Publié dans Travaux de logique 20, 29-55, 2011,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

L'axiomatisation a-t-elle des limites formelles ?

Denis Miéville

Ce qui montre ... que la logique est entrée depuis les temps les plus anciens dans cette voie certaine [la voie sûre de la science], c'est que, depuis Aristote, elle n'a pas eu besoin de faire un pas en arrière, à moins que l'on ne regarde comme des améliorations le retranchement de quelques subtilités inutiles, ou une plus grande clarté dans l'exposition, toutes choses qui tiennent plutôt à l'élégance qu'à la certitude de la science. Il est aussi digne de remarquer que, jusqu'ici, elle n'a pu faire un seul pas en avant, et qu'aussi, selon toute apparence, elle semble arrêtée et achevée. En effet, lorsque certains modernes ont pensé l'étendre en y introduisant certains chapitres,..., cela provient de leur ignorance de la nature propre de cette science. Ce n'est pas étendre les sciences, mais les dénaturer, que de confondre leurs limites. Or celles de la logique sont déterminées très exactement par ceci qu'elle est une science qui expose en détail et démontre rigoureusement les seules règles formelles de toute pensée (que cette pensée soit a priori ou empirique, qu'elle ait telle ou telle origine et tel ou tel objet, qu'elle rencontre dans notre esprit des obstacles accidentels ou naturels).

Si la logique a été si heureuse, elle ne doit cet avantage qu'à son étroite spécialisation, qui l'oblige à faire abstraction de tous les objets de la connaissance et de leur différence, et qui veut que l'entendement ne s'y occupe que de lui-même et de sa forme. Il devait être naturellement beaucoup plus difficile pour la raison d'entrer dans la voie sûre de la science, lorsqu'elle n'a plus seulement affaire à elle-même, mais aussi à des objets. Aussi la logique, comme propédeutique, n'est-elle en quelque sorte que le vestibule des sciences ; et lorsqu'il s'agit de connaissances, on suppose sans doute une logique pour les juger, mais leur acquisition, c'est dans ce qu'on appelle proprement et objectivement les sciences qu'il faut la chercher.

Kant, *Critique de la raison pure*, Préface de la deuxième édition

Préambule

Ces propos d'Emmanuel Kant m'ont toujours intrigué tant par la force de leur certitude que par l'incongruité de leur contenu. Il est vrai que depuis Aristote, en passant par les stoïciens, deux systèmes émergent progressivement ; ces systèmes, par les temps parcourus, vont se sédimenter en ce que l'on nomme aujourd'hui d'une part la logique des propositions et, d'autre part, celle des prédicats. Mais la logique, ou l'« art de penser », n'a eu de cesse d'être discutée, bousculée, interrogée ! Et si elle devient ce qu'elle semble être, un acquis définitif, c'est en fonction des avatars de l'histoire et des accidents qui l'ont conduite à entrer dans un moule non pas arbitraire, mais façonné en fonction de la finalité pour laquelle on voulait la réduire pour répondre à des questions fondatrices.

Tout au long de sa longue histoire, la logique est confrontée à moult questions :

- Existe-t-il d'autres catégories d'activités opératoires logiques que celles associées aux connecteurs dits standard ?
- Les concepts ensemblistes appartiennent-ils au champ de la logique ?
- Qu'est-ce qu'une constante logique, combien y en a-t-il ?
- Les directives inférentielles qui contribuent à la recherche de la vérité sont-elles véritablement et équitablement étudiées ?

Aristote, par exemple, reconnaissait la force d'une opération logique nominale ou propriétale qui permettait de jouer sur la contrariété des notions duales. Ce faisant, il pouvait proposer une solution au problème que pose la loi d'obversion:

> Cette loi fait évanouir le couplage de deux termes au profit de la complémentation, ce qui ne va pas sans quelque artifice : la contradiction purement formelle ne s'associe plus à la contrariété sémantique. La répartition des choses en classes prend désormais le pas sur l'articulation des pensées. (Frey 1987 : 60)

La définition des constantes logiques en termes d'invariance (Bonnay 2007) fait éclater, par extension, le carcan de la logique des propositions et des prédicats dite classique.

Si le statut abréviatif de la définition doit être remplacé par la force créative qu’elle semble porter dans l’aire des activités humaines liées à l’acquisition des connaissances, force est d’admettre que la définition doit alors être inscrite à travers une réelle procédure inférentielle (Leśniewski 1992 ; Miéville 2008).

En traitant de ces questions, l’édifice logique prôné par Kant, et matérialisé formellement en fonction de la complicité que la logique a vécue avec la mathématique, se craquèle. Il est intéressant d’évoquer cette dernière relation ! En effet, le pari logiciste pris tant par Frege que par Russell conduit au développement d’une logique formelle des propositions et des prédicats satisfaisante et suffisante pour tenter d’atteindre une partie des objectifs associés aux fondements de la mathématique ; mais cette construction conduit à un réductionnisme logique qui outrage tout chercheur à la recherche de l’expressivité logique la plus fine. Cette complicité a offert un outil logique, un style et une manière de concevoir la logique élémentaire. La logique des propositions et des prédicats que cette histoire a produite n’est pas la logique des propositions et des prédicats de plus grande extension. Et le propos de cet article esquissera le chemin qui vise à l’appropriation de cette logique maximale, un chemin qui passe nécessairement par une réflexion sur l’axiomatisation et ses limites.

1. Un regard sur la logique classique

Lorsque l’on pose un regard sur la logique classique des propositions et des prédicats, force est d’admettre la pauvreté des catégories logiques qui la constituent. Il ne s’agit certes pas d’un défaut, car ce système remplit l’objectif pour lequel il a été conçu : être la logique mathématique indispensable au projet fondationnel. Toutefois, ce qu’il donne à voir ne saurait satisfaire un logicien en soif d'expressivité logique. L'analyse de ses constituants logiques est, à cet égard, révélatrice.

