a^{-h}b^{-1} \ .$$

If $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$, we have $w = 1$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ if and only if $\mathfrak{n} \equiv k \ (mod\ \mathfrak{m}_1^h d)$.

The congruence modulo $\mathfrak{m}_1^h d$ (instead of $\mathfrak{m}^h$) is the reason for the hypothesis "$\mathfrak{n}$ relatively prime to $\mathfrak{m}$" appearing in Theorem B.1.3.

PROOF. Let $\Gamma_{\mathfrak{n}} = BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$. We have

$$w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} a^h b^{\mathfrak{n}-k}a^{-h}ba^h b^{k-\mathfrak{n}}a^{-h}b^{-1} \ .$$

Let us now distinguish three cases:

Case 1: $\mathfrak{n} \not\equiv k \pmod{\mathfrak{m}}$.

We have $w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{\neq} 1$ by Britton's Lemma, since $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$.

Case 2: $\mathfrak{n} \not\equiv k \pmod{\mathfrak{m}_1^h d}$, but $\mathfrak{n} \equiv k \pmod{\mathfrak{m}}$.

We write $\mathfrak{n} - k = \ell \mathfrak{m}_1^g d$ with $g < h$ and ℓ not a multiple of $\mathfrak{m}_1$. Hence $\ell \mathfrak{n}_1^g d$ is not a multiple of $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 d$, for $\mathfrak{m}_1$ is relatively prime to $\mathfrak{n}_1$. We have

$$w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} a^{h-g}b^{\ell\mathfrak{n}_1^g d}a^{g-h}ba^{h-g}b^{-\ell\mathfrak{n}_1^g d}a^{g-h}b^{-1} \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{\neq} 1$$

by Britton's Lemma (again because $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$).

Case 3: $\mathfrak{n} \equiv k \pmod{\mathfrak{m}_1^h d}$.

Let us write $\mathfrak{n} - k = \ell \mathfrak{m}_1^h d$. Then $w \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} b^{\ell\mathfrak{n}_1^h d}bb^{-\ell\mathfrak{n}_1^h d}b^{-1} \underset{\Gamma_{\mathfrak{n}}}{=} 1$. □

PROOF OF OF THEOREM B.1.3. The "if" part is a particular case of Theorem B.5.2 below.

We prove now the "only if" part. Let $\Gamma_n = BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n)$. We assume the sequence $(\Gamma_n)_n$ to converge and condition (a) not to hold. We have to show that condition (b) holds.

Fix $h \geqslant 1$. For $k \in \mathbb{Z}$ we set

$$w_k = a^{h+1}b^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-k}a^{-h}ba^{h+1}b^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{k}a^{-h}b^{-1} \ .$$

As $(\Gamma_n)_n$ converges, we have (for each $k \in \mathbb{Z}$) either $w_k \underset{\Gamma_n}{=} 1$ for n large enough, or $w_k \underset{\Gamma_n}{\neq} 1$ for n large enough. As $\mathfrak{k}_n$ is relatively prime to $\mathfrak{m}$ for all n, Lemma B.5.1 ensures that (for each $k \in \mathbb{Z}$) either $\mathfrak{k}_n \equiv k \pmod{\mathfrak{m}^h}$ for n large enough, or $\mathfrak{k}_n \not\equiv k \pmod{\mathfrak{m}^h}$ for n large enough. This implies that $\mathfrak{k}_n$ is eventually constant modulo $\mathfrak{m}^h$ $(\forall h \geqslant 1)$.

It remains to show that $|\mathfrak{k}_n| \to \infty$. Assume by contradiction that there exists some $\ell \in \mathbb{Z}$ such that $\mathfrak{k}_n = \ell$ for infinitely many n. As (a) does not hold (i.e $(\mathfrak{k}_n)_n$ is not eventually constant), it is sufficient to treat the two following cases:

Case 1: $\exists \ell' \neq \ell$ such that $\mathfrak{k}_n = \ell'$ for infinitely many n.
Take h large enough so that $\mathfrak{m}^h > |\ell - \ell'|$. The sequence $\mathfrak{k}_n$ cannot be eventually constant modulo $\mathfrak{m}^h$, in contradiction with the first part of the proof.

Case 2: $\exists$ a subsequence $(\mathfrak{k}_{n_j})_j$ of $(\mathfrak{k}_n)_n$ such that $|\mathfrak{k}_{n_j}| \to \infty$.
We set $w = ab^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-\ell}$. For infinitely many n (those values for which $\mathfrak{k}_n = \ell$), we have $w \underset{\Gamma_n}{=} 1$. On the other hand $|\mathfrak{k}_{n_j}| > \ell$ for j large enough. For these values of j, we have

$$w \underset{\Gamma_{n_j}}{=} b^{\mathfrak{k}_{n_j}-\ell} \underset{\Gamma_{n_j}}{\neq} 1 \ .$$

This contradicts the assumption on the sequence $(\Gamma_n)_n$ to converge. □

What remains now to do is to prove the following Theorem, which is a little bit more general than the "if" part of Theorem B.1.3. The proof will need some preliminary lemmas.

Theorem B.5.2 *Let $\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}^*$ and let $(\mathfrak{k}_n)_n$ be a sequence in $\mathbb{Z}^*$. If $|\mathfrak{k}_n| \to \infty$ and if $\forall h \geqslant 1$ the sequence $(\mathfrak{k}_n)_n$ is eventually constant modulo $\mathfrak{m}^h$, then the sequence $(BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n))_n$ is convergent in $\mathcal{G}_2$.*

Lemma B.5.3 *Let $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}' \in \mathbb{Z}^*$ and $h \geqslant 1$. If $\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}'$ $(mod\ \mathfrak{m}^h)$, there exists $s_0, \ldots, s_h$; $s'_0, \ldots, s'_h$; $r_1, \ldots, r_h$, which are unique, such that:*

(i) $0 \leqslant r_i < \mathfrak{m}\ \forall i$; $s_0 = 1 = s'_0$;

(ii) $s_{i-1}\mathfrak{n} = s_i\mathfrak{m} + r_i$ *and* $s'_{i-1}\mathfrak{n}' = s'_i\mathfrak{m} + r_i\ \forall 1 \leqslant i \leqslant h$;

(iii) $s_i \equiv s'_i$ $(mod\ \mathfrak{m}^{h-i})\ \forall 0 \leqslant i \leqslant h$.

Proof. Given the congruence $\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}'$ (mod $\mathfrak{m}^h$), we obtain (by Euclidean division) $s_0\mathfrak{n} = \mathfrak{n} = s_1\mathfrak{m} + r_1$ and $s'_0\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}' = s'_1\mathfrak{m} + r_1$ with $0 \leqslant r_1 \leqslant \mathfrak{m}$ and $s_1 \equiv s'_1$ (mod $\mathfrak{m}^{h-1}$). Hence we have $s_1\mathfrak{n} \equiv s'_1\mathfrak{n}'$ (mod $\mathfrak{m}^{h-1}$). (Let us emphasize that we do not necessary have $s_1\mathfrak{n} \equiv s'_1\mathfrak{n}'$ (mod $\mathfrak{m}^h$).)

Now, it just remains to iterate the above and uniqueness follows from construction. □

Given a word w in $\mathbb{F}_2$, we may use Britton's Lemma to reduce it in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ or $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$. But w could be reducible in one of these groups

and not in the other one. Even if it is reducible in both groups the result is not the same word in general. The purpose of next statement is, under some assumptions, to control the parallel process of reduction in both groups. This will be useful to ensure that w is a relation in $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ if and only if it is one in $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}')$ (under some assumptions).

Lemma B.5.4 *Let $\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{n}' \in \mathbb{Z}^*$ and $h \geqslant m \geqslant 1$. Assume that $\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}'$ $(mod\ \mathfrak{m}^h)$ and let*

$$\begin{aligned} \alpha &= k_0 + k_1\mathfrak{n} + k_2 s_1\mathfrak{n} + \ldots + k_m s_{m-1}\mathfrak{n} \\ \alpha' &= k_0 + k_1\mathfrak{n}' + k_2 s'_1\mathfrak{n}' + \ldots + k_m s'_{m-1}\mathfrak{n}' \end{aligned}$$

where $s_0,\ldots,s_h$; $s'_0,\ldots,s'_h$; $r_1,\ldots,r_h$ are given by Lemma B.5.3. We assume moreover that we have $|k_0| < \min(|\mathfrak{n}|,|\mathfrak{n}'|)$.

(i) We have $\alpha \equiv 0$ $(mod\ \mathfrak{m})$ if and only if $\alpha' \equiv 0$ $(mod\ \mathfrak{m})$. If this happens we get $ab^\alpha a^{-1} \underset{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})}{=} b^\beta$ and $ab^{\alpha'}a^{-1} \underset{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}')}{=} b^{\beta'}$ with

$$\begin{aligned} \beta &= \ell_1\mathfrak{n} + \ell_2 s_1\mathfrak{n} + \ldots + \ell_{m+1} s_m\mathfrak{n} \\ \beta' &= \ell_1\mathfrak{n}' + \ell_2 s'_1\mathfrak{n}' + \ldots + \ell_{m+1} s'_m\mathfrak{n}' \ . \end{aligned}$$

(ii) We have $\alpha \equiv 0$ $(mod\ \mathfrak{n})$ if and only if $\alpha' \equiv 0$ $(mod\ \mathfrak{n}')$. If this happens we get $a^{-1}b^\alpha a \underset{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})}{=} b^\beta$ and $a^{-1}b^{\alpha'}a \underset{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}')}{=} b^{\beta'}$ with

$$\begin{aligned} \beta &= \ell_0 + \ell_1\mathfrak{n} + \ell_2 s_1\mathfrak{n} + \ldots + \ell_{m-1} s_{m-2}\mathfrak{n} \\ \beta' &= \ell_0 + \ell_1\mathfrak{n}' + \ell_2 s'_1\mathfrak{n}' + \ldots + \ell_{m-1} s'_{m-2}\mathfrak{n}' \ . \end{aligned}$$

Proof. (i) We have $\alpha \equiv \alpha' \pmod{\mathfrak{m}}$ by construction. Assume now that $\alpha \equiv 0$ and $\alpha' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. We have

$$\alpha = k_0 + k_1 r_1 + \ldots + k_m r_m + k_1 s_1\mathfrak{m} + \ldots + k_m s_m\mathfrak{m} \ .$$

As $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, we obtain $ab^\alpha a^{-1} \underset{BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n})}{=} b^\beta$ with

$$\beta = \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}(k_0 + k_1 r_1 + \ldots + k_m r_m) + k_1 s_1\mathfrak{n} + \ldots + k_m s_m\mathfrak{n}$$

Thus we set $\ell_1 = \frac{1}{\mathfrak{m}}(k_0 + k_1 r_1 + \ldots + k_m r_m)$ and $\ell_i = k_{i-1}$ for $2 \leqslant i \leqslant m+1$, and doing the same calculation with α' in $BS(\mathfrak{m},\mathfrak{n}')$, we obtain also

$$\beta' = \ell_1\mathfrak{n}' + \ell_2 s'_1\mathfrak{n}' + \ldots + \ell_{m+1} s'_m\mathfrak{n}' \ .$$

(ii) As $|\mathfrak{n}| > |k_0|$ and $|\mathfrak{n}'| > |k_0|$, we have $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}}$ if and only if $k_0 = 0$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}'}$. Suppose now that it is the case. We have $ab^\alpha a^{-1} = b^\beta$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ with

$$\begin{aligned} \beta &= k_1\mathfrak{m} + k_2 s_1\mathfrak{m} + \ldots + k_m s_{m-1}\mathfrak{m} \\ &= k_1\mathfrak{m} - k_2 r_1 - \ldots - k_m r_{m-1} + k_2\mathfrak{n} + k_3 s_1\mathfrak{n} + \ldots + k_m s_{m-2}\mathfrak{n} \ . \end{aligned}$$

Hence we set $\ell_0 = k_1\mathfrak{m} - k_2 r_1 - \ldots - k_m r_{m-1}$ and $\ell_i = k_{i+1}$ for $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Again, doing the same calculation with α' in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$, we obtain also

$$\beta' = \ell_0 + \ell_1\mathfrak{n}' + \ell_2 s'_1\mathfrak{n}' + \ldots + \ell_{m-1} s'_{m-2}\mathfrak{n}' \ .$$

This completes the proof. □

Lemma B.5.5 *Let $\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}^*$, let $(\mathfrak{k}_n)_n$ be a sequence in $\mathbb{Z}^*$ such that $|\mathfrak{k}_n| \to \infty$ and $\forall h \geqslant 1$ $(\mathfrak{k}_n)_n$ is eventually constant modulo $\mathfrak{m}^h$ and let $w \in \mathbb{F}_2$. Then, the following alternative holds:*

(a) either $w = b^{\lambda_n}$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n)$ for n large enough;

(b) or w is in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n) \setminus \langle b \rangle$ for n large enough.

Proof. We define $\Gamma_n = BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n)$. Let us write $w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_m} b^{\alpha_m}$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, reduced in the sense that $\alpha_i = 0$ implies $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i$ for all $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. We assume (b) not to hold, i.e. $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n for infinitely many n. Then the sum $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$ has clearly to be zero (in particular m is even). We have to show that $w = b^{\lambda_n}$ for n large enough.

For n large enough, we may assume that, $|\mathfrak{k}_n| > |\alpha_j|$ for all $1 \leqslant j \leqslant m$ and the $\mathfrak{k}_n$'s are all congruent modulo $\mathfrak{m}^m$. We take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n (there are infinitely many ones) and apply Britton's Lemma. This ensures the existence of an index j such that $\varepsilon_j = 1 = -\varepsilon_{j+1}$ and $\alpha_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ (since $|\mathfrak{k}_n| > |\alpha_j|$ for all j). By Lemma B.5.4, for all n large enough

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha_0} \cdots a^{\varepsilon_{j-1}} b^{\alpha_{j-1} + \beta_j + \alpha_{j+1}} a^{\varepsilon_{j+2}} \cdots b^{\alpha_m}$$

with $\beta_j = \ell_1 \mathfrak{k}_n$ (depending on n). Hence we are allowed to write

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha'_{0,n}} a^{\varepsilon'_1} b^{\alpha'_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon'_{m-2,n}} b^{\alpha'_{m-2,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon'_i = \pm 1$ and $\alpha'_{j,n} = k'_{0,j} + k'_{1,j}\mathfrak{k}_n$, where the $k'_{i,j}$'s do not depend on n.

Now, for n large enough, we may assume that, $|\mathfrak{k}_n| > |k'_{0,j}|$ for all $1 \leqslant j \leqslant m-1$ (and the $\mathfrak{k}_n$'s are all congruent modulo $\mathfrak{m}^m$). Again we take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n and apply Britton's Lemma. This ensures the existence of an index j such that either $\varepsilon'_j = 1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, or $\varepsilon'_j = -1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{k}_n}$. In both cases, while applying Lemma B.5.4, we obtain

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha''_{0,n}} a^{\varepsilon''_1} b^{\alpha''_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon''_{m-4,n}} b^{\alpha''_{m-4,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon''_i = \pm 1$ and $\alpha''_{j,n} = k''_{0,j} + k''_{1,j}\mathfrak{k}_n + k''_{2,j}s_{1,n}\mathfrak{k}_n$, where the $k''_{i,j}$'s do not depend on n.

And so on, and so forth, setting $m' = \frac{m}{2}$, we get finally $w = b^{\alpha^{(m')}_{0,n}}$ in Γ_n for n large enough, with

$$\alpha^{(m')}_{0,n} = k^{(m')}_{0,0} + k^{(m')}_{1,0}\mathfrak{k}_n + k^{(m')}_{2,0}s_{1,n}\mathfrak{k}_n + \ldots + k^{(m')}_{m',0}s_{m'-1,n}\mathfrak{k}_n$$

where the $k^{m'}_{i,0}$'s do not depend on n. It only remains to set $\lambda_n = \alpha^{(m')}_{0,n}$. □

Let us now introduce the homomorphisms $\psi_{\mathfrak{n}} : BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ (for $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}^*$) given by $\psi_{\mathfrak{n}}(a)(x) = \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}x$ and $\psi_{\mathfrak{n}}(b)(x) = x + 1$.

