

Juln 2008

TRAVAUX DE LOGIQUE No 19

ISSN 1420-8520

Juin 2008

19

TRAVAUX DE LOGIQUE

Université
de Neuchâtel **unine**

DÉFINITION

Rôles et fonctions en logique et en mathématiques

Actes du colloque

Neuchâtel, 19-20.10.2007

Pierre Joray & Denis Miéville
éditeurs

CdRS



Centre de Recherches Sémiologiques
Travaux de logique
N° 19 – juin 2008

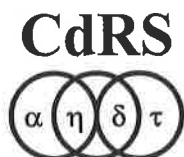
DÉFINITION

**Rôles et fonctions en logique
et en mathématiques**

Actes de colloque

Neuchâtel, 19-20 octobre 2007

**Pierre Joray & Denis Miéville
éditeurs**



Université de Neuchâtel

Comité de lecture

Jean-Pierre DESCLÈS, Paris

Gerhard HEINZMAN, Nancy

Frédéric NEF, Rennes

Denis MIÉVILLE, Neuchâtel

Denis VERNANT, Grenoble

Henri VOLKEN, Lausanne

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel
Espace Louis-Agassiz 1
CH-2000 Neuchâtel (Switzerland)

© 2008 by Centre de Recherches Sémiologiques. Tous droits réservés

TABLE DES MATIÈRES

Pierre JORAY & Denis MIÉVILLE	
<i>Avant-propos</i>	v-viii
Jacqueline BONIFACE	
<i>La définition dans les axiomatiques euclidienne et hilbertienne</i>	1-27
Hourya BENIS SINACEUR	
<i>Nécessité et fécondité des définitions : fondements de la théorie des nombres de Richard Dedekind (1831-1916)</i>	29-72
Jean-Pierre DESCLÉS	
<i>De la définition chez Pascal aux définitions en Logique Combinatoire</i>	73-113
François LEPAGE	
<i>Les définitions sont-elles triviales : Russell, Poincaré, Leśniewski</i>	115-133
Pierre JORAY	
<i>Définitions explicites et abstraction</i>	135-157
Denis MIÉVILLE	
<i>D'une définition à l'autre</i>	159-175
Denis BONNAY	
<i>Définir la logique, une question de simplicité</i>	177-203
Denis VERNANT	205-237
<i>Définition stratifiée de la véridicité</i>	
Liste des auteurs	

AVANT-PROPOS

Le concept de définition ne se laisse pas saisir sans difficulté. En parcourant la littérature qui lui est consacrée, force est d'admettre que les acceptions de ce terme sont diverses, guères conciliables les unes avec les autres, et fondées sur des bases épistémologiques bien souvent concurrentes :

- Aristote caractérise les définitions comme des thèses qui, contrairement aux hypothèses, se distinguent dans la mesure où elles ne sont pas (ne devraient pas être) concernées par l'existence d'un objet, mais par l'essence de celui-ci. Certaines d'entre elles installent la signification des « notions primitives » dirions-nous aujourd'hui ;
- Cicéron parle d'un compte rendu bref et limité de la chose à définir ;
- Milton assume qu'elles ont pour visée d'affiner l'essence pure des choses ;
- Spinoza voit dans les définitions d'un premier genre celles qui portent et caractérisent l'essence d'un objet ; le monde extérieur est le critère permettant alors de les valider (descriptions vraies ou fausses !). A cette première catégorie s'oppose celle des définitions d'un deuxième genre, qui ne sont proposées qu'à l'examen et qui sont donc subjectives ;
- Locke évoque l'activité de proposer, *via* les mots, une nouvelle compréhension de l'idée dont le terme défini tient lieu ;
- Leibniz thématise la distinction entre définitions réelles et définitions nominales ;
- Mill parle de la signification d'un mot ;
- Russell, lui, est embarrassé par le rôle abrégatif qu'il est contraint de faire jouer aux définitions dans la pensée formelle ;

- Carnap précise notamment ce qu'est formellement une définition explicite ;
 - Robinson recense 18 espèces de définitions dans l'œuvre des bons auteurs ;
- et cette liste peut être étendue sans peine, chacun en conviendra !

Associés dans le cadre d'une convention entre les Universités de Rennes 1 et de Neuchâtel, Pierre Joray et Denis Miéville, tout à la fois intéressés par cette activité centrale de toute présentation théorique et par la nécessité d'offrir à la critique le fruit de leurs réflexions en la matière, ont organisé un colloque en 2007 sur le thème « Définition. Rôles et fonctions en logique et en mathématiques » à l'Université de Neuchâtel, les 19 et 20 octobre 2007. Ils ont ainsi connu un espace d'échanges et d'intérêts vivant et constructif, révélant tout à la fois la difficulté qu'il y a à saisir les acceptions de l'activité définitoire et l'intérêt fondé d'en saisir les mécanismes et les nuances. Il semblait alors évident qu'il fallait sortir du cercle des participants et rendre public le contenu de ces réflexions denses et ouvertes. C'est ce que nous offrons aujourd'hui dans ce volume, grâce à la diligence et au travail des intervenants.

Dans *La définition dans les axiomatiques euclidienne et hilbertienne*, Mme J. Boniface compare ces deux conceptions de la définition et analyse de quelle manière s'est opéré le passage de l'une à l'autre. On découvre avec beaucoup d'intérêt que chacun des deux types de définitions peut être appréhendé comme une étape d'un même processus de formalisation d'un champ empirique donné, l'espace.

L'étude de Mme. H. Benis Sinaceur concerne les célèbres mémoires de Richard Dedekind sur les nombres réels et les nombres entiers. Elle nous (dé)montre après une enquête approfondie et minutieuse que Dedekind n'a pas fourni une définition logique du nombre, mais une définition ensembliste qui respecte la rigueur des règles logiques.

M. J.-P. Desclès, étudie la définition de la définition par Pascal, qui retient la définition nominale pour expliquer le rôle de cette activité dans la méthode géométrique. Grâce à la logique combinatoire, l'approche pascalienne se trouve étendue et spécialisée.

Les définitions sont elles triviales ? M. F. Lepage répond à cette provocation en faisant jouer les acteurs de génies que sont Russell, Poincaré et Leśniewski. Il conclut en mettant en évidence qu'à travers la règle d'inférence définitoire de Leśniewski, les définitions ne sont plus triviales, abrégatives, mais bien créatives. Elles portent ainsi le statut de véritable fondement de la structure des systèmes logiques.

M. P. Joray ausculte les propriétés inhérentes aux définitions explicites à la Leśniewski et défend l'idée que leur aspect novateur doit être imputé au mécanisme de l'abstraction. En inscrivant ainsi toute définition de manière interne, la puissance des systèmes axiomatiques se voit augmentée. Il en conclut qu'avec une procédure définitoire logique, les systèmes de Leśniewski forment une base idéale pour façonner une construction logiciste de l'arithmétique.

M. D. Miéville, quelque peu étourdi par l'explosion des appréhensions définitoires, traverse la théorie des systèmes formels pour en évaluer la diversité définitoire. Puis, visant l'élaboration d'une logique maximale de la vérité et de l'extensionnalité, il met en évidence la possibilité de sa construction progressive à l'aide d'une règle d'inférence définitoire. Dans ce contexte et grâce aux travaux de Leśniewski, la définition explicite devient un instrument aux vertus créative et expressive qui se pose alors comme une activité génétiquement fondatrice de la logique.

Dans *Définir la logique, une question de simplicité*, M. D. Bonnay explicite le projet de caractérisation du logique comme celui de la définition des constantes logiques. En plongeant cette problématique sur fond de la théorie de la preuve et

de la théorie des modèles, il en discute les enjeux et les tensions, et suggère une solution dans le prolongement des travaux mathématiques sur les logiques absolues.

M. D. Vernant, dans son article « *définition stratifiée de la véridicité* » développe une réflexion finement argumentée à propos de la définition philosophique de la véridicité. Il conclut qu'elle ne saurait se suffire d'une perspective logico-sémantique, ni se limiter à la pragmatique des actes véridictionnels, mais nécessite l'usage d'une logique dialogique des jeux véridictionnels.

LA DÉFINITION DANS LES AXIOMATIQUES EUCLIDIENNE ET HILBERTIENNE

Jacqueline BONIFACE

Introduction

Dans l'axiomatique euclidienne, les définitions sont considérées comme des principes, à côté des notions communes et des postulats, et sont nettement différenciées de ces deux autres types de principes. Bien qu'il prît le modèle euclidien pour base de sa propre méthode axiomatique, Hilbert apporta un changement radical dans la conception de ces principes. Avec lui, les notions communes et les postulats furent regroupés sous le seul terme d'axiomes, et les définitions elles-mêmes se trouvèrent en partie confondues avec les axiomes.

Cet article se donne pour but de comparer les conceptions euclidienne et hilbertienne de la définition et d'analyser comment s'est effectué le passage de l'une à l'autre. Ceci implique d'abord de revenir sur les définitions euclidiennes, dont nous donnerons une interprétation nouvelle. Pour cela, nous réexaminerons ces définitions à la lumière des thèses aristotéliennes. Il est en effet très probable, et généralement admis, qu'Euclide se soit appuyé sur les thèses épistémologiques d'Aristote pour établir son axiomatique. Nous pourrons d'ailleurs vérifier cette hypothèse au cours de notre examen. Nous verrons ensuite quelles sont les innovations introduites par Hilbert et en quoi ces innovations marquent une rupture avec la conception « classique » représentée alors par Frege. Enfin nous comparerons les

conceptions euclidienne et hilbertienne. La conception hilbertienne s'avèrera curieusement plus proche de la conception euclidienne que de celle de ses prédécesseurs directs.

C'est donc par l'acception aristotélicienne de la définition que nous allons commencer. Les définitions, selon Aristote, font partie des principes, il nous faudra donc commencer par préciser ce qu'est un principe aristotélicien. Nous serons amenés pour cela à revoir certaines interprétations qui en ont été données, en particulier à travers des partis pris de traduction. La prise en compte de textes autres que les *Seconds Analytiques*, auxquels se limitent souvent les épistémologues qui étudient la théorie de la science aristotélicienne, nous permettra en outre d'avoir une idée plus complète de ce qu'Aristote entend par définition.

1. La définition selon Aristote

Quel statut Aristote a-t-il donné aux définitions ? L'exposé qu'il fait des principes des sciences, parmi lesquels il place les définitions, constitue le modèle sur lequel s'est appuyé Euclide ; c'est en tout cas ce que nous essayerons de mettre en évidence.

C'est dans les *Seconds Analytiques* qu'Aristote expose sa théorie de la science. Il divise les principes, qui sont au commencement de toute science, en deux grands types : 1) les principes propres à une science particulière, qu'il appelle les thèses, et 2) les principes valables pour toutes les sciences, qu'il appelle les axiomes. L'ensemble des thèses elles-mêmes se divise en hypothèses et en définitions. Ainsi, les définitions sont des thèses, et donc, en tant que thèses, des principes.

1.1. Les définitions sont des principes

1.1.1. Les principes selon Aristote

Nous examinerons tout d'abord cette première caractérisation des définitions comme principes. Qu'est-ce qu'un principe ? La traduction littérale de la réponse d'Aristote à cette question est la suivante : « J'entends par principe dans chaque genre ceux dont on ne peut prouver qu'ils sont tels »¹. Cette définition des principes a été traduite et interprétée de plusieurs manières. La traduction française de Jean Tricot, qui généralement fait référence en France, est particulièrement malheureuse, car elle introduit les termes de vérité et surtout d'existence, absents du texte grec. L'utilisation du terme d'existence pour caractériser les principes en général constitue même un contre-sens : en parlant des définitions, justement, Aristote précise qu'elles ne disent rien de l'existence². « J'entends par principes dans chaque genre, traduit Tricot, ces vérités dont l'existence est impossible à démontrer » (Aristote *op. cit.*, trad. Tricot). Par ailleurs, dans la traduction anglaise de Thomas Heath, on ne trouve pas le terme d'existence, mais on trouve encore celui de vérité : « By first principles in each genus I mean those the truth of which it is not possible to prove » (Heath 1998 : 50). Selon cette traduction, il semblerait que la preuve dont il est question concerne la vérité des principes. Cette interprétation peut être démentie si l'on suit plus littéralement le texte grec, comme nous l'avons fait ci-dessus, ou comme le fait encore Pierre Pellegrin qui traduit cette même phrase : « J'appelle "principes" dans chaque genre ceux dont on ne peut pas prouver qu'ils sont le cas ». Ce que fait apparaître une telle traduction est que l'impossibilité de donner une preuve des principes ne concerne pas l'existence ou la vérité de ces principes, mais concerne leur

1 Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 10, 76a 31, il s'agit ici de notre traduction.

2 Nous développerons ce point plus loin.

place ou leur statut de principe. Pellegrin précise en note, dans ce sens : « [...] il semble donc qu'A. veuille dire que les principes ne sont pas démontrables à l'intérieur du genre de la science dont ils sont les principes » – ce qui sous-entend qu'ils pourraient être démontrés dans un autre genre, dans lequel, donc, ils ne seraient plus principes. Ce qui ne veut pas dire qu'il y aurait chez Aristote l'idée d'un choix arbitraire des principes d'une science. Ce que veut dire Aristote, pensons-nous, est qu'une proposition doit être considérée comme principe, lorsque l'on ne peut aller plus avant, en remontant régressivement, à l'intérieur d'un genre donné, en suivant la chaîne déductive de raisons à conséquences. Le caractère indémontrable des principes ne vient donc pas de quelque évidence qu'on leur trouverait, mais de leur place dans la connexion logique qui les lie aux autres propositions.

Cette caractérisation des définitions comme principes a suscité des critiques, par exemple celle de Robert Blanché.

1.1.2. Une critique de la caractérisation des définitions comme principes

Blanché écrit ainsi :

Encore moins faut-il compter les définitions parmi les principes premiers. C'est là une erreur logique étonnante, qu'un instant de réflexion suffit à dissiper. On justifie le recours à des propositions premières en invoquant l'impossibilité de tout démontrer. Or, les mêmes raisons qui valent pour la démonstration valent évidemment pour la définition. On définit un terme par d'autres termes, ceux-ci à leur tour par d'autres, de sorte que, pour éviter la régression à l'infini, il faut bien s'arrêter à quelques termes non définis, de même que les démonstrations doivent reposer sur quelques propositions non démontrées. (Blanché 1999, 20)

Selon Blanché, donc, les définitions ne sont pas des principes et, par conséquent, ne doivent pas figurer en tête de la théorie

axiomatique. Il faudra, au contraire, placer au début de la théorie, des termes indéfinissables, ces termes constituant une sorte d'alphabet utilisé dans les définitions elles-mêmes. Nous verrons plus loin quelles objections peuvent être formulées à l'encontre de cette critique.

1.2. La définition est une thèse

Les définitions font partie des principes propres à une science particulière, c'est-à-dire des thèses, contrairement aux axiomes qui sont les principes communs à toutes les sciences. Parmi les thèses, les définitions se distinguent des hypothèses, qui affirment qu'une chose est ou n'est pas.

En effet, dit Aristote, la définition est une thèse car l'arithméticien pose que l'unité, c'est l'indivisible du point de vue de la quantité ; or ce n'est pas une hypothèse. En effet, ce qu'est une chose et qu'elle est, ce n'est pas la même chose. (Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 2, 22, trad. Pellegrin)

Autrement dit la définition répond à la question « qu'est cet objet ? », l'hypothèse à la question « est-il ? ». Cette distinction entre définitions et hypothèses permet de caractériser la définition comme énonçant ce qu'est tel objet, son essence ; elle ne dit rien de « l'existence » de l'objet défini. Sans doute faut-il nuancer un peu cette différenciation. Dans la science, contrairement à ce qui se passe dans la fiction, la définition concerne l'essence de l'objet, mais n'est pas totalement indépendante de son existence. En effet, en science, l'essence d'un objet est fondée dans l'existence de cet objet, car la science, en tout cas la science grecque, ne s'intéresse qu'aux objets existants (nous aborderons plus loin le mode d'existence de ces objets). Afin de préciser ce lien entre définition mathématique et existence de l'objet, il convient de distinguer entre les objets premiers et les objets (ou

propriétés) dérivés. L'existence des objets premiers est simplement posée, celle des objets dérivés doit être démontrée :

Ce que, donc, signifient aussi bien les notions premières que celles qui en viennent, on l'admet, mais qu'ils sont, pour les principes, il est nécessaire de l'admettre, et pour les autres de le prouver. Par exemple, ce que signifie l'unité, ou ce que signifient le droit ou le triangle il est nécessaire de l'admettre, d'admettre que l'unité et la grandeur sont, et pour les autres choses de les prouver. (*Seconds Analytiques*, I, 10,76a, trad. Pellegrin)

En résumé, les définitions posent la signification des termes qui désignent des objets dont l'existence est soit posée par hypothèse tacite, soit en attente d'être démontrée.

1.3. La définition comme détermination d'une matière par une forme

Aristote complète en *Méta Z* 12 ce qu'il a dit dans les *Analytiques* sur la définition. La thèse principale de ce chapitre est que, dans les définitions, « le genre ne peut point exister de façon absolue en dehors des espèces en lesquelles il se divise », ou, s'il existe en dehors d'elles, « c'est comme leur matière » (*Métaphysique*, 1038a). « Il n'y a dans la définition, dit encore Aristote, absolument rien d'autre que le genre primordial dont il s'agit et ses différences » (*op. cit.*, 1037b). Et plus précisément « la définition n'est que l'explication (le *logos*) qui ressort des différences » (*op. cit.*, 1038a). Ainsi, le genre est une matière et la définition est le *logos* qui donne forme à cette matière, par « enchaînement continu des différences obtenues par division à partir du genre » (*Des parties des animaux*, 643b 33). Le terme dernier de la division est ainsi celui qu'accomplit l'énoncé définitionnel. Et cet exercice continu de différenciation qu'accomplit la définition est destiné à individualiser une unité

de signification. Le genre lui-même ne peut pas être une unité autonome, il ne peut pas être défini.

A l'autre bout d'une chaîne qui irait du genre à l'objet individuel, concret, les objets réels, qu'ils soient sensibles ou intelligibles, ne peuvent pas non plus être connus par définition. C'est ce que précise Aristote en *Méta Z*, 11 :

L'essence du cercle et le cercle, l'essence de l'âme et l'âme, sont la même chose et se confondent. Mais le composé, par exemple, ce cercle individuel et particulier, que j'ai sous les yeux, ce cercle soit [réel et] sensible, soit [purement] intelligible (et par intelligibles j'entends les cercles mathématiques, comme par sensibles j'entends les cercles d'airain et de bois), ces composés réels et individuels ne sont pas connus par définition ; on ne les connaît que par la pensée, ou le témoignage des sens. Une fois que nous sortons de la réalité actuelle, nous ne savons plus au juste s'ils existent ou n'existent pas ; mais nous pouvons toujours les dénommer et les connaître, si nous le voulons, par leur notion universelle. (*Métaphysique*, 1036a)

Aristote distingue donc entre l'objet individuel, concret, et l'essence de l'objet, c'est-à-dire le concept ou la notion qui détermine l'objet ; seule l'essence de l'objet peut être définie, l'objet lui-même, qu'il soit sensible ou intelligible, ne peut être que perçu ou pensé. Il s'ensuit que ce que nous appelons « objets mathématiques » sont, pour Aristote, des notions, premières ou dérivées. La détermination de ces notions par un *logos* de définition se situe au niveau de l'espèce, entre deux extrêmes : celui de la possibilité indéfinie (le genre) et celui de la réalité concrète (l'individu). Ainsi, le cercle, comme notion déterminée, se situe entre un genre (indéterminé), la grandeur, et un objet concret, le cercle individuel comportant une matière, sensible ou intelligible (cercle tracé sur le papier ou simplement imaginé par l'esprit). Les objets de la science, en particulier de la science mathématique, sont donc des notions, universelles et définies. Il n'y a pas à proprement parler, selon cette conception

aristotélicienne, d'objet indéfinissable ; la grandeur, par exemple, n'est pas un objet mathématique, pas plus que le cercle individuel. On comprend alors pourquoi il ne peut y avoir ici de régression à l'infini et on peut donc répondre maintenant à la critique de Blanché : c'est à l'intérieur d'un genre que l'on définit, non dans l'absolu, et l'objet défini est en quelque sorte borné de deux côtés : du côté du genre lui-même qui lui sert de matière et du côté de l'objet matériel en lequel il peut prendre forme intelligible (dans la pensée) ou sensible (sur le papier ou dans des objets matériels). La définition effectue donc une découpe dans le genre ; elle n'est pas conçue comme composition d'éléments premiers indéfinissables.

1.4. La nature des objets des mathématiques

Nous avons vu que la définition pose la signification des notions et ne dit rien de l'existence des objets. Cependant la question du mode d'existence et de la nature de ces objets est liée à celle de la définition. Nous venons de voir que les définitions, selon Aristote, portent sur les notions universelles et non sur les objets concrets. Aristote toutefois ne conçoit pas ces notions, à l'instar de Platon, comme des êtres intermédiaires entre les Idées et les choses sensibles. Les êtres mathématiques, selon lui, sont des abstractions, c'est-à-dire qu'ils sont obtenus en retranchant aux choses sensibles toutes leur propriétés sensibles.