La logique classique des propositions, en tant que système fermé, contient quatre opérateurs unaires de la catégorie S/S (formatrice de propositions à un argument propositionnel), et seize opérateurs binaires de la catégorie S/SS (formatrice de propositions à deux arguments propositionnels). Cette logique est souvent, et notamment, présentée à partir des seuls connecteurs de la négation et de la conditionnelle. Cet ensemble est adéquat puisqu'il donne accès, par combinatoire et définitions abréviatives, à l'ensemble de tous les connecteurs que le système vise à représenter. Quant à la logique des prédicats, sa seule constante logique propre consiste en une quantification du premier ordre de la catégorie S/(S/N … N) (formatrice de propositions à un argument de la catégorie des fonctions propositionnelles). Cette quantification est du premier ordre ; elle joue sur des variables nominales, habitant le statut de nom singulier. Par ailleurs, un décret arbitraire stipule que toute caractérisation d'une fonction ou d'un prédicat s'effectue dans le champ de la sémantique, c'est-à-dire dans la théorie des modèles. Agissant de cette manière, on exclut de l'activité logique le traitement extensionnel. Cela est bien regrettable !

2. Une ouverture sur la maximalité

Dans le champ du traitement de la vérité et de la prédication, la logique peut offrir davantage que ce que, classiquement, elle donne à voir ; elle peut être plus audacieuse et donner, avec pertinence, tort à Kant. Pour s'en convaincre, il est instructif de considérer les réflexions intellectuelles – parfois les balbutiements – de ceux qui ont contribué à l'émergence de la logique formelle des propositions et des prédicats. Russell [1872-1970] en fait bien entendu partie. Lorsqu'il ébauche ses premiers systèmes, il s'interroge sur la possibilité de fonder la logique des propositions sur la base de l'unique conditionnelle. Ce choix est motivé par une conviction gnoséologique : il lui semble nécessaire de fonder ce système fondamental sur le connecteur porteur de l'idée d'inférence. Si aujourd'hui on se gausse, à tort, de cette apparente naïveté, c'est que l'on est habité par la conviction que ce dont on dispose est l'expression d'une totale perfection. Ce qui est faux ! On ne questionne plus guère les systèmes à disposition et on accepte trop souvent, sans critique ni recul, que les concepts logiques en présence seraient justifiables en soi, parce qu'ainsi saisis depuis les heures glorieuses de l'aube de la logique formelle. Mais Russell a eu l'audace de quantifier sur la catégorie des propositions (1906), et partant, il s'est doté d'un moyen de définir la négation à partir de cet unique connecteur logique de la conditionnelle. Comme le montrent les définitions suivantes, il accédait ainsi à la totalité des connecteurs logiques de la théorie classique :

Définition de la négation
$(\forall p)(\sim p \supset (p \supset (\forall q)\, q))$ et $(\forall p)((p \supset (\forall q)\, q) \supset \sim p)$

Définition de la conjonction
$(\forall pq)((p \wedge q) \supset \sim(p \supset \sim q))$ et $(\forall pq)(\sim(p \supset \sim q) \supset (p \wedge q))$

La première de ces définitions est particulièrement intéressante et révèle trois points non négligeables. Tout d'abord, elle ouvre la possibilité de définir la logique complète des propositions sur la base de l'unique connecteur de conditionnelle. Il y a également l'usage de la quantification propositionnelle $\forall_S$ associée à un traitement extensionnel particulier et détaché de la dimension existentielle (Miéville 2008). Cela ne laisse pas indifférent le logicien qui s'est toujours inquiété de la double nature de la quantification du calcul des prédicats : tout à la fois associée à la notion d'existence et à l'expression du distributif ! Il y a enfin une ébauche de réflexion à propos de la définition.

Certains logiciens, dont Leśniewski [1886-1939], ont eu le même souci gnoséologique, mais en attribuant la force fondatrice de la logique non pas à la conditionnelle, mais à la biconditionnelle. La raison qui guide Leśniewski est fondée sur sa conviction profonde que la définition est une procédure fondamentale et cognitivement créative. Or la relation d'équivalence logique posée dans la définition entre le *definiens* et le *definiendum* nécessite la présence de la biconditionnelle pour être validée sous la forme logique d'un théorème clairement structuré.

La progression des tentatives pour réaliser ce projet fondateur, basé sur la biconditionnelle est intéressante à suivre.

1ère étape : $L_{\equiv}$

Cette étape consiste en la détermination d'un système minimal $L_{\equiv}$, construit uniquement sur la biconditionnelle. Par combinatoire, il est aisément vérifié que les seuls connecteurs dérivables sont au nombre de quatre : la biconditionnelle $\equiv$ [pq]: [1001], le connecteur tautologique T_2 [pq]: [1111], l'antécédent en présence du conséquent p[q] : [1100] et le conséquent en présence de l'antécédent q[p] : [1010]. Il est également possible d'inscrire les définitions des deux connecteurs unaires suivants, T_1[p] : [11] , l'opérateur unaire de tautologie et l'opérateur unaire d' « identité » I[p] : [10].

2e étape : $L_{\equiv} + \forall_S$

C'est la détermination d'un système minimal quantifié. Dans cette tentative, la négation peut désormais être définie :

$$(\forall p)\ ({\sim}p \equiv (p \equiv (\forall q)\ q))$$

Cette définition offre l'accès à huit connecteurs binaires logiques, à savoir, les quatre connecteurs binaires du système minimal $L_{\equiv}$, auxquels s'ajoutent leurs pendants négatifs. Ce système contient, bien entendu, tous les connecteurs unaires, et donc le connecteur unaire d'anti-tautologie : $\perp_1$ [p] : [00].