Lemma B.5.6 *Let $w \in \mathbb{F}_2$. We have either $\psi_{\mathfrak{n}}(w) = 1$ for $|\mathfrak{n}|$ large enough or $\psi_{\mathfrak{n}}(w) \neq 1$ for $|\mathfrak{n}|$ large enough.*

Proof. Let us write $w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1}\ldots a^{\varepsilon_k}b^{\alpha_k}$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Set next $\sigma_0 = 0$, $\sigma_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ for $1 \leqslant i \leqslant k$ and $m = \min_{0 \leqslant i \leqslant k} \sigma_i$. We get by calculation that

$$\psi_{\mathfrak{n}}(w)(x) = \left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}\right)^{\sigma_k} x + \left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}\right)^{m} P_w\left(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}\right)$$

where P_w is the polynomial defined by $P_w(y) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y^{\sigma_i - m}$. Let us assume the second term of alternative not to hold, i.e. $\psi_{\mathfrak{n}}(w) = 1$ for infinitely many values of $\mathfrak{n}$. Hence we have $\sigma_k = 0$ and for all those values of $\mathfrak{n}$, $P_w(\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}) = 0$. As P_w is a polynomial with infinitely many roots, it is the zero polynomial. This shows that $\psi_{\mathfrak{n}}(w) = 1$ for all $\mathfrak{n}$. □

Proof of of Theorem B.5.2. It is easy to show that a word w is equal to 1 in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ if and only if it is in the subgroup generated by b and $\psi_{\mathfrak{n}}(w) = 1$. It is also a consequence of (the proof of) Theorem 1 in [24]. Let $w \in \mathbb{F}_2$. Lemmas B.5.5 and B.5.6 immediately imply that either $w = 1$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n)$ for n large enough or $w \neq 1$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}_n)$ for n large enough. □

Theorem B.1.3 is now completely established.

B.6 Baumslag-Solitar groups and $\mathfrak{m}$-adic integers

This last section is entirely devoted to the proof of Theorem B.1.4. We show first that the map Ψ is uniformly continuous. In view of the distances we put on $\mathcal{G}_2$ and $\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}^{\times}$, it is equivalent to show that for any $h \geqslant 1$ there exists $r \geqslant 1$ such that we have $\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}' \pmod{\mathfrak{m}^h}$ whenever $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ and $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$ (taken in $X_{\mathfrak{m}}$) have the same relations up to length r.

Fix $h \geqslant 1$. Our candidate is $r = 2\mathfrak{m}^h + 4h + 2\mathfrak{m} + 4$. Assume that $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ and $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$ have the same relations up to length r. For $0 \leqslant k \leqslant \mathfrak{m}^h - 1$ let

$$w_k = a^{h+1} b^{\mathfrak{m}} a^{-1} b^{-k} a^{-h} b a^{h+1} b^{\mathfrak{m}} a^{-1} b^{k} a^{-h} b^{-1} \ .$$

(Remark that these words are exactly those which appear in the proof of the "only if" part of theorem B.1.3. We are in fact improving this proof in order to get the uniform continuity.) We have $\ell(w_k) \leqslant r$ for all k. Having by assumption $w = 1$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ if and only if $w = 1$ in $BS(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}')$, Lemma B.5.1 implies $\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}' \pmod{\mathfrak{m}^h}$.

The space $\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}^{\times}$ being complete and the uniform continuity of Ψ being now proved, the existence of a (unique) uniformly continuous extension $\overline{\Psi}$ on $\overline{X_{\mathfrak{m}}}$ is a standard fact (see [20], Chapter XIV, Theorem 5.2. for instance).

Let us now show that $\overline{\Psi}$ is surjective. The space $\overline{X_{\mathfrak{m}}}$ being compact, $\mathrm{im}(\overline{\Psi})$ is closed in $\mathbb{Z}_{\mathfrak{m}}^{\times}$. Moreover it is dense since it contains the set of $\mathfrak{n}$'s relatively prime to $\mathfrak{m}$ and such that $|\mathfrak{n}| \geqslant 2$.

Finally, we consider the sequence $(BS(\mathfrak{m}, 1 + \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^n))_n$, which is convergent by theorem B.1.3 and we call the limit Γ. We have $\overline{\Psi}(\Gamma) = 1 + \mathfrak{m} = \overline{\Psi}(BS(\mathfrak{m}, 1 + \mathfrak{m}))$. On the other hand, we have $\Gamma \neq BS(1 + \mathfrak{m})$, since $ab^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-(\mathfrak{m}+1)} = 1$ in $BS(\mathfrak{m}, 1 + \mathfrak{m})$ while $ab^{\mathfrak{m}}a^{-1}b^{-(\mathfrak{m}+1)} \neq 1$ in $BS(\mathfrak{m}, 1 + \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^n)$ for all n. This is the non-injectivity of $\overline{\Psi}$ and completes the proof. $\square$

Annexe C

Limits of Baumslag-Solitar groups and other families of groups with parameters

Cette annexe présente le contenu de l'article [27], qui est le fruit d'une collaboration entre Luc Guyot et l'auteur. Quelques corrections ont été introduites.

Abstract. We give a description and some algebraic properties of groups obtained as limit of Baumslag-Solitar groups marked with a canonical set of generators. We discuss other examples of converging families of marked groups with parameters.

Introduction

The set of marked groups on k generators (see section C.1 for definitions) was given a natural topology which turns it to a compact totally disconnected space. This topology received several names: "topology on marked groups", "Cayley topology", "Grigorchuk topology"... The principle is that two marked groups are close if there are large balls of their Cayley graphs which are the same.

This topology has been used for several purposes. Let us cite the following examples :

- Stepin [44] used it to prove the existence of amenable but non elementary amenable groups.
- To prove that every finitely generated Kazhdan group is a quotient of some finitely *presented* Kazhdan group, Shalom proved in [40] that Kazhdan's property (T) defines an open subset of the space of marked groups.
- In [13], Champetier et Guirardel gave a characterization of limit groups of Sela in terms of the topology on marked groups.

There also exists several papers about questions whose formulation involves the topology on marked groups language. Let us cite the following ones :

- In [12], Champetier showed that the quotient of the space of marked groups on k generators by the group isomorphism relation is not a standard Borel space. He also studied the closure of non elementary hyperbolic groups.
- In [42], the second author gave an almost complete characterization of convergent sequences among Baumslag-Solitar groups.

We are interested in the closure of Baumslag-Solitar groups and its elements, which we study for their own right. Theorem 6 of [42] allows us to define the following elements of the closure (Definition C.1.6):

$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,\xi_n)$$

where $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$, ξ_n is any sequence of integers such that $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and $|\xi_n| \to \infty$ (for $n \to \infty$).

Outline of the paper and description of results Section C.1 contains the material we want to recall and the definitions of the main groups appearing in the article.

In the spirit of [42], we treat in Section C.2 the problem of convergence of Torus knots groups. The solution happens to be simpler than for Baumslag-Solitar groups; indeed, the torus knot groups depend on two parameters p, q, but fixing p and letting q go to ∞, one only gets convergent sequences (Proposition C.2.1). We also discuss the cases of Baumslag-Solitar groups with changing markings (Theorem C.2.4) and other Baumslag's one-relator groups (Proposition C.2.5).

Section 3 achieves the characterization, which was not complete in [42], of convergent sequences of Baumslag-Solitar groups (Theorem C.3.7) and gives a necessary and sufficient condition for marked groups $\overline{BS}(m,\xi)$ and $\overline{BS}(m,\eta)$ to be equal (Corollary C.3.10).

In Section C.4, we show that the map $\mathbb{Z}_m \to \mathcal{G}_2; \xi \mapsto \overline{BS}(m,\xi)$ is continuous and injective on $\mathbb{Z}_m^\times$.

It is well-known that a Baumslag-Solitar group acts on its Bass-Serre tree by automorphisms and on $\mathbb{Q}$ by affine transformations. Section C.5 is devoted to construct actions of $\overline{BS}(m,\xi)$. First $\overline{BS}(p,\xi)$ acts affinely on $\mathbb{Q}_p$ when p is a prime (Theorem C.5.1). Second, we construct an action of $\overline{BS}(m,\xi)$ by automorphisms on a tree which is in some sense a "limit" of Bass-Serre trees (Theorem C.5.3).

The tree action allows us to prove in Section C.6 that the $\overline{BS}(m,\xi)$'s are extensions of free groups by the wreath product $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (Theorem C.6.2), so that they have the Haagerup property (Corollary C.6.4).

We finally deal in Section C.7 with presentations of the $\overline{BS}(m,\xi)$'s. We show first that almost none of them is finitely presented (Proposition C.7.1). Second, we exhibit a presentation, which is again related to the tree action (Theorem C.7.4).

Acknowledgements We would like to thank Laurent Bartholdi for having pointed out Theorem C.2.4 (a) to us. We would also thank our advisors, Goulnara Arzhantseva and Alain Valette, for their comments on previous versions of this article.

C.1 Definitions and preliminaries

C.1.1 The ring of m-adic integers

Let $m \in \mathbb{Z}^*$. Recall that the ring of m-adic integers $\mathbb{Z}_m$ is the projective limit (in the category of topological rings) of the system

$$\ldots \to \mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m^{h-1}\mathbb{Z} \to \ldots \to \mathbb{Z}/m^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

where the arrows are the canonical (surjective) homomorphisms. This shows that $\mathbb{Z}_m$ is compact. We collect now some easy facts about m-adic integers which are useful in following sections.

Proposition C.1.1 *Let m be a nonzero integer and let $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ be its decomposition in prime factors:*

(a) One has an isomorphism of topological rings $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$. In particular, for m not prime, the ring $\mathbb{Z}_m$ has zero divisors.

(b) The group of invertible elements of $\mathbb{Z}_m$ is given by

$$\mathbb{Z}_m^\times = \mathbb{Z}_m \setminus (p_1\mathbb{Z}_m \cup \ldots \cup p_k\mathbb{Z}_m) \ ;$$

(c) Any ideal of $\mathbb{Z}_m$ is principal. Moreover any ideal of $\mathbb{Z}_m$ containing a nonzero integer can be written $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$ with $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$.

(d) Assume $|m| \geq 2$. For any $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$, one has $\mathbb{Z} \cap p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}$.

PROOF. Notice first that statements (a)-(c) are trivial in case $|m| = 1$ (i.e. $\ell = 0$). We assume then $|m| \geqslant 2$ in what follows.

(a) Consider the following commutative diagrams (for $h \geqslant 2$):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/m^{h-1}\mathbb{Z} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \bigoplus_{s=1}^{\ell} \mathbb{Z}/p_s^{hk_s}\mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{s=1}^{\ell} \mathbb{Z}/p_s^{(h-1)k_s}\mathbb{Z} \ . \end{array}$$

Passing to projective limits gives $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$.

(b) For any prime p, it is well known that the group of invertible p-adic integers is $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$. In view of (a), the conclusion follows obviously.

(c) Let I be an ideal of $\mathbb{Z}_m$. It corresponds by (a) to an ideal of $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$, which has to have the form $I_1 \oplus \ldots \oplus I_\ell$ where I_s is an ideal of $\mathbb{Z}_{p_s}$. Since it is well known, for any prime p, that the nonzero ideals of $\mathbb{Z}_p$ are exactly the $p^h\mathbb{Z}_p$'s for $h \in \mathbb{N}$, one gets, for every s, $I_s = p_s^{i_s}\mathbb{Z}_{p_s}$ or $I_s = 0$. Set $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\ell)$ with $\xi_s = p_s^{i_s}$ if $I_s = p_s^{i_s}\mathbb{Z}_{p_s}$ and $\xi_s = 0$ if $I_s = 0$. Set $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_\ell = (0, \ldots, 0, 1)$. The ideal I is obviously generated by $e_1\xi, \ldots, e_\ell\xi$, hence by ξ. Consequently, I is a principal ideal.

Assume now that I contains a nonzero integer k. Since k does not vanish in any $\mathbb{Z}_{p_s}$, one has $I = p_1^{i_1}\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \ldots \oplus p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_{p_\ell}$ with $i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}$ and $\xi = (p_1^{i_1}, \ldots, p_\ell^{i_\ell})$. Setting $\eta_s = \prod_{t \neq s} p_t^{i_t}$, we obtain an invertible element $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\ell)$ such that $\eta\xi = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell} \cdot (1, \ldots, 1)$. This implies $I = p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$.

(d) The inclusion $\supseteq$ is obvious. To show the converse, take $n \in \mathbb{Z} \cap p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$. For any s, consider the following sequence of (canonical) morphisms

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}/m^{i_s}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_s^{i_s}\mathbb{Z}$$

whose composition is the canonical projection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_s^{i_s}\mathbb{Z}$. Since n is in $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$, it is in the kernel of all those maps and thus in $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}$. □

Definition C.1.2 *Let m be an integer such that $|m| \geqslant 2$ and let $p_1, \ldots, p_\ell$ be its prime factors. If E is a subset of $\mathbb{Z}_m$ containing a nonzero integer, the* greatest common divisor (gcd) *of the elements of E is the (unique) number $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}$ (with $i_1, \ldots, i_\ell \in \mathbb{N}$) such that the ideal generated by E is $p_1^{i_1} \cdots p_\ell^{i_\ell}\mathbb{Z}_m$.*

If $|m| = 1$, we set by convention $gcd(\mathbb{Z}_m) = 1$.

Lemma C.1.3 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and let m' be a divisor of m. Let us write $m' = \pm p_1^{j_1} \cdots p_{\ell'}^{j_{\ell'}}$ and $m = \pm p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ their decomposition in prime factors ($\ell' \leqslant \ell$ and $j_s \leqslant k_s$ for all $s = 1, \ldots, \ell'$). Let $\pi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m'}$ the morphism induced by projections $\mathbb{Z}/m^h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m'^h\mathbb{Z}$ (for $h \geqslant 1$). Then the following holds:*

(a) One has $\pi(n) = n$ for any integer n;

(b) For any $d = \pm p_1^{i_1} \cdots p_{\ell'}^{i_{\ell'}}$ with $i_1, \ldots, i_{\ell'} \in \mathbb{N}$, one has $\pi^{-1}(d\mathbb{Z}_{m'}) = d\mathbb{Z}_m$.

Proof. Assertion (a) is obvious. The morphism π corresponds by Proposition C.1.1 (a) to the projection

$$\bigoplus_{s=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{p_s} \twoheadrightarrow \bigoplus_{s=1}^{\ell'} \mathbb{Z}_{p_s} \ .$$

For any d, one has then clearly

$$\pi^{-1}(d\mathbb{Z}_{m'}) = \pi^{-1}\left(\bigoplus_{s=1}^{\ell'} p_s^{i_s}\mathbb{Z}_{p_s}\right) = \bigoplus_{s=1}^{\ell'} p_s^{i_s}\mathbb{Z}_{p_s} \oplus \bigoplus_{s=\ell'+1}^{\ell} \mathbb{Z}_{p_s} = d\mathbb{Z}_m,$$

which proves (b). □

C.1.2 Marked groups and their topology

Introductory expositions of these topics can be found in [12] or [13]. We only recall some basics and what we need in following sections.

The free group on k generators will be denoted by $\mathbb{F}_k$, or $\mathbb{F}_S$ (with $S = (s_1, \dots, s_k)$) if we want to precise the names of (canonical) generating elements. A *marked group on k generators* is a pair (Γ, S) where Γ is a group and $S = (s_1, \dots, s_k) \in \Gamma^k$ is a family which generates Γ. A marked group (Γ, S) comes always with a canonical epimorphism $\phi : \mathbb{F}_S \to \Gamma$, giving an isomorphism of marked groups between $\mathbb{F}_S/\operatorname{Ker}\phi$ and Γ. Hence a class of marked groups can always be represented by a quotient of $\mathbb{F}_S$. In particular if a group is given by a presentation, this defines a marking on it. The nontrivial elements of $\mathcal{R} := \operatorname{Ker}\phi$ are called *relations* of (Γ, S). Given $w \in \mathbb{F}_k$ we will often write "$w = 1$ in Γ" or "$w \underset{\Gamma}{=} 1$" to say that the image of w in Γ is trivial.