[...] le mathématicien [...] ne considère dans ses théories que des abstractions, puisque c'est en retranchant toutes les conditions sensibles qu'il étudie des choses. Ainsi, il ne tient compte, ni de la légèreté, ni de la dureté des corps, ni des qualités contraires à celles-là ; il néglige également la chaleur, le froid, et les autres oppositions que nos sens perçoivent. Il ne conserve que la quantité et le continu, ici en une seule dimension, là en deux, ailleurs en trois, et les affections propres à ces entités, en tant qu'elles sont quantitatives et continues ; il ne regarde absolument rien d'autre. (*Métaphysique*, 1061a)

Le mathématicien, écrit encore Aristote, considère les objets sensibles en mouvement non en tant qu'ils sont mûs, mais seulement en tant que corps, ou en tant qu'ils sont de simples surfaces, ou de simples longueurs, ou qu'ils sont divisibles ou indivisibles, et avec une certaine position, ou enfin en tant qu'ils sont exclusivement indivisibles (*Métaphysique*, 1077b). Ainsi, selon Aristote, les objets mathématiques sont considérés en tant que notions universelles, mais à partir de leur support sensible, par « abstraction », c'est-à-dire par neutralisation du contenu sensible (intuitif) de ces objets. Les définitions de ces objets, ou plutôt des notions qui les universalisent, auront pour fonction de réaliser cette abstraction : et nous allons voir que les définitions de l'axiomatique euclidienne, conformément aux conceptions aristotéliciennes, auront bien pour effet de neutraliser le contenu intuitif des objets définis.

2. Les définitions chez Euclide

Dans le corpus euclidien, les définitions sont bien des thèses au sens aristotélicien : elles font partie des principes et ne concernent que la signification des notions définies ; elles ne disent rien de l'existence des objets subsumés sous ces notions. Le livre 1 des *Éléments*, par exemple, s'ouvre par l'énoncé des 23 définitions. Examinons plus précisément certaines d'entre elles.

2.1. Définitions des notions premières

Ce sont les définitions des notions premières qui ont suscité le plus de commentaires et de critiques. La difficulté principale de ces définitions premières et surtout de la toute première, celle du point, est qu'elles doivent obéir à la nécessité énoncée par Aristote (par exemple dans les *Topiques*, VI, 4) de ne définir une notion qu'à l'aide de termes antérieurs et plus connus. Ainsi

la définition du point ne peut utiliser aucun terme antérieurement défini. La seule issue est d'en donner une définition négative.

2.1.1. Définition du point

Euclide donne la définition suivante :

Déf I,1 : Un point est ce dont il n'y a aucune partie.
(Euclide 1990, vol. 1, 151)

On trouve une définition très proche de cette première définition des *Éléments* chez Aristote, qui définit le point comme « ce qui [est indivisible en quantité et en tant que quantité], et est indivisible en tout sens, mais qui a une position » (*Métaphysique*, 1016 b). Cette définition du point s'oppose d'une part à celle de l'unité numérique qui est, selon Aristote, « ce qui est indivisible en tout sens, mais sans avoir de position » (*ibid.*), et, d'autre part, à la ligne « ce qui n'est divisible qu'en un sens » (*Ibid.*), à la surface : « ce qui est divisible en deux sens » (*ibid.*) ou au corps : « ce qui est divisible en tout sens » (*ibid.*).

Si l'on compare les deux définitions, aristotélicienne et euclidienne, du point, il apparaît d'abord que la définition d'Aristote précise dans quel genre, ou catégorie³ (la quantité), se situe la notion à définir (celle de point). Cette précision est absente de la définition euclidienne. Cette absence d'indication d'un genre est mentionnée par Heath, par exemple, qui en fait le reproche à Euclide : « les mots "ce qui" dans "ce qui n'a aucune partie" » pose presque la question « qu'est ce que vous entendez par "ce" ? » (1998, 89). Et Heath renvoie à Aristote qui mentionne aussi cette erreur et écrit :

3 La quantité est une catégorie, à côté de la substance, de la qualité, de la relation, du lieu, du temps, etc. La quantité se divise en deux sous-catégories : le discret et le continu. Les catégories sont aussi appelées genres premiers. Cf. *Métaphysique*, 1024 b : « Dans les définitions, on entend encore par genre le primitif intégrant, qui exprime essentiellement ce qu'est la chose, et dont les qualités sont ce qu'on appelle les différences ».

Cette sorte d'erreur se rencontre partout où l'essence de la chose n'est pas posée dans l'expression de la définition : par exemple, la définition du corps comme ce qui a trois dimensions, ou la définition de l'homme, en supposant qu'on ait à la donner, comme ce qui sait compter ; car on n'a pas indiqué la nature de ce qui a trois dimensions ou la nature de ce qui sait compter. Or le genre vise précisément à signifier l'essence de la chose, et c'est le premier terme qui est supposé parmi les éléments de la définition. (*Topiques* VI, 5, 142b)

On peut donc reprocher à la définition d'Euclide de ne pas indiquer le genre, la quantité continue ou la grandeur, dans lequel rentre la notion définie. Toutefois, comme le premier livre des éléments présente les principes de la géométrie, on peut supposer que ce genre est implicitement indiqué par Euclide, ou bien que ce dernier juge inutile de le préciser.

Les deux définitions, aristotélicienne et euclidienne, ont ensuite en commun, comme nous l'avons noté d'emblée, d'être toutes deux négatives. Est-ce à dire qu'elles ne procèdent pas par divisions successives, contrairement à ce que préconise Aristote ? Non, car définir par négation, dit Aristote, est une manière de définir par division. L'exemple qu'il prend pour illustrer son propos est la définition de la ligne, qui est la deuxième définition des *Éléments*.

2.1.2. Définition de la ligne

Def I, 2 : Une ligne est une longueur sans largeur.
(Euclide 1990, vol. 1, 152)

Cette définition de la ligne, comme celle du point qui la précède, est négative. Aristote montre dans le passage des *Topiques* que nous venons de citer, que cette définition procède bien par division à l'intérieur d'un genre :

En outre il faut voir si on a divisé le genre par négation, à la façon de ceux qui définissent la ligne comme étant une longueur sans largeur, car cela ne signifie rien d'autre que la ligne n'a pas de largeur. [...] en

effet, toute longueur doit être ou sans largeur ou avec largeur, puisque, en toute chose, c'est ou l'affirmation ou la négation qui est vraie ; de sorte que le genre de la ligne aussi, qui est la longueur, sera ou sans largeur ou avec largeur. Mais la longueur sans largeur est la définition d'une espèce, et de même l'est aussi la longueur avec largeur : car sans largeur et avec largeur sont des différences, et c'est à partir de la différence et du genre que la définition de l'espèce est constituée. (*Topiques* VI, 6, 143b, 15-20)

Comme l'indique Aristote, la définition euclidienne de la ligne prend comme genre la longueur. On peut la rapprocher de la propre définition d'Aristote qui prend pour genre la quantité continue et que nous avons énoncée plus haut : la ligne est [la quantité continue] qui n'est divisible qu'en un sens ». Les deux définitions respectent bien les exigences aristotéliennes : elles procèdent par division à partir d'un genre pris comme matière.

2.2. Définitions des notions dérivées

A partir des notions premières, Euclide définit les notions dérivées en respectant, là encore, les principes énoncés par Aristote, notamment celui de l'antériorité des notions utilisées dans une définition. Ainsi définit-il le triangle (figure trilatère) à partir de la notion de figure, elle-même d'abord définie à partir de celle de frontière :

Déf. 13 : Une frontière est ce qui est limite de quelque chose. (Euclide 1990, vol. 1, 161)

La notion de frontière (*horos*) est définie comme une sorte particulière de limite (*péras*), propre aux aires, semble-t-il, mais qui peut aussi s'appliquer aux volumes, par exemple aux polyèdres. Il faut comprendre aussi que « frontière » signifie « limite fermée ». Par conséquent le segment de droite, l'angle, possèdent bien des limites mais non une frontière. La notion de limite elle-même n'est pas définie par Euclide. On peut penser qu'il s'agit

là d'une notion générale, dont la définition n'est pas propre à la géométrie et n'a donc pas à figurer dans ce traité. Comme nous l'avons annoncé, la notion de frontière permet de définir celle de figure :

Déf 14 : Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s). (Euclide 1990, vol. 1 : 161).

La figure ne se limite pas à sa frontière, l'aire est comprise. Une fois la figure définie, Euclide peut en introduire différentes espèces, comme le cercle (dont la frontière est réduite à une seule ligne), les figures rectilignes (contenues par des droites), et parmi ces dernières les trilatères [contenues] par trois droites (déf. 19 ; Euclide 1990, vol. 1, 163).

2.3. Les définitions euclidiennes : constructions logiques et non descriptions d'objets

Pour conclure cette première partie, nous insisterons surtout sur le caractère constructif de l'ensemble des définitions de la géométrie. Partant des définitions des notions premières, Euclide construit pas à pas une chaîne de notions dérivées – les notions premières étant elles-mêmes construites à l'intérieur d'un genre pris comme matière de la définition.

Le fait que les notions définies par Euclide soient conformes à la conception aristotélicienne des « objets » mathématiques, comme objets (notions) *abstrait(e)s* de leur supports matériels, n'implique pas que les définitions qui en sont données soient obtenues par abstraction, c'est-à-dire par neutralisation de certaines propriétés des objets matériels considérés. Il paraît important d'insister sur ce point, car il semble avoir donné lieu à des contre-sens. En témoigne, par exemple, ce que Blanché écrit à ce propos :

Aussi les “définitions” initiales d'Euclide n'ont-elles des définitions que l'apparence. Elles se réduisent à de simples descriptions empiri-

ques, comparables à celles que donnerait un dictionnaire, ayant pour objet de diriger l'esprit vers la notion dont il s'agit. (Blanché 1999, 21)

On trouve pareil reproche chez Cavaillès, qui note, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, à propos d'Euclide : « les notions ne sont pas exhaustivement décrites, il y a dans les définitions simple renvoi à une intuition sensible supposée » (1981, 20). Dans son compte-rendu de l'ouvrage de Hilbert et Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Cavaillès écrit encore :

Les axiomatiques concrètes – comme celle d'Euclide – énumèrent simplement les propriétés sans définir leur contenu supposé connu intuitivement. (Cavaillès 1935, t. 35, 424)

Si l'on considèrait les définitions euclidiennes du point ou de la droite, par exemple, comme des tentatives de « descriptions empiriques », il est certain que ces définitions seraient tout à fait insatisfaisantes. Mais nous avons vu qu'il s'agit en réalité de définitions au sens aristotélicien, c'est-à-dire de constructions logiques, obtenues par divisions spécifiques, à partir d'un genre pris comme matière.

3. Les définitions dans l'axiomatique hilbertienne

Afin de comprendre le changement apporté par Hilbert dans la conception de la définition, il nous faut au préalable donner quelques précisions sur l'évolution de la géométrie.

3.1. L'évolution de la géométrie et son accession au statut de science pure

Nous venons de voir que, pour Euclide, conformément à la conception aristotélicienne des mathématiques, la géométrie n'était pas une science empirique. Entre la période grecque et le

19^e siècle, cependant, la conception de cette discipline se modifia, et lorsque les géomètres du 19^e siècle entreprirent d'axiomatiser la géométrie projective, de laquelle devait être dérivée toute autre géométrie, en particulier la géométrie euclidienne, celle-ci était devenue une science empirique. Selon Pasch, par exemple, dont la *Vorlesung über neuere Geometrie*, publiée en 1882, donnait la première reconstruction axiomatique de la géométrie projective, la géométrie devait être fondée sur des concepts et axiomes tirés de l'expérience. Ainsi, les droites infinies, qui ne correspondent à aucun objet d'expérience, sont-elles remplacées, dans la géométrie de Pasch, par des segments finis. De même, les points ne représentent que des « corps dont une décomposition en parties est incompatible avec les limites de l'observation » (Pasch 1882, 3). Mais en même temps, Pasch remarquait que « si la géométrie doit se transformer en une science réellement déductive, il faut que la déduction soit absolument indépendante du sens des concepts géométriques, comme de celui des figures » ; et il poursuivait ainsi : « Au cours de la déduction, il est à la fois recommandé et utile, mais d'aucune manière essentiel, d'avoir à l'esprit la signification des concepts géométriques utilisés » (Pasch 1882, 90).

Hilbert lui-même dans ses premiers cours sur la géométrie considérait celle-ci comme une science empirique. Il énonce par exemple dans un cours de géométrie projective tenu à Königsberg en 1891 :

La géométrie est l'étude des propriétés de l'espace. [...] j'ai donc besoin de mes sens pour le fondement de ses propriétés. J'ai besoin de l'intuition et de l'expérience comme pour le fondement des lois physiques [...]. (Hilbert, cours de 1891, édité par Toepell en 1986)

Ce n'est qu'à partir de 1898 qu'Hilbert situera la géométrie parmi les sciences pures ; et son critère de classification sera la constitution de la science en un système déductif complet. Au-

trement dit une science parvient au statut de science pure, selon Hilbert, lorsqu'elle a été complètement axiomatisée.

Dès son cours de 1898-9, Hilbert place le point de départ de l'axiomatisation non plus dans l'intuition mais dans la logique pure. « Nous considérons comme données, les lois de la pure logique et spécialement toute l'arithmétique »⁴.

La géométrie ne pouvant évidemment pas résulter de la seule logique, Hilbert va ensuite chercher quels axiomes proprement géométriques il est nécessaire d'adjoindre à la logique pour obtenir la géométrie. Les éléments adjoints à la logique afin de constituer la géométrie, sont d'abord, pour Hilbert comme pour ses prédécesseurs, les notions premières de points, droites et plans, mais ces notions, comme Hilbert l'explique dans un cours donné en 1899, « ne sont rien de plus que leur dénomination de choses ; nous ne leur relions aucune intuition et aucune propriété supplémentaire ». Ce qu'Hilbert exprimera encore par la fameuse phrase que l'on cite toujours :

On doit toujours pouvoir dire – à la place de point, droite et plan – table, chaise et verre de bière.

Ce qui veut dire que les termes premiers de l'axiomatique ne renvoient à aucun objet particulier ; ils désignent de simples « choses », dépourvues de tout contenu intuitif et de toute signification, et caractérisées seulement par leur appartenance à un système.

3.2. La définition dans l'axiomatique hilbertienne de la géométrie

C'est, conformément à l'axiomatique euclidienne, par une « définition » que s'ouvre les *Grundlagen der Geometrie* :

4 "Als gegebenem betrachten wir die Gesetze der reinen Logik und speciell die ganze Arithmetik". (Hilbert in Toepell 1986, 204)

1. Définition. Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des *points* ; nous les désignons par des majuscules $A, B, C, \dots$; nous nommons *droites* les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules $a, b, c, \dots$; nous appelons *plans* les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire ; les points et les droites les éléments de la géométrie plane ; enfin les points, les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même. (Hilbert 1971, chap.1)

Les objets premiers sont donc pensés, désignés, nommés, et non plus décrits, ou définis, dans le sens habituel. Ce qu'Hilbert appelle « définition », dans cette introduction des termes premiers, ne suffit évidemment pas à déterminer ces termes. De même, les relations entre les objets premiers sont dans un premier temps simplement nommées :

2. Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent" ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les *axiomes de la géométrie*. (Hilbert 1971)

Objets premiers et relations entre ces objets, au départ simplement posés, devront ensuite être spécifiés, *définis*, et ce qui tiendra lieu de véritables définitions seront les axiomes eux-mêmes. Les objets seront déterminés par les relations qui les lient et ces relations elles-mêmes seront caractérisées par les axiomes. Ainsi, à l'introduction des objets premiers et des relations qui relient ces objets, fait suite l'énoncé des cinq groupes d'axiomes. Le premier groupe, par exemple, contient les axiomes dits d'incidence (ou d'appartenance) qui expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan. Le premier de ces axiomes est le suivant :

(I.1) Il existe une droite liée à deux points donnés A et B , à laquelle appartiennent ces deux points. (Hilbert 1971)

3.3. Les définitions en rapport aux axiomes

3.3.1. La controverse avec Frege

La conception hilbertienne des définitions (et corrélativement des axiomes) marque une véritable rupture dont témoigne la controverse qui eut lieu entre Frege et Hilbert, et qui apparaît essentiellement dans trois lettres écrites autour de 1900⁵. Le point de désaccord tient essentiellement à la divergence concernant les rôles respectifs des définitions et des axiomes. Pour Frege, il est nécessaire de bien distinguer les définitions des axiomes. Les premières fixent par un mot ou un signe un référent donné. Les seconds sont des propositions vraies non démontrées.

Chaque *définition* contient un signe (une expression, un mot) qui ne possédait pas de référence auparavant, et auquel seule la définition en confère une. Lorsque c'est chose faite, on peut tenir la définition comme un énoncé évident, et l'utiliser comme un axiome. [...]

Les propositions non définitionnelles (*axiomes*, principes fondamentaux, théorèmes) ne doivent contenir aucun mot ou signe dont le sens et la référence [...] ne soient pas pleinement établis. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 222-223)

En réponse à Frege qui lui objectait précisément que la référence des mots « point », « droite », « entre » ne soit pas indiquée, mais supposée connue, Hilbert écrivait :

Le cœur du malentendu est ici. Je ne désire rien supposer connu ; je vois dans mon explication du §1 [c'est-à-dire dans les axiomes] la dé-

5 Ces trois lettres ont été éditées dans *Kleine Schriften* et traduites en français par Jacques Dubucs in Rivenc & de Rouilhan (1992, 220-235).

finition des concepts de point, de droite et de plan, si l'on prend comme caractéristiques tous les axiomes des groupes I-V. Si quelqu'un cherche d'autres définitions de "point", peut-être à l'aide de circonlocutions du type "sans extension", etc., il me faudra évidemment m'opposer à cette entreprise de la manière la plus nette ; on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 226)

Ce que Hilbert explique à Frege, pensant justifier ainsi sa propre conception de la définition, est qu'il est impossible de définir certains concepts, comme celui de point.

3.3.2. *Sur l'indéfinissabilité du point*

Si, selon Hilbert, le point est indéfinissable, c'est parce que l'on n'arrivera jamais à l'atteindre. Pourquoi ? parce qu'à cet endroit, écrit Hilbert, il n'y a rien. Autrement dit, ce concept n'a pas de référent, c'est un concept vide. Frege, qui ne comprend pas vraiment ce qu'écrit Hilbert, lui répond qu'il est d'accord sur ce point :

Je conviens également avec vous que la définition de "point" par des circonlocutions comme "sans extension" est à dédaigner ; en outre, je ne craindrais pas d'admettre que "point" ne peut pas du tout être défini. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 231)

Mais pour Frege, à la différence de Hilbert, ne pas pouvoir définir ce concept n'implique pas que ce concept n'ait pas un sens déterminé. Frege soutiendra, au contraire, dans un écrit sur la géométrie euclidienne⁶, que les termes conceptuels « point », « droite » et « plan » ont un sens. Ainsi, selon Frege, ne pas pouvoir définir le concept de point signifie simplement que ce concept ne peut être enfermé dans des limites certaines. La solution adoptée est alors de considérer le point comme un terme

6 Cf. Frege (1994, 200).

indéfinissable, mais dont les propriétés sont vraies, car elles proviennent de notre source géométrique de la connaissance. Pour Hilbert, au contraire, ce terme n'a, en soi, aucun sens et aucun référent. Ce sont les axiomes, c'est-à-dire les déterminations des relations posées entre les différents termes de la théorie qui lui donneront un sens. C'est ce qu'explique encore Hilbert :

Il est impossible selon moi de donner en trois lignes une définition complète. Chaque axiome apporte quelque chose à la définition et donc chaque nouvel axiome modifie le concept. En géométrie euclidienne, non euclidienne, archimédienne, non archimédienne, "point" est à chaque fois quelque chose de différent. (Rivenc/de Rouilhan 1992, 227-8)

Autrement dit, selon Hilbert, une définition est relative à un système axiomatique : un « point », objet primitif de l'axiomatique d'une géométrie, sera défini par le système d'axiomes de la géométrie et aura donc un sens différent selon l'axiomatique qui le définit. Il s'ensuit que le même terme « point » désignera, selon l'axiomatique choisie, des objets différents. Nous allons voir que ces objets sont en fait des classes d'objets.

3.3.3. Un système axiomatique définit une classe d'objet

Dans un même système axiomatique, un même terme, « point » par exemple, pourra être interprété de plusieurs manières différentes. Ainsi, un point de l'axiomatique euclidienne, par exemple, pourra désigner des objets différents, selon que ce système est interprété dans la géométrie euclidienne, dans une géométrie physique ou encore dans la géométrie cartésienne. Dans le premier cas, il désignera les points de l'espace euclidien, dans le deuxième cas, les points seront les points « physiques », objets du monde physique de dimension la plus petite possible, dans le troisième cas, ce seront les couples de nombres réels. Par conséquent, d'une part, les concepts hilbertiens ne

sont pas univoquement définis, ils dépendent de l'axiomatique choisie, d'autre part, chaque concept désigne non un objet, mais une classe, potentiellement infinie, d'objets, la classe de tous les objets donnés par les différentes interprétations possibles du système. Autrement dit, les objets d'un système axiomatique sont définis à un homomorphisme près. Loin de voir dans cette conséquence un défaut, Hilbert en montre la fertilité ; le principe de dualité en est un exemple. Ce principe permet, par exemple, en géométrie projective, d'obtenir des théorèmes « duaux » en échangeant les termes de « point » et de « droite » dans les théorèmes d'incidence, ce qui apporte une grande simplicité à la théorie. Hilbert donne encore l'exemple d'une théorie de l'électricité qui sera « encore valable de tout système de choses que l'on pourra substituer aux concepts de magnétisme, d'électricité..., à la seule condition que les axiomes requis soient satisfaits » (Rivenc/de Rouilhan 1992, 228-29).

On peut s'interroger sur ce qui garantit que le système formel mis en place trouve des interprétations, et donc assure que les classes d'objets définis ne soient pas vides. Cette question se poserait en effet si l'axiomatisation hilbertienne était obtenue indépendamment de tout champ théorique déterminé. Si elle était, ainsi qu'on la présente le plus souvent, un système purement formel. Or, le processus d'axiomatisation de Hilbert part au contraire d'un champ théorique déterminé : la géométrie euclidienne. On peut, plus généralement, noter que, quel que soit le domaine étudié, Hilbert est toujours parti de théories existantes. Il y a donc des objets qui, préalablement à leur formalisation, c'est-à-dire à la neutralisation de leurs qualités, satisfont à ces relations. Le problème de l'accord entre le schéma formel et les objets d'une interprétation de ce système est donc résolu en amont de la formalisation. L'avantage de la formalisation étant que le système formel lui-même pourra éventuellement trouver d'autres interprétations.