3e étape : $L_{\equiv} + \forall_S + \forall_{S/S}$

Il s'agit d'un système fondé sur l'unique connecteur de biconditionnelle et qui autorise une quantification sur deux catégories syntaxico-sémantiques: celle des propositions S et celle des foncteurs unaires S/S. En plus de ce qu'offrait la deuxième étape, il est désormais possible dans un tel système d'inscrire la définition de la conjonction :

$$(\forall pq)\ ((p \wedge q) \equiv ((\forall f)\ (p \equiv ((\forall r)(p \equiv f(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv f(r))))))$$

Ce résultat n'est rien moins que celui présenté par Tarski [1902-1983] dans sa thèse de doctorat défendue en 1923 (Tarski 1923, 1972). Cette troisième étape est intéressante à plus d'un titre. Il y a tout d'abord la prouesse de Tarski, une prouesse définitoire qui conduit à obtenir un système complet du calcul des propositions (16 opérateurs binaires et quatre opérateurs unaires). Il y a surtout l'usage et la force d'une quantification portant sur deux catégories syntaxico-sémantiques : S et S/S. Il y a enfin l'expression d'une forme définitoire conforme aux conditions d'une bonne définition et conçue uniquement sur la base du connecteur de la biconditionnelle.

> Le problème pour lequel j'offre une solution est le suivant : *est-il possible de construire un système de la logistique comportant comme seul signe primitif, le signe de l'équivalence* [en fait la biconditionnelle] (en plus, bien sûr, des quantificateurs) ? Ce problème me semble intéressant pour les raisons suivantes. Nous savons qu'il est possible de construire le système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif, utilisant pour cela, soit le signe d'implication [en fait la conditionnelle], si l'on veut suivre l'exemple de Russell, soit l'idée de

> Sheffer qui introduit spécialement à cet effet le signe d'incompatibilité. Pour réellement parvenir à ce but, il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions tout terme constant particulier, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis, et du terme à définir. Le signe d'équivalence employé comme terme primitif présente à ce point de vue l'avantage de permettre d'observer strictement cette règle et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, celle d'une équivalence. (Tarski 1972 : 3-4)

4^e étape : $L_{\equiv} + \forall_S + \forall_{S/SS} + \forall_{\text{toute catégorie préalablement introduite}}$

Cette étape correspond aux choix de Leśniewski. Suite aux travaux de Tarski, Leśniewski propose la base axiomatique suivante :

A1: $(\forall pqr)(((p \equiv r) \equiv (q \equiv p)) \equiv (r \equiv q))$
A2: $(\forall pqr)((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))$
A3: $(\forall pg)[(\forall f)(g(pp) \equiv ((\forall r)(f(rr) \equiv g(pp)) \equiv$
$(\forall r)(f(rr) \equiv g((p \equiv (\forall q)(q))p)))) \equiv (\forall q)(g(qp))]$

Ces axiomes présentent effectivement et explicitement deux types de quantification : $\forall_S$ et $\forall_{S/SS}$. A partir de cette base, il est possible de définir tous les connecteurs de la logique classique. Par ailleurs, elle est posée comme un tremplin pour accéder à de nouvelles constantes logiques et, nonobstant, à de nouvelles catégories syntaxico-sémantiques. Pour rendre cet accès possible, il est nécessaire de disposer d'une procédure définitoire construite sur le connecteur de biconditionnelle, une procédure autorisant l'introduction de nouvelles catégories et de nouvelles constantes.

Ainsi donc, Leśniewski propose un système des propositions maximal. Il le présente (Leśniewski 1929, 1992) avec un très haut degré de précision et le nomme *protothétique*. Son travail explicite de manière formelle les règles de procédures inférentielles nécessaires à l'élaboration progressive de son système.

Ces règles sont au nombre de cinq : la règle de définition, la règle de substitution, la règle de distribution des quantificateurs, la règle de détachement et la règle d’extensionnalité. J’ai présenté ailleurs ces procédures inférentielles, je me contenterai donc ici d’en indiquer les références : (Miéville 1984, 2001, 2004, 2009).

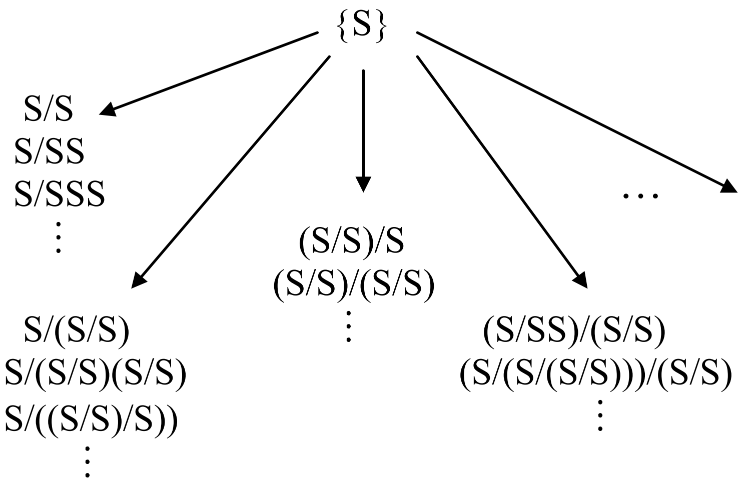
Cette logique des propositions maximale est potentiellement complète en termes des catégories syntaxico-sémantiques qu’il est possible de concevoir sur la base de la catégorie basique des propositions S ; elle est également complète du point de vue de l’extension des connecteurs logiques de chacune des catégories qu’elle présente. La grammaire inductive et le schéma suivants sont de nature à nous imprégner de cette richesse :

i) S est une catégorie syntaxico-sémantique ;

ii) Si C, C_1, C_2, …, C_n sont des catégories syntaxico-sémantiques, alors (C / C_1 C_2 … C_n) est une catégorie syntaxico-sémantique.
(Il s’agit de la catégorie formatrice de la catégorie C à partir de *n* arguments dont le premier est de la catégorie C_1, le deuxième de la catégorie C_2, … le $n^{\text{ième}}$ de la catégorie C_n ; par convention, on supprime les parenthèses extérieures).

iii) Rien n’est une catégorie syntaxico-sémantique sinon par ce qui précède.