Let $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ be a reduced word in $\mathbb{F}_S$ (with $x_i \in S$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$). The integer n is called the *length* of w and denoted $|w|$. If (Γ, S) is a marked group on k generators and $\gamma \in \Gamma$, the *length* of γ is

$$\begin{aligned} |\gamma|_\Gamma &:= \min\{n : \gamma = s_1 \cdots s_n \text{ with } s_i \in S \sqcup S^{-1}\} \\ &= \min\{|w| : w \in \mathbb{F}_S,\ \phi(w) = \gamma\}\ . \end{aligned}$$

Let $\mathcal{G}_k$ be the set of marked groups on k generators (up to marked isomorphism). Let us recall that the topology on $\mathcal{G}_k$ comes from the following ultrametric: for $(\Gamma_1, S_1) \neq (\Gamma_2, S_2) \in \mathcal{G}_k$ we set $d\big((\Gamma_1, S_1), (\Gamma_2, S_2)\big) := e^{-\lambda}$ where λ is the length of a shortest element of $\mathbb{F}_k$ which vanishes in one group and not in the other one. But what the reader has to keep in mind is the following characterization of convergent sequences.

Lemma C.1.4 *[42, Proposition 1] Let $(G_n)_{n\geqslant 0}$ be a sequence of marked groups in $\mathcal{G}_k$. The sequence $(G_n)_{n\geqslant 0}$ is converging if and only if for any $w \in \mathbb{F}_k$, we have either $w = 1$ in G_n for n large enough, or $w \neq 1$ in G_n for n large enough.*

The reader could remark that the latter condition characterizes exactly Cauchy sequences. Another useful statement we will use in the paper is the following:

Lemma C.1.5 *[13, Lemma 2.3] If a sequence $(G_n)_{n\geqslant 0}$ in $\mathcal{G}_k$ is converging*

to a marked group $G \in \mathcal{G}_k$ which is given by a finite presentation, then, for n large enough, G_n is a marked quotient of G.

We address the reader to the given references for proofs.

C.1.3 Notations and conventions

We give now some notations and conventions which hold in the whole paper. First, recall that we define the Baumslag-Solitar groups by

$$BS(m,n) = \left\langle a, b \;\middle|\; ab^m a^{-1} = b^n \right\rangle \ (m, n \in \mathbb{Z}^*) \ .$$

Then, we define a new family of groups in the following way:

Definition C.1.6 *For $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, one defines a marked group on two generators $\overline{BS}(m,\xi)$ by the formula*

$$\overline{BS}(m,\xi) = \lim_{n\to\infty} BS(m,\xi_n)$$

where ξ_n is any sequence of integers such that $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and $|\xi_n| \to \infty$ (for $n \to \infty$).

Notice that $\overline{BS}(m,\xi)$ is well defined for any $\xi \in \mathbb{Z}_m$ by Theorem 6 of [42]. Note also that for any $n \in \mathbb{Z}^*$, one has $\overline{BS}(m,n) \neq BS(m,n)$. Indeed, the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$ represents the identity element in $BS(m,n)$, but not in $\overline{BS}(m,n)$.

When appearing as marked groups, the free group $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}(a,b)$, the Baumslag-Solitar groups and the groups $\overline{BS}(m,\xi)$ are all (unless stated otherwise) supposed to be marked by the pair (a,b).

Another group which plays an important role in this article is

$$\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \ltimes_t \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \cong \mathbb{Z} \ltimes_s \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

where the generator of the first copy of $\mathbb{Z}$ acts on $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ by multiplication by t or, equivalently, on $\bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ by shifting the indices. This group is assumed (unless specified otherwise) to be marked by the generating pair consisting of elements $(1,0)$ and $(0,t^0)$.

The last groups we introduce here are $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$ $(m,n \in \mathbb{Z}^*)$ where the generator of the first copy of $\mathbb{Z}$ acts on $\mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$ by multiplication by $\frac{n}{m}$. This group is assumed (unless specified otherwise) to be marked by the generating pair consisting of elements $(1,0)$ and $(0,1)$. The

latter elements are the images of $(1,0)$ and $(0,t^0)$ by the homomorphism $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$ given by the evaluation $t = \frac{n}{m}$; they are also the images of the elements a and b of $BS(m,n)$ by the homomorphism defined by $a \mapsto (1,0)$ and $b \mapsto (0,1)$. Notice finally that the group $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$ acts affinely on $\mathbb{Q}$ (or $\mathbb{R}$) by $(1,0) \cdot x = \frac{n}{m}x$ and $(0,y) \cdot x = x + y$.

We introduce the homomorphism $\sigma_a : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}$ defined by $\sigma_a(a) = 1$ and $\sigma_a(b) = 0$. It factories through all groups $BS(m,n), \overline{BS}(m,\xi), \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$. The induced morphisms are also denoted σ_a. To end this section we define the homomorphism $^- : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ given by $\bar{a} = a$ and $\bar{b} = b^{-1}$. Note that it is compatible with quotient maps and also defines homomorphisms $^- : BS(m,n) \to BS(m,n)$ for $m,n \in \mathbb{Z}^*$ and $^- : \overline{BS}(m,\xi) \to \overline{BS}(m,\xi)$ for $m \in \mathbb{Z}^*, \xi \in \mathbb{Z}_m$.

C.2 Converging sequences of some marked one-relator groups with parameters

C.2.1 Limits of torus knots groups

We define the groups

$$T_{m,n} = \left\langle a, b \;\middle|\; a^m = b^n \right\rangle \text{ and } T_m = \left\langle a, b \;\middle|\; [a^m, b] = 1 \right\rangle, \; m,n \in \mathbb{Z}^*.$$

When m and n are relatively prime, the group $T_{m,n}$ is the fundamental group of $\mathbb{S}^3 \setminus K_{m,n}$ where $K_{m,n}$ is the knot drawn on the torus $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, obtained as the image of the map $t \longmapsto (mt, nt)$. Given with their natural ordered set of generators (a,b), the groups $T_{m,n}$ and T_m are marked groups of $\mathcal{G}_2$.

Proposition C.2.1 *i) The limit of $T_{m,n}$ in $\mathcal{G}_2$, when m and n tend both to infinity, is the free group $\mathbb{F}_2 = \langle a,b \rangle$ marked with its natural set of generators.*

ii) Assume now that m is fixed. The limit in $\mathcal{G}_2$ of $T_{m,n}$, as n tends to infinity, is T_m.

PROOF. Notice first that $T_{m,n}$ is the free product of $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ by $\langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ with amalgamation over $\langle a^m \rangle \simeq \mathbb{Z}$ and $\langle b^n \rangle \simeq \mathbb{Z}$ (see [33, Ch.IV] for definition).

Let us prove i). It suffices to show that for any freely reduced word w on $\{a,b\}^{\pm 1}$, there is some integer $L = L(w)$ such that

(1) $w \underset{\mathbb{F}_2}{=} 1 \Rightarrow w \underset{T_{m,n}}{=} 1$ for all $m, n > L$,

(2) $w \underset{\mathbb{F}_2}{\neq} 1 \Rightarrow w \underset{T_{m,n}}{\neq} 1$ for all $m, n > L$.

As (1) is trivial, we only need to prove (2). Let w be a freely reduced word on $\{a, b\}^{\pm 1}$. By the normal form theorem [33, Theorem IV.2.6] for free products with amalgamation, the image of w in $T_{m,n}$ is trivial for all $m, n > |w|$ if and only if $w \underset{\mathbb{F}_2}{=} 1$. This completes the proof of *i*).

Let us show the statement *ii*). By von Dyck's theorem, the map given by $a \longmapsto a, b \longmapsto b$ induces an epimorphism of T_m onto $T_{m,n}$ for all $m, n \in \mathbb{Z}$. It suffices to show that for any reduced word w on $\{a, b\}^{\pm 1}$, there is some integer $L = L(w)$ such that

(1) $w \underset{T_m}{=} 1 \Rightarrow w \underset{T_{m,n}}{=} 1$ for all $n > L$,

(2) $w \underset{T_m}{\neq} 1 \Rightarrow w \underset{T_{m,n}}{\neq} 1$ for all $n > L$.

As (1) is trivial, we only need to show (2). Let $w = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_l} b^{\beta_l}$ be a freely reduced word. We claim that we can write

$$w \underset{T_m}{=} a^s v \quad \text{with } s \in \mathbb{Z} \text{ and } v = 1 \text{ or } v = b^{\beta'_1} a^{\alpha'_2} \dots b^{\beta'_{t-1}} a^{\alpha'_t} \tag{C.2.1}$$

where β'_j is a non-zero sum of some β_i's, $\alpha'_j \in \{1, \dots, m-1\}$ for all $j \in \{2, \dots, t-1\}$ and $\alpha'_t \in \{0, \dots, m-1\}$. We call such a decomposition a *suitable* decomposition of w. We show (C.2.1) by induction on l. The case $l = 1$ is clear.

We can write for each $i \in \{1, \dots, l\}$, $\alpha_i = q_i m + r_i$ with $r_i \in \{0, \dots, m-1\}$. We set $\alpha'_i = r_i$. Hence, $w \underset{T_m}{=} w' = a^{\alpha'_1 + \sum_{i=1}^{l} q_i m} b^{\beta_1} a^{\alpha'_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\alpha'_l} b^{\beta_l}$. If $r_i > 0$ for all $i \in \{2, \dots, l\}$, then the last decomposition is suitable. If not we have then $w \underset{T_m}{=} w''$ where w'' is the free reduction of w' and we apply the induction hypothesis to w''. The proof of (C.2.1) is complete.

Assume that $n > |w|$ and let $w = a^s v$ in T_m with $s \in \mathbb{Z}, v = 1$ or $v = b^{\beta'_1} a^{\alpha'_2} \dots b^{\beta'_t} a^{\alpha'_t}$ be a suitable decomposition. We have $|\beta'_j| \leq \sum_{i=1}^{t} |\beta_j| \leq |w| < n$, for $j = 1, \dots, t$. By the normal form theorem for free product with amalgamation, the image of w in $T_{m,n}$ is trivial only if $s = 0$ and $v \underset{\mathbb{F}_2}{=} 1$. In this case, the image of w in T_m is also trivial, which proves statement (2). □

Proposition C.2.2 *The groups T_m and $T_{m'}$ are isomorphic if and only if $|m| = |m'|$.*

PROOF. We begin by proving that the center $Z(T_m)$ of T_m is the cyclic group $C_m = \langle a^m \rangle$. Obviously, $C_m \leq Z(T_m)$. The presentation $\left\langle a, b \;\middle|\; a^m = 1 \right\rangle$ is a presentation for the quotient T_m/C_m. Thus T_m/C_m is isomorphic to the free product $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. As non trivial free products are centerless, we have $Z(T_m/C_m) = \{1\}$. Since the quotient map $T_m \longrightarrow T_m/C_m$ maps central elements on central elements, we have then $Z(T_m) = C_m$. If the groups T_m and $T_{m'}$ are isomorphic, then $T_m/Z(T_m) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ and $T_{m'}/Z(T_{m'}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$. are also isomorphic. This can occur only if $|m| = |m'|$.

Conversely, if $m' = -m$, we check easily that the map $a \longmapsto a^{-1}, b \longmapsto b$ induces an isomorphism between T_m and $T_{m'}$. □

C.2.2 Limits of Baumslag-Solitar groups with changing markings

Let us recall the notation $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\text{lcm }(m,n)}]$ (see Section C.1.3). Notice that $\Gamma(1,n) = BS(1,n)$. It is known from [42] that the limit of the sequence $(BS(1,n))_{n\geq 1}$ in $\mathcal{G}_2$ is the marked group $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. Let ϕ be the endomorphism of $\mathbb{F}_2$ induced by the map $a \longmapsto a, b \longmapsto b^m$. We notice that it induces endomorphisms $\phi : BS(m,n) \to BS(m,n)$ of Baumslag-Solitar groups.

Remark C.2.3 *The morphism $\phi : BS(m,n) \to BS(m,n)$ is an epimorphism if and only if m and n are relatively prime integers. More precisely, $Im\,\phi \cap \langle b \rangle = \langle b^{gcd(m,n)} \rangle$ (see [41, Lemma A.30] for a proof). Hence, if $gcd(m,n) = 1$, the image of (a,b) under ϕ^k is the generating set (a, b^{m^k}) of $BS(m,n)$.*

Let us fix a nonzero integer m.

For any $n \in \mathbb{Z}^*$ and any $\ell \in \mathbb{N}$, we denote by $\Gamma_{n,\ell}$ the subgroup of $BS(m,n)$ generated by a and b^{m^ℓ} (We use the latter two elements as marking). Note that if m and n are coprime, then for any $\ell \in \mathbb{N}$ one has $\Gamma_{n,\ell} = BS(m,n)$ as groups. The result we are aiming at is the following.

Theorem C.2.4 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$. The following statements hold:*

(a) For any n and for $\ell \to \infty$, one has $\Gamma_{n,\ell} \to \Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{gcd(m,n)}{lcm(m,n)}]$;

(b) For $|n| \to \infty$ and $\ell \to \infty$, one has $\Gamma_{n,\ell} \to \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.

Result (a) was known by Baumslag and Strebel in [5, Sections 1.7 and 1.8]. They proved also that $\Gamma(2,3)$ is the metabelianization of $BS(2,3)$ and that it is not finitely presented but has trivial Schur multiplicator. The convergence (a) was also used in [1] to prove that the $BS(m,n)$'s, for $|m|, |n| \geqslant 2$ and m, n relatively prime, are not uniformly non-amenable. In [37] it was used to show that the same groups are weakly amenable (in the sense that their left regular representation is not uniformly isolated from the trivial one).

Proof. The morphism $\phi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ defines marked epimorphisms $\Gamma_{n,\ell} \to \Gamma_{n,\ell+1}$ for all $n \in \mathbb{Z}^*$ and $\ell \in \mathbb{N}$. Consequently, for all $n \in \mathbb{Z}^*$, $\ell \in \mathbb{N}$ and $w \in \mathbb{F}_2$, one has

$$w \underset{\Gamma_{n,\ell}}{=} 1 \iff \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1 \,. \tag{C.2.2}$$

Let us now take $w \in \mathbb{F}_2$. Thanks to (C.2.2), it is sufficient to prove that:

(i) For any n, one has $w \underset{\Gamma(m,n)}{=} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1$ for ℓ large enough;

(ii) For any n, one has $w \underset{\Gamma(m,n)}{\neq} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{\neq} 1$ for ℓ large enough;

(iii) One has $w \underset{\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}}{=} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{=} 1$ for $|n|$ and ℓ large enough;

(iv) One has $w \underset{\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}}{\neq} 1 \implies \phi^\ell(w) \underset{BS(m,n)}{\neq} 1$ for $|n|$ and ℓ large enough.

We write $w = a^{i_1} b^{\beta_1} a^{-i_1} \cdots a^{i_k} b^{\beta_k} a^{-i_k} a^\sigma$. Up to conjugate, we may assume that we have $i_1, \ldots, i_k \geqslant 0$. Set now $\ell_w = \max(i_1, \ldots, i_k)$. For all $\ell \geqslant \ell_w$ and $n \in \mathbb{Z}^*$, one has

$$\begin{aligned} \phi^\ell(w) &= a^{i_1} b^{m^\ell \beta_1} a^{-i_1} \cdots a^{i_k} b^{m^\ell \beta_k} a^{-i_k} a^\sigma \\ &\underset{BS(m,n)}{=} b^{m^{\ell-i_1} n^{i_1} \beta_1} \cdots b^{m^{\ell-i_k} n^{i_k} \beta_k} a^\sigma \\ &= b^{m^\ell \sum_{s=1}^k \beta_s \left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}} a^\sigma \,. \end{aligned}$$

Proof of (i). Fix $n \in \mathbb{Z}^*$. The equality $w = 1$ in $\Gamma(m,n)$ implies $\sum_{s=1}^k \beta_s \left(\frac{n}{m}\right)^{i_s} = 0$ and $\sigma = 0$. Consequently, one has $\phi^\ell(w) = 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \geqslant \ell_w$.