Ce processus d'axiomatisation a cependant pour inconvénient que le système formel y apparaît comme tributaire de la théorie « naïve » qui en constitue le donné immédiat. L'ambition de Hilbert était, au contraire, d'obtenir par la méthode axiomatique un véritable fondement de la géométrie. Pour accéder à ce statut de fondement, l'axiomatisation devait donc se libérer de son support naïf et garantir l'existence des objets définis par le système axiomatique, sans avoir recours à un modèle particulier. Cette garantie ne pouvait donc être obtenue que par les propriétés métamathématiques du système lui-même, notamment par sa non-contradiction et sa complétude – la non-contradiction assurant la possibilité même des objets sans le recours au donné (intérieur) de la théorie naïve, la complétude garantissant une sorte d'unité du système, en éliminant la nécessité du recours à un donné extérieur. Par conséquent, le système axiomatique ne peut vraiment tenir lieu de définition, que s'il s'avère être non contradictoire.

3.3.4. *Définitions et non contradiction du système*

Sur la question du rapport entre définition et non-contradiction du système, plus encore que sur toute autre, la position de Hilbert s'opposait à celle de Frege, ou plus exactement était incompréhensible pour ce dernier qui écrit :

C'est sûrement à propos de votre critère de l'existence et de la vérité que nos vues sont les plus opposées. Mais je ne comprends peut-être pas très bien votre position. Pour tirer la chose au clair, je propose l'exemple suivant.

Supposons que nous sachions que les propositions

1. *A* est un être intelligent
2. *A* est omniprésent
3. *A* est tout-puissant

prises avec toutes leurs conséquences, ne se contredisent pas ; pourrions-nous en conclure qu'il existe un être tout-puissant, omniprésent et intelligent ? (Rivenc/de Rouilhan 1992, 234)

Pour montrer à Hilbert l'absurdité de sa conception, Frege énumère donc une suite de prédicats d'un éventuel sujet A, et affirme, à juste titre, que la non-contradiction des prédicats n'implique pas l'existence du sujet. Mais un système axiomatique n'est pas une telle énumération visant à décrire un objet. Ce que décrit un système axiomatique, ce sont les relations entre des objets possibles. Et la non-contradiction du système garantit la possibilité d'objets satisfaisants à ces relations et fonde l'existence des objets d'une interprétation du système.

Cependant la démonstration de la non-contradiction d'un système souleva des difficultés qu'Hilbert mit longtemps à reconnaître. La non-contradiction du système de la géométrie fut ramenée à celle de l'arithmétique et Hilbert pensa d'abord pouvoir démontrer celle-ci directement et sans difficulté. Or, on le sait, les théorèmes de limitation de Gödel mirent fin aux espoirs hilbertiens. Plus encore, les théorèmes d'incomplétude établirent la nécessité de concevoir les mathématiques, non comme un système unique, mais comme une série indéfinie de systèmes emboîtés – chaque système exigeant d'être englobé dans un système plus grand afin de démontrer sa non-contradiction, ou de démontrer ou réfuter ses propositions indécidables, le nouveau système présentant à son tour la même exigence, etc.

Puisqu'il n'y a pas de système complet et que la série des systèmes s'englobant les uns les autres est infinie, il n'y aura pas non plus de définition complète. Chaque définition peut au contraire être complétée par un système axiomatique en évolution perpétuelle. Ainsi, l'incomplétude fondamentale des formalismes conduit à concevoir les définitions des objets mathématiques, non plus comme des déterminations closes, mais comme des définitions en évolution, au gré du développement du système axiomatique, c'est-à-dire véritablement comme des processus.

4. Conclusion : les définitions euclidiennes et hilbertiennes, similitudes et différences

Ce dernier point, la considération des définitions et des objets définis comme des processus en évolution, et non comme des déterminations closes, opposent les définitions hilbertiennes (ou post-hilbertiennes) aux définitions euclidiennes. Ces dernières en effet sont toujours des déterminations exactes et complètes de ce que contient le concept, car, comme l'a écrit Kant à propos des définitions mathématiques :

le concept est d'abord donné par la définition, il ne contient exactement que ce que la définition veut que l'on pense de ce concept. (Kant 1980, Méth. Chap.1 sect.1)⁷

Une différence connexe entre les deux types de définitions, euclidiennes et hilbertiennes, est que les (véritables) définitions hilbertiennes arrivent seulement au terme de la théorie, les définitions euclidiennes, au contraire, conformément là aussi aux énoncés kantien, se situent au début de l'œuvre :

[...] dans les mathématiques, écrit Kant, nous n'avons aucun concept qui précède la définition, puisque c'est par elle que le concept est d'abord donné ; elles doivent et peuvent d'ailleurs toujours commencer par là. (Kant 1980, Méth. Chap.1 sect.1)

Ce que les deux types de définitions ont en commun est qu'elles sont des constructions logiques et s'opposent donc à toute définition conçue comme description d'objets empiriques.

De plus les définitions euclidiennes et hilbertiennes sont des définitions relatives : à un genre pour les définitions euclidiennes, à un système axiomatique, pour les définitions hilbertien-

7 On sait, par ailleurs, que les mathématiques euclidiennes sont, pour Kant, le paradigme des mathématiques.

nes. Dès que l'on conçoit les définitions comme absolues, en effet, les objets primitifs deviennent, à proprement parler, indéfinissables ; si on cherche à en donner une définition empirique, ce ne sera en fait qu'une description, toujours imparfaite de l'objet, ainsi que le montre l'exemple du point défini comme ce qui est sans extension, etc., cité par Hilbert.

Enfin, et nous terminerons là-dessus, chacun des deux types de définitions, euclidien et hilbertien, peut se comprendre comme étape d'un même processus de formalisation d'un champ empirique donné, l'espace. La géométrie euclidienne est le premier stade de formalisation, celui de la construction d'une géométrie à partir d'un donné empirique. A ce premier stade, les définitions des concepts sont elles-mêmes les étapes de la construction des objets formels que sont les objets de la géométrie euclidienne. L'axiomatique hilbertienne constitue la seconde étape de ce processus ; elle prend en considération, non plus directement le donné empirique, mais sa première expression formelle, l'axiomatique euclidienne. Les objets définis par l'axiomatique hilbertienne sont alors obtenus par formalisation des objets euclidiens.

Ce qui précède peut aussi s'exprimer du point de vue inverse à celui de la formalisation, celui de la particularisation. De ce point de vue, les objets empiriques, les points physiques par exemple, sont des représentations sensibles des objets de l'axiomatique euclidienne (des points euclidiens). De manière analogue, les objets définis par l'axiomatique euclidienne, les points euclidiens par exemple, peuvent alors apparaître comme ceux de la première des interprétations possibles du système hilbertien.

Références bibliographiques

- ARISTOTE : *Les Seconds Analytiques*. Paris : Vrin 1995 [Trad. fr. J. Tricot] ; [Paris : GF Flammarion 2005, éd. bilingue, trad. fr. P. Pellegrin].
- ARISTOTE : *La Métaphysique*. Paris : Vrin 1964, 2 vols [Trad. fr. J. Tricot].
- ARISTOTE : *Les Topiques*. Paris : Vrin, 2004 [Trad. fr. J. Tricot].
- ARISTOTE : *Les Parties des Animaux*. Paris : Les Belles Lettres, 2003 [Trad. P. Louis].
- BLANCHÉ R. (1999). *L'axiomatique*. Paris : PUF.
- CAVAILLÈS J. (1934). Compte rendu de D. Hilbert, P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I. Recherches philosophiques*, t. 35, 423-30.
- CAVAILLÈS J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme : Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Paris : Hermann.
- EUCLIDE (1990). *Les Éléments*. Paris : PUF [Trad. B. Vitrac].
- FREGE G. (1967). *Kleine Schriften*. Hildesheim : Olms [Éd. par I. Angelelli].
- FREGE G. (1969). *Nachgelassene Schriften*. Hambourg : F. Meiner [Éd. par H. Hermes, F. Kambartel & Kaulbach].
- FREGE G. (1994). *Ecrits posthumes*. Paris : Ed. Jacqueline Chambon [Trad. fr. sous la dir. de Ph. de Rouilhan & C. Tiercelin].
- FREGE G. (1900). Correspondance Frege/Hilbert. In : F. Rivenc & Ph. de Rouilhan : *Logique et fondements des mathématiques*. Paris : Payot, 1992, 215-235 [Introd. et trad. J. Dubucs].
- HEATH T. (1998). *Mathematics in Aristotle*. Bristol : Thoemmes Press.
- HILBERT D. (1891). Projektive Geometrie, Cours du semestre d'été 1891, Cod. Ms. D. Hilbert 535. In : Toepell 1986, 18-39.

- HILBERT D. (1894). *Die Grundlagen der Geometrie*, Cours du semestre d'été 1894, Cod. Ms. D. Hilbert 541. In : Toepell 1986, 51-114.
- HILBERT D. (1898-99). *Grundlagen der Euklidischen Geometrie*, Cours du semestre d'hiver 1898-99, Cod. Ms. D. Hilbert 551. In : Toepell 1986, 143-201.
- HILBERT D. (1899). *Elemente der Euklidischen Geometrie*, Cours de mars 1899, Cod. Ms. D. Hilbert 552. In : Toepell 1986, 202-235.
- HILBERT D. (1971). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart : Teubner [Trad. fr., intro. et compléments, P. Rossier, Paris : Dunod].
- KANT E. (1980). *Critique de la Raison Pure*. Paris : Gallimard/ La Pléiade [1^e éd. 1781, trad. fr. œuvres philosophiques].
- PASCH M. (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig : Teubner.
- RIVENC F. & ROUHLAN Ph. de (1992). *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*. Paris : Payot.
- TOEPELL M.M. (1986). *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht.

NÉCESSITÉ ET FÉCONDITÉ DES DÉFINITIONS : FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES DE RICHARD DEDEKIND (1831-1916)

Hourya BENIS SINACEUR

Mon étude concerne principalement les célèbres mémoires de Richard Dedekind sur les nombres réels (1872) et les nombres entiers (1888). Naturellement, je m'autorise le recours à tout autre écrit de Dedekind qui apporte un éclairage sur ces deux mémoires¹. Je me fonde également sur les *Œuvres* de Bernhard Riemann (1826-1866), mais ici dans la seule mesure où elles ont inspiré à Dedekind son exigence de poser des définitions explicites et générales ou abstraites pour des concepts considérés par d'autres comme « donnés » et pour des démonstrations qui soient, de ce fait, plus rigoureuses². L'objectif de cette étude est

-
- 1 Il s'agit de *Continuité et nombres irrationnels* (en abrégé *Continuité*) et de *Que sont et à quoi servent les nombres ?* (en abrégé *Nombres*). J'ai commis une nouvelle traduction française, avec notes et introductions, de ces deux textes ainsi que des autres travaux de Dedekind qui s'y rapportent dans un volume en cours d'impression, R. Dedekind (à paraître 2008).
 - 2 J'ai une dette générale envers le livre de José Ferreirós, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics* (Birkhäuser Verlag, 1999, 2^e éd. 2007), qui montre le rôle des travaux de Riemann dans l'élaboration de la théorie des ensembles par Dedekind et Cantor. J'utilise ici les travaux de Riemann suivants : *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, 1852, reproduite dans le volume des *Gesammelte mathematische Werke* de Riemann édité par Heinrich Weber et Richard Dedekind en (1876, 2^e éd. 1892, 3-48). *Über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihe*, Habilitationsschrift, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Band XIII, 1868, reproduite dans *Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 227-271. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsschrift, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Band XIII, reproduite dans *Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 272-273. Travaux de logique 19 (2008)

de montrer quel type de préoccupations a nourri un des principaux initiateurs de définitions axiomatiques pour des théories abstraites et le créateur, avant et avec Georg Cantor (1845-1918), de la théorie des ensembles. Il est clair que je me place dans le cadre usuel des théories mathématiques qui, même axiomatisées, ne s'inscrivent pas dans les contraintes d'un langage logique formalisé.

1. Précisions terminologiques

Conformément à l'usage courant des mémoires et traités de mathématiques allemands du XIX^e siècle, Dedekind utilise le plus souvent le terme '*Erklärung*' pour 'définition'. Une inspection, même rapide, de *Nombres*, montre qu'un théorème [*Satz*] est toujours précédé d'une *Erklärung* et suivi d'un *Beweis*. Lorsque Dedekind entend « expliquer » quelque chose, il emploie le verbe '*erläutern*' et le substantif '*Erläuterung*'. Ainsi, à ma connaissance, '*Erklärung*' ne signifie jamais chez Dedekind 'explication'. Une définition ne sert pas à expliquer mais à déterminer la compréhension et délimiter l'extension d'un concept. En revanche, il faut relever que Dedekind use aussi du terme '*Definition*'. Ainsi, le fait-il dans sa leçon d'habilitation de 1854. De même, dans la préface de *Continuité*, où l'objectif déclaré est d'obtenir une « véritable définition de l'essence de la continuité » [*eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen*], d'obtenir donc une définition « réelle », et pas seulement une définition « nominale » consistant à simplement fixer le sens du terme en question. De même encore, au paragraphe 9 de *Nombres*, où est introduit « le théorème de la définition par induction », le fameux théorème

287. J'utilise aussi la traduction française par Laugel, intitulée *Œuvres mathématiques de Riemann* (1968).

126, qui définit et justifie une procédure de définition, laquelle consiste à *engendrer* itérativement les éléments qu'elle définit. Enfin, dans la lettre à Lipschitz du 27 Juillet 1876, Dedekind évoque les définitions d'Euclide en répondant à la question de savoir si celles-ci impliquent logiquement ou non la continuité du plan euclidien. Ces occurrences ne présentent pas entre elles une homogénéité spécifique évidente, qui permettrait d'apercevoir une nuance précise entre '*Erklärung*' et '*Definition*'.

Cependant, la citation de ces quelques passages permet déjà, même à ce simple niveau terminologique, d'apercevoir les caractères principaux de la définition, à savoir qu'elle vise à exprimer l'essence de ce dont elle est la définition, qu'elle consiste à engendrer ou créer ce qu'elle définit³, et qu'elle implique logiquement certaines propriétés mais d'autres non : ainsi certaines propriétés tenues pour évidentes sont en réalité absentes étant données les définitions posées. Nous allons compléter ce premier tableau par quelques autres traits. L'ensemble nous montrera ce que Dedekind attendait des définitions et nous donnera, en même temps, un aperçu, fondé sur l'examen de ses écrits, de sa position épistémologique sur les entités et les procédures mathématiques. Nous en concluons que cette position est loin d'être une sorte de logicisme, pour peu que l'on donne à ce terme son sens propre, qui est le suivant : le logicisme soutient que les mathématiques sont une extension de la logique et sont réductibles à elle. Ce qui implique qu'entités primitives et propriétés mathématiques fondamentales, le nombre en particulier, seraient de nature purement logique. De plus, le logicisme, celui de Gottlob Frege (1848-1925) en particulier, se

3 'Créer' et 'définir' sont souvent employés ensemble ou l'un pour l'autre. À propos des nombres réels, par exemple, Dedekind écrit « la définition ou la création du nombre irrationnel doit être fondée uniquement sur des phénomènes que l'on puisse déjà constater clairement *dans le domaine R* [des nombres rationnels] », Sur la théorie des nombres algébriques, Introduction, note.

double d'un présupposé ontologique assumant l'existence en soi d'objets logiques indépendants de la pensée que nous en avons et de la formulation que nous en donnons⁴. Le nombre serait un objet de ce type.

Bien entendu, mon but est principalement de mettre en question l'identification rapide ou le rapprochement simplificateur que l'on fait souvent entre les conceptions de Dedekind et de Frege, pour marquer au contraire des différences essentielles entre elles.

2. Définir les nombres

2.1. Au début de son mémoire *Sur les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie*, Bernhard Riemann commence par observer que les géomètres supposent usuellement donnés le concept d'espace et les concepts sur lesquels se fondent les constructions dans l'espace. On n'en donne en général, écrit-il, que des définitions nominales et on exprime par des axiomes leurs déterminations essentielles⁵. Or, c'est le concept d'espace

4 Je conviens bien sûr que, comme me l'a fait observer Michael Detlefsen, être indépendant de notre esprit et être indépendant d'une formulation donnée sont deux caractéristiques distinctes, et cela pas seulement d'un point de vue frégeen. Pour Dedekind le concept de nombre est « une émanation directe des pures lois de la pensée » (*Nombres*, 1^{ère} préface) ; définir ce concept c'est aussi le créer ; la définition consiste en la formulation explicite de ses propriétés « essentielles », c'est-à-dire celles à partir desquelles toutes les autres peuvent être déduites. Mon article développe ce qu'en raccourci on peut exprimer en disant 1°) pour Dedekind, le concept de nombre n'est pas indépendant de la pensée ; 2°) définir ou créer ce concept consiste à formuler ses propriétés essentielles.

5 « Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen in Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten ». Ce célèbre mémoire lu le 10 Juin 1854, à l'occasion de son *Habilitation*, est édité à titre posthume, ainsi que celui sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, par Dedekind en 1868 et reproduit dans *Gesam. math. Werke*. À propos du second mémoire de 1854, Dedekind souligne en note que la publication se justifie autant par le contenu du mémoire que par la manière dont son auteur traite « les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale ». Dedekind y trouva une impulsion

lui-même, « resté en friche d'Euclide à Legendre », qu'il faut soumettre à un travail d'analyse. Les grandeurs spatiales sont un cas particulier du concept général de « grandeurs étendues de plusieurs dimensions » (concept d'un espace abstrait)⁶, lequel est à construire à partir du concept encore plus général de grandeur. Riemann va donc *définir* le concept d'espace abstrait comme grandeur étendue de plusieurs dimensions, de manière *intrinsèque*, c'est-à-dire sans référence à un espace particulier dans lequel la multiplicité multidimensionnelle, ou variété, serait plongée. Cette définition intrinsèque suppose la dissociation des concepts d'étendue et de métrique, une même étendue pouvant recevoir diverses métriques⁷. D'où la nécessité de déterminer le nombre de dimensions et la métrique choisie. Celle-ci s'appuie sur un

« système de déterminations métriques simples, au moyen desquelles les rapports métriques de l'espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions [vraies] concernant ces rapports sont des conséquences nécessaires » (*Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 283-284 ; trad. Laugel, 294-295)

Ainsi un espace quelconque est intrinsèquement déterminé par trois propriétés :

- le nombre n de ses dimensions, qui permet de déterminer la position d'un point de l'espace,

pour ses réflexions sur la continuité, ainsi du reste que Georg Cantor pour sa propre définition des grandeurs réelles, publiée elle aussi en 1872 (Dedekind n'a eu connaissance du mémoire de Cantor que peu avant la publication de *Continuité* et le signale dans sa préface).

6 « Der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grösse, unter welchem die Raumgrößen enthalten sind ». On utilise usuellement aujourd'hui le terme 'variété', qui désigne un espace topologique abstrait. Les variétés, ou espaces courbes, permettent de travailler dans un cadre plus large que celui des espaces vectoriels, dénommés parfois « espaces euclidiens » ou « espaces plats ».

7 On ne saurait trop souligner la fécondité mathématique et la portée épistémologique de cette dissociation.

- sa courbure constante (positive, nulle ou négative) ou variable : le plan euclidien a une courbure constante nulle, la sphère une courbure constante positive,
- sa métrique, i.e. l'expression de la distance de 2 points exprimée en fonction de la courbure : pour une courbure α constante on obtient l'expression :

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2} ;$$

dans le cas particulier le plus simple, celui du plan euclidien, α est nulle et on a

$$ds = \sqrt{\sum (dx)^2}.$$

On sait l'importance de ces définitions qui, aux dires d'Hermite⁸, dépassent infiniment la question du 5^e postulat d'Euclide, résolue par Lobachevsky et Bolyai. Elles généralisent en effet l'idée de géométrie non euclidienne et introduisent la géométrie sphérique (ou elliptique selon la dénomination de Felix Klein) à courbure constamment positive, dans laquelle la somme des angles d'un triangle est supérieure à 2 droits. Il est bien connu que le concept d'espace non euclidien a joué un rôle dans la genèse de la théorie de la relativité générale : Einstein utilisa le « continuum espace-temps », espace non euclidien à quatre dimensions, de Hermann Minkowski (1864-1909).

Dedekind fait pour les nombres ce que Riemann a fait pour l'espace. Au lieu de les accepter sans définition préalable, ce qui était notamment le cas des quantités irrationnelles dont les spécimens connus n'étaient attestés que par certaines constructions géométriques, ou comme intuitivement donnés, ce qui était généralement celui des nombres entiers positifs, il va s'atteler à la tâche d'en donner une définition mathématique intrinsèque,

8 Préface à l'édition française, *Œuvres mathématiques de Riemann*.

qui ne se rapporte ni à l'espace ni au temps de notre expérience physique.