On accède ainsi à une extension maximale de catégories qui peut être esquissée de la manière suivante :



Cet édifice catégoriel est impressionnant et laisse voir deux familles de catégories syntaxico-sémantiques. Il y a d'une part les catégories introduites par des définitions dites *régulières*, exprimant une équivalence comme :

$$F(x, y, \ldots, z) \leftrightarrow E_{xy\ldots z}$$

Cette équivalence est honorée dans le système sous la forme d'une thèse-définition conçue sur l'opérateur de biconditionnelle de la manière suivante :

$$\vdash (\forall xy\ldots z)(\, F(x, y, \ldots z) \equiv E_{xy\ldots z}\,)$$

Sont introduites par de telles définitions des constantes de catégories comme, par exemple, S/SS ou S/(S/S)(S/S).

D'autre part, il y a les catégories introduites par des définitions dites *paramétrées*, exprimant une équivalence

$$F(x)(y)\ldots(z) \leftrightarrow E_{xy\ldots z}$$

Cette seconde sorte d'équivalence est également honorée dans le système par une thèse-définition, mais avec la forme suivante :

$$\vdash (\forall xy\ldots z) \,(\, F(x)(y)\ldots(z) \equiv E_{\,xy\ldots z} \,)$$

Les catégories (S/S)/S ou ((S/S)/S)/SS sont des exemples concernés par les définitions paramétrées.

J'ajoute que, dans le cadre de la protothétique, il est possible de développer une théorie sémantique rigoureuse représentant chacun des connecteurs constants qui y est progressivement introduit (Miéville 1999, 2004 ; Joray 2001).

3. Une expansion maximale de la logique des propositions est-elle sans conséquence syntaxique ?

Penser à une logique maximale donnant un accès potentiel à tous les connecteurs de toutes les catégories syntaxico-sémantiques est un projet qui passe par une large réflexion sur la manière d'inscrire, progressivement, la totalité des foncteurs logiques. Généralement, et presque exclusivement, les systèmes formels sont présentés de manière fermée. J'entends par là que, façonnés par une longue histoire qui a instruit leur aboutissement, ils apparaissent dans la plénitude achevée de leur maturité. Ils présentent un nombre fini de significations primitives et un nombre fini de familles d'actions qu'il est possible de mettre en œuvre. Leur présentation répond donc à une grammaire exhaustive et totalement explicitable. Chaque inscription de la langue qui les structure est catégoriellement et sémantiquement identifiable ; chaque inscription est ainsi un symbole *type*. Dans une présentation standard du système formel de la logique des propositions classique, le symbole p_2^0 représente une proposition atomique ; le symbole ≡ représente la biconditionnelle, à savoir un connecteur binaire de la catégorie S/SS ; le symbole ~ représente la négation propositionnelle, de catégorie S/S. Ainsi, quelle que soit l'expression bien formée du système, la signification de chaque signe est reconnaissable par sa forme. Celle-ci renvoie à une détermination classificatoire univoquement déterminable. Dans cette culture logique, un signe, une forme, renvoie à une abstraction d'inscription, un « type » ou un *sign-design* (Martin 1958 : 65). Cela est possible chaque fois que le système présente de manière exhaustive l'ensemble des catégories, des constantes et des foncteurs qu'il s'est approprié pour en fournir une synthèse fonctionnelle logique. Cette approche ne convient plus lorsque le système ne donne pas d'emblée un accès exhaustif à tous les concepts qui sont susceptibles d'y être investigués. Dans un système maximal, il est en effet exclu de disposer d'une façon actuelle d'une acception exhaustive de tous les concepts logiques que le système peut contenir. Dans cette perspective, l'approche catégorielle ne suffit plus et il est nécessaire d'aborder la présentation des théories formelles d'une tout autre manière. Cette nouvelle présentation est essentiellement associée à l'idée de développement inscriptionnel. Dans ce cadre, une inscription est considérée comme un « token » ou un *sign-event* (Martin 1958 : 65), sa reconnaissance est toujours contextuelle.

Pour entrer dans une dynamique de reconnaissance contextuelle, il est indispensable de se donner un socle à partir duquel proposer une base axiomatique contenant les contextes primitifs déclarés au début du projet. Ainsi, et relativement à la protothétique abordée, cette base consistera en les trois axiomes (et non pas des schémas d'axiomes), qui sont ici réécrits en fonction de la perspective contextuelle :

$$\text{A1:} \lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \rceil$$

$$\text{A2:} \lfloor pqr \rfloor \lceil \equiv (\equiv (p \equiv (qr)) \equiv (\equiv (pq)\ r)) \rceil$$

$$\text{A3:} \lfloor pg \rfloor \lceil \equiv (\lfloor f \rfloor \lceil \equiv (g(pp) \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil \equiv (\ f(rr)\ g(pp)) \rceil \\ \lfloor r \rfloor \lceil \equiv (f(rr)\ g(\equiv (p \lfloor q \rfloor \lceil q \rceil)\ p)) \rceil)) \rceil \lfloor q \rfloor \lceil\ g(pq) \rceil) \rceil$$

Comme on le constate, il s’agit d’une écriture préfixée qui conserve pourtant l’usage des parenthèses. La raison de ce choix est essentielle: dans le cadre théorique inscriptionnel, les parenthèses ne jouent pas seulement leur rôle usuel de séparateurs, mais servent également d’indice catégoriel, et ceci à une exception près, constituée par les des deux paires de parenthèses suivantes:

$$\lfloor \ldots \rfloor \quad \text{et} \quad \lceil \ldots \rceil$$

La paire de parenthèses $\lfloor \ldots \rfloor$ servira à indiquer qu’il est question d’un *quantificateur* portant sur un dire « universel » ; il s’agit d’une manière d’exprimer une généralisation par rapport à une catégorie précisée.