Proof of (ii). Fix $n \in \mathbb{Z}^*$. In the case $\sigma \neq 0$, one would have $\phi^\ell(w) \neq 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell \in \mathbb{N}$. Thus we assume $\sigma = 0$ and the inequality $w \neq 1$

in $\Gamma(m,n)$ gives $\sum_{s=1}^{k}\beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}\neq 0$. Consequently, for any $\ell\geqslant\ell_w$, one has

$$\phi^{\ell}(w)\underset{BS(m,n)}{=}b^{m^{\ell}\sum_{s=1}^{k}\beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}}\underset{BS(m,n)}{\neq}1\ .$$

Proof of (iii). The equality $w=1$ in $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ implies $\sigma=0$ and $\sum_{s=1}^{k}\beta_s t^{i_s}=0$ (as polynomials). Consequently, one has $\phi^{\ell}(w)=1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell\geqslant\ell_w$ and $n\in\mathbb{Z}^*$.

Proof of (iv). In the case $\sigma\neq 0$, one would have $\phi^{\ell}(w)\neq 1$ in $BS(m,n)$ for all $\ell\in\mathbb{N}$ and $n\in\mathbb{Z}^*$. Thus we assume $\sigma=0$ and the inequality $w\neq 1$ in $\mathbb{Z}\wr\mathbb{Z}$ gives $\sum_{s=1}^{k}\beta_s t^{i_s}\neq 0$ (as polynomials). The polynomial $\sum_{s=1}^{k}\beta_s t^{i_s}$ having only finitely many roots, one has $\sum_{s=1}^{k}\beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}\neq 0$ for $|n|$ large enough. Consequently, for any $\ell\geqslant\ell_w$ and for $|n|$ large enough, one has

$$\phi^{\ell}(w)\underset{BS(m,n)}{=}b^{m^{\ell}\sum_{s=1}^{k}\beta_s\left(\frac{n}{m}\right)^{i_s}}\underset{BS(m,n)}{\neq}1\ .$$

This completes the proof. □

C.2.3 Limits of other Baumslag's one-relator groups

We denote by $BS(m,n,l)$ the group defined by the presentation

$$\left\langle a,b\ \middle|\ (ab^m a^{-1}b^{-n})^l=1\right\rangle\ \text{with } m,n,l\in\mathbb{Z}^*.$$

This family of one-relator groups with torsion was introduce by Baumslag in [3]. He proved there that such groups are residually finite if $|m|\neq 1\neq|n|$, n and m are coprime and $l>1$

Proposition C.2.5 *Consider the family of marked groups $BS(m,n,l)$ (endowed with the canonical marking (a,b)) with $m,n\in\mathbb{Z}^*$ and $l\geqslant 2$. One has $BS(m,n,l)\to\mathbb{F}_2$ in $\mathcal{G}_2$ whenever $|m|,|n|$ or $|l|$ tends to infinity.*

Proof. This is a straightforward corollary of the following result of B.B. Newman [33, Ch. II, Pr. 5.28]. If X is a set of letters and w is any word on $X^{\pm 1}$ which is trivial in the one-relator group with torsion $\langle X\mid r^k=1\rangle$, then the length $|w|$ of w with respect to the word metric induced by X is not less than $(k-1)|r|$. □

C.3 A necessary and sufficient condition for the convergence of sequences of marked Baumslag-Solitar groups

Proposition C.3.1 *Let $m, d \in \mathbb{Z}^*$ and $(\xi_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$.*

If $(\xi_n)_{n\geq 0}$ defines a converging sequence in $\mathbb{Z}_m$ then the sequence of marked groups $(BS(md, \xi_n d))_{n\geq 0}$ converges in $\mathcal{G}_2$

We get this proposition by adaptating quite readily Theorem 6 in [42]. Nevertheless, we give a proof based on the following lemmas.

Lemma C.3.2 *Let $w \in \mathbb{F}_2$. Under the hypothesis of Proposition C.3.1, the following alternative holds :*

(a) either $w = b^{\lambda_n}$ in $BS(md, \xi_n d)$ for n large enough;

(b) or w is in $BS(md, \xi_n d) \setminus \langle b \rangle$ for n large enough.

We recall that the map $a \longmapsto (x \mapsto \frac{n}{m}x), b \longmapsto (x \mapsto x+1)$ defines a homomorphism $\psi_n : BS(m,n) \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

Lemma C.3.3 *[42, Lemma 7] Let $w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1}\cdots a^{\varepsilon_h}b^{\alpha_h}$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. We have either $\psi_n(w) = 1$ for $|n|$ large enough or $\psi_n(w) \neq 1$ for $|n|$ large enough. Moreover, if $\psi_l(w) = 1$ for some $|l| > |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_h|$, then $\psi_n(w) = 1$ for all n.*

The proof of Lemma C.3.2 relies on a corollary of Lemma 5 in [42]. Before to state it, we recall the following statement, whose notations will be used :

Lemma C.3.4 *[42, Lemma 4] Let $m, n, n' \in \mathbb{Z}^*$ and $h \geqslant 1$. If $n \equiv n' \ (mod\ m^h)$, then there exists $s_0, \ldots, s_h$; $s'_0, \ldots, s'_h$; $r_1, \ldots, r_h$, which are unique, such that:*

(i) $0 \leqslant r_i < m \ \forall i$; $s_0 = 1 = s'_0$;

(ii) $s_{i-1}n = s_i m + r_i$ and $s'_{i-1}n' = s'_i m + r_i \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant h$;

(iii) $s_i \equiv s'_i \ (mod\ m^{h-i}) \ \forall\, 0 \leqslant i \leqslant h$.

Lemma C.3.5 *Let $m, n, n', d \in \mathbb{Z}^*$ and $h \geq t \geq 1$. Assume that $n \equiv n'$ (mod m^h) and let*

$$\alpha = k_0 + k_1 nd + k_2 s_1 nd + \cdots + k_t s_{t-1} nd$$

$$\alpha' = k_0 + k_1 n'd + k_2 s'_1 n'd + \cdots + k_t s'_{t-1} n'd$$

where $|k_0| < \min(|n|, |n'|)$ and $s_0, \ldots, s_h; s'_0, \ldots, s'_h$ are given by Lemma C.3.4. Let us also take $r_1, \ldots, r_h$ as in Lemma C.3.4.

(*i*) *We have $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, md)$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, md)$. If it happens we get $ab^\alpha a^{-1} \underset{BS(md,nd)}{=} b^\beta$ and $ab^{\alpha'} a^{-1} \underset{BS(md,n'd)}{=} b^{\beta'}$ with*

$$\beta = l_1 nd + l_2 s_1 nd + \cdots + l_{t+1} s_t nd$$

$$\beta' = l_1 n'd + l_2 s'_1 n'd + \cdots + l_{t+1} s'_t n'd$$

and

$$l_1 = \frac{1}{m}(k_0 + k_1 r_1 + \cdots + k_t r_t), l_i = k_{i-1} \text{ for } 2 \leq i \leq t+1.$$

(*ii*) *We have $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, nd)$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n'd)$. If it happens we get $a^{-1} b^\alpha a \underset{BS(md,nd)}{=} b^\beta$ and $a^{-1} b^{\alpha'} a \underset{BS(md,n'd)}{=} b^{\beta'}$ with*

$$\beta = l_0 d + l_1 nd + l_2 s_1 nd + \cdots + l_{t-1} s_{t-2} nd$$

$$\beta' = l_0 d + l_1 n'd + l_2 s'_1 n'd + \cdots + l_{t-1} s'_{t-2} n'd$$

and

$$l_0 = k_1 m - k_2 r_1 - \cdots - k_t r_{t-1}, l_i = k_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq t.$$

In particular the l_i's depend only on the common congruence class of n and n' modulo m^h. The case $d = 1$ corresponds to [42, Lemma 5].

Proof of Lemma C.3.5. (*i*) By Lemma C.3.4 which ensures that $s_i \equiv s'_i \,(\mathrm{mod}\, m)$ for all $i = 1, \ldots, t-1$, we have $\alpha \equiv \alpha' \,(\mathrm{mod}\, md)$. Assume now that

$$\alpha \equiv 0 \equiv \alpha' \,(\mathrm{mod}\, md).$$

We set $\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{d}$ and $\overline{\alpha'} = \frac{\alpha'}{d}$. We have then

$$\overline{\alpha} = \overline{k_0} + k_1 n + k_2 s_1 n + \cdots + k_t s_{t-1} n$$

$$\overline{\alpha'} = \overline{k_0} + k_1 n' + k_2 s_1 n' + \cdots + k_t s_{t-1} n'$$

where $\overline{k_0} = \frac{k_0}{d}$. By Lemma 5 (i) [42], we have the following identities

$$ab^{\alpha}a^{-1} = ab^{\overline{\alpha}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta}d} = b^{\beta} \text{ in } BS(md, nd)$$

$$ab^{\alpha'}a^{-1} = ab^{\overline{\alpha'}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta'}d} = b^{\beta'} \text{ in } BS(md, n'd)$$

with

$$\beta = \overline{\beta}d \text{ and } \overline{\beta} = l_1 n + l_2 s_1 n + \cdots + l_{t+1} s_t n$$

$$\beta' = \overline{\beta'}d \text{ and } \overline{\beta'} = l_1 n' + l_2 s'_1 n' + \cdots + l_{t+1} s'_t n'$$

and

$$l_1 = \frac{1}{m}(k_0 + k_1 r_1 + \cdots + k_t r_t), l_i = k_{i-1} \text{ for } 2 \leq i \leq t+1$$

which comes from the proof of [42, Lemma 5]. Hence (i) is proved.

(ii) As $|n| > |k_0|$ and $|n'| > |k_0|$, we have $\alpha \equiv 0 \pmod{nd}$ if and only if $k_0 = 0$ if and only if $\alpha' \equiv 0 \pmod{n'd}$. Suppose now that it is the case. By [42, Lemma 5 (ii)], we have then

$$a^{-1}b^{\alpha}a = a^{-1}b^{\overline{\alpha}d}a = b^{\overline{\beta}d} = b^{\beta} \text{ in } BS(md, nd)$$

$$a^{-1}b^{\alpha'}a = ab^{\overline{\alpha'}d}a^{-1} = b^{\overline{\beta'}d} = b^{\beta'} \text{ in } BS(md, n'd)$$

with

$$\beta = \overline{\beta}d \text{ and } \overline{\beta} = l_0 + l_1 n + l_2 s_1 n + \cdots + l_{t-1} s_{t-2} n$$

$$\beta' = \overline{\beta'}d \text{ and } \overline{\beta'} = l_0 + l_1 n' + l_2 s'_1 n' + \cdots + l_{t-1} s'_{t-2} n'$$

and

$$l_0 = k_1 m - k_2 r_1 - \cdots - k_t r_{t-1}, l_i = k_{i+1} \text{ for } 1 \leq i \leq t$$

which comes from the proof of [42, Lemma 5]. Hence (ii) is proved. □

Proof of Lemma C.3.2. We define $\Gamma_n = BS(md, \xi_n d)$. Let us write $w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1}\cdots a^{\varepsilon_h}b^{\alpha_h}$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, reduced in the sense that $\alpha_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ for all $i \in \{1, \ldots, h-1\}$. We assume (b) not to hold, i.e. $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n for infinitely many n's. Then the sum $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h$ has clearly to be zero (in particular h is even). We have to show that $w = b^{\lambda_n}$ for n large enough.

For n large enough, we may assume that $|\xi_n| > |\alpha_j|$ for all $j \in \{0, \ldots, h\}$ and the ξ_n's are all congruent modulo m^h. We take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n(there are infinitely many ones) and apply Britton's

Lemma. This ensures the existence of an index j such that $\varepsilon_j = 1 = -\varepsilon_{j+1}$ and $\alpha_j \equiv 0 \pmod{md}$ (since $|\xi_n d| > |\alpha_j|$ for all j). For all n large enough, Lemma C.3.5 implies

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha_0} \cdots a^{\varepsilon_{j-1}} b^{\alpha_{j-1}+\beta_j+\alpha_{j+1}} a^{\varepsilon_{j+2}} \cdots b^{\alpha_r}$$

with $\beta_j = l_1 \xi_n d = \alpha_j \frac{\xi_n}{m}$ (depending on n). Hence we are allowed to write

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha'_{0,n}} a^{\varepsilon'_1} b^{\alpha'_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon'_{h-2}} b^{\alpha'_{h-2,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon'_i = \pm 1$ and $\alpha'_{i,n} = k'_{0,i} + k'_{1,i}\xi_n d$, where the ε'_i's and $k'_{l,i}$'s do not depend on n.

Now, for n large enough, we may assume that $|\xi_n| > |k'_{0,i}|$ for all $0 \leq j \leq h-2$ (and the ξ_n's are all congruent modulo m^h). Again, we take a value of n such that moreover $w = b^{\lambda_n}$ in Γ_n and apply Britton's Lemma. This ensures the existence of an index j such that either $\varepsilon'_j = 1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \pmod{md}$, or $\varepsilon'_j = -1 = -\varepsilon'_{j+1}$ and $\alpha'_{j,n} \equiv 0 \pmod{\xi_n d}$. In both cases, while applying Lemma C.3.5, we obtain

$$w \underset{\Gamma_n}{=} b^{\alpha''_{0,n}} a^{\varepsilon''_1} b^{\alpha''_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon''_{h-4}} b^{\alpha''_{h-4,n}}$$

for n large enough, with $\varepsilon''_i = \pm 1$ and $\alpha''_{i,n} = k''_{0,i} + k''_{1,i}\xi_n d + k''_{2,i} s_{1,n} \xi_n d$, where the ε''_i's and $k''_{l,i}$'s do not depend on n.

And so on, and so forth, setting $h' = \frac{h}{2}$, we get finally $w = b^{\alpha^{(h')}_{0,n}}$ in Γ_n for n large enough, with

$$\alpha^{(h')}_{0,n} = k^{(h')}_{0,0} + k^{(h')}_{1,0}\xi_n d + k^{(h')}_{2,0} s_{1,n}\xi_n d + \cdots + k^{(h')}_{h',0} s_{h'-1,n}\xi_n d$$

where the $k^{(h')}_{i,0}$'s do not depend on n. It only remains to set $\lambda_n = \alpha^{(h')}_{0,n}$. □

Proof of Proposition C.3.1. It is easy to show that a word w is equal to 1 in $BS(m,n)$ if and only if it is in the subgroup generated by b and $\psi_n(w) = 1$. Let $w \in \mathbb{F}_2$. Lemmata C.3.2 and C.3.3 immediately imply that either $w = 1$ in $BS(md, \xi_n d)$ for n large enough or $w \neq 1$ in $BS(md, \xi_n d)$ for n large enough. □

Corollary C.3.6 *Let $m, d \in \mathbb{Z}^*$ with $|m| \geq 2$ and let $\xi \in \mathbb{Z}_m$. We fix $\eta \in \mathbb{Z}_{md}$ such that $\pi(\eta) = \xi$, where $\pi : \mathbb{Z}_{md} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ is the map defined in Lemma C.1.3.*

Let $h \geq 1$ and $w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_{2h}} b^{\alpha_{2h}} \in \mathbb{F}_2$ with $\varepsilon_i = \pm 1$ reduced in the sense that $\alpha_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ for all $i \in \{1, \ldots, 2h-2\}$. We

set $K_0 = |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{2h}|$. *We fix an integer* n *such that* $n \equiv \xi \pmod{m^h\mathbb{Z}_m}$ *and* $|nd| > K_0(h+1)!|m|^{h-1}$.

Then $w = 1$ *in* $\overline{BS}(md, \eta d)$ *if and only if* $w = 1$ *in* $BS(md, nd)$.

Hence, the word problem is solvable in $\overline{BS}(md, \eta d)$.