2.2. Dedekind avait le projet global de définir les entiers positifs, puis à partir d'eux les entiers négatifs, puis par extensions successives les fractions, les irrationnelles et les imaginaires. Mais de son vivant, il a publié seulement le mémoire sur la définition des nombres réels (*Continuité* 1872) et celui sur la définition des nombres entiers (*Nombres* 1888). Le premier atteste la conscience, en cette fin du XIX^e siècle, de la nécessité d'une définition des réels supprimant la circularité logique enveloppée dans les définitions en usage des concepts de limite, continuité et convergence. Dedekind note que l'on présente souvent le Calcul différentiel comme calcul sur des grandeurs continues sans que l'on ait jamais défini ce qu'est une grandeur continue. Comme l'on sait, cette lacune est comblée à peu près au même moment par Dedekind, Charles Méray (1835-1911), Georg Cantor, Karl Weierstrass (1815-1897). Mais ces trois derniers auteurs s'écartent peu de la tradition : ils définissent les *grandeurs* réelles en se fondant sur les concepts et les intuitions de l'Analyse réelle, principalement ceux de limite et de convergence. Or Dedekind bute sur l'idée d'une grandeur variant constamment et bornée par une limite, qu'il ne trouve rien moins que simple⁹. Après une longue réflexion, Dedekind écarte le concept de grandeur et le contexte géométrique associé, pour présenter une définition des *nombres* réels fondée sur la struc-

9 La critique de la notion de grandeur variable se trouvait déjà chez Bolzano, *Les Paradoxes de l'infini*, § 12, trad. fr. Paris : Seuil (1993, 68) : « ce que les mathématiciens appellent une *grandeur variable* n'est pas, à proprement parler, une grandeur, mais tout simplement le concept, la pure *représentation* [*Vorstellung*] d'une grandeur, et précisément telle qu'elle ne représente pas seulement une grandeur unique, mais un ensemble infini de grandeurs différentes les unes des autres, distinctes par leur valeur, i.e. par leur *grandeur* » (soulignements de Bolzano). Dedekind n'a connu cet ouvrage qu'après la publication de *Continuité*, Cantor lui en ayant envoyé un exemplaire en 1882, en même temps qu'un extrait des *Nouveaux essais sur l'entendement humain* de Leibniz. Le même genre de critique se retrouvera plus tard dans les *Grundgesetze* de Frege.

ture algébrique de corps totalement ordonné des nombres rationnels ; cette définition, loin de *présupposer* le concept de limite, permet au contraire de le dériver¹⁰. Ainsi est défini pour la première fois ce que, par contraste avec le continu géométrique des analystes et leur définition de fonction continue, nous appelons le « continu arithmétique », lequel apparaît comme l'extension maximale du corps des nombres rationnels conservative de l'ordre naturel de ce dernier¹¹. En commentant son travail Dedekind écrit :

la théorie des nombres irrationnels, que j'ai conçue à l'automne 1858 [...] est fondée sur le phénomène présent dans le domaine des nombres rationnels (§4) auquel j'ai donné le nom de coupure et que j'ai en premier étudié de manière précise ; elle culmine dans la démonstration de la continuité du nouveau domaine des nombres réels (§5. IV). (*Nombres*, première préface)

10 En fait Dedekind a évolué sur ce point. Dans sa leçon de 1854 (*Gesam. math. Werke*, III ; trad.fr. 2008 à paraître), il affirme qu'avec les nombres irrationnels apparaît en même temps le concept de limite. Il va même jusqu'à défendre l'idée que ce concept est nécessaire pour permettre le passage de l'opération de différentiation à celle d'intégration et inversement. Mais dans *Continuité*, le concept de nombre irrationnel est défini, en premier, par le procédé de la coupure, et celui de limite est dérivé de cette définition. Ce changement capital donne la mesure de la « révolution » épistémologique accomplie par Dedekind. Celle-ci était d'ailleurs préparée par la leçon que Dedekind a reçu de son maître et ami, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) : un théorème d'algèbre ou d'analyse peut s'énoncer comme un théorème sur les nombres entiers.

11 Dedekind est le premier à parler explicitement, et cela dès 1854, de « nombre irrationnel » et de « nombre réel », même si on peut rétrospectivement faire remonter les premières ébauches, non thématiques et non justifiées, d'arithmétisation du continu à l'algébriste arabe Al-Karajî, né vers 953 et mort vers 1029 (cf. Christian Houzel 2008, 97-110). Les expressions de Dedekind indiquent par elles-mêmes son objectif : fonder les procédés de l'analyse réelle sur un concept purement arithmétique, un concept qui soit logiquement antérieur aux notions de variation continue, de limite et de convergence, et donc défini indépendamment d'elles et pouvant servir, inversement, à les définir. Weierstrass parle encore de « grandeur irrationnelle » ou de « grandeur numérique » [*Zahlengrösse*], cette dernière expression étant également utilisée par Cantor ; ces deux auteurs considéraient le concept de limite comme primitif et nécessaire à la définition des grandeurs réelles, dont la nature supposée géométrique n'était pas mise en question.

Contrairement à ses contemporains et à son maître Riemann, Dedekind détourne son attention du concept de grandeur et l'élimine purement et simplement de la définition des nombres réels.

Une coupure dans l'ensemble des rationnels est une partition de cet ensemble en deux sous-ensembles complémentaires : le sous-ensemble A des nombres inférieurs à un certain nombre rationnel, disons m , le sous-ensemble B des nombres supérieurs à m . Quant à m lui-même, qui « engendre » la coupure, il peut indifféremment appartenir à A ou à B . Pour abstraite qu'elle soit, cette notion de coupure paraît à Dedekind bien plus simple que celle de grandeur croissant constamment mais non au-delà de toute limite¹². Les nombres rationnels, la droite géométrique et les nombres réels ont tous trois la propriété de la coupure, à savoir qu'un élément de chacun de ces ensembles opère une coupure de l'ensemble. Mais seuls les réels et, par voie de conséquence logique, la *droite numérique*, possède la propriété inverse, à savoir qu'à toute coupure de l'ensemble correspond un élément de l'ensemble. Cette propriété inverse est le caractère discriminant du continu numérique. C'est pourquoi Dedekind y place « l'essence » de la continuité¹³. Et si nous voulons que la *droite géométrique* soit considérée comme continue, alors il faut stipuler explicitement pour elle un axiome géométrique de continuité, ce dont Cantor convient parfaitement¹⁴.

12 Lettre à Weber du 8 Novembre 1878, trad. fr. dans R. Dedekind (à paraître en 2008).

13 Dedekind explique cela à Cantor, qui ne voyait pas bien pourquoi Dedekind plaçait « l'essence » de la continuité dans la propriété réciproque de la propriété de la coupure (lettre du 18 Mai 1877, dans la *Correspondance avec Cantor*). Dedekind et Cantor avaient des projets réellement différents : tandis que le premier cherche à dégager la notion d'ordre de celle de mesure et de métrique, le second a besoin d'écarter la notion d'ordre pour parvenir à une notion *abstraite* de métrique.

14 Cantor écrit en 1882 : « Die Hypothese der Stetigkeit des Raumes ist also nichts anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Korrespondenz zwischen die dreidimensionalen *rein arithmetischen* Kontinuum (x, y, z) und

Comme Dedekind l'écrit à Cantor, sa méthode de définition des *nombres* réels permet de passer directement des nombres rationnels aux nombres réels sans faire le détour par le géométrique. Et cela est d'autant plus important que même

dans les travaux sur la géométrie, le nom de continuité est certes courant mais n'est jamais l'objet d'une définition claire, qui, seule, le rendrait utilisable dans une démonstration. (*Nombres*, première préface)

Pour lui, le continu numérique *fonde* la continuité analytique au sens où 1°) il peut être défini indépendamment d'elle et 2°) de cette définition peut être dérivée une des propositions suffisant à caractériser la continuité analytique (*Continuité* § 7). Par ailleurs, comme Dedekind y insiste à plusieurs reprises, la continuité géométrique n'est pas affaire de perception, mais de définition. Ce en quoi il est fidèle à la méthode de Riemann, bien qu'il se distingue par son projet fondamental de concevoir et de privilégier des définitions purement arithmétiques, tandis que Riemann revendique le recours à « l'intuition géométrique » et trouve son inspiration dans la réflexion sur les phénomènes et résultats de physique. Cependant Riemann remarque judicieusement que pour les rapports métriques, qui concernent les grandeurs continues, l'expérience n'est pas pertinente, car elle ne peut donner naissance à des propositions exactes ; alors que pour les rapports d'étendue (i.e. la détermination du nombre de dimensions), qui concernent les grandeurs discrètes, nous pouvons de l'expérience pour énoncer des propositions qui ne sont peut-être pas totalement certaines mais qui ne sont jamais inexacts¹⁵. Dedekind radicalise cette observation sur le continu

der Erscheinungswelt zugrunde gelegten Raume », *Abh. math. und philos. Inhalts*, 56 (soulignements de Cantor). La correspondance bijective en question est le contenu de l'axiome posé par Cantor dans sa définition des grandeurs numériques en 1872 (*Abh.*, 97).

15 *Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 284 ; trad. Laugel, 295. Un peu plus loin Riemann explicite pourquoi l'expérience est en défaut dans une variété continue : « il semble que les concepts

en le considérant en lui-même, dissocié de la métrique. Dissocier la continuité de la métrique marque l'originalité propre de Dedekind par rapport à Riemann.

Dedekind destitue, en effet, la vision de son privilège abusif : *en fait*, d'après lui, je *ne vois pas* la continuité de la ligne, je *mets en pensée la continuité dans la ligne* en posant explicitement un axiome géométrique dont elle dérive. Et c'est la définition des nombres réels qui nous permet de *penser* le continu que la géométrie *ne permet pas* de percevoir. Pour Dedekind la propriété de continuité n'est pas *fondée sur* l'intuition, qui n'offre au plus qu'une occasion de penser, c'est un concept qui sert à distinguer la catégorie particulière des espaces continus dans la catégorie plus large des espaces quelconques. En particulier, comme Dedekind est le premier à le montrer, l'espace euclidien, tel que défini par Euclide, *n'est pas* continu. Dans ses lettres à Lipschitz, Dedekind prouve rigoureusement, en effet, qu'aucun des postulats d'Euclide, ni aucune de ses assumptions tacites, ne contraignent à admettre la continuité de la ligne et du plan euclidiens. On peut en effet, comme Dedekind le relève le premier, effectuer toutes les constructions euclidiennes en se donnant seulement l'ensemble des nombres réels algébriques, dont Dedekind et Cantor ont montré le caractère dénombrable, c'est-à-dire non continu. L'espace euclidien est donc plein d'*invisibles* discontinuités. Ce qui durant des siècles est passé pour une évidence justifiant les démarches analytiques appuyées sur le mouvement d'un point mobile ou sur l'idée de variation continue d'une grandeur doit donc être justifié ; le continu géométrique ne m'est pas donné par intuition, c'est lui aussi un concept mathématique qui a besoin d'être défini.

empiriques sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'espace, le concept de corps solide et celui de rayon lumineux, perdent leur validité dans l'infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux principes de la Géométrie [euclidienne] ».

D'une manière générale, différentes définitions peuvent être envisagées selon le point de vue adopté (arithmétique, géométrique, topologique, etc.). *Continuité* propose une définition par des propositions structurellement identiques à celles qui définissent le continu arithmétique. En ce sens, celui-ci est logiquement le *fondement* de celui-là, même si l'on a longtemps considéré ce dernier comme premier ou plus intuitif. Cela n'engage pas nécessairement une priorité *ontologique* du nombre sur l'espace, mais montre en tout cas que le point de vue arithmétique suffit pour une définition rigoureuse de la notion de continuité. Dedekind défend la priorité *épistémologique* du nombre sur l'espace, ou plus exactement la priorité épistémologique de l'arithmétique sur la géométrie et l'analyse.

2.3. Le deuxième écrit publié par Dedekind témoigne d'une singularité plus remarquable encore. Dedekind se propose en effet de définir ce que les mathématiciens de son époque tenaient non seulement pour indéfini mais pour indéfinissable, car donné par l'intuition (Poincaré, Brouwer), ou par l'expérience (Helmholtz) ou même par Dieu (Kronecker¹⁶). Or Dedekind va montrer que le concept de nombre n'est pas primitif et peut être déduit de concepts plus généraux, qui peuvent tout aussi bien s'appliquer à autre chose qu'à des nombres. C'est le début de la théorie des ensembles, fondée sur la considération d'ensembles infinis et le concept d'application quelconque d'un ensemble dans un autre, qui généralise le concept de fonction, définitivement dissocié de l'expression par laquelle se calcule la valeur de la fonction pour une valeur donnée de la variable. Pour une

16 On connaît la célèbre formule dont Heinrich Weber (1842-1913), dans sa notice nécrologique, nous dit que Leopold Kronecker (1823-1891) a fait sa devise : « Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est fabriqué par l'homme ». Kronecker ne croyait pas en l'existence des nombres transcendants, rejetait violemment la théorie des ordinaux transfinis de Cantor, et refusait la construction des réels proposée par Weierstrass ainsi que la construction par les coupures de Dedekind. Il manifesta une vive opposition à Cantor, à Dedekind et même à Weierstrass qui fut un de ses amis. Pour plus de détails, voir Jacqueline Boniface (2002).

définition mathématique intrinsèque du nombre, Dedekind remonte ainsi à ce qui est, pour lui, la racine même des processus de pensée : le travail de la pensée, qui est de faciliter la vie, n'est jamais aussi fructueusement réalisé que par le concept de nombre. « Tout être pensant est arithméticien [*ein Zahlen-Mensch*] » écrit-il, signifiant par là que compter et manipuler des nombres est le mode de penser le plus fondamental et le plus utile¹⁷. Ce mode de penser s'exprime en les termes, à la fois très généraux et précis mathématiquement, d'ensemble [*System*] et de « représentation » [*Abbildung*], ce dernier terme étant aujourd'hui traduit par 'application', ce qui change complètement son humus sémantique.

Jusque là, on vivait sur la définition d'Euclide : le nombre entier, c'est-à-dire entier positif supérieur à deux ou dyade, est une « multitude composée d'unités ». Mais dans le contexte de cette définition¹⁸, source de difficultés pour l'effectuation des opérations arithmétiques au sens moderne, l'on pourrait difficilement justifier un énoncé aussi simple que 'deux et deux font quatre'. On sait d'ailleurs que Descartes considérerait un tel énoncé comme « intuitif » et irréductible¹⁹. On sait aussi que Leibniz a montré que cet énoncé peut être démontré à partir des

17 Il est intéressant d'apprendre que des recherches archéo-anthropologiques actuelles (notamment celles de Clarisse Herrenschmidt) confirment que les hommes ont inventé des signes pour compter en même temps qu'ils ont inventé des signes pour écrire.

18 Elle est liée aux discussions platoniciennes sur le statut des objets mathématiques et aux critiques qu'y adressa Aristote. L'unité est à comprendre dans sa coloration métaphysique de monade ; de même deux est une dyade, trois une triade, etc. De plus une unité est un indivisible, ce qui exclut les fractions du domaine du nombre. Quant à multitude (*πληθος*) il signifie une quantité indéterminée, arbitraire (mais non illimitée), le nombre étant une multitude déterminée d'unités. Le nombre est « mesuré » par l'unité ; l'opération de mesure est ainsi au fondement du nombre. Cf. les remarques et commentaires de B. Vitrac (1990-2001, livre V, vol. 2, 15-19 et livre VII, vol. 2, 247-251 et 275-279).

19 *Règles pour la direction de l'esprit*, III^e règle, La Pleiade, 43-44. Descartes précise que par intuition il entend non pas « le témoignage changeant des sens » ou « le jugement trompeur de l'imagination », mais « la conception ferme d'un esprit pur et attentif, qui naît de la seule lumière de la raison et qui, étant plus simple, est par suite plus sûre que la déduction même ».

définitions de 1, 2, 3, 4 et des propriétés de l'égalité²⁰. Dedekind renoue donc avec la perspective « formaliste » leibnizienne, ayant par ailleurs comblé une lacune de la théorie euclidienne des proportions par sa définition des nombres réels²¹. *Nombres* s'ouvre sur la maxime : « ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. Si évidente que semble cette exigence, on ne peut absolument pas encore, à mon avis, la considérer comme satisfaite... ». Dedekind aurait bien pu bien ajouter : « ce qui est définissable ne doit pas être admis sans définition ». Sans quoi les démonstrations pourraient être lacunaires, voire circulaires ou impossibles.

3. Définition créative

Selon Dedekind, définir c'est *créer*. On connaît la formule célèbre de la première page de *Nombres* : « les nombres sont de libres créations de l'esprit humain ». Nous allons voir que, dans cette phrase, par 'nombres' Dedekind désigne ceux qu'il va définir dans son mémoire, non les nombres familiers acceptés sans définition ou rapportés à l'intuition externe ou interne. Dans la troisième préface de *Nombres*, Dedekind souligne « la force créatrice par laquelle l'esprit crée à partir d'éléments déterminés un nouvel élément déterminé, à savoir le système des éléments considérés », insistant encore sur ce qu'il considère comme une des opérations fondamentales de l'esprit : la capacité de regarder une multiplicité comme une.

20 Leibniz (1966, livre IV, chapitre VII, § 10).

21 Sur la question récurrente de savoir si Dedekind a fait *plus* qu'Euclide, ou seulement la même chose par d'autres moyens (cette dernière vue est l'opinion spontanée des mathématiciens praticiens qui passent sous silence le long travail de l'histoire et, pour paraphraser une boutade célèbre de Claude Chevalley, produisent ou travaillent du neuf en digérant – annulant – totalement le passé), voir les lettres de Dedekind à Lipschitz et mon commentaire (à paraître 2008).

L'idée de création est une constante de la pensée de Dedekind. Elle est déjà présente au § 1 de *Continuité* :

compter n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs, dans laquelle chaque individu est défini par son prédécesseur immédiat ; l'acte le plus simple est le passage d'un individu déjà créé au nouvel individu, à créer, qui le suit.

De même on l'a vu, le mathématicien « confère » (*ibidem*, § 3) la continuité à un espace par une définition appropriée, les concepts mathématiques d'espace et de continuité n'étant pas indissociablement et nécessairement liés. Contrairement à l'opinion dominante, Dedekind a montré que l'on peut fort bien concevoir un espace discontinu, le concept d'espace en général n'étant pas restreint aux seuls espaces continus²². Et le plus connu des espaces discrets n'est-il pas justement l'ensemble des entiers naturels ? C'est pourquoi le continu a besoin d'être défini par une propriété discriminante.

Les définitions définissent ou concernent des « concepts » plutôt que des objets ou des choses. Dedekind ne spécifie pas ce qu'il entend par 'concept' [*Begriff*], mais il est clair qu'il s'agit d'un *point de vue*²³, ou d'une opération de l'esprit établissant un lien, une correspondance entre une chose et une autre. Encore faut-il ajouter qu'une fois créés, les concepts peuvent être identifiés par leurs extensions : ainsi deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments. À vrai dire, pour Dedekind, la capacité de liaison de deux choses, ou de

22 Reconnaissant l'apport original de Dedekind, Cantor lui écrit : « à la suite de nos recherches, et des résultats auxquels nous sommes parvenus, vous et moi, indépendamment l'un de l'autre... il était établi que, pour construire le concept d'espace, il n'y a aucune nécessité interne de se représenter ce dernier comme partout continu ; vous attirez expressément l'attention sur ce point dans votre mémoire sur la continuité » (lettre du 15 avril 1882).

23 Cf. *Nombres*, définition 2 : « Il arrive très fréquemment que des choses différentes $a, b, c, \dots$ soient, pour un motif quelconque, saisies sous un point de vue commun, réunies en pensée ; on dit alors qu'elles forment un système S ; on nomme les choses $a, b, c, \dots$ les éléments du système S ».

représentation [*Abbildung*]²⁴ d'une chose par une autre, est plus fondamentale et primitive que celle de réunir en pensée différentes choses sous un même point de vue²⁵. Mais la racine commune des deux opérations de l'esprit est, en un sens ou en un autre, de considérer comme substituables l'une à l'autre sous certaines conditions des choses différentes.

Peut-être, pour fixer les idées, est-il utile de rappeler brièvement qu'en philosophie ancienne et classique, le concept est un terme général de la langue auquel correspond une entité mentale qui ne se réduit pas à son support linguistique et correspond à un ou plusieurs objets extérieurs, son référent pour employer un terme usuel aujourd'hui. Il y a plusieurs façons de déterminer les rapports des termes de la triade objet (référent ou extension du concept)-signification (compréhension du concept)-langue. Une tendance commune aux logicismes et scientismes consiste à identifier la signification avec le référent. La philosophie traditionnelle a défendu une conception référentielle du langage et du sens en considérant le discours comme le lieu de la vérité sur l'être. Une tendance symétrique consiste négliger la dimension référentielle en considérant la signification comme immanente au langage et produite par l'activité linguistique ; la nature de la signification est discursive ou symbolique ; son origine se trouve dans le jeu des oppositions, associations, différences entre les signes, les mots, les phrases, les textes. C'est notamment

24 'Représentation' est la traduction littérale et historiquement correcte de '*Abbildung*'. C'est elle que l'on trouve aussi bien dans un texte en français de Zermelo, datant de 1909, que dans le paragraphe que Bertrand Russell (1872-1970) consacra à Dedekind dans *The principles of mathematics* I, chap. XXX, 1903. Les mathématiciens ont pris ensuite l'habitude d'utiliser 'application' et '*map*' ou '*mapping*' (cf. mon commentaire dans R. Dedekind (à paraître 2008).