La paire de parenthèse $\lceil \ldots \rceil$ servira à indiquer un *sous-quantificateur*, c’est-à-dire à délimiter l’expression sur laquelle porte un quantificateur.

La concaténation de la première paire avec la seconde

$$\lfloor \ldots \rfloor \lceil \ldots \rceil$$

sera l’indicateur d’une *généralisation*.

La présence d’une inscription dans un sous-quantificateur, une inscription qui n’est pas une parenthèse et qui correspond à une inscription équiforme dans le quantificateur aura le statut de *variable*. Il n’y a donc pas de liste de variables préalablement définies. Ce statut est décidable en contexte.

La présence d’une inscription dans un sous-quantificateur, une inscription qui n’est pas une parenthèse et qui ne correspond pas à une inscription équiforme dans le quantificateur aura le statut de *constante*. Il n'y a donc pas de liste de constantes préalablement définies. Ce statut est décidable en contexte.

Ainsi, dans le premier axiome

$$\text{A1}: \lfloor pqr \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv (\equiv (pr) \equiv (qp)) \equiv (rq)) \urcorner$$

les inscriptions p, q et r ont le statut de variable et l'inscription ≡ celui de constante. L'analyse aurait été la même si l'axiome avait été écrit de la manière suivante :

$$\lfloor \pi\theta\rho \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv (\equiv (\pi\rho) \equiv (\theta\pi)) \equiv (\rho\theta)) \urcorner$$

Il s'agit maintenant de fixer clairement les catégories auxquelles appartiennent ces diverses inscriptions variables ou constantes. Un choix est à faire et à respecter ; je pose dès lors que toute inscription inscrite dans le contexte à deux places et possédant les parenthèses équiformes à (--), appartiendra à la catégorie des propositions, S. De plus, je pose que toute inscription qui n'est pas une parenthèse et qui précède immédiatement un contexte équiforme à (--), comme dans Ψ(--), appartient à la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments de la catégorie des propositions, S/SS. Enfin, j'impose que toute inscription simple ou complexe, inscrite dans un sous-quantificateur et le saturant est de la catégorie des propositions.

Avec ces choix, je n'ai nul besoin de disposer d'une liste de constantes ou de variables prédéterminées pour reconnaître le statut catégoriel des inscriptions, le contexte y subvient sans équivoque. Ainsi par exemple, dans l'axiome A3, ce sont ces seuls critères qui permettent l'identification de toutes les inscriptions qui ne sont pas des parenthèses (ces dernières n'étant attachées à aucune catégorie logique).

A3: ⌊pg⌋⌈≡ (⌊f⌋⌈ ≡ (g(pp) ≡ (⌊r⌋⌈ ≡ (f(rr) g(pp))⌉
⌊r⌋⌈ ≡ (f(rr) g(≡ (p⌊q⌋⌈q⌉) p))⌉))⌉⌊q⌋⌈ g(pq)⌉)⌉

Les inscriptions simples p, r et q sont des variables de la catégorie des propositions S. Elles sont des variables car chacune d’elles possède une inscription équiforme dans le quantificateur qui correspond au sous-quantificateur qui la contient. Elles sont de la catégorie S des propositions parce qu’elles sont soit inscrites dans un contexte à deux arguments équiforme à (--), soit elles saturent un sous-quantificateur, à l’image de l’inscription ⌈q⌉. Les inscriptions f et g sont des variables parce qu’elles possèdent chacune une inscription équiforme dans le quantificateur correspondant au sous-quantificateur qui la contient. Elles sont de la catégorie S/SS, formatrice de propositions à deux arguments de la catégorie des propositions, parce qu’elles précèdent immédiatement des contextes à deux arguments équiformes à (--). Enfin, et pour la même raison, chaque inscription équiforme à ≡ dans A3 est de la catégorie S/SS car elle précède des contextes à deux arguments équiformes à (--), chaque argument sur lesquels elle porte dans A3 étant une entité complexe de la catégorie des propositions. De plus, les inscriptions équiformes à ≡ possèdent dans A3 le statut de constante dans la mesure où elles ne sont pas des parenthèses et ne possèdent pas d’inscription équiforme dans le quantificateur qui leur est associé.

Au premier temps d’un système de type protothétique, il n’existe que ces trois axiomes (et non pas des schémas d’axiome) dont toute inscription est univoquement déterminable en fonction de sa place dans l’expression, de sa relation à son environnement inscriptionnel, et de la manière avec laquelle elle est inscrite dans les contextes qui la concernent. Ainsi donc, au premier temps d’un système de type protothétique par rapport auquel il n’existe que ces trois axiomes, la bibliothèque des catégories, des contextes et des constantes est la suivante :

Catégories	contextes	constantes
S	inscription dans (--)	aucune
S/SS	inscription devant (--)	$\equiv$

Pour avoir accès à d'autres catégories et/ou entités logiques, il est nécessaire de construire sur cet acquis en faisant usage d'une procédure définitoire explicitement déclarée. Celle-ci est du reste relativement simple à exposer.

4. Où il est question de la procédure définitoire

Partant du fait que toute définition explicite établit une relation d'équivalence entre un *definiens* (ce qui permet de définir) et une *definiendum* (ce qui est défini), et m'appuyant sur le fait que toute relation d'équivalence entre deux propositions est honorée pour autant que de l'opération de biconditionnelle entre ces deux expressions résulte une tautologie, je poserai que la procédure définitoire inscrit une thèse (je l'indiquerai avec le symbole méta-linguistique $\vdash$) de la forme quantifiée et biconditionnelle suivante :

$$\vdash \lfloor \alpha\beta...\gamma \rfloor \ulcorner \equiv (\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!] \; E_{\alpha\beta...\gamma}) \urcorner$$

L'inscription équiforme à $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$ constitue le *definiendum* ; il s'agit d'une fonction dont l'inscription Ψ est le foncteur constant et les inscriptions $\alpha\beta...\gamma$ les variables.