PROOF. Reasoning as in the proof of Proposition C.3.1 and related lemmata, we see that if $w = 1$ in $\overline{BS}(md, \eta d)$ then there is a sequence of h cancellations for w

$$\begin{array}{ll} (0) & w = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_h} b^{\alpha_{2h}}, \\ (1) & w' = b^{\alpha'_{0,n}} a^{\varepsilon'_1} b^{\alpha'_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon'_{h-2}} b^{\alpha'_{h-2,n}}, \\ (2) & w'' = b^{\alpha''_{0,n}} a^{\varepsilon''_1} b^{\alpha''_{1,n}} \cdots a^{\varepsilon''_{h-4}} b^{\alpha''_{h-4,n}}, \\ \vdots & \vdots \\ (h) & w^{(h)} = b^{\alpha^{(h)}_{0,n}} = b^0 = 1. \end{array}$$

which occurs in all $BS(md, nd)$ provided that

$$|nd| > |\alpha_j|, |k^{(t)}_{0,i}| \text{ for } 0 \leq j \leq 2h,\ 1 \leq t \leq h, 0 \leq i \leq 2h - 2t \qquad \text{(C.3.1)}$$

where the $k^{(t)}_{0,i}$'s are the integers appearing in the proof of Lemma C.3.2 and

$$n \equiv \xi \pmod{m^h\mathbb{Z}_m}. \qquad \text{(C.3.2)}$$

Conversely, if $w = 1$ in $BS(md, nd)$ for some n satisfying both conditions (C.3.1), (C.3.2) and

$$|nd| > |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{2h}| = K_0 \qquad \text{(C.3.3)}$$

a repeated use of Britton's lemma in the same way as in the proof of Proposition C.3.1 and related lemmata gives rise to a sequence of h cancellations of w leading to the trivial word. By Lemma C.3.5 and Lemma C.3.3, all these cancellations still occur in any $BS(md, n'd)$ whenever n' satisfies (C.3.1) and (C.3.2). Hence, $w = 1$ in $\overline{BS}(md, \eta d)$.

We set $k^{(0)}_{0,i} = |\alpha_i|$ for $i = 0, \ldots, 2h$ and $K^{(t)} = \max\limits_{0 \leq s \leq t, 0 \leq i \leq 2h-2s} |k^{(s)}_{0,i}|$.

Because of (C.3.1) and (C.3.3), it suffices to bound roughly $K := K^{(h)}$ by $K^{(0)}(h+1)!|m|^h$.

For each $t = 0, 1, \ldots, h-1$, there exists an index $c(t) \in \{1, \ldots, 2h-2t-1\}$ such that either $\alpha^{(t)}_{c(t),n}$ is congruent to 0 (mod md) (case i) or to 0 (mod nd) (case ii) for all n satisfying (C.3.1) and (C.3.2). We have the identities :

$$\alpha^{(t+1)}_{i,n} = \begin{cases} \alpha^{(t)}_{i,n} & \text{if } 0 \leq i \leq c(t) - 2\ , \\ \alpha^{(t)}_{c(t)-1,n} + \beta_{c(t)} + \alpha^{(t)}_{c(t)+1,n} & \text{if } i = c(t) - 1\ , \\ \alpha^{(t)}_{i+2,n} & \text{if } c(t) \leq i \leq 2h\ . \end{cases} \qquad \text{(C.3.4)}$$

with $\alpha^{(t)}_{c(t),n} = k^{(t)}_{0,c(t)} + k^{(t)}_{1,c(t)} nd + k^{(t)}_{2,c(t)} s_{1,n} nd + \cdots + k^{(t)}_{t,c(t)} s_{t-1,n} nd$ and $\beta_{c(t)} = l_0 d + l_1 s_{1,n} nd + \cdots + l_{t+1} s_{t,n} nd$ where $l_0, l_1, \ldots, l_{t+1}$ are given by Lemma C.3.5 and $s_{1,n}, s_{2,n}, \ldots, s_{t,n}$ are given by Lemma C.3.4. By Lemma C.3.5, we know that the integers $l_1, \ldots, l_{t+1}$ don't depend on n and we have the following identities :

$$(\text{ case } i) \quad \begin{cases} l_0 = 0, \\ l_1 = \frac{1}{m}(k^{(t)}_{0,t} + k^{(t)}_{1,c(t)} r_1 + \cdots + k^{(t)}_{t,c(t)} r_t), \\ l_i = k^{(t)}_{i-1,c(t)} \text{ for } 2 \leq i \leq t+1; \end{cases} \tag{C.3.5}$$

$$(\text{ case } ii) \quad \begin{cases} l_0 = k^{(t)}_{1,t} m - k^{(t)}_{2,c(t)} r_1 - \cdots - k^{(t)}_{t,c(t)} r_{t-1}, \\ l_i = k^{(t)}_{i+1,c(t)} \text{ for } 1 \leq i \leq t-1, \\ l_t = l_{t+1} = 0; \end{cases} \tag{C.3.6}$$

with $r_1, r_2, \ldots, r_t \in \{0, \ldots, m-1\}$ depending only on the class of n modulo $m^h \mathbb{Z}_m$. Finally, we get from (C.3.4) :

$$k^{(t+1)}_{j,i} = \begin{cases} k^{(t)}_{j,i} & \text{if } i \leq c(t) - 2 \\ k^{(t)}_{j,c(t)-1} + l_j + k^{(t)}_{j,c(t)+1} & \text{if } i = c(t) - 1 \\ k^{(t)}_{j,i+2} & \text{if } c(t) \leq i \leq h \end{cases} \tag{C.3.7}$$

We deduce from (C.3.5),(C.3.6) and (C.3.7) that for $t \in \{1, \ldots, h-1\}$ one has either $K^{(t+1)} \leq K^{(t)} + \frac{1}{|m|}|m|(t+1)K^{(t)} + K^{(t)}$ (case i) or $K^{(t+1)} \leq K^{(t)} + |m|tK^{(t)} + K^{(t)}$ (case ii). Hence

$$K^{(t+1)} \leq (|m|t + 2)K^{(t)} \text{ for } t \geq 1 \text{ and } K^{(1)} \leq 2K^{(0)}$$

because the first cancellation is of type (i).
We get then $K \leq K^{(0)}(h+1)!|m|^{h-1}$. □

Theorem C.3.7 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and $(\xi_n)_{n\geq 0}$ be sequence of integers such that $|\xi_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. The sequence $(BS(m, \xi_n))_{n\geq 0}$ converges in $\mathcal{G}_2$ if and only if the following conditions both hold :*

(i) there is some integer d such that $gcd(m, \xi_n) = d$ for all n large enough;

(ii) $(\frac{\xi_n}{d})_{n\geq 0}$ defines a converging sequence of $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

First, we need the following lemma :

Lemma C.3.8 *Let $m_i, d_i, k_i \in \mathbb{Z}^*$ for $i = 1, 2$ such that*

$$m_1 d_1 = m_2 d_2, |k_2 d_2| \neq 1, gcd(m_2, k_2) = 1 \text{ and } d_1 \text{ doesn't divide } d_2.$$

Then, the distance between $BS(m_1 d_1, k_1 d_1)$ and $BS(m_2 d_2, k_2 d_2)$ in $\mathcal{G}_2$ is not less than $e^{-\delta}$ with $\delta = 10 + 2 d_1 m_1^2$.

PROOF OF LEMMA C.3.8. Consider $r = a^2 b^{d_1 m_1^2} a^{-2} b$ and let $w = r\overline{r}$. On one hand, we have $r = b^{d_1 k_1^2 + 1}$ in $BS(m_1 d_1, k_1 d_1)$, which implies $w = 1$ in $BS(m_1 d_1, k_1 d_1)$. On the other hand, $r = a b^{m_1 d_2 k_2} a^{-1} b$ in $BS(m_2 d_2, k_2 d_2)$. As m_2 and k_2 are coprime integers, we notice that $m_2 d_2$ divides $m_1 d_2 k_2$ if and only if d_1 divides d_2. Under the assumptions of the lemma, the writing $a b^{m_1 d_2 k_2} a^{-1} b a b^{-m_1 d_2 k_2} a^{-1} b^{-1}$ is then a reduced form for w in $BS(m_2 d_2, k_2 d_2)$. By Britton's Lemma, $w \neq 1$ in $BS(m_2 d_2, k_2 d_2)$. As $|w| = 10 + 2 d_1 m_1^2$, we get the conclusion. □

PROOF OF THEOREM C.3.7. Notice that Theorem 2 of [42] shows the theorem in the case $m = \pm 1$. We assume then $|m| \geq 2$.

Let us show first that (i) and (ii) are necessary. If (i) doesn't hold, we can find two subsequences $(\xi'_n)_{n \geq 0}$ and $(\xi''_n)_{n \geq 0}$ of $(\xi_n)_{n \geq 0}$ such that $gcd(m, \xi'_n) = d_1, gcd(m, \xi''_n) = d_2, |\xi''_n| > 1$ for all n and d_1 doesn't divide d_2. Then Lemma C.3.8 clearly shows that $(BS(m, \xi_n))_{n \geq 0}$ is not a converging sequence in $\mathcal{G}_2$.

To show that (ii) is necessary, we assume now that $(BS(m, \xi_n))_{n \geq 0}$ converges and that there is some $d \in \mathbb{Z}^*$ such that $gcd(m, \xi_n) = d$ for all n large enough. The marked subgroup $\Gamma_{\xi_n, d}$ of $BS(m, \xi_n)$ generated by (a, b^d) is equal to $BS(\frac{m}{d}, \frac{\xi_n}{d})$ endowed with its canonical ordered set of generators (a, b). The sequence of the $BS(\frac{m}{d}, \frac{\xi_n}{d})$'s is then also converging in $\mathcal{G}_2$. By Theorem 3 [42], the sequence of integers $(\frac{\xi_n}{d})_{n \geq 0}$ defines a converging sequence in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

Finally, we see by Proposition C.3.1 that (i) and (ii) are also sufficient. □

Remark C.3.9 *Theorem C.3.7 still holds if we replace $BS(m, \xi_n)$ by $\overline{BS}(m, \xi_n)$ where $(\xi_n)_{n \geq 0}$ is any sequence in $\mathbb{Z}_m$ and if we write $(\pi(\frac{\xi_n}{d}))_{n \geq 0}$ instead of $(\frac{\xi_n}{d})_{n \geq 0}$ in (ii) where $\pi : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$ is the map defined in Lemma C.1.3.*

Corollary C.3.10 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and let $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_m$. The equality of marked groups*

$$\overline{BS}(m, \xi) = \overline{BS}(m, \eta)$$

holds if and only if there is some $d \in \mathbb{Z}^*$ such that $gcd(\xi, m) = gcd(\eta, m) = d$ and $\pi(\frac{\xi}{d}) = \pi(\frac{\eta}{d})$ in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{d}}$.

Proof of Corollary C.3.10.

Choose a sequence of integers $(\xi_n)_{n\geq 0}$ such that

$$\xi_{2n} \underset{\mathbb{Z}_m}{\longrightarrow}, \xi, \xi_{2n+1} \underset{\mathbb{Z}_m}{\longrightarrow} \eta \text{ and } |\xi_n| \longrightarrow \infty \text{ as } n \text{ tends to infinity.}$$

One has $\overline{BS}(m, \xi) = \overline{BS}(m, \eta)$ if and only if the sequence $BS(m, \xi_n)$ converges. By Theorem C.3.7 it is equivalent to have $\gcd(m, \xi_n) = d$ for n large enough (for some $d \in \mathbb{Z}^*$) and the sequence $\pi(\frac{\xi_n}{d})$ converges in $\mathbb{Z}_{\frac{m}{n}}$. Finally, it is equivalent to have $\gcd(m, \xi) = d = \gcd(m, \eta)$ and $\pi(\frac{\xi}{d}) = \pi(\frac{\eta}{d})$. □

Corollary C.3.11 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and let $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_m$ with $\xi \neq \eta$. If no prime factor of m divides both ξ and η, then one has $\overline{BS}(m, \xi) \neq \overline{BS}(m, \eta)$.*

Proof of Corollary C.3.11. We may suppose that $\gcd(m, \xi) = \gcd(m, \eta) = d$ by Corollary C.3.10). Then $d = 1$ by assumption and $\pi(\xi) = \xi \neq \eta = \pi(\eta)$. By Corollary C.3.10, one gets $\overline{BS}(m, \xi) \neq \overline{BS}(m, \eta)$. □

Lemma C.3.12 *Let $m, d \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_{md}$. The marked subgroup of $\overline{BS}(md, \xi d)$ generated by (a, b^d) is equal to $\overline{BS}(m, \pi(\xi))$ where $\pi : \mathbb{Z}_{md} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ is the map defined in Lemma C.1.3.*

Proof of Lemma C.3.12. Let $(\xi_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of integers such that $|\xi_n| \longrightarrow \infty, \xi_n \underset{\mathbb{Z}_{md}}{\longrightarrow} \xi$ as n tends to infinity. Since $BS(md, \xi_n d)$ is converging to $\overline{BS}(md, \xi d)$ as n tends to infinity, the marked subgroup G_n of $BS(md, \xi_n d)$ generated by (a, b^d) is converging to the subgroup G of $\overline{BS}(md, \xi d)$ generated by (a, b^d). As $G_n = BS(m, \xi_n)$ in $\mathcal{G}_2$, we have $G = \overline{BS}(m, \pi(\xi))$ in $\mathcal{G}_2$. □

C.4 Topological inclusion of $\mathbb{Z}_m^\times$ in $\mathcal{G}_2$

In this section, we are to show that the parameterization of the limits of Baumslag-Solitar groups by the m-adic integers is coherent with the topology inherited from $\mathcal{G}_2$. Precise statements are as follows:

Definition C.4.1 *For $m \in \mathbb{Z}^*$, let us define the following subsets of $\mathcal{G}_2$:*

$$\begin{aligned} Y_m &= \{BS(m, n) \ : \ n \in \mathbb{Z}^*\} \ ; \\ Z_m &= \left\{\overline{BS}(m, \xi) \ : \ \xi \in \mathbb{Z}_m\right\} \ . \end{aligned}$$

Theorem C.4.2 *For all $m \in \mathbb{Z}^*$, the map*

$$\overline{BS}_m \ : \ \mathbb{Z}_m \to Z_m \ ; \ \xi \mapsto \overline{BS}(m, \xi)$$

is continuous, onto and injective on $\mathbb{Z}_m^\times$.

For $|m| \geqslant 2$, note that if we endow $\mathbb{Z}$ with the m-adic ultrametric, the analogue map

$$\mathbb{Z}^* \to Y_m \ ; \ n \mapsto BS(m, n)$$

is nowhere continuous. Indeed, one has $n + p^k \to n$ for $k \to \infty$, while $BS(m, n+p^k) \to \overline{BS}(m, n)$. (We recall that one has $\overline{BS}(m, n) \neq BS(m, n)$, since the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$ defines the trivial element in $BS(m, n)$ but not in $\overline{BS}(m, n)$.)

PROOF OF THEOREM C.4.2. Let us fix $m \in \mathbb{Z}^*$. Surjectivity of $\overline{BS}_m$ is obvious. As $\mathbb{Z}_m$ is compact, we only have to show that $\overline{BS}_m$ is continuous and injective.

Continuity: Let $(\xi_n)_n$ be a sequence in $\mathbb{Z}_m$ which converges to ξ. A standard diagonal argument shows that for all n, there exists $\xi_n \in \mathbb{Z}$ such that:

(i) $|\xi_n| \geqslant n$;

(ii) $d_m(\xi_n, \xi) < \frac{1}{n}$;

(iii) $d\big(\overline{BS}(m, \xi_n), BS(m, \xi)\big) < \frac{1}{n}$.

In view of (ii), the sequence $(\xi_n)_n$ is convergent with limit ξ and we get $BS(m, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{BS}(m, \xi)$ due to (i). We finish by combining this with (iii) to obtain $\overline{BS}(m, \xi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{BS}(m, \xi)$.

□

We now "particularize to the case of invertible elements" and show that, in this case, the $\overline{BS}$ groups form the boundary of the BS groups. Precise statements are as follows:

Definition C.4.3 *For $m \in \mathbb{Z}^*$, we define:*

$$\begin{aligned} X_m &= \big\{ BS(m, n) \ : \ n \text{ is relatively prime to } m \big\} \ ; \\ Z_m^\times &= \big\{ \overline{BS}(m, \xi) \ : \ \xi \in \mathbb{Z}_m^\times \big\} \ . \end{aligned}$$

By convention, we say that $Z_{\pm 1}^\times$ is empty.