25 *Nombres*, première préface : « Si l'on cherche exactement ce que nous faisons en dénombrant [*zählen*] un ensemble [*Menge*] ou en comptant un nombre [*Anzahl*] de choses, on est conduit à considérer la capacité de l'esprit à relier des choses à des choses, à faire correspondre une chose à une chose, ou à représenter [*abbilden*] une chose par une autre, capacité sans laquelle aucune pensée en général n'est possible ».

le point de vue du structuralisme linguistique et du nominalisme philosophique. Une position intermédiaire consiste à ne réduire la signification ni à son référent ni à son signifiant et à la considérer pour elle-même. Dans cette option, dont une variante est constituée par le conceptualisme des Anciens et une autre par la tradition sémantique des Modernes, la signification est le propre du concept, distinct lui aussi du mot ou du signe et distinct de la chose. Pour les conceptualistes, le concept est le fruit d'une opération mentale repérant et reliant des propriétés réelles des choses. La philosophie kantienne est une réinterprétation du conceptualisme : le concept y devient constitutif de l'objectivité scientifique, qui est davantage l'affaire des humains que la spéculation sur les inconnaissables choses en soi. C'est à elle que se rattache, *modulo* des aménagements non négligeables, non seulement Dedekind, mais toute l'école d'algèbre et de topologie abstraites issue de ses travaux. L'insistance sur la fécondité des concepts mathématiques a conduit les historiens à parler de « mathématique conceptuelle », reprenant cette expression aux mathématiciens eux-mêmes [*die begriffliche Mathematik*]²⁶.

Pour Dedekind, c'est bien toute l'affaire de la pensée mathématique que de construire²⁷, de créer [*schaffen, erschöpfen*] des concepts qui cristallisent des idées nouvelles, des points de vue neufs, y compris sur un « objet » aussi vieux que l'espace ou le nombre. C'est en ce sens que Riemann proposait la création ou la « génération du concept d'une multiplicité étendue [variété] à plusieurs dimensions »²⁸. C'est en ce sens que Dedekind écrit à Lipschitz qu'il ne prétend pas avoir inventé un nouvel objet ou un nombre irrationnel qui ne fût déjà connu des mathéma-

26 Cf. Sinaceur (1991, deuxième partie, chap. II, § 2).

27 En un sens général et non au sens de Kronecker, où il est exigé d'une définition qu'elle permette d'examiner « en un nombre fini d'essais si elle est applicable ou non à une grandeur donnée » (Boniface 2002, 140).

28 « Die Erzeugung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit », *Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 274.

ticiens ; ce dont il revendique la paternité c'est une nouvelle définition qui utilise le phénomène connu de la coupure pour prouver que les nombres réels peuvent être définis dans leur ensemble, et *compte tenu de la propriété de continuité de leur domaine*, en se fondant exclusivement sur l'arithmétique des nombres rationnels, qui forment, eux, un domaine discontinu²⁹. En somme, ce qu'il a inventé c'est le concept arithmétique de nombre réel. Et, à l'instar de l'espace abstrait de Riemann, ou de celui de surface de Riemann que je ne fais qu'évoquer en passant, ce concept ouvre des perspectives inédites, tout en clôturant un lent et sinueux mouvement d'arithmétisation, dont j'ai signalé plus haut qu'il a commencé au moins au X^e siècle, avec les travaux de Al-Karajî. L'originalité propre de Dedekind est la création d'un concept général, celui de *domaine continu de nombres*, correspondant à des phénomènes mathématiques connus mais antérieurement appréhendés au coup par coup et à travers la manipulation des grandeurs, notamment des grandeurs incommensurables comme celle de la diagonale du carré de côté égal à 1 ou du rapport π de l'aire d'un cercle à son rayon, ou, plus récemment à travers la considération de grandeurs variables

29 Lettre à Lipschitz du 27 Juillet 1876 : « Je n'ai jamais cru avoir mis au jour, dans mon écrit, un seul nouveau phénomène ou un quelconque nouvel objet de la recherche mathématique. Le phénomène de la coupure est évoqué dans presque tous les manuels d'arithmétique, lorsqu'il est question de représenter avec une approximation arbitraire des nombres irrationnels par des nombres rationnels (en quoi, il est vrai, on commet toujours une faute logique majeure). Je n'ai pas davantage prétendu avoir inventé par ma définition des nombres irrationnels un quelconque nombre qui ne fût déjà auparavant plus ou moins clairement conçu dans l'esprit de n'importe quel mathématicien ... La tendance globale de mon écrit, je crois l'avoir clairement décrite dans mon introduction et dans le § 3 ; elle est plutôt de simplement utiliser le phénomène généralement connu de la coupure pour prouver (ce qui n'avait jamais été fait à ma connaissance) que sur la seule base de l'Arithmétique des nombres rationnels, donc sans recourir au concept assez compliqué et obscur de grandeur, les nombres irrationnels peuvent être définis d'un seul coup et – ce qui est le plus important – dans leur complétude (continuité), propriété qui est suffisante et, en même temps, indispensable pour édifier de manière absolument rigoureuse et scientifique l'arithmétique des nombres réels ». Extrait de la trad. fr. incluse dans R. Dedekind (à paraître 2008).

tendant continûment vers une limite. Ce qu'il crée ce n'est pas un objet inconnu des mathématiciens mais un concept nouveau d'un objet connu et non totalement maîtrisé à certains égards. Dedekind précise à Lipschitz qu'à supposer que l'on s'en tienne aux grandeurs, « le concept d'un domaine *continu* de grandeurs » ne se trouve ni chez Euclide ni chez aucun des mathématiciens postérieurs³⁰. Le concept de Dedekind n'a rien à voir avec ce que nous supposons être objet de notre perception ou ce que nous croyons trouver, rétrospectivement, dans *Les Éléments* d'Euclide. Dedekind a montré en effet qu'Euclide présuppose *seulement* un espace archimédien ; cela ne suffit évidemment pas à rendre cet espace continu. Hilbert (1862-1943) l'a bien compris, qui adjoint à l'axiome d'Archimède un axiome d'inextensibilité, inspiré par l'œuvre de Dedekind, pour exprimer la continuité de la ligne ou du plan euclidien³¹. Hilbert souligne que le deuxième axiome n'est pas une conséquence logique du premier et que celui-ci, seul, ne suffit pas pour retrouver le plan *cartésien* de notre géométrie analytique habituelle. Notons au passage la différence, explicitée par Dedekind et expressément formulée par Hilbert, entre un plan euclidien et un plan cartésien, donc entre la géométrie d'Euclide et la géométrie analytique des modernes.

Le rôle des nouveaux concepts, et donc des définitions, est majeur dans le progrès des mathématiques. Ce sont eux et elles qui modifient notre perspective sur les objets ou les problèmes, à commencer par les plus anciennement connus comme l'espace et le nombre. Il n'est donc pas question, dans un souci de « pureté », de les éliminer ou de les réduire aux anciens

30 « ... si loin que j'ai poussé l'investigation, on n'arrive *jamais* à la *continuité* de l'espace comme à une condition inséparablement liée à la Géométrie d'*Euclide* ; son système tout entier est conservé même sans la continuité – un résultat qui en étonne plus d'un et m'a semblé, pour cette raison, digne de mention » (Lettre à Lipschitz du 6 Juillet 1876, trad. fr. à paraître 2008).

31 *Die Grundlagen der Geometrie*, chap. I, § 8.

concepts, faussement réputés « simples ». Au contraire il faut les introduire là où la nécessité, c'est-à-dire la solvabilité d'un problème, s'en impose. Dans la première préface à *Nombres*, Dedekind écrit que :

les progrès les plus grands et les plus féconds en mathématiques ... sont dus avant tout à la création et à l'introduction de nouveaux concepts, qui sont rendus nécessaires par le fréquent retour de phénomènes complexes difficiles à maîtriser par les anciens concepts.

Et Dedekind de préciser que loin de vouloir réduire, selon le vœu de Kronecker, tous les théorèmes à des propositions arithmétiques n'impliquant que les quatre opérations rationnelles, il s'agit, au contraire, de construire *à partir des entiers naturels* des concepts plus généraux, susceptibles donc de s'appliquer à d'autres sortes de nombres : ainsi le concept d'entier algébrique³², ou à des domaines dont les éléments ne sont pas des nombres, mais, par exemple, des fonctions ou des éléments *quelconques*.

4. Propriétés caractéristiques internes

4.1. Pour Dedekind, comme dans la perspective du conceptualisme, un concept est un contenu de pensée, une entité mentale créée pour organiser (structurer) les choses et le monde. Ces créations ne sont ni subjectives ni arbitraires. Elles sont objectives. Pour les Anciens, l'objectivité tient à ce qu'un concept signifie une propriété réelle d'un être ou d'un objet référent.

32 On appelle algébrique un nombre qui est solution d'un polynôme à coefficients rationnels. Un entier algébrique est racine d'un polynôme à coefficients entiers et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Cf. l'article en français de Dedekind Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1ère série, tome 11 (1876) et 2^e série, tome 1 (1877) ; partiellement reproduit dans les *Gesam. math. Werke*, III, 262-296. L'introduction est reproduite (à paraître 2008).

Pour Dedekind, l'objectivité vient d'une part de ce que les créations de concepts émanent (plus ou moins directement) des « lois de la pensée » et s'y conforment, et d'autre part, de ce qu'elle sont soumises à des contraintes de cohérence interne, d'ajustement³³ aux concepts affines, de généralité, de simplicité, de fécondité. Dedekind avait en gros une compréhension kantienne de l'entendement, comme à la fois créateur et législateur. Mais il n'accepte pas la médiation kantienne des formes pures de l'intuition que sont l'espace et le temps et ne dit rien de l'introduction par Kant de la perspective transcendante, qui détourne l'attention de la chose en soi vers le phénomène physique et sensible et, en même temps, pose les conditions de possibilité d'une connaissance objective du phénomène ancrée dans l'expérience. Pour Dedekind la construction des concepts se fait dans la pensée, non dans l'intuition³⁴. Mais la pensée rationnelle est « par nature » objective³⁵. « L'empire des nombres est créé dans notre esprit », écrit-il dans sa première préface à *Nombres*, en renvoyant au § 3 de *Continuité*. Comme je l'ai observé plus haut, Dedekind est ainsi un des illustres promoteurs de la « mathématique conceptuelle », par opposition à la fois à la mathématique de l'intuition et à celle des algorithmes. Plutôt que de

33 Dedekind écrit dans sa *Leçon* de 1854 : « Cet ajustement des définitions au gré des lois ou des vérités découvertes, dans lesquelles elles jouent un rôle, constitue le plus grand art du systématicien [i.e. axiomaticien] ».

34 L'intérêt tout particulier porté par Charles Sanders Peirce (1839-1914) à *Nombres* de Dedekind s'explique notamment par le fait que Peirce soutenait que nous n'avons aucun pouvoir d'intuition, et que toute connaissance est déterminée par des connaissances antérieures. Dans une note de 1904 Peirce écrivit « Quiconque souhaite comprendre la logique des entiers devrait commencer par le petit livre de Dedekind ».

35 Cantor a élevé des doutes quant à la légitimité logique de l'opération qui consiste à considérer une multiplicité comme un tout. Dans sa lettre à Dedekind du 28 juillet 1899, il constate « qu'une pluralité peut être constituée de telle sorte que l'admission de "l'être simultané" [*Zusammensein*] de tous ses éléments conduit à une contradiction, de sorte qu'il est impossible de concevoir cette pluralité comme une unité, comme un "objet achevé" ». Malgré cela, Dedekind maintient sa confiance en cette « force créatrice » par laquelle l'esprit crée un système à partir d'une multiplicité (3^e préface de *Nombres*, 1911).

trop appuyer sur ces oppositions³⁶, mieux vaut souligner le « conceptualisme postkantien » de Dedekind, ce qui permettra de différencier nettement sa position épistémologique du logicisme de Bernhard Bolzano (1781-1848) ou de Gottlob Frege, pour qui les nombres sont des objets en soi, existant indépendamment de, et antérieurement à toute activité de l'esprit.

4.2. Un concept mathématique est le produit d'un travail, le résultat d'une création [*Erschöpfung*], qui tient évidemment compte des accomplissements antérieurs – d'où la promotion de la perspective historique dans les travaux de Dedekind³⁷ –, mais ce résultat a une essence [*Wesen*] et des propriétés [*Eigenschaften*]. Compte tenu du fait de sa création, l'essence d'un concept n'est pas à comprendre au sens traditionnel, fixiste et *a priori*. L'essence ne précède pas sa définition, mais lui est contemporaine. Pour autant, il ne peut être question de définition seulement nominale ou notationnelle, ni de définition contextuelle ou par l'usage. La définition doit expliciter un caractère distinctif et discriminant, *qui demeure jusqu'à*

36 Il faut prendre, en effet, ces oppositions *cum grano salis*. Dedekind ne nie pas le rôle de l'intuition comme ingrédient circonstanciel de la création de concepts, il refuse seulement que l'on puisse fonder sur elle des définitions et des démonstrations. De même, pour lui, les concepts n'éliminent absolument pas les formules et les calculs, ils les précèdent seulement et permettent de les anticiper (voir plus loin sa conception de la théorie des nombres algébriques). Inversement un défenseur de l'intuition comme Poincaré a fort bien mis en valeur la fécondité du concept de groupe, et un partisan des méthodes algorithmiques comme Kronecker n'a pas manqué de poursuivre brillamment l'œuvre de Galois (1811-1832) sur la résolution des équations algébriques par la considération, structurale, des extensions de corps et d'inaugurer la théorie des extensions abéliennes des corps de nombres algébriques, ou théorie du corps de classes, développée plus tard par Hilbert.

37 Certains mathématiciens contemporains de Dedekind étaient sensibles à cette perspective. Commentant l'apport des innovations de Riemann, Felix Klein explique le progrès mathématique par ce qu'il appelle « la continuité historique », laquelle est explicitée de la manière suivante : « Les mathématiques pures progressent à mesure que les problèmes connus sont approfondis en détail d'après des méthodes nouvelles. À mesure que nous comprenons mieux les anciens problèmes, les nouveaux se présentent d'eux-mêmes » (*Œuvres mathématiques de Riemann*, XXI).

*ignoré ou obscur*³⁸, elle doit donc déterminer un nouveau concept et prescrire une nouvelle pratique. Dedekind s'en explique clairement dans le passage suivant :

Je me souviens avant tout, écrit-il, d'un beau passage des *Disquisitiones Arithmeticae*, art. 76 où Gauss parle du théorème de Wilson en rappelant que Waring plaçait la difficulté de le démontrer dans le défaut d'une notation adéquate. À notre avis, observe Gauss, de telles vérités devraient être extraites de concepts plutôt que de notations. Ces derniers mots, pris au sens général, expriment une grande pensée scientifique, la préférence de ce qui est interne par rapport à ce qui est externe. Cette opposition se retrouve dans presque tous les domaines des mathématiques ; que l'on pense à la théorie des fonctions et à la définition Riemannienne d'une fonction par ses propriétés caractéristiques internes, desquelles découlent avec nécessité les modes de présentation externes». (*Gesam. math. Werke* II, 54-55)³⁹

Dedekind a, pour sa part, imprimé pareille orientation à la théorie des nombres algébriques, qui n'atteint son plus haut degré de perfection, selon lui, que si on y cherche à :

tirer les démonstrations, non plus du calcul, mais immédiatement des concepts fondamentaux caractéristiques, et d'édifier la théorie de manière qu'elle soit, au contraire, en état de prédire les résultats du calcul ». (*Gesam. math. Werke*, III, 296)

38 Ainsi sont conciliées deux idées : le constat du caractère *progressif* de la connaissance mathématique et l'exigence de dégager les caractères *essentiels* des concepts mathématiques.

39 Dans cet article de 1895 sur le fondement de la théorie des idéaux, Dedekind fait allusion à la Dissertation de 1851 de Riemann, *Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, où apparaît le concept de surface de Riemann. Par « modes de présentation externes » Dedekind signifie, conformément au texte de Riemann (§ 20), les *expressions* qui donnent la valeur d'une fonction pour chaque valeur de son argument. Riemann visait à obtenir « la figuration d'une fonction (c'est-à-dire sa valeur pour toute valeur de son argument) indépendamment d'une méthode pour déterminer la fonction au moyen des opérations sur les grandeurs ». (*Gesam. math. Werke*, 2^e éd., 38-39)

Une bonne définition *crée* donc le concept qui caractérise l'essence d'un fait ou d'une situation mathématique pas encore ou mal *caractérisée*, et en *explicite* les propriétés *internes*, i.e. inhérentes à son essence. Plus précisément, une définition crée un concept dans la mesure même où elle consiste à isoler le petit nombre de ses propriétés essentielles, et à les énoncer explicitement en guise de point de départ des démonstrations connues comme de celles dont on n'avait pas idée auparavant. Ainsi, « il s'agit de fournir une caractéristique [*Merkmal*] précise de la continuité, utilisable comme base de véritables déductions »⁴⁰. De même, « l'essence d'un système simplement infini N consiste en l'existence d'une représentation φ de N et d'un élément 1 satisfaisant les conditions suivantes... »⁴¹ : suivent les quatre « conditions caractéristiques »⁴² qui définissent non seulement la suite des entiers naturels mais tout système ordonné simplement infini, et à partir desquelles on peut déduire tous les théorèmes *arithmétiques*. La validité de ces théorèmes ne s'arrête donc pas à ce que nous avons l'habitude d'appeler « arithmétique », puisqu'ils s'appliquent aussi bien à un système ordonné simplement infini dont les éléments seraient autres que « nos » entiers naturels familiers. Une définition essentielle est donc une définition non pas d'objet, mais de structure, éventuellement commune à *divers* domaines *possibles* d'objets. La *nature* des objets de ces domaines possibles n'intervient pas dans la définition. C'est pourquoi Dedekind demande qu'une définition caractérise univoquement (à un isomorphisme près) « l'essence » d'un domaine d'objets.

Or, en logique, une définition est créative si, introduite dans une théorie déductive, elle permet de déduire syntaxiquement au moins une thèse non déductible dans la théorie sans ladite défi-

40 *Continuité*, § 3.

41 *Nombres*, définition 71.

42 L'expression est de Dedekind : *Nombres*, démonstration du théorème 72. Je reproduis ces conditions *infra* en 5.5.

nition⁴³. Cela est bien le cas de la définition de la continuité par Dedekind, qui permet de démontrer, dans le cadre d'une théorie arithmétique, le théorème selon lequel toute suite de nombres réels, croissante et majorée, admet une limite et, à partir de là, tous les autres théorèmes de l'analyse réelle. Concomitamment émerge le concept de corps ordonné par un ordre continu. C'est aussi le cas de la définition par induction⁴⁴ qui prouve, au lieu de seulement les supposer, l'existence et l'unicité de l'application qui définit l'addition, et par suite l'existence et l'unicité des applications qui définissent les autres opérations arithmétiques fondamentales⁴⁵. L'arithmétique des entiers naturels apparaît alors comme un ensemble dont les éléments et les opérations sur ces éléments sont engendrés inductivement. Dans ce cas, la définition est non seulement créative, mais constructive, non pas au sens strict de Kronecker, mais au sens où elle procède pas à pas, sans pour autant s'arrêter à un nombre fini d'opérations.

5. Définition indirecte : par conditions nécessaires et suffisantes

5.1. Dans sa Leçon de 1854, Dedekind avait souligné que l'introduction de nouveaux concepts est liée à « un caractère distinctif de l'édification systématique de la mathématique », entendant par « édification systématique » le fait d'isoler les définitions de leurs conséquences logiques et d'ajuster les défi-

43 Cf. l'article « Définition créative » de R. Zuber (1990, 568) et, pour une définition formelle, celui de Pierre Joray « Logicisme et définition explicite » (2005, 47).

44 *Nombres*, théorème 126.

45 Le théorème 126 de *Nombres* répond par avance à la critique formulée par Frege en 1884 au § 6 des *Grundlagen der Arithmetik* – dont Dedekind ne prend connaissance qu'en 1889 –, puis en 1903 dans les *Grundgesetze*, II, §§ 139-147. Frege rejette les définitions créatives qui se contentent d'introduire de nouvelles notions sans en démontrer, au préalable, l'existence et l'unicité.

nitions préalablement connues aux lois ou vérités découvertes ensuite, pour arriver enfin à énoncer les quelques conditions nécessaires et suffisantes, ou axiomes, qui déterminent un concept par la possibilité de démontrer à partir d'elles les autres propriétés de ce concept.

Le systématique, écrit-il, forme certains concepts ...qui interviennent comme définitions dans la science et grâce auxquels il est en mesure d'énoncer les vérités générales reconnaissables dans la diversité infinie du particulier⁴⁶.

Il ajoute qu'il « arrive que les concepts introduits ... , ayant été conçus au départ trop étroits ou trop larges, aient besoin d'une modification pour pouvoir étendre leur efficacité, leur portée, à un domaine plus grand »⁴⁷. Former un concept c'est dégager une structure : de groupe, d'anneau, d'idéal, de corps ordonné, de treillis, etc. Par exemple, l'extension des entiers naturels que constitue l'ensemble des entiers relatifs a une structure de groupe, l'extension que constitue l'ensemble des fractions a une structure de corps ; c'est même, comme le note explicitement Dedekind, un corps « premier », c'est-à-dire qu'il est contenu dans tout corps de nombres (d'où le rôle fondamental joué par le corps des rationnels). Engendrer les entiers relatifs ou les nombres rationnels à partir des entiers naturels, ou encore définir les nombres réels à partir des rationnels, relève

46 On a là l'expression du point de vue axiomatique abstrait. Par exemple, la caractérisation de la continuité doit être telle qu'on puisse en déduire les propriétés de la droite mais aussi de différents domaines continus linéaires. De fait, Dedekind a construit un système d'éléments, les coupures, satisfaisant les caractéristiques d'un domaine continu linéaire, que ce domaine soit une droite du plan cartésien ou un ensemble de nombres.

47 Frege critiquera cette manière d'ajuster progressivement des définitions à des extensions successives du domaine pour lequel elles étaient conçues initialement (*Grundgesetze*, II, §§ 56-57). Pour lui une définition, une fois dégagée, demeure l'expression préalable et inchangée de la détermination du sens et de la référence d'un terme. Pour Dedekind, au contraire, définitions, concepts, problèmes et solutions sont inscrits dans « la continuité historique ».

certaines de ce qu'on appelle parfois une définition génétique. On voit bien ici qu'une méthode génétique s'allie fort bien avec le point de vue structural. Énoncer explicitement les propositions qui, à titre de définitions, déterminent une structure permet d'établir ce que Dedekind entend par une théorie logiquement « irréprochable », où l'on peut déduire sans lacune et sans redondance les propositions vraies relatives aux éléments d'un domaine réalisant ladite structure. C'est bien entendu, dans le langage actuel, une théorie axiomatique abstraite, plutôt qu'une théorie logique proprement dite.