Les parenthèses en « contour » sont à considérer ici comme des méta-parenthèses ; j'en expliquerai le fonctionnement plus loin.

L'inscription équiforme à $E_{\alpha\beta...\gamma}$ constitue le *definiens* ; elle doit être une expression conforme à l'état actuel du système. Elle ne peut être conçue que sur la base des catégories, et donc des constantes, que le système connaît actuellement.

Aucune inscription du *definiendum* ne doit être répétée. Les inscriptions de statut variable du *definiendum* doivent être également présentes dans le *definiens*, et vice versa.

Ces conditions sont conformes aux conditions de bonne définition explicite (Carnap 1949 : 88sqq). Elles permettent d'éviter toute ambiguïté, toute confusion et toute contradiction.

Au premier temps de la genèse d'un système développemental, il n'existe donc que les trois axiomes ; ceux-ci, de manière contextuelle, ne donnent à voir que deux catégories reconnaissables par rapport au contexte dans lequel ils apparaissent, et une seule constante (cf. ci-dessus).

La notion de *contexte*, un parenthèsage contenant un nombre fini de places, est une notion fondamentale pour la lecture catégorielle des inscriptions composant une expression ; elle est la clé de la détermination catégorielle. En effet, toute fonction est de la forme $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$ et appartient à la catégorie des propositions S. Ainsi, dans $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$, la catégorie du foncteur Ψ est $S/c_\alpha \ldots c_\gamma$, à savoir celle des foncteurs formateurs de la catégorie des propositions S et portant sur *n* arguments, dont le premier appartient à la catégorie c_α de l'inscription α, … et le $n^{\text{ième}}$ à la catégorie c_γ de l'inscription γ. Chaque identification catégorielle d'une inscription est déterminée par la place de celle-ci dans un contexte et par la forme des parenthèses de celui-ci.

Sur la base de ce qui précède, il est possible dès lors de procéder, à partir des notions primitives, à une expansion progressive des constantes et des catégories syntaxico-sémantiques. Pour ce faire, il s'agit chaque fois de construire le *definiens* qui convient, en fonction des constantes et des catégories syntaxico-sémantiques que le système contient actuellement.

La fonction $\Psi[\![\alpha\beta...\gamma]\!]$, qui porte le statut de *definiendum*, doit être composée de l'inscription d'un foncteur constant Ψ, qui précède un contexte parenthèsé ⟦αβ...γ⟧, contenant toutes les variables de la fonction Ψ.

1) Si le foncteur appartient à une catégorie que le système contient actuellement, les parenthèses de ce contexte doivent être équiformes à ce qui a été préalablement choisi.
2) Si le foncteur est destiné à appartenir à une catégorie que le système ne connaît pas encore, le choix des parenthèses est libre à l'exclusion de toutes celles identifiant déjà une catégorie différente et contenant le même nombre de paramètres.

Exemples de définitions

Je décide d'inscrire une définition qui porte l'opération de *négation propositionnelle*. Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l'opérateur de la biconditionnelle propositionnelle associé à son contexte (--), et de l'existence des deux catégories S et S/SS. L'opérateur de négation est un opérateur unaire destiné à être de la catégorie S/S ; cette catégorie n'existe pas encore dans le système. Il est donc indispensable de lui associer un contexte qui permettra de l'identifier sans équivoque. Ce contexte ne comportera qu'un seul argument. Tout choix de parenthèses est actuellement possible, même celui équiforme aux parenthèses (et). En effet, l'opérateur étant unaire, les contextes (--), binaire, et (-), unaire, ont bien des parenthèses équiformes, mais ils sont distinguables par leur nombre d'arguments. Ce choix n'introduit donc aucune confusion. Quant au *definiens*, je proposerai celui déjà discuté plus haut:

Ecriture conventionnelle (non contextuelle):
$\vdash (\forall p)\, (\sim(p) \equiv (p \equiv (\forall q)\, q))$

Ecriture contextuelle (conforme au développement du système):
$\vdash \lfloor p \rfloor \lceil \equiv (\sim(p) \equiv (p \lfloor q \rfloor \lceil q \rceil\,)) \rceil$

Je décide désormais d’inscrire une définition qui porte l’opération de la *conjonction propositionnelle*. Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l’opérateur de la biconditionnelle propositionnelle $\equiv$, associé à son contexte (--), de l’opérateur unaire de la négation propositionnelle associé au contexte (-), et de l’existence de trois catégories S, S/SS et S/S. La conjonction propositionnelle est un opérateur binaire destiné à être de la catégorie S/SS ; cette catégorie existe actuellement dans le système. Il est donc indispensable de respecter le contexte qui lui a déjà été attribué, i.e. (--). Le respect de ce choix est indispensable afin de ne générer aucune confusion. Quant au *definiens*, je proposerai ici aussi celui déjà présenté plus haut:

Ecriture conventionnelle:
$\vdash (\forall pq)\, ((p \wedge q) \equiv ((\forall f)\, (p \equiv ((\forall r)(p \equiv f(r)) \equiv (\forall r)(q \equiv f(r))))))$

Ecriture contextuelle:
$\vdash \lfloor pq \rfloor \lceil \equiv (\, \wedge(pq) \equiv (\, \lfloor f \rfloor \lfloor \equiv (p \equiv (\lfloor r \rfloor \lceil \equiv (pf(r)) \rceil \lfloor r \rfloor \lceil \equiv (qf(r)) \rceil)) \rceil$