Corollary C.4.4 *For all $m \in \mathbb{Z}^*$, the boundary of X_m in $\mathcal{G}_2$ is $Z_m^\times$. It is homeomorphic to the set of invertible m-adic integers.*

PROOF. Theorem 3 of [42] implies that the elements of $\overline{X_m}$ are the $BS(m,n)$'s with n relatively prime to m and the $\overline{BS}(m,\xi)$ with $\xi \in \mathbb{Z}_m^\times$. One sees easily that the $BS(m,n)$'s are isolated points in $\overline{X_m}$ (consider the word $ab^m a^{-1} b^{-n}$). The equality $\partial X_m = Z_m^\times$ follows immediately. The second statement is a direct consequence of Theorem C.4.2. □

C.5 Actions of limits of marked Baumslag-Solitar groups

It is well known that, being a HNN-extension of $\mathbb{Z}$, a Baumslag-Solitar group $BS(m,n)$ acts naturally on its Bass-Serre tree [39]. Also well known is the affine action of $BS(m,n)$ on the real line given by $a \cdot x = \frac{n}{m}x$ and $b \cdot x = x+1$. The purpose of this section is to give similar actions for the groups $\overline{BS}(m,\xi)$. The affine action will not be used in the paper but the tree action will be of interest to prove that the groups $\overline{BS}(m,\xi)$ have the Haagerup property and to exhibit presentations.

Affine action. We restrict to the case where m is a prime number, which we denote by p. Let $\xi \in \mathbb{Z}_p$ and let $(\xi_n)_n$ be a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$. For $n \in \mathbb{N}$, we set

$$\psi_n = \psi_{\xi_n} : \begin{cases} BS(p,\xi_n) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi_n}{p} x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{cases}$$

where $\mathbb{Q}_p$ is the field of fractions of $\mathbb{Z}_p$. These actions are well defined exactly for the same reasons as the above affine actions on $\mathbb{R}$.

Theorem C.5.1 *Let p be a prime number and let $\xi \in \mathbb{Z}_p$, $\xi \neq 0$. There is an affine action of $\overline{BS}(p,\xi)$ on $\mathbb{Q}_p$ defined by*

$$\psi_\xi : \begin{cases} \overline{BS}(p,\xi) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi}{p} x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{cases} .$$

PROOF. It is sufficient to show that the affine action of $\mathbb{F}_2$ on $\mathbb{Q}_p$ given by

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{Q}_p) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto \frac{\xi}{p}x) \\ b & \longmapsto & (x \mapsto x+1) \end{cases}$$

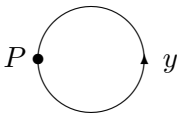
satisfies $\psi(w) = \mathrm{id}$ for all w such that $w = 1$ in $\overline{BS}(p, \xi)$.

Take $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$. For $n \in \mathbb{N}$, we denote again ψ_n the action corresponding to the above action of $BS(p, \xi_n)$. We have that $\psi_n(a)(x) = \frac{\xi_n}{p}x \to \psi(a)(x)$ and $\psi_n(b)(x) = x+1 \to \psi(b)(x)$ for $n \to \infty$ ($x \in \mathbb{Q}_p$). It follows easily that $\psi_n(w)(x) \to \psi(w)(x)$ for all $w \in \mathbb{F}_2$. Now, if $w = 1$ in $\overline{BS}(p, \xi)$, it implies $w = 1$ in $BS(p, \xi_n)$ for n sufficiently large. For those values of n, the equality $\psi_n(w)(x) = x$ holds for all $x \in \mathbb{Q}_p$, so that we get $\psi(w) = \mathrm{id}$. □

Remark C.5.2 *The $\mathbb{Z}$-action by translations on $\mathbb{R}$ is proper, but the $\mathbb{Z}$-action by translations on $\mathbb{Q}_p$ is not. In particular, the action of $\overline{BS}(p, \xi)$ on $\mathbb{Q}_p$ is not proper, even if restricted to the subgroup generated by b.*

Tree action. We are to produce a tree on which the group $\overline{BS}(m, \xi)$ will act in a reasonable way. This tree will be constructed from the Bass-Serre trees of the groups $BS(m, \xi_n)$. It will be shown that the tree we construct does not depend on the auxiliary sequence $(\xi_n)_n$.

We recall that $BS(m, n)$ is the fundamental group of the following graph of groups (G, Y) [39, Section 5.1].



$$G_P = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z};\ G_y = \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}$$
$$c^y = b^m;\ c^{\bar{y}} = b^n$$

Notice that a is the element of $\pi_1(G, Y, P)$ associated to the edge y. To be precise, we set the *Bass-Serre tree* of $BS(m, n)$ to be the universal covering associated to (G, Y), the maximal subtree P and the orientation given by the edge $\bar{y}$ [39, Section 5.3]. We choose the edge $\bar{y}$ instead of y to minimize the dependence on n of the set of tree edges. Denoting by T the Bass-Serre tree of $BS(m, n)$, one has

$$\begin{array}{rclcrcl} V(T) & = & BS(m,n)/\langle b \rangle & , & E_+(T) & = & BS(m,n)/\langle b^m \rangle\ , \\ o(w\langle b^m \rangle) & = & w\langle b \rangle & , & t(w\langle b^m \rangle) & = & wa^{-1}\langle b \rangle\ , \end{array}$$

where $o(e)$ and $t(e)$ denote the origin and terminal vertex of the edge e. The chosen orientation on T is preserved by the $BS(m,n)$-action.

Given $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$, we denote by H_n (resp H_n^m) the subgroup of $BS(m,\xi_n)$ generated by b (resp b^m) and by T_n the Bass-Serre tree of $BS(m,\xi_n)$. We set

$$\begin{array}{rcccl} Y & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} V(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n\right)/\sim \\ Y^m & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_+(T_n)\right)/\sim & = & \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} BS(m,\xi_n)/H_n^m\right)/\sim \end{array}$$

where $\sim$ is defined by $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0 :\ x_n = y_n$ in both cases. We now define an oriented graph $X = X_{m,\xi}$ by

$$\begin{array}{rcl} V(X) & = & \{x \in Y : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ such that } (x_n)_n \sim (wH_n)_n\} \\ E_+(X) & = & \{y \in Y^m : \exists w \in \mathbb{F}_2 \text{ such that } (y_n)_n \sim (wH_n^m)_n\} \\ o\big((wH_n^m)_n\big) & = & (wH_n)_n = \big(o(wH_n^m)\big)_n \\ t\big((wH_n^m)_n\big) & = & (wa^{-1}H_n)_n = \big(t(wH_n^m)\big)_n \end{array}$$

The map o is well defined since $(vH_n^m)_n \sim (wH_n^m)_n$ implies $(vH_n)_n \sim (wH_n)_n$. In the other hand, the map t is well defined since $(vH_n^m)_n \sim (wH_n^m)_n$ implies $v^{-1}w \in H_n^m$ for n large enough, whence $(va^{-1})^{-1}(wa^{-1}) = av^{-1}wa^{-1} \in H_n$ for those values of n. It follows that $(va^{-1}H_n)_n \sim (wa^{-1}H_n)_n$. The graph X is thus well defined and the free group $\mathbb{F}_2$ acts obviously on it by left multiplications. It is also almost obvious that X is simple (i.e. it has no loop and no bigon). Indeed a loop (or bigon) in X would immediately provide a loop (or bigon) in some tree T_n. The statement we want to prove is the following:

Theorem C.5.3 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. The graph $X = X_{m,\xi}$ (seen here as unoriented) has the following properties:*

(a) It is a tree;

(b) It does not depend (up to equivariant isomorphism) on the choice of the sequence $(\xi_n)_n$;

(c) The obvious action of $\mathbb{F}_2$ on X factors through the canonical projection $\mathbb{F}_2 \to \overline{BS}(m,\xi)$.

Before the proof, we state an immediate consequence of [42, Lemma 6]:

Lemma C.5.4 *Let $(vH_n)_n$ and $(wH_n)_n$ be two vertices of the graph X. If $vH_n = wH_n$ for infinitely many values of n, then $(vH_n)_n = (wH_n)_n$ in X.*

PROOF OF THEOREM C.5.3. **(a)** Let us show first that the graph X is connected. We show by induction on $|w|$ that any vertex $(wH_n)_n$ (with $w \in \mathbb{F}_2$) is connected to $(H_n)_n$. The case $|w| = 0$ is trivial. If $|w| = \ell > 0$, there exists $x \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ such that wx has length $\ell - 1$. By induction hypothesis, it is sufficient to show that $(wH_n)_n$ is connected to $(wxH_n)_n$. If $x = a$, then the edge $(wxH_n^m)_n$ connects $(wxH_n)_n$ to $(wH_n)_n$, if $x = a^{-1}$, then the edge $(wH_n^m)_n$ connects $(wH_n)_n$ to $(wxH_n)_n$ and if $x = b^{\pm 1}$, then one has even $(wH_n)_n = (wxH_n)_n$.

Second, we show that X has no closed path without backtracking. We take a closed path in X, with vertices

$$(v_0H_n)_n, (v_1H_n)_n, \ldots, (v_\ell H_n)_n = (v_0H_n)_n \ ,$$

and we want to prove the existence of some backtracking.

For any n, the sequence $v_0H_n, v_1H_n, \ldots, v_\ell H_n$ defines a path in T_n. For n large enough, one has $v_\ell H_n = v_0H_n$, so that the path is closed. As the T_n's are trees, these closed paths all have at least one backtracking. Thus, there exists $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ such that $v_{i-1}H_n = v_{i+1}H_n$ for infinitely many values of n (v-indexes are taken modulo ℓ). Now, by Lemma C.5.4, we obtain $(v_{i-1}H_n)_n = (v_{i+1}H_n)_n$ in X. As X is a simple graph, this means that the original closed path in X has some backtracking, as desired.

(b) We show now that X does not depend (up to equivariant isomorphism) on the choice of the sequence $(\xi_n)_n$. Take another sequence $(\xi'_n)_n$ satisfying both $|\xi'_n| \to \infty$ and $\xi'_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and consider the associated tree X'. We construct the sequence $(\xi''_n)_n$ given by

$$\xi''_n = \begin{cases} \xi_{\frac{n}{2}} & \text{if } n \text{ is even} \\ \xi'_{\frac{n-1}{2}} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

which satisfies again both $|\xi''_n| \to \infty$ and $\xi''_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ and the associated tree X''. There are obvious equivariant surjective graph morphisms $X'' \to X$ and $X'' \to X'$. We have to show the injectivity of these morphisms, which we can check on vertices only, for we are dealing with trees. But Lemma C.5.4 precisely implies the injectivity on vertices.

(c) Take $w \in \mathbb{F}_2$ such that $w = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$. We have to prove that w acts trivially on X. As X is a simple graph, we only have to prove that w acts trivially on $V(X)$. Let $(vH_n)_n$ be a vertex of X. For n large enough, we have $w = 1$ in $BS(m,\xi_n)$, so that $wvH_n = vH_n$. Hence we have $w \cdot (vH_n)_n \sim (vH_n)_n$, as desired. □

Remark C.5.5 *The action of $\overline{BS}(m,\xi)$ on X is transitive and the stabilizer of the vertex $(H_n)_n$ is the subgroup of elements which are powers of b in all but finitely many $BS(m,\xi_n)$. It does not coincide with the subgroup of $\overline{BS}(m,\xi)$ generated by b, since the element ab^ma^{-1} is not in the latter subgroup, but stabilizes the vertex.*

We end this section by statements about the structure of the tree $X_{m,\xi}$. The first one is the analogue of Lemma C.5.4 for edges.

Lemma C.5.6 *Let $(vH_n^m)_n$ and $(wH_n^m)_n$ be two edges of the graph X. If one has $vH_n^m = wH_n^m$ for infinitely many values of n, then $(vH_n^m)_n = (wH_n^m)_n$ in X.*

Proof. By assumption, one has $vH_n = wH_n$ and $va^{-1}H_n = wa^{-1}H_n$ for infinitely many values of n. By Lemma C.5.4, we get $(vH_n)_n = (wH_n)_n$ and $(va^{-1}H_n)_n = (wa^{-1}H_n)_n$. The edges $(vH_n^m)_n$ and $(wH_n^m)_n$ having the same origin and terminal vertex, they are equal, since X is a simple graph. □

Proposition C.5.7 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$. Each vertex of the tree $X_{m,\xi}$ has exactly $|m|$ outgoing edges. More precisely, (given a sequence $(\xi_n)_n$ of nonzero integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$) the edges outgoing from the vertex $(wH_n)_n$ are exactly $(wH_n^m)_n, (wbH_n^m)_n, \ldots, (wb^{|m|-1}H_n^m)_n$.*

Proof. It suffices to treat the case $w = 1$. The edges $(H_n^m)_n$, $(bH_n^m)_n$,..., $(b^{|m|-1}H_n^m)_n$ are clearly outgoing from $(H_n)_n$ and distinct. Let now $(vH_n^m)_n$ be an edge outgoing from $(H_n)_n$. In particular, we have $(vH_n)_n = (H_n)_n$, so that $v = b^{\lambda_n}$ in $BS(m,\xi_n)$ for n large enough. There exists necessarily $\lambda \in \{0,\ldots,|m|-1\}$ such that we have $\lambda_n \equiv \lambda \pmod m$ for infinitely many values of n, so that $vH_n^m = b^\lambda H_n^m$ for infinitely many values of n. By Lemma C.5.6, we get $(vH_n^m)_n = (b^\lambda H_n^m)_n$ and we are done. □

C.6 A structure theorem

We recall that $\Gamma(m,n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,n)}{\mathrm{lcm}(m,n)}]$ acts affinely on $\mathbb{R}$ and that it is a marked quotient of both $BS(m,n)$ and $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ (see Section C.1.3).

Proposition C.6.1 *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the morphism of marked groups $q : \mathbb{F} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ factors through a morphism $q_{m,\xi} : \overline{BS}(m,\xi) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.*

Proof. Take $(\xi_n)_{n\geq 0}$ a sequence of integers such that one has $|\xi_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ and $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. One has the following diagram

$$\begin{array}{ccc} BS(m,k_n) & \xrightarrow{n\to\infty} & \overline{BS}(m,\xi) \\ \downarrow & & \\ \Gamma(m,k_n) & \xrightarrow{n\to\infty} & \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \end{array}$$

by Definition C.1.6 and Theorem C.2.4. Given $w \in \mathbb{F}$ with $w = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$, it is now clear that $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, so that the proposition holds. □

We denote by N the kernel of the map q. We now are able to state the main results of this section, which are the following:

Theorem C.6.2 *Consider the exact sequence (where $N_{m,\xi}$ is the image of N in $\overline{BS}(m,\xi)$)*

$$1 \longrightarrow N_{m,\xi} \longrightarrow \overline{BS}(m,\xi) \xrightarrow{q_{m,\xi}} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \ .$$

For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the group $N_{m,\xi} = \mathrm{Ker}\, q_{m,\xi}$ is free.

Remark C.6.3 *The second derived subgroup of $\overline{BS}(m,\xi)$ is then a free group. Thus $\overline{BS}(m,\xi)$ enjoys the same property as the generalized Baumslag-Solitar groups [31, Corollary 2].*

Corollary C.6.4 *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the group $\overline{BS}(m,\xi)$ has the Haagerup property and is residually solvable.*

Proof of Corollary C.6.4. Looking at the exact sequence

$$1 \longrightarrow N_{m,\xi} \longrightarrow \overline{BS}(m,\xi) \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \longrightarrow 1 \ ,$$

we see that the quotient group is amenable (it is even metabelian) and the kernel group has the Haagerup property by Theorem C.6.2. By [14, Example 6.1.6], we conclude that $\overline{BS}(m,\xi)$ has the Haagerup property. As a free group is residually solvable, $\overline{BS}(m,\xi)$ is then the extension of residually solvable group by a solvable one and hence is residually solvable by [41, Lemma A.20]. □

PROOF OF THEOREM C.6.2. Take $m \in \mathbb{Z}^*$, $\xi \in \mathbb{Z}_m$ and $(\xi_n)_n$ a sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. Set X to be the tree constructed in section C.5. By [39, Section 3.3, Theorem 4], it is sufficient to prove that $N_{m,\xi}$ acts freely on X, i.e. that any $w' \in N$ which stabilizes a vertex satisfies $w' = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$.