5.2. À propos de la manière de définir un ensemble Dedekind note que :

très souvent un système S n'est pas directement défini en nommant un à un chacun de ses éléments, mais indirectement, par des conditions nécessaires et suffisantes qu'une chose doit satisfaire pour être élément de S . (Cf. Dangers de la théorie des systèmes, Dedekind à paraître 2008)

Les conditions nécessaires et suffisantes (CNS) constituent ainsi des « définitions indirectes ». Indirectes au sens où elles n'exhibent pas directement et individuellement les éléments. La définition définit « en un seul coup » *tous* les éléments ou, plus exactement, la structure de l'ensemble auquel appartiennent ces éléments. Dedekind est systématiquement à la recherche de CNS pour caractériser une structure. C'est ainsi qu'il procède pour la suite des entiers naturels, pour les nombres réels, pour le concept d'idéal⁴⁸.

Les CNS déterminent l'exacte compréhension du concept concerné, l'extension du concept étant constituée par divers

48 Cf. Sur la théorie des nombres entiers algébriques (Dedekind à paraître 2008), Dedekind souligne que les deux propriétés qu'il énonce constituent les CNS pour qu'un sous-ensemble I d'un anneau A commutatif soit un idéal, à savoir les sommes et les différences de deux éléments de I sont des éléments de I et tout produit d'un élément de I par un élément de A est un élément de I .

modèles, attendus ou éventuellement, comme on le reconnaîtra plus tard, non attendus (non standard). Le choix des CNS n'est ni arbitraire ni réduit à une unique possibilité. On peut le voir sur les différents essais de définir le zéro et les nombres négatifs que l'on a retrouvés dans le *Nachlass* de Dedekind. Les dates, assez éloignées les unes des autres, des fragments manuscrits montrent l'intérêt constant de Dedekind pour les questions de définition. Quant aux différentes méthodes employées, elles attestent que Dedekind admet la possibilité de plusieurs définitions, chacune impliquant un contexte mathématique spécifique. Il n'y a donc pas une seule définition correcte, et chacune est solidaire d'un contenu, d'un objectif et d'un cadre déductif particuliers.

On sait notamment que Dedekind donne deux définitions de l'infini et du fini. La première consiste à juger discriminante une propriété reconnue de l'infini et à la poser comme définition (*Nombres*, 64), ce qui a nécessité, de l'aveu de Dedekind, un vrai « labeur »⁴⁹ : un système S est infini s'il « est semblable à une de ses parties propres », c'est-à-dire s'il existe une bijection de S sur une de ses parties propres ; sinon il est fini. La seconde, énoncée dans la seconde préface de *Nombres* (1893), part au contraire du fini pour définir l'infini : « un système S est fini s'il peut être représenté (appliqué) dans lui même de manière à ce qu'aucune partie propre de S ne soit représentée dans S lui-même ; dans le cas contraire, le système S est dit infini ». Dedekind s'en tient à sa première définition ; il trouve plus aisé de définir les nombres à partir d'elle⁵⁰. Bien plus tard, cepen-

49 Cantor, qui connaissait cette propriété, n'a commencé à la donner comme *définition* qu'après la publication de *Nombres*.

50 Autre exemple, Dedekind admet bien la définition cantorienne des nombres réels par des suites de Cauchy de nombres rationnels, mais celle-ci reste dans l'horizon de l'Analyse classique tandis que sa méthode de définition par les coupures, présentes déjà dans le domaine des nombres rationnels, fonde l'Analyse sur l'Arithmétique. Dedekind met en valeur la structure *algébrique* ordonnée du corps des réels, tandis que le concept fondamental pour Cantor est celui de distance, qui est d'ordre *métrique*. Contrairement à

dant, Alfred Tarski (1901-1983) fera observer que les déductions de Dedekind enveloppent un usage tacite de l'axiome du choix. Il donnera du fini une définition équivalente à la deuxième définition de Dedekind et, en se fondant sur les axiomes de Zermelo (1871-1953) moins l'axiome de l'infini et moins l'axiome du choix, en déduira « sans aucune difficulté les théorèmes les plus importants sur les ensembles finis »⁵¹.

En ce qui concerne les nombres négatifs, l'un des fragments manuscrits, datant des années 1890, définit les nombres négatifs comme classes de congruence de paires ordonnées d'entiers naturels, montrant le rôle de la théorie des congruences de Gauss dans l'émergence du point de vue de *la généralité*, que Dedekind renforça significativement par sa considération de structures abstraites⁵². L'autre fragment, probablement écrit avant 1872, utilise la méthode connue de définition des nombres négatifs comme paires de nombres naturels. Les rationnels y sont introduits de la même manière. L'intérêt de ce fragment est de montrer clairement que Dedekind utilisait les termes 'analyse' et 'synthèse' au sens des anciens géomètres⁵³, et de per-

celle de Cantor, la complétude, au sens de Dedekind, du corps des réels n'est pas une complétude métrique. Plus généralement, Dedekind envisage l'étude de structures algébriques ordonnées, de treillis par exemple, alors que Cantor cherche à donner une définition abstraite du concept de distance, qui anticipe la définition par Felix Hausdorff (1868-1942) et Maurice Fréchet (1878-1973) des espaces métriques.

51 Sur les ensembles finis, 45-46, 92.

52 La traduction française se trouve dans Dedekind (à paraître 2008).

53 C'est l'article de W. Sieg et D. Schlimm (2005, 154) qui a attiré mon attention sur ce fait. Sur analyse et synthèse au sens de Pappus et de Proclus voir le bref exposé de M. Caveing dans Euclide, *Les Éléments* 1, 144-148 : « en cherchant les conditions *nécessaires* [souligné par moi] d'une situation qu'on suppose réalisée, l'analyse permet de découvrir les étapes obligées du raisonnement, soit qu'on ne les connaisse pas encore, soit qu'on veuille le perfectionner et être assuré de n'en avoir point omis ». C'est une remontée vers les antécédents, éventuellement jusqu'aux principes initiaux. Si l'analyse mène à une contradiction, alors l'hypothèse est rejetée. Sinon, on tâche d'opérer la synthèse, qui est une descente vers les conséquents ; c'est par excellence la méthode de preuve ; elle consiste en effet à montrer que les conditions dégagées sont aussi des conditions *suffisantes* de ce qui est à prouver. Caveing conclut que la distinction de l'analyse et de la synthèse « est fondée dans

mettre ainsi une meilleure compréhension de ce que Dedekind a écrit à Keferstein le 27 février 1890 à propos de la genèse de *Nombres* :

Il s'agit d'une *synthèse* [souligné par moi] élaborée après un long travail et appuyée sur une *analyse* [souligné par moi] antérieure de la suite des nombres naturels telle qu'elle s'offre à notre considération de manière pour ainsi dire empirique. Quelles sont les propriétés fondamentales, mutuellement indépendantes, de cette suite N , i.e. ces propriétés qui ne sont pas dérivables les unes des autres et dont toutes les autres sont des conséquences ? Et comment faut-il les dépouiller de leur caractère spécifiquement arithmétique, pour les subordonner aux concepts généraux et aux activités de l'entendement, *sans* lesquels nulle pensée n'est possible et *grâce* auxquels le fondement est donné pour des démonstrations sûres et complètes et pour la formation de définitions de concepts non contradictoires ? (Trad. fr. des Lettres à Keferstein dans Dedekind à paraître 2008)

Ce texte montre clairement l'importance de l'analyse d'une situation donnée pour en dégager des définitions non contradictoires et abstraites, i.e. dont le domaine d'application n'est pas déterminé *a priori*, en vue d'obtenir, par synthèse, des démonstrations qui en tirent les conséquences de manière « sûre et complète ». Les définitions doivent assurer la possibilité de démonstrations « complètes », c'est-à-dire syntaxiquement sans lacunes et, en même temps, permettre de déduire *toutes* les propositions vraies de l'arithmétique, c'est-à-dire assurer la complétude⁵⁴ de la théorie, une théorie consistant précisément en la réunion des définitions et de leurs conséquences logiques.

le mode de fonctionnement des déductions à partir d'hypothèses, dans le champ déductif d'un système démonstratif où la dissymétrie est fermement maintenue entre énoncés liminaires (ou principes) et énoncés dérivés ».

54 Rappelons que Riemann cherchait de même « les systèmes de déterminations métriques simples, au moyen desquels les rapports de l'espace sont *complètement* [souligné par moi] déterminés, et dont *toutes* [souligné par moi] les propositions [vraies] concernant ces rapports sont des *conséquences nécessaires* [souligné par moi] » (Über die Hypothesen...,

Si Dedekind définit les nombres, c'est pour les inscrire dans un cadre axiomatique tel qu'il n'y ait pas de hiatus entre définition de concepts et effectuation d'opérations arithmétiques. Cette fois encore, c'est un point sur lequel Dedekind corrige l'axiomatique euclidienne, dont on sait le problème qu'y posent des définitions qui ne servent pas de base à la déduction ni à la construction d'autres définitions qui peuvent constituer cette base. Dedekind supprime les définitions purement descriptives⁵⁵, ainsi que la distinction entre définitions et postulats puisque ses définitions consistent précisément en ensembles de CNS, que l'on peut appeler sans distinction « axiomes » ou « postulats »⁵⁶. Chez Dedekind, il y a donc ajustement des définitions aux opérations et aux théorèmes relatifs à ces opérations : des définitions de concepts découlent les définitions d'opérations dont découlent les théorèmes. Les théorèmes ne sont pas *inclus* dans les définitions, ils s'en *déduisent* par une procédure ampliative qui enrichit la compréhension du concept défini.

5.3. Les définitions abstraites à la Dedekind doivent être distinguées de ce qu'on appelle d'ordinaire, en philosophie des

trad. Laugel, 294). Aujourd'hui on distingue essentiellement complétude sémantique et complétude syntaxique (certains auteurs rajoutent d'autres distinctions, qui éclairent le contexte historique de la genèse de cette notion complexe). Une théorie déductive T non contradictoire, formulée dans un langage L , est complète sémantiquement si T a un modèle M tel que pour tout énoncé F de L , F est déductible dans T si et seulement s'il est vrai dans M . T est complète syntaxiquement si pour tout énoncé F de L , ou bien F ou bien sa négation est déductible dans T . Ces deux définitions ne sont logiquement équivalentes que pour un langage logique du premier ordre. Les notions de langage logique et les distinctions entre logiques d'ordres différents sont étrangères à Dedekind.

55 P. Joray m'a fait remarquer que la définition de système rappelée dans ma note 23 *supra* est bien purement descriptive. C'est exact. Dedekind décrit une opération fondamentale de l'esprit qui, en termes modernes, correspond mathématiquement au passage de a à $\{a\}$. Or, ce passage pose effectivement une difficulté logique. La définition d'un ensemble qui soit à la fois opératoire et dénuée de cette difficulté n'arrivera qu'avec l'axiomatisation de la théorie des ensembles par Zermelo en 1908.

56 On sait que Frege maintient, au contraire, la différence entre postulat (ou axiome) et définition, celle-ci censée, seule, établir le sens et la référence d'un terme.

mathématiques, une « définition par abstraction »⁵⁷. De ce dernier genre de définition il est question lorsqu'à partir d'une entité a , on définit une nouvelle entité fa au moyen d'une relation d'équivalence sur le domaine auquel appartient a . Par exemple si a est une droite du plan euclidien, on peut définir la direction fa de a en utilisant la relation de parallélisme entre droites du plan. On détermine ainsi une partition du plan en classes d'équivalence telles que $fa = fb$ si et seulement si a et b sont parallèles. C'est ainsi que Frege définit l'orientation d'une droite au § 64 des *Grundlagen der Arithmetik* (1884). On considère parfois que les définitions par abstraction sont une variété de définitions contextuelle ou d'usage, puisqu'au lieu d'offrir une proposition synonyme ou coextensive au *definiendum*, elles indiquent les conditions d'égalité de deux entités le représentant.

L'opération mentale d'abstraction de Dedekind consiste à dépouiller les éléments de tel ensemble considéré de tout caractère particulier. Par exemple, étant donné un ensemble « simplement infini » (i.e. dénombrable) totalement ordonné, on retiendra seulement le fait que les éléments de l'ensemble sont distincts les uns des autres et on ne considérera que les relations établies par la relation d'ordre. Dans ces conditions on appellera « nombres » ces éléments, ainsi « libérés de tout [autre] contenu », et c'est d'eux, non des nombres familiers à chacun, qu'on dira qu'ils sont « une libre création de l'esprit humain »⁵⁸. Ainsi se confirme l'idée que la définition des entiers naturels par Dedekind est bien la création d'un nouveau concept à partir du concept anciennement admis sur la base d'une définition non opératoire ou d'une intuition indéfinie. Dans le deuxième

57 Quant à l'expression 'définition par abstraction', Giuseppe Peano (1858-1932) semble le premier à l'utiliser dans ses *Notations de logique mathématique*, Introduction au *Formulaire de Mathématiques*, Turin, Guadagnini, 1894. En se référant à Peano, et à titre de justification pour ce genre de définition, Bertrand Russell a introduit le « principe d'abstraction », *The principles*, chap. XXVI, § 210.

58 Cf. *Nombres*, définition 73.

brouillon de *Nombres*, Dedekind est encore plus explicite⁵⁹ : « Par cette abstraction, les éléments originaires donnés n de N sont transformés en *nouveaux* [souligné par moi] éléments n , c'est-à-dire en nombres (et donc N lui-même est transformé en un nouveau système abstrait N). Ainsi on peut dire à bon droit que les nombres doivent leur être à un acte de création libre de l'esprit. Mais du point de vue de l'expression il est plus commode de parler des nombres comme étant les éléments originaires du système N et de négliger tout simplement le passage de N à N , qui est lui-même une représentation distincte [i.e. une application injective]. Par là rien d'essentiel n'est changé et rien n'est subrepticement obtenu de manière illicite, comme on s'en convaincra à l'aide des théorèmes sur la définition par induction ». Ainsi, bien que nous ayons créé avec Dedekind les nombres *en tant qu'*éléments d'un système abstrait N , nous continuerons, vu l'existence d'une bijection entre N et N , à parler des nombres originaires donnés : c'est un abus de langage dont les mathématiciens sont coutumiers ; l'accepter et le pratiquer indique que la structure abstraite n'est pas destinée à éliminer notre modèle concret des nombres naturels, mais à en expliquer la structure d'une manière abstraite, qui conviendrait aussi bien à d'autres éléments que des nombres. Certains auteurs appellent « l'abstraction dedekindienne » une telle procédure de définition à un isomorphisme près⁶⁰. En termes actuels, il s'agit de la définition d'une classe de modèles isomorphes d'une même structure, n'importe quel modèle constituant un représentant de la classe, et non de la partition d'un ensemble en classes d'équivalence, dont chacune a un représentant différent d'un représentant quelconque d'une autre classe.

59 Cité par Reck (2003, 405) et par Sieg & Schlimm (2005, 152).

60 Cf. Tait (1986, 369, note 12).

Le produit de l'abstraction dedekindienne est un concept ou une structure⁶¹, qui opère une bifurcation, tout en maintenant une liaison structurelle, entre définitions abstraites et modèles concrets. Ainsi la droite géométrique n'est continue, dans la perspective arithmétique de Dedekind, qu'en tant que modèle du continu numérique, celui-ci étant lui-même étant un modèle d'un continu quelconque à une dimension. Ainsi les nombres naturels sont un modèle de la structure d'ensemble dénombrable totalement ordonné. Dedekind est à l'origine de l'axiomatique abstraite comme de la liaison constante de celle-ci avec des modèles la réalisant, double vue qui se retrouvera dans *Les fondements de la géométrie de Hilbert*, avant de constituer l'axe explicite de la théorie des modèles de Tarski.

5.4. Contrairement à ce que l'on dit parfois, les définitions par axiomes sont, du point de vue logique, non pas des définitions implicites, mais bien des définitions explicites, puisqu'elles consistent en un ensemble d'énoncés de CNS déterminant expressément la structure abstraite considérée ou, en d'autres termes, déterminant la compréhension et l'extension possible du concept considéré. L'expression 'définition implicite' vient de Gergonne (1771-1859), qui la présente comme une « phrase qui donne l'intelligence de l'un des mots dont elle se compose au moyen de la signification connue des autres ». Gergonne compare cette sorte de définitions à la détermination des inconnues dans un système d'équations algébriques et demande que ces définitions renvoient univoquement à un seul référent. Or, dans le meilleur des cas, une définition axiomatique détermine une structure à un isomorphisme près (théorie catégorique) ou à une équivalence élémentaire près (théorie complète

61 Deux mots en français pour le seul terme '*Begriff*' que la génération de mathématiciens allemands de la deuxième moitié du XIX^e siècle (Riemann, Dedekind, Hilbert, Emmy Noether, B.L. van der Waerden pour n'en citer que quelques-uns) utilisaient pour désigner les structures (algébriques ou topologiques) abstraites. D'où l'expression rencontrée plus haut de « *begriffliche Mathematik* ».

au sens où les propositions du premier ordre vraies dans un modèle sont vraies dans n'importe lequel des modèles de la théorie sans qu'il existe nécessairement une bijection entre les domaines sous-jacents aux différents modèles).

En logique moderne on peut définir une définition implicite comme suit. Pour un langage L , P un nouveau symbole de relation, et un ensemble consistant $E(P)$ d'énoncés de $L \cup \{P\}$, $E(P)$ définit P implicitement si deux modèles quelconques de $E(P)$ ont la même interprétation de P .

Il est clair que pour Dedekind il n'est pas question de définition implicite ni au sens de Gergonne ni au sens actuel. En revanche, la conjonction C des quatre axiomes de la définition 71 de *Nombres* détermine exactement le sens et l'extension du concept de nombre ordinal⁶². Elle constitue une définition explicite puisqu'on peut poser l'équivalence logique de C avec la propriété « être un nombre ordinal ».

5.5. Définitions existentielles : non-contradiction

Dedekind a manipulé des classes infinies d'éléments, des classes de congruence ou des classes de fonctions, sans éprouver le besoin ni d'affirmer la prétention à l'existence ni de justifier l'usage de l'infini actuel. De même en 1872, il n'hésite pas à considérer l'ensemble infini de *tous* les nombres rationnels ou l'ensemble infini de *tous* les nombres réels. Dans la même ligne de pratique, il n'y a, à première vue, pas plus de problème à considérer l'ensemble infini de tous les nombres entiers. D'autant plus que Dedekind n'imaginait pas, au premier abord, que le produit direct d'une activité rationnelle de la pensée puisse enfermer une contradiction. Les nombres entiers naturels, étant une « émanation directe » des lois de l'esprit humain, étaient apparemment à l'abri de pareille difficulté logique. Mais

62 Je reproduis ces axiomes plus bas en 5.5.

lorsqu'il en vient à définir les entiers naturels comme modèle de la structure abstraite d'ensemble simplement infini, totalement ordonné, il est conduit à poser la question de l'existence de systèmes infinis. Les polémiques autour de l'infini actuel, alimentées par le développement de la théorie des ensembles de Cantor et ses justifications métaphysiques du transfini d'un côté, les anathèmes jetés sur cette théorie de l'autre, notamment par Kronecker, n'ont sans doute pas été étrangères au besoin de produire une justification logique irréfutable de l'existence d'ensembles infinis. *Les paradoxes de l'infini* de Bolzano, dont le § 13 vise à fournir une preuve de l'existence d'un ensemble infini actuel, et dont Dedekind prend connaissance en 1882, avant donc la version définitive de *Nombres*, ont probablement joué, par ailleurs, un rôle inducteur.

Quoiqu'il en soit, Dedekind ajoute donc à une première esquisse, qui ne la contenait pas, une preuve de l'existence de systèmes infinis (théorème 66 de *Nombres*), dont il déduit l'existence de systèmes simplement infinis (théorème 72). Dans sa lettre à Keferstein du 27 février 1890, Dedekind défend sa preuve contre la critique de son correspondant et résume sa démarche ainsi : « Une fois reconnus, dans mon analyse (71, 73), les caractères essentiels d'un système simplement infini, dont le type abstrait est la suite N des nombres, la question se posait de savoir s'il *existe* un tel système dans le monde de nos pensées. Sans preuve logique d'existence, on ne saurait décider si le concept d'un tel système ne contient pas éventuellement de contradictions internes. D'où la nécessité de telles preuves (66, 72 de mon écrit) ». Dans la perspective épistémologique de Dedekind, cette preuve est apparue nécessaire, car les ensembles sont, par définition, des *êtres de pensée*⁶³. Il faut donc savoir s'il existe des ensembles infinis « dans le monde de nos pensées », et c'est exactement à cette question que répond cette « preuve

63 *Nombres*, définition 2.

d'existence », qui aurait dû confirmer la conviction de Dedekind selon laquelle la pensée est structurellement arithmétique et peut toujours, par une application [*Abbildung*], représenter une chose par une autre et passer d'une multiplicité $a, b, c, \dots$ à un ensemble $\{a, b, c, \dots\}$ d'éléments. Malheureusement, ce passage d'éléments multiples à un ensemble les réunissant en pensée, est sujet à une difficulté logique, qui sera levée par l'axiome de séparation [*Aussonderungsaxiom*] de Zermelo. Mais même indépendamment de cela, cette « preuve » n'en est pas une⁶⁴ ; elle ne démontre rien et ne fait qu'appliquer au « monde de nos pensées », dont l'admission comme ensemble est source de paradoxe, ainsi que Cantor l'a vainement fait observer à Dedekind, le procédé qui servira plus loin à définir un « système simplement infini » et la suite des entiers naturels (définitions 71 et 73). Dedekind y utilise en effet le concept de chaîne⁶⁵, celui d'application injective et la sélection d'un élément distingué. Selon la définition 71, l'essence d'un système simplement infini N consiste dans l'existence d'une application φ de N dans lui-même et d'un élément distingué, noté 1, tels que les quatre conditions suivantes soient satisfaites :

- 1°) $\varphi(N) \subset N$,
- 2°) $N = 1_0$,
- 3°) 1 n'est pas contenu dans $\varphi(N)$,
- 4°) φ est semblable (injective)⁶⁶.