Je décide d’inscrire une définition qui porte l’opération de la *conditionnelle propositionnelle*. Pour ce faire, je ne dispose actuellement que de l’opérateur de la biconditionnelle propositionnelle $\equiv$ et de l’opérateur de la conjonction propositionnelle $\wedge$, associés à leur contexte (--), de l’opérateur unaire de la négation propositionnelle $\sim$, associé au contexte (-), et de l’existence de trois catégories S, S/SS et S/S. L’opérateur de la conditionnelle propositionnelle est destiné à être de la catégorie S/SS ; cette catégorie existe actuellement dans le système. Il est donc indispensable de respecter le contexte (--). Le respect de ce choix est indispensable afin de ne générer aucune confusion. Quant au *definiens*, je proposerai de le construire de la manière suivante :

Ecriture conventionnelle:
$\vdash$ (∀pq) ((p ⊃ q) ≡ ~ (p ∧ ~q))

Ecriture contextuelle:
$\vdash$ ⌊pq⌋⌈ ≡ (⊃ (pq) ~ (∧ (p ~ (q))))⌉

Enfin, je décide de proposer une définition qui inscrit dans le système l’opération *binaire de la biconditionelle d’ordre supérieur*. Celle-ci est destinée à agir sur deux arguments dont chacun appartient à la catégorie S/S ; la catégorie de l’opération visée est donc S/(S/S)(S/S). Pour ce faire je ne dispose actuellement que de l’opérateur de la biconditionnelle propositionnelle ≡, de l’opérateur de la conjonction propositionnelle ∧, de l’opérateur de la conditionnelle propositionnelle ⊃, associés à leur contexte (--), et de l’opérateur unaire de la négation propositionnelle ~, associé au contexte (-) ; à ce stade de la construction, trois catégories sont présentes : S, S/SS et S/S. Ce nouvel opérateur de biconditionnelle non propositionnelle est destiné à être un opérateur binaire de la catégorie S/(S/S)(S/S) ; cette catégorie n’existe pas actuellement dans le système. Il est donc indispensable de choisir un contexte à même de l’identifier. Tous les choix de parenthèses sont possibles, à l’exclusion de celles équiformes à (et). En effet ce choix entraînerait une confusion entre la catégorie attestée dans le système et identifiant la catégorie S/SS à deux arguments et celle destinée à être identifiée à la catégorie S/(S/S)(S/S), à deux arguments également. Je proposerai, pour cette nouvelle catégorie S/(S/S)(S/S), le contexte à deux arguments suivant : [--]. Quant au *definiens*, je l'inscrirai de la manière suivante en fonction de ce dont je dispose actuellement :

Ecriture contextuelle:
$\vdash \lfloor fg \rfloor \ulcorner \equiv (\equiv [fg] \; \lfloor p \rfloor \ulcorner \equiv (f(p) \; g(p)) \urcorner) \urcorner$

Cette inscription paraît ésotérique et ambigüe, mais il n'en est rien ! En effet, l'analyse systématique et en contexte de toute inscription de l'expression produit un verdict classificatoire univoque.

1. $\vdash \lfloor fg \rfloor \ulcorner \equiv ($ *definiendum definiens* $) \urcorner$. Il s'agit bien du moule conforme à une thèse définitoire et le *definiendum*, tout comme le *definiens* appartiennent à la catégorie des propositions, S.

2. *Le definiens* est une expression équiforme à celle-ci : $\lfloor p \rfloor \ulcorner \equiv (f(p) \; g(p)) \urcorner$. L'inscription p est de la catégorie des propositions parce qu'elle sature un contexte à un argument équiforme à (-). Les inscriptions f et g sont de la catégorie des foncteurs formateurs de proposition à un argument propositionnel S/S, car elles précèdent l'une et l'autre un contexte à un argument équiforme à (-), qui identifie cette catégorie.

3. Quant au *definiendum,* $\equiv [fg]$, la catégorie de ses inscriptions f et g est connue grâce à l'analyse du contenu inscriptionnel du *definiens* qui vient d'être effectuée. Le *definiendum* $\equiv [fg]$ appartient à la catégorie des propositions ; l'inscription $\equiv$ qui précède l'inscription [fg] est donc un foncteur constant binaire qui opère sur deux opérandes de la catégorie des foncteurs unaires propositionnelles S/S et produit une expression de la catégorie des propositions : S/(S/S)(S/S). Il était donc

indispensable de choisir d'autres parenthèses que celles équiformes à (et), sous peine d'introduire une confusion grave avec la catégorie des foncteurs propositionnels à deux arguments identifiant la catégorie S/SS, dont le contexte est (--). C'est la raison pour laquelle j'ai choisi les parenthèses équiformes à [et] pour inscrire le contexte à deux arguments [--].

4. A ce point de l'exposé, le lecteur attentif devrait s'étonner ! En effet, le foncteur inscrit devant le contexte [--] du *definiendum* ≡ [fg] est équiforme à celui qui précède à plusieurs reprises le contexte équiforme à (--), dans des expressions comme ≡(pq). N'existe-t-il pas une confusion manifeste entre une forme qui partagerait deux statuts catégoriels différents, S/SS et S/(S/S)(S/S) ? Il n'en est rien, car, je le rappelle, les inscriptions sont des inscriptions « token », elles n'ont de signification que dans le contexte où elles apparaissent. Ici, l'inscription ≡ devant le contexte (--) prend le statut catégoriel S/SS, et ≡ devant le contexte [--] prend le statut catégoriel S/(S/S)(S/S). Il n'y a donc aucune confusion ! Un système inscriptionnel autorise donc des signes polysémiques. Cette dernière définition ne peut plus être exprimée dans une écriture conventionnelle sans générer quelque ambigüité. En effet, dans cette écriture, rien (i.e. aucun contexte) ne permettrait de distinguer les deux significations différentes d'un même signe :

$$\vdash (\forall fg)((f \equiv g) \equiv (\forall p)(f(p) \equiv g(p)))$$

Bibliothèque après cette succession de définitions :