Let us take $w' \in N$ and $(vH_n)_n$ a vertex of X which is stabilized by w'. Thus $w = v^{-1}w'v$ stabilizes the vertex $(H_n)_n$, i.e. w is a power of b, say $w = b^{\lambda_n}$, in all but finitely many $BS(m,\xi_n)$'s. Then the image of w in $\Gamma(m,\xi_n) = \mathbb{Z} \ltimes_{\frac{n}{m}} \mathbb{Z}[\frac{\gcd(m,\xi_n)}{\mathrm{lcm}(m,\xi_n)}]$ is equal to $(0,\lambda_n)$ for all but finitely many values of n. But, on the other hand, one has $w \in N$, that is $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$, which implies $\lambda_n = 0$ for those values of n (since $\Gamma(m,\xi_n)$'s are marked quotients of $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$). Thus, one has $w = b^0 = 1$ in all but finitely many $BS(m,\xi_n)$'s, which gives $w = 1 = w'$ in $\overline{BS}(m,\xi)$. □

C.7 Presentations for the groups $\overline{BS}(m,\xi)$

C.7.1 Infinite presentability of the groups $\overline{BS}(m,\xi)$

Our first goal in this Section is to prove:

Proposition C.7.1 *For any $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m \backslash m\mathbb{Z}_m$, the group $\overline{BS}(m,\xi)$ is not finitely presented.*

Notice that the Proposition excludes also the existence of a finite presentation of a group $\overline{BS}(m,\xi)$ ($\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$) with another generating set. See for instance [18, Proposition V.2]. By Corollary C.3.10, there is only one remaining case, the case $\xi = 0$, where it is still unknown whether $\overline{BS}(m,0)$ is finitely presented or not. We nevertheless make the following remark.

Remark C.7.2 *For $|m| = 1$, the limits $\overline{BS}(\pm 1,\xi)$ are not finitely presented.*

PROOF. The result [42, Theorem 2] implies $\overline{BS}(\pm 1,\xi) = \mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ for the unique element $\xi \in \mathbb{Z}_{\pm 1}$ and the result [2] of Baumslag on the presentations of

wreath products ensures that $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ is not finitely presented. □

Lemma C.7.3 *Let $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$. Let ℓ be the maximal exponent in the decomposition of m in prime factors and set $d = gcd(m,\xi)$, $m_1 = m/d$.*

(a) There exists a sequence $(\xi_n)_n$ in $\mathbb{Z}^*$ such that for all $n \geqslant 1$ one has $|\xi_n| > |\xi_{n-1}|$ and

$$\begin{aligned} &\xi_n \equiv \xi \pmod{m^n\mathbb{Z}_m}\ ; \\ &\xi_n \not\equiv \xi \pmod{m_1^{\ell n+1} d\mathbb{Z}_m}\ . \end{aligned}$$

(b) This sequence satisfies $|\xi_n| \to \infty$, $\xi_n \to \xi$ and

$$\begin{aligned} \xi_n \equiv \xi_r \quad &(mod\ m^n) \qquad \forall r \geqslant n\ ; \\ \xi_n \not\equiv \xi_{\ell n+1} \quad &(mod\ m_1^{\ell n+1} d) \quad \forall n\ . \end{aligned}$$

Proof. **(a)** Let p be a prime factor of m_1 (there exists one, for $\xi \notin m\mathbb{Z}_m$). The sequence (ξ_n) is constructed inductively. We choose for ξ_0 any nonzero integer such that $\xi_0 - \xi \notin m\mathbb{Z}_m$. At the n-th step, we begin by noticing that the exponent of p in the decomposition of m^n (respectively $m_1^{\ell n+1}d$) is at most ℓn (respectively at least $\ell n+1$). Hence, $m_1^{\ell n+1}d$ is not a divisor of m^n, so that there exists $\alpha \in \mathbb{Z}$ with $\xi \equiv \alpha \pmod{m^n}$ but $\xi \not\equiv \alpha \pmod{m_1^{\ell n+1}d}$.

Notice now that we may replace α by any element of the class $\alpha + m^n m_1^{\ell n+1} d\mathbb{Z}$, so that it suffices to choose ξ_n among the elements β in the latter class which satisfy $|\beta| > |\xi_{n-1}|$.

(b) The properties $\xi_n \equiv \xi \pmod{m^n\mathbb{Z}_m}$ and $|\xi_n| > |\xi_{n-1}|$ imply clearly $\xi_n \to \xi$, $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \equiv \xi_r \pmod{m^n}$ for $r \geqslant n$ (for the latter one, Proposition C.1.1 (d) is used).

Finally, combining the properties $\xi_{\ell n+1} \equiv \xi \pmod{m^{\ell n+1}\mathbb{Z}_m}$ and $\xi_n \not\equiv \xi \pmod{m_1^{\ell n+1} d\mathbb{Z}_m}$ gives $\xi_n \not\equiv \xi_{\ell n+1} \pmod{m_1^{\ell n+1}d}$. □

Proof of Proposition C.7.1. The hypothesis $\xi \in \mathbb{Z}_m \setminus m\mathbb{Z}_m$ implies $m \geqslant 2$. Take ℓ, d, m_1 and a sequence (ξ_n) as in Lemma C.7.3. One has then $BS(m,\xi_n) \to \overline{BS}(m,\xi)$. It is thus sufficient by Lemma C.1.5 to prove that the $BS(m,\xi_n)$'s are not marked quotients of $\overline{BS}(m,\xi)$ (for n large enough).

Notice now that (for n large enough) one has $\gcd(m,\xi_n) = d$ since $\xi_n \equiv \xi \pmod{m\mathbb{Z}_m}$ holds. Set the words

$$w_n = a^{n+1} b^m a^{-1} b^{-\xi_n} a^{-n} b a^{n+1} b^{-m} a^{-1} b^{\xi_n} a^{-n} b^{-1}.$$

Part (b) of Lemma C.7.3 combined with Lemma 3 of [42] give $w_n = 1$ in $BS(m, \xi_r)$ for all $r \geqslant n$, hence $w_n = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$ (for n large enough). On the other hand we get $w_{\ell n+1} \neq 1$ in $BS(m, \xi_n)$ the same way, so that $BS(m, \xi_n)$ is not a marked quotient of $\overline{BS}(m, \xi)$ (for n large enough). □

C.7.2 Defining a presentation for $\overline{BS}(m, \xi)$

For $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, we define the set $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{m,\xi}$ by

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{m,\xi} \;=\; \big\{ & w\bar{w} : w = ab^{\alpha_1} \cdots ab^{\alpha_k} a^{-1} b^{\alpha_{k+1}} \cdots a^{-1} b^{\alpha_{2k}} \\ & \text{with } k \in \mathbb{N}^*, \alpha_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \ldots, 2k) \text{ and } w \cdot v_0 = v_0 \big\}\end{aligned}$$

where v_0 is the favoured vertex $(H_n)_n$ of the tree $X_{m,\xi}$ defined in Section C.5.

Recall that the stabilizer of the vertex v_0 consists of elements which are powers of b in all but finitely many $BS(m, \xi_n)$, where $(\xi_n)_n$ is any sequence of integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$ (see Remark C.5.5). It follows that we have $w \cdot v_0 = v_0 \Leftrightarrow \bar{w} \cdot v_0 = v_0$.

The aim of the present Section is to prove the following statement.

Theorem C.7.4 *For all $m \in \mathbb{Z}^*$ and $\xi \in \mathbb{Z}_m$, the marked group $\overline{BS}(m, \xi)$ admits the presentation $\langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle$.*

Set $\Gamma = \langle a, b \mid \mathcal{R}_{m,\xi} \rangle$ for this Section. It is obvious that the elements of $\mathcal{R}_{m,\xi}$ are trivial in $\overline{BS}(m, \xi)$, so that one has a marked (hence surjective) homomorphism $\Gamma \to \overline{BS}(m, \xi)$. Theorem C.7.4 is thus reduced to the following proposition, which gives the injectivity.

Proposition C.7.5 *Let w be a word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. If one has $w = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$, then the equality $w = 1$ also holds in Γ.*

Before to prove Proposition C.7.5, we need to introduce some notions what can give rise to geometric interpretations.

From words to paths. Let us call *path* (in a graph) any finite sequence of vertices such that each of them is adjacent to the preceding one. Let w be any word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. It defines canonically a path in the Cayley graph of Γ (or $\overline{BS}(m, \xi)$) which starts at the trivial vertex. Let us denote those paths by $p_\Gamma(w)$ and $p_{\overline{BS}}(w)$. The map $\Gamma \to \overline{BS}(m, \xi)$ defines a graph morphism which sends the path $p_\Gamma(w)$ onto the path $p_{\overline{BS}}(w)$.

The word w defines the same way a finite sequence of vertices in $X_{m,\xi}$ starting at v_0 and such that each of them is equal or adjacent to the preceding one. Indeed, let f be the map $V\big(Cay(\overline{BS}(m,\xi),(a,b))\big) \to V(X_{m,\xi})$ defined by $f(g) = g \cdot v_0$ for any $g \in \overline{BS}(m,\xi)$. If g, g' are adjacent vertices in $Cay(\overline{BS}(m,\xi),(a,b))$, then $f(g)$ and $f(g')$ are either adjacent (case $g' = ga^{\pm 1}$), or equal (case $g' = gb^{\pm 1}$). The sequence associated to w is the image by f of the path $p_{\overline{BS}}(w)$. Now, deleting consecutive repetitions in this sequence, we obtain a path that we denote by $p_X(w)$.

It follows that if the word w satisfies $w = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$ (or, stronger, $w = 1$ in Γ), then the path $p_X(w)$ is closed (i.e. its last vertex is v_0).

Height and Valleys. Recall that one has a homomorphism σ_a from $\overline{BS}(m,\xi)$ onto $\mathbb{Z}$ given by $\sigma_a(a) = 1$ and $\sigma_a(b) = 0$. Given a vertex v in $X_{m,\xi}$, we call *height* of v the number $h(v) = \sigma_a(g)$ where g is any element of $\overline{BS}(m,\xi)$ such that $g \cdot v_0 = v$. It is easy to check that any element g' of $\overline{BS}(m,\xi)$ which defines an elliptic automorphism of $X_{m,\xi}$ satisfies $\sigma_a(g') = 0$, so that the height function is well-defined. It is clear from construction that the height difference between two adjacent vertices is 1.

Given $L \geqslant 1$ and $k \geqslant 1$, we call (L,k)-*valley* any path p in $X_{m,\xi}$ such that one has:

- $p = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$, where v_0 is the favoured vertex;
- $h(v_0) = 0 = h(\nu_k)$ and $h(\nu_0) = -k = h(\nu_{2k})$;
- $h(v) < 0$ for any other vertex v of p;
- $\nu_0 = \nu_{2k}$.

Given a (L,k)-valley $p = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$, the subpaths $(\nu_0, \ldots, \nu_k)$ and $(\nu_k, \ldots, \nu_{2k} = \nu_0)$ have to be geodesic, for the height difference between $\nu_0 = \nu_{2k}$ and ν_k is k. Thus, one has $\nu_1 = \nu_{2k-1}, \ldots, \nu_{k-1} = \nu_{k+1}$.

Lemma C.7.6 *Let w be a word on the alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ such that the path $p_X(w)$ is a (L,k)-valley, say $p_X(w) = (v_0, v_1, \ldots, v_L = \nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{2k})$. There exists a word w' such that the equality $w' = w$ holds in Γ and the path $p_X(w')$ is $(v_0, v_1, \ldots, v_L)$.*

Proof. We argue by induction on L.

Case $L = 1$: In that case, one has $k = 1$, $p_X(w) = (v_0, v_1 = \nu_0, \nu_1, \nu_2)$. Up to replacing w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ) and the same path in X, we may assume to have $w = b^{\alpha_0}a^{-1}b^{\alpha_1}ab^{\beta_1}a^{-1}b^{\beta_2}$. Set $r = ab^{-\beta_1}a^{-1}b^{-\alpha_1}ab^{\beta_1}a^{-1}b^{\alpha_1}$. Since ν_0 and ν_2 are equal, the subword $ab^{\beta_1}a^{-1}$ (of w) defines a closed subpath in X, so that we obtain $ab^{-\beta_1}a^{-1}b^{-\alpha_1} \cdot v_0 = v_0$. Consequently, we get $r \in \mathcal{R}$, whence $r = 1$ in Γ. Inserting r in next to last position, we obtain

$$w \underset{\Gamma}{=} b^{\alpha_0+\beta_1}a^{-1}b^{\alpha_1+\beta_2} =: w' \ .$$

This equality also implies that the paths $p_X(w)$ and $p_X(w')$ have the same endpoint. Hence one has $p_X(w') = (v_0, \nu_2) = (v_0, v_1)$ and we are done.

Induction step: We assume $L > 1$ to hold. Up to replace w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ) and the same path in X, we may write

$$w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_L}b^{\alpha_L} \cdot ab^{\beta_1} \cdots ab^{\beta_k}a^{-1}b^{\beta_{k+1}} \cdots a^{-1}b^{\beta_{2k}}$$

with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ for all i. We distinguish two cases:

(1) the vertex v_{L-1} is higher than v_L (i.e. $\varepsilon_L = -1$);

(2) the vertex v_{L-1} is lower than v_L (i.e. $\varepsilon_L = 1$).

Case (1): Set

$$\begin{aligned} r \ &= \ ab^{-\beta_{2k-1}} \cdots ab^{-\beta_k}a^{-1}b^{-\beta_{k-1}} \cdots a^{-1}b^{-\beta_1}a^{-1}b^{-\alpha_L} \cdot \\ &\quad\ ab^{+\beta_{2k-1}} \cdots ab^{+\beta_k}a^{-1}b^{+\beta_{k-1}} \cdots a^{-1}b^{+\beta_1}a^{-1}b^{+\alpha_L} \ . \end{aligned}$$

Since ν_0 and ν_{2k} are equal, the subword $ab^{\beta_1} \cdots ab^{\beta_k}a^{-1}b^{\beta_{k+1}} \cdots a^{-1}b^{\beta_{2k-1}}a^{-1}$ (of w) defines a closed subpath in X, so that (when considered as a word on its own right) it stabilizes the vertex v_0. Inverting it, we get

$$ab^{-\beta_{2k-1}} \cdots ab^{-\beta_k}a^{-1}b^{-\beta_{k-1}} \cdots a^{-1}b^{-\beta_1}a^{-1} \cdot v_0 = v_0 \ .$$

It implies $r \in \mathcal{R}$, whence $r = 1$ in Γ. Inserting r in next to last position, we obtain

$$\begin{aligned} w \underset{\Gamma}{=} w^* \ &:= \ b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_{L-1}}b^{\alpha_{L-1}+\beta_{2k-1}} \cdot \\ &\quad\ ab^{\beta_{2k-2}} \cdots ab^{\beta_k}a^{-1}b^{\beta_{k-1}} \cdots a^{-1}b^{\beta_1} \cdot \\ &\quad\ a^{-1}b^{\alpha_L+\beta_{2k}} \ . \end{aligned}$$

We write $w^* = w''a^{-1}b^{\alpha_L+\beta_{2k}}$. Since the words w and w^* begin the same way and since one has $w = w^*$ in Γ, the path $p_X(w^*)$ has the form

$$(v_0, v_1, \ldots, v_{L-1} = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2k-2}, v_L) \ .$$

Since v_{L-1} is higher than v_L, we have $h(v_{L-1}) = -(k-1)$. Contemplating w^*, one sees that we have $h(\omega_{k-1}) = 0$, $h(\omega_{2k-2}) = -(k-1)$, so that the subpaths $(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})$ and $(\omega_{k-1}, \ldots, \omega_{2k-2}, v_L))$ are geodesic. On the other hand, the geodesic between ω_{k-1} and v_L passes through $v_{L-1} = \omega_0$, so that we have $\omega_{2k-2} = v_{L-1}$. It follows that $p_X(w'')$ has the form $(v_0, v_1, \ldots, v_{L-1} = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2k-2} = v_{L-1})$, so that it is a $(L-1, k-1)$-valley. We apply the induction hypothesis to w'' and get a word w''' such that $w'' = w'''$ holds in Γ and $p_X(w''') = (v_0, \ldots, v_{L-1})$. It suffices to set $w' = w'''a^{-1}b^{\alpha_L+\beta_{2k}}$ to conclude.