On observera qu'un exemple (ou modèle) d'un système simplement infini est précisément la suite des entiers naturels, φ étant interprétée par la fonction successeur. Mais la définition 73 précise que les entiers naturels consistent en la *structure*

64 Cf. l'analyse de Jean-Pierre Belna (1996, §§ 5 et 6, 36-45).

65 Si l'on désigne par f une application quelconque (pas forcément injective) de E dans E , on dit qu'une partie A de E est une chaîne de E par rapport à f , si l'image $f(A)$ est contenue dans A . Dedekind note A_0 l'intersection de toutes les chaînes de E contenant A , qui est la plus petite des chaînes contenant A .

66 Peano a repris ces axiomes sous une forme et avec des notations différentes.

abstraite définie, indépendamment de « la constitution particulière des éléments » du système simplement infini considéré, par les quatre CNS ci-dessus. Le *nouveau* concept d'entier naturel défini par Dedekind consiste donc en la conjonction des CNS qui n'impliquent que les notions ensemblistes de sous-ensemble propre, de chaîne et d'application injective.

La tentative infructueuse de Dedekind de prouver l'existence d'un système infini a dicté à Zermelo la nécessité d'un axiome de l'infini et a ouvert le cycle des travaux logiques de Hilbert sur la consistance et la complétude de l'arithmétique des entiers et des réels⁶⁷.

Conclusion

Bien des auteurs rangent Dedekind dans le camp des logicistes, faisant, à tort, peu de différence entre lui et Frege. Dedekind, il est vrai, a affirmé que seule la logique permettait de fonder rigoureusement la science des nombres ; il a insisté à plusieurs reprises sur la nécessité d'observer les règles logiques pour des preuves mathématiques rigoureuses au lieu d'en appeler à l'intuition, dont il a prouvé sur l'exemple de l'analyse de l'espace euclidien qu'elle pouvait être trompeuse ; il a même présenté l'Arithmétique, l'Algèbre et l'Analyse comme une partie de la logique. Il a abordé le problème de la non-contradiction des définitions, a exigé qu'un ensemble d'axiomes pour une théorie soit complet au sens logique. Néanmoins, il n'est pas exact de qualifier Dedekind de logiciste. Je le montre en détail dans mes notes introductives aux différents écrits de Dedekind que j'ai réunis dans *La création des nombres*. Qu'il me suffise donc ici de citer brièvement quatre raisons essentielles qui

⁶⁷ Sur la connexion des travaux de Hilbert avec ceux de Dedekind voir les travaux de Wilfried Sieg, notamment les articles publiés en 1999 et 2002.

s'opposent à la qualification de logiciste dans le cas de Dedekind.

D'abord, comme nous l'avons vu, Dedekind affirme certes l'*objectivité* des concepts mathématiques, mais il ne la justifie nulle part par l'existence d'*objets* logiques ou mathématiques *a priori* et indépendante des opérations de l'esprit. Sans quoi, il n'aurait pas constamment parlé de créativité et de progrès en mathématiques. La justification de l'objectivité repose, pour lui, sur la rationalité de la pensée mathématique⁶⁸, sur des contraintes internes aux méthodes et à la généralisation des concepts, ainsi que sur ce que Felix Klein a appelé « la continuité historique », c'est-à-dire le caractère à la fois cumulatif et rétroactif de l'acquis.

Ensuite, tout en insistant sur la nécessité pour les mathématiciens de construire des théories déductives (ou axiomatiques), Dedekind n'a pas considéré pour elle-même la relation de déduction et n'a jamais prétendu, comme Frege, réduire le calcul à la déduction⁶⁹. La logique, comprise du reste en un sens général et antérieur aux précisions apportées par la logique mathématique, était pour lui *le moyen* de la rigueur, non *la base* des mathématiques. Une comparaison de son concept de chaîne et de la définition fré géenne de la fonction successeur, montre que loin de ramener la relation d'ordre de la suite des entiers naturels à celle de succession logique, Dedekind a réduit le concept de nombre à celui d'ensemble ordonné, et la notion d'ordre, à son tour, au concept de chaîne. Or celle-ci est construite avec les concepts d'ensemble et d'application.

Ce qui nous conduit à énoncer la troisième raison : les concepts primitifs de *Nombres* sont des concepts ensemblistes.

68 Bien que cette rationalité doive éventuellement être soumise au test logique de non-contradiction, il n'est pas absurde de distinguer entre rationalité et logique proprement dite.

69 Ce qui était le programme de l'*Idéographie* de Frege : « réduire le concept de succession dans une suite à celui de succession logique, pour, de là, passer au concept de nombre » (Avant-propos).

Dedekind n'a donc pas produit une définition logique du nombre, mais une définition qui respecte les règles de la logique. Les propriétés qui servent à caractériser les nombres réels ou continu arithmétique : relation d'ordre total dense, possédant la propriété de la coupure et sa réciproque sont toutes des propriétés mathématiques, irréductibles à des propriétés purement logiques. La même chose vaut pour les entiers naturels, on vient de le voir en 5.5. Dans le premier volume de ses *Grundgesetze* (1893), Frege remarque que Dedekind a écrit que l'Arithmétique est une partie de la logique, mais qu'il n'a absolument pas réalisé son programme, puisqu'il a réduit le concept de nombre, non pas à des notions logiques, mais à des notions mathématiques. Dedekind avait, de son côté, observé que Frege et lui-même divergeaient sur la nature du concept de nombre⁷⁰. Les deux auteurs sont donc d'accord sur le fait de leur divergence concernant la rôle de la logique et la définition du nombre.

Enfin, quatrième raison, Dedekind manipule la notion extensionnelle de système et fait un usage non logique du terme 'concept', qui désigne systématiquement chez lui des entités, des structures ou des méthodes mathématiques. Or Frege critique à maintes reprises la notion d'ensemble⁷¹, lui préfère celle de concept dont il fait un terme technique de logique. Selon Frege, « un concept est une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité »⁷². Dedekind, on l'a vu, prend concept au sens d'opération ou d'entité mentale, ce qui ne l'empêche pas

70 *Nombres*, 2^e préface.

71 Cf. par exemple, Frege (1884, § 45, trad. fr., 175) : « le nombre ne naît pas de l'addition d'une chose à une autre, et l'attribution d'un nouveau nom après chacune de ces adjonctions ne fait rien à l'affaire. Les expressions 'multiplicité', 'ensemble', 'pluralité' sont, par leur indétermination, inaptes à apporter quelque lumière sur le nombre ». Mais, bien entendu, attribuer un nouveau nom n'est pas ce que fait Dedekind. Ce qui l'intéresse c'est le concept désigné par le nom ou le signe. Pour ne prendre qu'un exemple, la définition de la « définition par induction » du théorème 126 de *Nombres* inaugure l'important domaine de la récursivité.

72 *Funktion und Begriff*, publié par Frege en 1891 ; trad. fr. (1971).

d'établir une théorie extensionnelle de ces entités. Pour autant, il ne défend pas plus que Frege un point de vue psychologiste. Les « lois de la pensée » ont pour lui la même objectivité mathématique qu'elles en avaient pour George Boole (1815-1864)⁷³. Ou, plus exactement, Dedekind a mathématisé à sa manière propre ce qu'il a considéré comme les opérations les plus fondamentales de l'entendement. Son conceptualisme postkantien n'est ni un psychologisme empirique, et cela en dépit du malheureux « théorème 66 », ni un subjectivisme transcendantal, et cela en dépit du leitmotiv de la création des concepts mathématiques comme constitutifs de l'objectivité et du progrès. Et si, pour finir, l'on se restreint à la seule considération du rapport entre mathématiques et logique, il serait plus juste de parler de « l'arithmétisme ensembliste » de Dedekind, par contraste avec le logicisme de Frege.

Je remercie Michael Detlefsen et Pierre Joray pour leurs remarques, qui m'ont permis d'améliorer mon texte sur certains points.

73 *An Investigation Into the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* est publié en 1854.

Références bibliographiques

- BONIFACE Jacqueline (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Paris : Ellipses.
- BELNA Jean-Pierre (1996). *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. Paris : Vrin.
- CANTOR Georg (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. E. Zermelo (éd.) [reproduction Hilsdeheims : Olms, 1966].
- CAVEING Maurice (1982). Quelques remarques sur le traitement du continu dans les *Éléments* d'Euclide et la *Physique* d'Aristote. In : *Penser les mathématiques*. Paris : Seuil, 145-166 [collection Points Sciences].
- DEDEKIND Richard (1930-1932). *Gesammelte mathematische Werke, I, II, III*. E. Noëther & R. Fricke (éds). Øystein Ore : Braunschweig, Vieweg.
- DEDEKIND Richard (1937). Correspondance avec Cantor. J. Cavaillès & E. Noëther (éds) sous le titre *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Paris : Hermann [trad. fr. in : Cavaillès, *Philosophie mathématique*. Paris : Hermann, 1962].
- DEDEKIND Richard (2008). *La création des nombres*. H. Benis Sinaceur (éd.). Paris : Vrin (à paraître).
- DESCARTES René. *Règles pour la direction de l'esprit*. Paris : Gallimard, La Pléiade, 33-119.
- EUCLIDE (1990-2001). *Les Éléments*. M. Caveing & B. Vitrac (éds). Paris : PUF, 4 vols.
- FREGE Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematischen Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau : Köbner [trad. fr. Paris : Seuil, 1969].
- FREGE Gottlob (1891) *Funktion und Begriff* [trad. fr. in : *Écrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil, 1971].

- FREGE Gottlob (1893, 1903). *Die Grundgesetze der Arithmetik*. Jena : Verlag Hermann Pohle, 2 vols.
- GERGONNE Joseph (1818). Essai sur la théorie des définitions. *Annales de mathématiques pures et appliquées* IX, 1-35.
- HILBERT David (1899). *Die Grundlagen der Geometrie*. Leipzig : Teubner [10^e éd. augmentée par P. Bernays, Stuttgart, 1968 ; trad. fr. par P. Rossier. Paris : Dunod, 1971].
- HOUZEL Christian (2008). L'analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions. In : M.-J. Durand-Richard (sous la dir.), *L'analogie dans la démarche scientifique*. Paris : L'Harmattan, 97-110.
- JORAY Pierre (2005). Logicisme et définition explicite. In : *Le logicisme catégoriel*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 16, 37-58.
- LEIBNIZ Wilhelm Gottfried (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Paris : Garnier-Flammarion.
- RECK Erich H. (2003). Dedekind's structuralism : an interpretation and partial defense. *Synthese* 137, 369-419.
- RIEMANN Bernhard (1876). *Gesammelte mathematische Werke*. R. Dedekind et H. Weber (éds). Leipzig : Teubner [2^e éd. 1892. Trad. fr. L. Laugel, *Œuvres mathématiques de Riemann*. Paris : A. Blanchard, 1897 ; nouveau tirage, 1968].
- SIEG Wilfried (1990). Relative consistency and admissible domains. *Synthese* 84, 259-297 [reproduit dans J. Ferreirós & J.J. Gray (eds), *The architecture of modern mathematics*. OUP, 2006, 339-368].
- SIEG Wilfried (2002). Beyond Hilbert's Reach ? In : D. Malament (ed.), *Reading Natural Philosophy - Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics*. Chicago : Open Court Press, 363-405.
- SIEG Wilfried & SCHLIMM Dirk (2005). Dedekind's Analysis of Number : systems and axioms. *Synthese* 147, 121-170.
- SINACEUR (Benis) Hourya (1991). *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*. Paris : Vrin [2^e éd. 1999].

- TAIT W. W. (1986). Truth and proof: The Platonism of mathematics. *Synthese* 69, 341-370.
- TAIT W. W. (1997). Cantor versus Frege and Dedekind : On the concept of number. In : W. W. Tait (ed.), *Early analytic philosophy*. Chicago : Open Court Press, 213-248.
- TARSKI Alfred (1924). Sur les ensembles finis. *Fundamenta mathematicae* 6, 45-95.
- ZUBER Richard (1990). Article Définition créative. In : *Encyclopédie philosophique universelle, Les Notions philosophiques*, Dictionnaire 1. Paris : Presses Universitaires de France, 568.

DE LA DÉFINITION CHEZ PASCAL AUX DÉFINITIONS EN LOGIQUE COMBINATOIRE

Jean-Pierre DESCLÉS

1. Définition de la définition par Pascal

Dans l'approche traditionnelle, la définition est un discours qui expose la nature de la chose ou la signification du terme : *Oratio naturam rei aut significationem termini exponens*. Elle comporte en général deux éléments : le genre (par exemple, la classe à laquelle l'objet appartient) et au moins une différence spécifique (qui détermine l'espèce et la distingue de toute autre espèce). Ainsi, nous pouvons définir « le rectangle » par une identification :

(1) [Rectangle =_{def} quadrilatère à angles droits].

La logique classique a classé les définitions : (i) définitions essentielles par genre et différence spécifique ; (ii) définitions descriptives par les propriétés ; (iii) définitions extrinsèques par ses causes efficientes ou génétiques ; (iv) définitions (nominales) par étymologie ou par des mots plus connus.

Blaise Pascal, dans *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, retient la définition nominale pour expliquer le rôle des définitions dans la méthode géométrique :

Cette véritable méthode [la méthode géométrique] (...) consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens ; l'autre de n'avancer

jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. Mais pour suivre l'ordre même que j'explique, il faut que je déclare ce que j'entends par définition.

On ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire que les seules impositions de noms aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus ; et je ne parle que de celles-là seulement.

Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abrèger le discours, en exprimant par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes ; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement.

En voici un exemple : (...) j'appelle tout nombre divisible en deux également, nombre pair.

Voilà une définition géométrique : parce qu'après avoir clairement désigné une chose, savoir tout nombre divisible en deux également, on lui donne un nom que l'on destitue de tout autre sens, s'il en a, pour lui donner celui de la chose désignée. (*Œuvres complètes*, 577)

La définition est libre, elle abrège les discours mais il ne faut cependant pas abuser de cette liberté :

D'où il paraît que les définitions sont très libres, et qu'elles ne sont jamais sujettes à être contredites ; car il n'y a rien de plus permis que de donner à une chose qu'on a clairement désignée un nom tel qu'on voudra. Il faut cependant prendre garde qu'on abuse de la liberté d'imposer des noms en donnant le même à deux choses différentes.

(...) Mais si l'on tombe dans ce vice, on peut lui opposer un remède très sûr et infaillible : c'est de substituer mentalement la définition à la place du défini (...) car les géomètres et tous ceux qui agissent méthodiquement, n'imposent des noms aux choses que pour abrèger le discours, et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discutent. Et ils prétendent que l'esprit supplée toujours la définition entière aux termes courts, qu'ils n'emploient que pour éviter la confusion que la multitude des paroles apporte. (*Œuvres complètes*, 578)

Cependant, Pascal pose une question fondamentale : « Peut-on (et doit-on) tout définir ? »

[...] Aussi, en poussant les recherches de plus en plus on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. (*Œuvres complètes*, 578)

L'ordre géométrique ne définit pas tout :

[l'ordre géométrique] ne définit pas tout et ne prouve pas tout. [...] il ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours. Cet ordre, le plus parfait entre les hommes, consiste non pas à tout définir ou à ne rien démontrer, mais à se tenir dans ce milieu de ne point définir les choses claires et entendues de tous les hommes, et de définir toutes les autres [...]. Contre cet ordre pèchent également ceux qui entreprennent de tout définir et de tout prouver et ceux qui négligent de le faire dans les choses qui ne sont pas évidentes d'elles-mêmes.

C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables [...] parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction. Car il n'y a rien de plus faible que le discours de ceux qui veulent définir ces mots primitifs. Quelle nécessité y a-t-il, par exemple, d'expliquer ce qu'on entend par le mot *homme* ? (*Œuvres complètes*, 579)

Ainsi, pour Pascal « l'idée d'homme » devrait être considérée comme une primitive. Aussi ironise-t-il sur la définition, à la manière de Platon, par genre et différences spécifiques :

[Homme =_{def} animal bipède et sans plumes]¹ :

L'idée [d'homme] que j'en ai naturellement, et que je ne puis exprimer, n'était pas plus nette et plus sûre que celle qu'il me donne par son explication inutile et même ridicule : puisqu'un homme ne perd pas son humanité en perdant ses deux jambes, et qu'un chapon ne l'acquiert pas en perdant ses plumes. (*Œuvres complètes*, 579)

La présentation usuelle de la mathématique actuelle repose sur la théorie naïve des ensembles, laquelle ne définit pas directement la notion d'ensemble qui est une sorte d'indéfinissable, parce que reprenant Pascal, ce terme-là « désigne si naturellement les choses qu'il signifie, à ceux qui entendent la langue »². Certes, pour éviter des difficultés qui apparaissent lorsqu'on approfondit la construction et la définition de certains ensembles particuliers, on doit préciser des propriétés axiomatiques qui vont restreindre l'utilisation même d'ensemble (par exemple, « l'ensemble de tous les ensembles » n'a pas d'existence !), comme étant une partie d'un Univers (au sens de Gödel); la relation d'appartenance ' $\in$ ' à une classe est posée comme une relation primitive à partir de laquelle on peut définir d'autres relations, dont l'inclusion ' $\subseteq$ ' et l'égalité entre classes, puis les fonctions définies comme des ensembles de couples... En revanche, dans l'approche de Curry, sur laquelle nous allons revenir, « l'opération d'application d'un opérateur à un opérande » est considérée comme une opération primitive ; à partir de laquelle on peut alors définir les notions de fonction, pensée cette fois comme « une procédure opératoire », appelée plutôt

1 Il est bien difficile de se mettre d'accord sur ce qui serait une définition de l'homme même si nous sommes tous capables de différencier ce qui est homme de ce qui ne l'est pas.

2 La théorie des ensembles définit les propriétés des ensembles, notamment en montrant que les ensembles et les applications entre ensembles forment une catégorie particulière (une catégorie cartésienne fermée).

opérateur³, puis définir la notion de proposition, puis les opérateurs logiques (« les constantes logiques » : connecteurs, quantificateurs...), puis les nombres, puis les fonctions récursives....

Ainsi, une définition, selon *l'Esprit géométrique*, est : (i) nominale ; (ii) elle éclaire et abrège le discours ; (iii) elle est libre mais non sujette à contradiction ; (iv) elle est soumise à la substituabilité dans tous les contextes ; (iv) elle admet des termes non définis (des primitives) ; (vi) elle est distincte des définitions de choses, qui sont des propositions, sujettes à contradiction.

2. Comment définir ?

La linguistique structurale et un grand nombre de modèles formels des langues naturelles proposent des définitions d'unités sémantiques par des listes de traits⁴, ce qui revient souvent à appréhender les définitions des termes sous la forme de vecteurs booléens dans un espace plus ou moins structuré de sèmes (classificateurs, fonctionnels, spécifiques). Reprenons l'exemple historique de B. Pottier (1955) (figure 1)

3 En prenant pour base la notion d'ensemble, une fonction $f: X \rightarrow Y$ est définie comme étant un ensemble particulier, appelé « le graphe de f », c'est-à-dire comme un ensemble de couples $\langle x, y \rangle$ tels que pour chaque x de X (un argument de f), il existe un unique y de Y (l'image de x par f), d'où la notation : $\langle y = f(x) \rangle$

4 La psychologie cognitive aborde souvent la sémantique par la description sous forme de traits (Voir, par exemple Jean-François Le Ny 2005). Il en est de même de nombreux modèles du Traitement Automatique des Langues et de l'Intelligence Artificielle qui ramènent la sémantique aux seules descriptions par des traits (ou valeurs booléennes).

Définitions par vecteurs booléens de sèmes					
Lexèmes	SEMES				
	fonctionnel « pour s'asseoir »	classificatoire « meuble »	spécifiques		
			« avec bras »	« avec dossier »	« avec pieds »
Fauteuil	+	+	+	+	+
Chaise	+	+	-	+	+
Tabouret	+	+	-	-	+
Pouf	+	+	-	-	-

Figure 1 : Un exemple classique d'analyse structurale

Remarquons immédiatement que les sèmes choisis pourraient apparaître comme des éléments primitifs de description. Pourtant, ce ne sont pas des « primitifs » au sens de Pascal, car ils sont déterminés dans un domaine lexical⁵ où il est possible d'opposer simplement des termes lexicaux deux à deux par des attributions (ou non attributions) de sèmes différenciateurs : les sèmes permettent seulement d'expliquer les différences sémantiques entre des termes⁶. Si l'analyse sémantique par sèmes ou par traits est évidemment très utile pour décrire les oppositions sémantiques entre des termes lexicaux d'un même domaine d'expérience, elle s'avère cependant vite assez limitée pour décrire, entre autres, la polysémie verbale ou la polysémie des prépositions et, plus généralement, les systèmes des significations des marqueurs des catégories grammaticales (comme le temps, l'aspect, les modalités, les diathèses...).