Catégories	contextes	constantes
S	dans contexte (-)	aucune
S/S	devant contexte (-)	~
S/SS	devant contexte (--)	≡, ∧, ⊃
S/(S/S)(S/S)	devant contexte [--]	≡

Cette saisie progressive peut être poursuivie pour donner accès à tous les foncteurs propositionnels désirables par rapport à la quête logique conduite. Ce développement, ici restreint aux fonctions et catégories dites régulières, peut être généralisé aux fonctions paramétrées. Il peut également être étendu à tout l'édifice prédicatif maximal, à savoir à des systèmes incluant la catégorie N des noms comme seconde catégorie primitive. L'ouverture à la maximalité est alors magistrale et l'esquisse de l'arbre catégoriel suivant en suggère l'importance :

{S,N}

S/S
S/N
S/NN
⋮

S/(S/N)
S/((S/N)/N))
⋮

N/N
N/NN
N/(S/N)
⋮

(S/N)/(S/N)
(N/(S/N))/(S/N)
(N/NN)/NS(S/SN)
⋮

. . .

Cette édification progressive est réglée de manière extrêmement précise par des procédures inférentielles formalisées par Leśniewski (1929) et axiomatisées par Rickey (1972, 1973), Miéville (2009).

Conclusion

L'approche axiomatique n'a pas de limite formelle, mais si elle veut remplir le défi d'être à même de capter de manière maximale le projet logique qu'elle investit, elle doit modifier sa manière de procéder. Cette approche doit faire acte d'humilité et accepter d'être complétée par une procédure forte et efficace autorisant le développement progressif et créatif du système dont elle inscrit les premières significations primitives. Elle doit donc être munie d'une véritable règle de définition autorisant notamment l'introduction de nouvelles catégories syntaxico-sémantiques ; elle doit expliciter une règle de substitution pouvant être mise en œuvre pour toute catégorie introduite. But not the least, elle doit admettre une évolution fondamentale dans sa manière d’être inscriptionnellement saisie : à la saisie catégorielle conventionnelle, elle doit alors habiter la perspective contextuelle, parfois nommée *inscriptionnelle*.

Une extension maximale de la logique des propositions et des prédicats passe donc par une rupture profonde avec la manière standard de présenter ces logiques en termes de systèmes formels. Tout symbole porte une signification uniquement en fonction de son environnement inscriptionnel. Par ailleurs, une procédure définitoire explicite devient le moteur d’extensions, créative des concepts logiques à saisir.

La base axiomatique (*axioma* de *axioun*) doit accepter qu’elle n’est plus seule à « juger valable », mais qu’il est indispensable que lui soit associée une procédure qui ne soit plus un « finir » (« définition » : du latin *definire* de *finire*) mais un « commencer » que j’aime à nommer une « décominition » (du latin *cominitiare*).

Bibliographie

BONNAY D. 2007. *Qu'est-ce qu'une constante logique ?* Thèse de doctorat en philosophie, Université de Paris I.

CARNAP R. 1949. *The logical Syntax of Language,* London : Routledge & Kegan.

FREY L. 1987. De la négation dans la logique d'Aristote, *Revue Européenne des Sciences Sociales* **25** (77), 45-60.

JORAY P. 2001. *La subordination logique. Une étude du nom complexe dans l'ontologie de S. Leśniewski,* Berne : P. Lang.

JORAY P. 2005. *La quantification dans la logique moderne,* Paris : L'Harmattan.

JORAY P. & MIÉVILLE D. (éds). 2008. *Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques. Actes du colloque de Neuchâtel, 19-20 octobre 2007,* Université de Neuchâtel : *Travaux de logique* **19**.

LEŚNIEWSKI S. 1929. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fundamenta Mathematicae* **14**, 1-81. [Trad. anglaise dans Leśniewski 1992]

LEŚNIEWSKI S. 1992. *Collected Works* I, II, S.J. Surma, J.T. Srzednicki, D.I. Barnett (eds), Varsovie : PWN, Polish Scientific Publisher ; Dordrecht : Kluwer.

MARTIN N. M. 1989. *Systems of Logic,* Cambridge University Press.

MIÉVILLE D. 1984. *Un développement des systèmes logiques de S. Leśniewski. Protothétique-Ontologie-Méréologie.* Berne : P. Lang.

MIÉVILLE D. (éd.) 1999a. *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique*, Université de Neuchâtel : *Travaux de logique* **13**.

MIÉVILLE D. 1999b. Expansion catégorielle en logique, dans Miéville 1999a, 1-41.

MIÉVILLE D. 2001. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule I : La protothétique. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.
MIÉVILLE D. 2004. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule II : L'ontologie. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.
MIÉVILLE D. 2008. D'une définition à l'autre, dans Joray & Miéville 2008, 159-175.
MIÉVILLE D. 2009. *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski.* Fascicule VI : La métalangue. Université de Neuchâtel : *Travaux de logique*.
RICKEY V. F. 1972. Axiomatic Inscriptional Syntax, Part I : The Syntax of Protothetic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13**, 1-33.
RICKEY V. F. 1973. Axiomatic Inscriptional Syntax, Part II : The Syntax of Ontology, *Notre Dame Journal of Formal Logic* **14**, 1-52.
RUSSELL B. 1906. The Theory of Implication. *American Journal of Mathematics* **28**, 159-202.
TARSKI A. 1923. Sur le terme primitif de la logistique, *Fundamenta Mathematica* **4**, 196-200. [Repris dans Tarski 1972, vol. 1]
TARSKI A. 1972. *Logique, Sémantique, Métamathématique 1923-1944,* 2 vol. Paris : A. Collin.
TARSKI A. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics,* Indianapolis : Hackett (1ère edition 1956).
WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. 1910, 1912, 1913. *Principia Mathematica,* Cambridge University Press.