Case (2): In this case, we have $h(v_L) = -k$ and $h(v_{L-1}) = -(k+1)$, so that the edge linking these vertices goes from v_L to v_{L-1}. By Proposition C.5.7, there exists $\lambda \in \{0, \ldots, |m|-1\}$ such that $wb^\lambda a^{-1} \cdot v_0 = v_{L-1}$. Set $w^* = wb^\lambda a^{-1}$ and $w' = w^* a b^{-\lambda}$, so that $w = w'$ holds in Γ. The path $p_X(w^*)$ is an $(L-1, k+1)$-valley, so that we may apply the induction hypothesis to w^*. This gives a word w'' such that $w'' = w^*$ in Γ and $p_X(w'') = (v_0, \ldots, v_{L-1})$. We conclude by setting $w' = w''ab^{-\lambda}$. □

Proof of Proposition C.7.5. Let w be a word which defines the trivial element in $\overline{BS}(m,\xi)$. Up to replacing w by a word which defines the same element in $\mathbb{F}_2$ (hence in Γ), we may write

$$w = b^{\alpha_0}a^{\varepsilon_1}b^{\alpha_1}\cdots a^{\varepsilon_\ell}b^{\alpha_\ell}$$

with $\varepsilon_i = \pm 1$ and $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ for all i. The path $p_X(w)$ is closed and has length ℓ. We argue by induction on ℓ.

Case $\ell = 0$: In this case, one has $w = b^{\alpha_0}$, so that $b^{\alpha_0} = 1$ in $\overline{BS}(m,\xi)$. It follows $\alpha_0 = 0$, hence $w = 1$ in Γ.

Induction step ($\ell > 0$): Let us write $p_X(w) = (v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}, v_\ell = v_0)$. Up to replace the word w by a cyclic conjugate, we may assume (without changing ℓ) that $h(v_i) \leqslant 0$ for all i. Denote by $k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_s = \ell$ the indices such that $h(v_k) = 0$. We now distinguish two possibilities:

(1) The path $p_X(w)$ turns back at some v_{k_i} (i.e. $\exists i$ with $1 \leqslant i \leqslant s-1$ such that $v_{k_i+1} = v_{k_i-1}$.)

(2) The path $p_X(w)$ does not turn back at any v_{k_i} (i.e. $\forall i$ with $1 \leqslant i \leqslant s-1$ one has $v_{k_i+1} \neq v_{k_i-1}$.)

Case (1): Let i be an index (with $1 \leqslant i \leqslant s-1$) such that $v_{k_i+1} = v_{k_i-1}$. The subword $w' = a^{\varepsilon_{k_{i-1}+1}} b^{\alpha_{k_{i-1}+1}} \cdots a^{\varepsilon_{k_i}} b^{\alpha_{k_i}} a^{\varepsilon_{k_i+1}}$ defines by construction a $(k_i - k_{i-1} - 1, 1)$-valley in the tree X. Lemma C.7.6 furnishes then a word w'' such that $w'' = w'$ holds in Γ and the path $p_X(w'')$ is strictly shorter than $p_X(w')$. We construct a word w^* by replacing w' by w'' in w. The path $p_X(w^*)$ is strictly shorter than $p_X(w)$ and one has $w^* = w$ in Γ. Applying the induction hypothesis to w^*, we get $w^* = 1$ in Γ, hence $w = 1$ in Γ.

Case (2): Suppose first that $s = 1$. All vertices of $p_X(w)$ but v_0 and v_L have strictly negative height. It follows that $\alpha_0 = -\alpha_\ell$, for we have $w = 1$ in $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ by hypothesis. Since we also have $\varepsilon_1 = -1$ and $\varepsilon_\ell = 1$ by construction, we get

$$ab^{-\alpha_0} w b^{\alpha_0} a^{-1} \underset{\Gamma}{=} b^{\alpha_1} a^{\varepsilon_2} b^{\alpha_2} \cdots a^{\varepsilon_{\ell-1}} b^{\alpha_{\ell-1}} =: w' \ .$$

Since the path $p_X(w')$ is strictly shorter than $p_X(w)$, we may apply the induction hypothesis to w' and we obtain $w' = 1$, hence $w = 1$, in Γ.

The case $s = 2$ is impossible, for it would imply that the path $p_X(w)$ turns back at v_{k_1}, which is incompatible with case (2).

From now on, we suppose $s \geqslant 3$. There exists some i in $\{1, \ldots, s-2\}$ such that one has $v_{k_i} = v_{k_{i+1}}$ (think at the v_{k_i} which is at most far from v_0). We set

$$w^* := a^{\varepsilon_{k_i+1}} b^{\alpha_{k_i+1}} \cdots a^{\varepsilon_{k_{i+1}-1}} b^{\alpha_{k_{i+1}-1}} a^{\varepsilon_{k_{i+1}}}$$

(it is a subword of w). Let us now fix a sequence $(\xi_n)_n$ of nonzero integers such that $|\xi_n| \to \infty$ and $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{Z}_m$. Then, we consider the morphisms $\psi_n : BS(m, \xi_n) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ given by $\psi_n(a)(x) = \frac{\xi_n}{m} x$ and $\psi_n(b)(x) = x + 1$. The word w^* stabilizing v_0 by construction, we get $w^* = b^{\lambda_n}$ in $BS(m, \xi_n)$, which implies $\psi_n(w^*) = x + \lambda_n$ (with $\lambda_n \in \mathbb{Z}$), for n large enough. In the other hand, seeing the word w^* itself, we get

$$\lambda_n = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} \alpha_j \left(\frac{\xi_n}{m}\right)^{h(v_j)}$$

for those values of n. Then, taking absolute values, this gives

$$|\lambda_n| \leqslant \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\alpha_j \left(\frac{\xi_n}{m}\right)^{h(v_j)}| \leqslant \frac{|m|}{|\xi_n|} \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} |\alpha_j| \ .$$

It follows that $|\lambda_n| < 1$ holds for n large enough, since $|\xi_n|$ tends to ∞. For those values of n, we get $w^* = b^0 = 1$ in $BS(m, \xi_n)$. Consequently, we get $w^* = 1$ in $\overline{BS}(m, \xi)$.

By construction (we use the assumption $i \in \{1, \ldots, s-2\}$), the path $p_X(w^*)$ is strictly shorter than $p_X(w)$, so that we apply the induction hypothesis to w^* and get $w^* = 1$ in Γ. Erasing, w^* in w, one gets

$$w \underset{\Gamma}{=} w' = b^{\alpha_0} a^{\varepsilon_1} b^{\alpha_1} \cdots a^{\varepsilon_{k_i}} b^{\alpha_{k_i} + \alpha_{k_{i+1}}} a^{\varepsilon_{k_{i+1}+1}} b^{\alpha_{k_{i+1}+1}} \cdots a^{\varepsilon_\ell} b^{\alpha_\ell} \ .$$

Applying the induction hypothesis to w', we get $w = 1$ in Γ. □

Annexe D

Groupes à un relateur et K-théorie

Cette dernière annexe sert à présenter un petit résultat concernant la K-théorie des groupes à un relateur, obtenu en collaboration avec Alain Valette. Comme il n'est pas lié au reste de la thèse, nous nous permettons de ne pas introduire les notions telles que C*-algèbres, K-théorie, etc.

Nous nous contenterons de rappeler qu'un homomorphisme de groupes $\alpha : G \to H$ induit un morphisme de C*-algèbres $C^*_{\max}G \to C^*_{\max}H$, qui est surjectif si α l'est. Ce morphisme de C*-algèbres induit à son tour des homomorphismes en K-théorie (pour $j = 0, 1$) :

$$\alpha_{*,j} : K_j(C^*_{\max}G) \to K_j(C^*_{\max}H) \ .$$

Définition D.0.1 *Un groupe G est* K-hopfien *si pour tout homomorphisme $\alpha : G \to G$ surjectif, les homomorphismes induits $\alpha_{*,0}$ et $\alpha_{*,1}$ sont bijectifs.*

Un groupe hopfien est K-hopfien pour des raisons évidentes de fonctorialité de la construction de $\alpha_{*,0}$ et $\alpha_{*,1}$. Les groupes de Baumslag-Solitar, bien que non hopfiens pour beaucoup d'entre-eux, sont tous K-hopfiens. On verra que cela découle du résultat plus général suivant :

Proposition D.0.2 *Soit $G = \langle S \mid r \rangle$ un groupe à un relateur (avec $r \in \mathbb{F}_S$) de type fini et sans torsion. Si $r \notin [\mathbb{F}_S, \mathbb{F}_S]$, alors G est K-hopfien.*

Preuve. L'hypothèse $r \notin [\mathbb{F}_S, \mathbb{F}_S]$ entraîne $K_0(C^*_{\max}G) = \mathbb{Z}\cdot[1]$ (où 1 désigne l'unité de $C^*_{\max}G$) et $K_1(C^*_{\max}G) \cong G^{\mathrm{ab}}$ grâce aux résultats de [7].

Soit $\alpha : G \to G$ un homomorphisme surjectif. On voit immédiatement que $\alpha_{*,0}$ est l'identité. Quant à $\alpha_{*,1}$, l'article [7] montre qu'il fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow[\alpha_{*,1}]{} & G^{\mathrm{ab}} \end{array}$$

Il s'ensuit que $\alpha_{*,1}$ est surjectif. Par ailleurs, le groupe G^{ab} étant abélien et de type fini, il est résiduellement fini et donc hopfien. On en conclut que $\alpha_{*,1}$ est un isomorphisme. □

Corollaire D.0.3 *Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}^*$, le groupe $BS(m,n)$ est K-hopfien.*

PREUVE. Si $m \neq n$, le relateur $ab^m a^{-1} b^{-n}$ n'est pas dans $[\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2]$ et la proposition D.0.2 s'applique, tandis que si $m = n$, le groupe $BS(m,n)$ est hopfien. □

Bibliographie

[1] Goulnara N. Arzhantseva, Josep Burillo, Martin Lustig, Lawrence Reeves, Hamish Short, and Enric Ventura. Uniform non-amenability. *Advances in Math.*, 197(2) :499–522, 2005.

[2] Gilbert Baumslag. Wreath products and finitely presented groups. *Math. Z.*, 75 :22–28, 1960/1961.

[3] Gilbert Baumslag. Residually finite one-relator groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :618–620, 1967.

[4] Gilbert Baumslag and Donald Solitar. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 :199–201, 1962.

[5] Gilbert Baumslag and Ralph Strebel. Some finitely generated, infinitely related metabelian groups with trivial multiplicator. *J. Algebra*, 40(1) :46–62, 1976.

[6] Erik Bédos and Pierre de la Harpe. Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2) :139–157, 1986.

[7] Cédric Béguin, Hela Bettaieb, and Alain Valette. K-theory for C*-algebras of one-relator groups. *K-theory*, 16 :277–298, 1999.

[8] Cédric Béguin and Tullio Ceccherini-Silberstein. Formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 7(1) :135–148, 2000.

[9] M. E. Bachir Bekka, Pierre-Alain Cherix, and Alain Valette. Proper affine isometric actions of amenable groups. In *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993)*, volume 227 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–4. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[10] Mohammed E. B. Bekka. Amenable unitary representations of locally compact groups. *Invent. Math.*, 100(2) :383–401, 1990.

[11] Claude Chabauty. Limite d'ensembles et géométrie des nombres. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :143–151, 1950.

[12] Christophe Champetier. L'espace des groupes de type fini. *Topology*, 39(4) :657–680, 2000.

[13] Christophe Champetier and Vincent Guirardel. Limit groups as limits of free groups. *Israel J. Math.*, 146 :1–75, 2005.

[14] Pierre-Alain Cherix, Michael Cowling, Paul Jolissaint, Pierre Julg, and Alain Valette. *Groups with the Haagerup property*, volume 197 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001. Gromov's a-T-menability.

[15] Donald J. Collins. Some one-relator Hopfian groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 235 :363–374, 1978.

[16] Richard H. Crowell and Ralph H. Fox. *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics, No. 57.

[17] Pierre de la Harpe. Reduced C^*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace. In *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Buşteni, 1983)*, volume 1132 of *Lecture Notes in Math.*, pages 230–253. Springer, Berlin, 1985.

[18] Pierre de la Harpe. *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[19] Pierre de la Harpe and Alain Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Société Mathématique de France, Paris, 1989. Avec un appendice de Marc Burger, Astérisque, No. 175.

[20] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1970. Sixth printing.

[21] Edward G. Effros. Property Γ and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47 :483–486, 1975.

[22] Pierre Eymard. *Moyennes invariantes et représentations unitaires*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 300.

[23] Benson Farb and Lee Mosher. A rigidity theorem for the solvable Baumslag-Solitar groups. *Invent. Math.*, 131(2) :419–451, 1998. With an appendix by Daryl Cooper.

[24] Świątosław R. Gal and Tadeusz Januszkiewicz. New a-T-menable HNN-extensions. *J. Lie Theory*, 13(2) :383–385, 2003.

[25] Yair Glasner and Nicolas Monod. Amenable actions, free products and a fixed point property. arXiv :math.GR/0505197, prépublication, 2005.

[26] R. I. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(5) :939–985, 1984.

[27] Luc Guyot and Yves Stalder. Limits of Baumslag-Solitar groups and other families of marked groups with parameters. arXiv :math.GR/0507236, prépublication, 2005.

[28] Paul Jolissaint. Invariant states and a conditional fixed point property for affine actions. *Math. Ann.*, 304(3) :561–579, 1996.

[29] Paul Jolissaint. Moyennabilité intérieure du groupe F de Thompson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(1) :61–64, 1997.

[30] Paul Jolissaint. Borel cocycles, approximation properties and relative property T. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(2) :483–499, 2000.

[31] Peter H. Kropholler. Baumslag-Solitar groups and some other groups of cohomological dimension two. *Comment. Math. Helv.*, 65(4) :547–558, 1990.

[32] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[33] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[34] Stephen Meskin. Nonresidually finite one-relator groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164 :105–114, 1972.

[35] David I. Moldavanskiĭ. On the isomorphisms of Baumslag-Solitar groups. *Ukrain. Mat. Zh.*, 43(12) :1684–1686, 1991.

[36] F. J. Murray and John von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math. (2)*, 44 :716–808, 1943.

[37] Denis V. Osin. Weakly amenable groups. In *Computational and statistical group theory (Las Vegas, NV/Hoboken, NJ, 2001)*, volume 298 of *Contemp. Math.*, pages 105–113. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[38] Joseph M. Rosenblatt. A generalization of Følner's condition. *Math. Scand.*, 33 :153–170, 1973.

[39] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.

[40] Yehuda Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.

[41] Estelle Souche. *Quasi-isométries et quasi-plans dans l'étude des groupes discrets*. Université de Provence, U.F.R. M.I.M., 2001. Thèse de doctorat.

[42] Yves Stalder. Convergence of Baumslag-Solitar groups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*. À paraître. Prépublication (2005) disponible sous arXiv :math.GR/0403241.

[43] Yves Stalder. Moyennabilité intérieure et extensions HNN. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. À paraître. Prépublication (2005) disponible sous arXiv :math.GR/0505657.

[44] Anatoly M. Stepin. Approximation of groups and group actions, the Cayley topology. In *Ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$ *actions (Warwick, 1993–1994)*, volume 228 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 475–484. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[45] Kevin Whyte. The large scale geometry of the higher Baumslag-Solitar groups. *Geom. Funct. Anal.*, 11(6) :1327–1343, 2001.

[46] Robert J. Zimmer. Amenable pairs of groups and ergodic actions and the associated von Neumann algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 243 :271–286, 1978.

[47] Robert J. Zimmer. *Ergodic theory and semisimple groups*, volume 81 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.