Il est intéressant de noter que la linguistique actuelle, en passant de la linguistique structurale à une linguistique cognitive, cherche à dépasser les analyses purement sémiques pour proposer des schèmes, définis comme des représentations structurées de significations. Par exemple B. Pottier (2000), comme d'autres

5 En fait un « micro-domaine » ou comme l'explique B. Pottier « un domaine d'expérience ».

6 Cette méthode par oppositions est héritée de la phonologie.

linguistes⁷, chacun avec des formalismes plus ou moins opératoires, proposent maintenant des descriptions au moyen de schèmes et de moins en moins au moyen de sèmes. Pour notre part, nous développons des analyses sémantiques sous la forme de schèmes sémantico-cognitifs⁸. Pour reprendre un exemple célèbre de Mc Cawley, le prédicat binaire « tuer (x,y) » est définissable, comme un prédicat complexe, dont l'analyse sémantique est effectuée à l'aide de prédicats plus élémentaires : « est-vivant », « CAUSE », « CHANGE » et de l'opérateur de négation propositionnelle « non ». Cette analyse est souvent représentée par un arbre ou par une expression bien parenthésée (voir la figure 2).

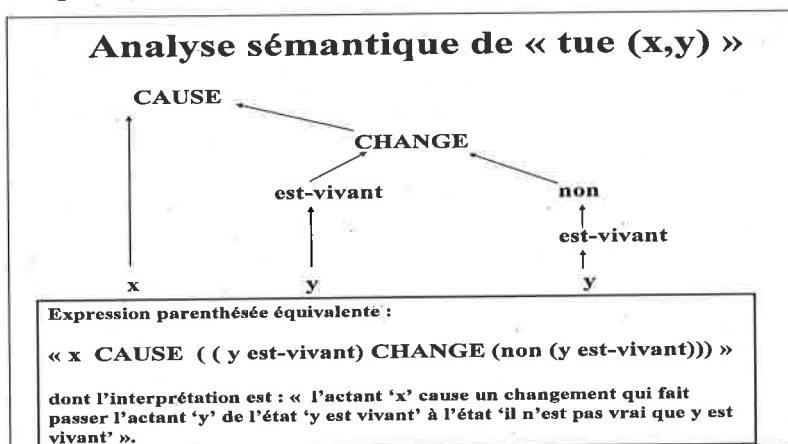


Figure 2 : Une analyse sémantique de « tue », d'après Mc Cawley

Comme on le voit avec cette représentation formelle, l'analyse sémantique ne peut plus se ramener à une simple description

7 Par exemple dans le courant de la sémantique cognitive : R. Jackendoff, L. Talmy, R. Langacker ...

8 Voir, entre autres Desclés (1990) et les thèses soutenues décrivant des réseaux sémantiques très précis de schèmes sémantico-cognitifs dans différentes langues (français, russe, bulgare, grec, coréen ...).

booléenne ou des sèmes, ou des traits, seraient activés ou non activés⁹ ; il s'agit ici d'une organisation plus structurée où des propositions sont les arguments d'autres prédicats¹⁰. Une telle description en termes de prédicats ne permet cependant pas de montrer exactement comment se construit le prédicat transitif « tue (x,y) » à partir de composantes plus élémentaires ; en d'autres termes il faut être capable de décrire *un processus d'intégration* par des modes de composition des prédicats élémentaires¹¹ entre eux, de façon à dégager les deux places 'x' et 'y' des arguments qui sont des places d'actants¹².

Les langues naturelles font apparaître de nombreux exemples de « prédicats complexes » construits à partir de prédicats verbaux (jugés « plus profonds » ou plus primitifs) et de marqueurs linguistiques d'opérations langagières, par exemples d'opérations grammaticales, certains de ces marqueurs sont clairement identifiés comme par exemple des préfixes verbaux¹³. Ces marqueurs sont les traces d'opérateurs qui viennent, par

9 La psychologie cognitive (par exemple Le Ny, 2005) fait souvent appel pour ses descriptions et représentations du lexique à des activations (ou inhibition) de traits.

10 Nous reviendrons sur l'analyse sémantique de « tue(x,y) » en proposant une représentation formelle mieux fondée car intégrée dans le formalisme logique du λ -calcul typé et de la Logique Combinatoire. En effet, la représentation par un arbre selon Mc Cawley ne permet pas toujours de bien indiquer les différents types des constituants : Quels sont les types fonctionnels des prédicats ? Comment cette structure formelle se synthétise en une nouvelle unité prédicative autonome ?

11 Rappelons, que depuis G. Frege, les prédicats sont devenus des êtres mathématiques qui expriment des concepts sous la forme de fonctions entre des domaines (par exemple des domaines déterminés dans un Univers de discours au sens de Peirce) et l'ensemble {le-vrai, le-faux} ; d'une façon plus abstraite, les concepts sont donc des opérateurs d'un certain type ; étant des opérateurs, ils sont donc *a priori* composables. Nous allons voir comment dans la suite du texte.

12 Nous allons reprendre cette analyse en précisant le processus d'intégration sous la forme d'un opérateur qui exprime un programme compositionnel.

13 Les marqueurs casuels, dans les langues à cas, les marques de genre et de nombre, les suffixes de conjugaison sont également des traces d'opérations sémantiques. Les préverbes jouent un grand rôle dans les langues slaves pour indiquer des valeurs aspectuelles de perfectivisation (prise en compte d'un achèvement). Sur les traces d'opérateurs métalinguistiques, voir Desclés (2006a).

exemple, modifier la valence et la signification des prédicats lexicaux qui en sont les opérands comme dans : *se-laver, se-lever, se-quereller-avec ; en-dormir, sur-veiller, sur-passer, entre-poser, dé-poser, ex-poser, par-venir, re-venir ; faire dormir, faire danser, faire manger, faire mourir, faire tuer, être instruit, devenir instruit...* Certains de ces préfixes sont reconnus comme des préverbes associés étroitement à des prépositions¹⁴ (*en, sur, entre, par...*), d'autres marqueurs sont des verbes support (*faire, devenir ;...*). En se composant formellement avec des prédicats lexicaux, ces opérateurs traduisent-ils des mécanismes de composition de significations plus élémentaires ? Certains linguistes répondent, par exemple, que les préfixes et les verbes support tendent à être « vides de toute sémantique » pour jouer un rôle purement formel ; d'autres linguistes soutiennent plutôt que les préverbes et les verbes support, en se composant sur le plan morphologique avec des lexèmes verbaux, construisent d'autres significations verbales dérivées qui gardent des liens sémantiques profonds avec d'un côté, les significations des prépositions initiales et d'un autre côté, les significations des verbes ingrédients. Autrement dit, la composition morphologique exprimerait-elle une certaine composition sémantique ? Pour argumenter en faveur de la compositionnalité, il est cependant nécessaire de dégager d'une part, les significations abstraites des éléments composés (sous forme de schèmes) et d'autre part de préciser exactement les modes de composition des opérateurs qui effectuent la composition. La compositionnalité se ramène-t-elle à de simples compositions de valeurs booléennes comme dans l'approche structurale ou bien à une composition ensembliste des fonctions associées aux prédi-

14 La diachronie confirme une relation entre préverbes, prépositions et adverbes.

cats¹⁵ ? Si non, comment construire les prédicats complexes ? Au moyen de quelles opérations explicites ?

Ainsi, que ce soit en linguistique, mais également en logique, comme nous allons le voir avec quelques exemples, ou encore en informatique, nous avons besoin de définir des prédicats et des opérateurs complexes en montrant comment ils se construisent à partir de prédicats et d'opérateurs plus élémentaires. Mais si de tels prédicats et opérateurs sont composables entre eux, il nous faut alors préciser explicitement les modes de composition. Comment alors définir des modes plus généraux de composition que la simple composition ensembliste ? Sous la forme d'opérateurs abstraits ? Quelles sont alors les propriétés minimales que ces opérateurs de composition doivent posséder ? Nous allons tenter de donner quelques éléments de réponse à ces diverses questions.

3. Une théorie fonctionnelle des définitions

En suivant Pascal, la définition revient à établir une relation entre un *definiendum* et un *definiens* où le *definiens* contient soit des termes primitifs (des termes non définis), soit des termes déjà définis. La relation peut être très simple comme dans le cas des vecteurs booléens qui affirment la présence ou l'absence d'un trait définitoire, accepté comme primitif, ou plus complexe car mettant en jeu des relations emboîtées ou intriquées. S'inspirant directement de *l'Esprit de géométrie*, nous souhaitons rendre plus opératoire cette approche en faisant appel aux outils des logiques actuelles¹⁶. Dans notre approche, les compo-

15 On rappelle que pour nous, en suivant Frege, un prédicat est, en première approximation, une fonction d'un domaine dans {vrai, faux}. La composition ensembliste de deux fonctions 'f' et 'g' composables est telle que l'on a : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

16 La notion de fonction, et celle corrélatrice et plus abstraite d'opérateur (Desclés 1981), n'est pas encore bien dégager dans l'Analyse mathématique naissante au temps de B. Pascal. Il

santes constitutives, ou ingrédients sémantiques, $C_1, C_2, \dots, C_n$ d'un *definiens* doivent être composées entre elles par « un opérateur » 'X', ce qui revient à poser alors une identification :

$$(0) \quad [\textit{definiendum} =_{\text{def}} \mathbf{X} C_1 C_2 \dots C_n]$$

Cet opérateur 'X' exprime en fait une fonction procédurale (appelée « opérateur ») destinée à « composer entre eux » les éléments constitutifs de la définition du terme que l'on souhaite définir.

Prenons un exemple très simple et illustratif. Le prédicat unaire « être-pair » peut être ramené à la conjonction de deux prédicats plus élémentaires. Cependant, la définition n'est pas directe mais est présentée par une relation d'équivalence entre deux formes propositionnelles quantifiées universellement :

$$(1) \quad (\forall x) [\text{être-pair}(x) =_{\text{def}} \text{être-divisible}(x) \ \& \ \text{être-en-deux-parties}(x)]^{17}$$

Par cette définition, le *definiendum* est exprimé par une combinaison booléenne de deux formes propositionnelles du *definiens*. Elle doit utiliser une variable 'x' (liée par le quantificateur), ce qui impose alors la définition préalable d'un domaine de parcours de cette variable (entiers naturels, nombres réels,...), appelé souvent « univers de discours » ou domaine de référence. Peut-on définir des relations entre un *definiendum* et son *definiens*, qui transcenderaient des domaines particuliers ? Par exemple, peut-on définir un opérateur d'addition à partir d'opérateurs plus élémentaires, aussi bien pour l'addition

faudra plus d'un siècle et demi pour que la notion générale de « fonction » commence à se dégager avec Cauchy pour aboutir à la notion encore plus générale d'opérateur avec la Logique Combinatoire de Curry (1958), en passant par l'extension, effectuée par Frege (1893), des fonctions aux domaines non numériques, en particulier à l'analyse de la logique.

17 Comme nous le verrons plus loin, la définition du concept « être-pair » s'exprime à l'aide d'un certain opérateur de composition, désigné par ' Φ ', qui « intrique » entre eux les deux prédicats avec un opérateur de conjonction
 [être-pair $=_{\text{def}} \Phi \ \& \ (\text{être-divisible}) (\text{être-en-deux-parties})]$

d'entiers, l'addition de nombres réels, l'addition de vecteurs, l'addition de matrices, l'addition d'opérateurs fonctionnels dans un espace de Hilbert... ?

Dans l'exemple de la définition (1), la combinaison des deux composantes est très simple puisqu'elle fait appel à une conjonction (à l'aide du connecteur de conjonction '&') de deux formes propositionnelles. Or, les modes de combinaison nécessaires dans un grand nombre de définitions, en particulier en mathématiques ou en logique lorsqu'on analyse les concepts ou encore, comme nous l'avons vu, en linguistique, ne peuvent pas se ramener à de simples combinaisons booléennes de formes propositionnelles. Il nous faut donc généraliser les modes de composition. Nous allons exprimer des processus de composition (en fait des programmes de composition) sous la forme d'opérateurs abstraits. Les « combineurs » de la Logique Combinatoire de Curry (1958) jouent justement ce rôle :

- Dans le cadre de la Logique Combinatoire, on peut exprimer non seulement des termes (renvoyant à des « objets ») mais aussi des opérateurs, des relations, des prédicats qui se composent entre eux au moyen d'opérateurs abstraits, appelés « combineurs ».
- Les combineurs expriment des opérateurs abstraits, qui construisent des fonctions mathématiques, plus ou moins complexes, qui en s'appliquant aux composantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ d'un *definiens*, déterminent la signification d'un *definiendum* à partir des significations (déjà construites ou acceptées comme primitives) des composantes du *definiens*.

4. Logique Combinatoire (LC) de Curry

Nous renvoyons aux ouvrages qui présentent le formalisme : la Logique Combinatoire de Curry (1958, 1972) et celui du

λ -calcul de Church (1941)¹⁸, qui lui est en partie apparenté. L'appellation « Logique Combinatoire » peut conduire à des interprétations trop réductrices, voire erronées, car il ne s'agit pas d'un formalisme de manipulations syntagmatiques des positions de symboles mais plutôt d'une logique de compositions intrinsèques¹⁹ d'opérateurs (en considérant, pour la généralité de la formulation, que les opérands absolus sont également des opérateurs, mais des opérateurs zéro-aires). Lorsqu'un combinateur, en tant qu'opérateur, s'applique à une seule composante, il n'y a pas à proprement parler, composition car il construit une composante dérivée, qui est alors la valeur d'une fonction à un seul argument²⁰. L'opération primitive de ce formalisme est l'opération d'application, désignée par '@', selon le schème applicatif²¹ :

$$(2) [\omega @ \xi_0 \Rightarrow \xi_1]$$

18 Voir les références données dans la bibliographie, par exemple : Fitch (1974), Barendregt (1980), Hindley et Seldin (1986). Pour des applications à la linguistique, voir Grize (1971), Shaumyan (1987), Desclés (1990).

19 Nous allons expliquer cette notion fondamentale de « composition intrinsèque ». Voir aussi Desclés (1981, 1990) ; Desclés et Cheong (2006).

20 Prenons une relation binaire définie sur le domaine des nombres, par exemple, la relation '>'. La converse '<' de cette relation est dérivée de '>'. Pour exprimer cette conversion, on fait appel à un combinateur 'C', dont l'action opératoire est définie comme suit :

$CXyx \rightarrow Xxy$; nous pouvons donc écrire : [$< =_{\text{def}} C>$].

21 Nous exprimons également cette opération d'application soit par un arbre applicatif :

$$\begin{array}{c} \omega \quad \xi_0 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \xi_1 \end{array}$$

soit par une simple notation linéaire ' $\omega @ \xi_0$ ' ou plus simplement par ' $\omega\xi_0$ ', en omettant de noter explicitement l'opération d'application '@' et avec des conventions sur le parenthésage. Prenons le combinateur 'C' de la note précédente, nous avons, par exemple, l'expression applicative '(((C @ X) @ y) @ x)' qui s'écrit de façon plus simple 'CXyx'. Remarquons cependant que l'expression ' $\omega @ \xi_0$ ' qui exprime le programme applicatif de l'application de ' ω ' à ' ξ_0 ' avant son exécution et le résultat ' ξ_1 ' qui en résulte après l'exécution de l'opération d'application, ne sont pas co-extensifs car ils diffèrent dans le temps.

où ' ω ' est la place d'un opérateur qui en s'appliquant à un opérande dont la place est ' ξ_0 ' doit construire un résultat dont la place est ' ξ_1 '. Le résultat construit pourra fonctionner dans un autre contexte d'emploi, comme un opérateur ou comme un opérande (d'un autre opérateur, éventuellement de lui-même, un opérateur pouvant s'appliquer à lui-même). Ce formalisme engendre des *expressions applicatives (ou combinatoires)* à partir d'atomes. Les expressions applicatives sont interprétées comme des opérateurs applicables à des opérandes ou comme des opérandes absolus (des opérateurs zéro-aires) ne pouvant alors jamais jouer le rôle d'un opérateur dans un schéma applicatif.

Comme nous l'avons déjà dit, la Logique Combinatoire de Curry introduit des opérateurs abstraits, appelés combinateurs, qui opèrent sur d'autres opérateurs, y compris sur eux-mêmes, pour les composer selon un certain mode de composition ; ce mode de composition est en fait une fonction²² destinée à construire des opérateurs (ou des programmes informatiques²³) plus complexes à partir d'opérateurs plus élémentaires.

Donnons quelques exemples de modes de composition exprimés par des combinateurs : Les règles (d'introduction et d'élimination) d'action des combinateurs sont associées à

22 Nous ne partageons pas entièrement l'interprétation générale de Jean-Pierre Ginsti (1997), pour qui la Logique Combinatoire serait un formalisme de manipulation « d'objets quelconques », dont l'ontologie serait différée. Pour nous, les entités appréhendées par la Logique Combinatoire qui est, par nature, un système applicatif, sont nécessairement des opérateurs composables entre eux ou des opérandes absolus qui ne sont alors jamais des opérateurs. Les combinateurs sont nécessairement des opérateurs. Nous ne sommes pas d'accord non plus avec la remarque de Jean-Yves Girard (2006 : 117), pour qui la Logique Combinatoire resterait « globalement inférieure au λ -calcul » en prenant pour argument que le λ -calcul est en étroite relation avec la déduction naturelle. Or, également on peut relier étroitement Logique Combinatoire et déduction naturelle de Gentzen, ce qui affaiblit l'argument de Girard.

23 Dans la programmation applicative ou fonctionnelle, les programmes sont des expressions applicatives mettant en jeu des opérateurs appliqués à des opérandes. Les programmes élémentaires sont composés entre eux par des combinateurs pour engendrer des programmes applicatifs plus complexes.

chaque combinateur (dans le style de Gentzen); ces règles engendrent des relations, appelées techniquement des β -réductions, entre l'expression applicative qui exprime « le programme d'action du combinateur » (la partie gauche de la relation) et le résultat de l'action du combinateur (la partie droite de la relation). Les symboles 'X', 'Y', 'Z', 'U' et 'V' exprimant des expressions applicatives quelconques, les règles d'élimination et les β -réductions associées des combinateurs élémentaires sont présentées dans le tableau de la figure 3.

Nom du combinateur	Règles (d'élimination)	Relations de réduction
B (composition fonctionnelle)	$BXYZ \text{ /- } X(YZ)$	$BXYZ \geq X(YZ)$
I (identité)	$IX \text{ /- } X$	$IX \geq X$
C (conversion)	$CXYZ \text{ /- } XZY$	$CXYZ \geq XZY$
W (diagonalisation)	$WXY \text{ /- } XYY$	$WXY \geq XYY$
Φ (intrication)	$\Phi XYZU \text{ /- } X(YU)(ZU)$	$\Phi XYZU \geq X(YU)(ZU)$
S (fusionneur)	$SXYZ \text{ /- } XZ(YZ)$	$SXYZ \geq XZ(YZ)$
K (éliminateur / introducteur d'opérande fictif)	$KXY \text{ /- } X$	$KXY \geq X$
C* transposition Opérande / opérateur	$C^* XY \text{ /- } YX$	$C^* XY \geq YX$

Figure 3 : Règles d'élimination et β -réductions des combinateurs élémentaires

Une composition d'opérateurs est considérée comme *intrinsèque* lorsqu'elle est *indépendante des domaines des opérateurs composés* (donc de leurs interprétations extensionnelles). La Logique Combinatoire est une *logique des processus opéra-*

toires effectués au moyen de compositions exprimées par les combinateurs qui expriment des modes intrinsèques²⁴ de composition d'opérateurs. Pour faire comprendre cette notion de « composition intrinsèque », partons d'un exemple simple. Dans un espace fonctionnel d'opérateurs, par exemple dans un espace de Hilbert, la multiplication d'opérateurs fonctionnels est définie de façon informelle, par l'équivalence entre des valeurs déterminées sur un domaine :

$$(3) (\forall x) [(g \text{ multiplié-par } f)(x) =_{\text{def}} \text{multiplication-de}(g(x)) \text{ par } (f(x))]$$

Le *definiens* (positionné à droite de '=def') 'multiplication-de(g(x)) par (f(x))' peut être évalué dans le co-domaine des deux opérateurs 'f' et 'g' puisque 'f(x)' et 'g(x)' possèdent des valeurs calculables dans ce co-domaine. En Logique Combinatoire, la composition des deux opérateurs 'f' et 'g' par l'opérateur binaire « multiplier » est exprimée au moyen d'un combinateur de composition par intrication, désigné par ' Φ '; ce combinateur ' Φ ' construit l'opérateur complexe « multiplier »fg', à partir de l'opérateur binaire « multiplication-de-par » et des opérateurs composés 'f' et 'g'. L'action de cet opérateur complexe sur un opérande quelconque, désigné par 'x', est déterminée à partir de l'action du combinateur ' Φ ' sur ses opérands successifs « multiplication-de-par », 'f' et 'g'. En utilisant une notation applicative préfixée (où l'opérateur est toujours positionné devant son opérande), nous obtenons :

$$(4) [(\text{« multiplier »fg}) @ x = (((\Phi \text{ « multiplication-de-par »}) @ f) @ g) @ x]$$

Nous en déduisons alors la signification du *definiendum* « multiplier » (deux opérateurs) par un *definiens*, cette signification

24 Dans la théorie des catégories, un certain nombre d'opérations (par exemple les transformations naturelles) sont également intrinsèques (voir Desclés, 1981).

est exprimée sous la forme d'une équivalence entre deux opérateurs :

$$(5) [\ll \text{multiplier} \gg =_{\text{def}} \Phi \ll \text{multiplication-de-par} \gg]$$

L'opérateur binaire « multiplier » compose des opérateurs, alors que l'opérateur « multiplication-de-par » opère sur les valeurs des opérateurs composés. Plus précisément, nous avons la déduction formelle :

1. ((« multiplier »)fg) (x)
2. [« multiplier » =_{def} Φ « multiplication-de-par »] def.
3. ((Φ « multiplication-de-par »)fg) (x) rempl.
4. « multiplication-de-par » (f(x)) (g(x)) élim. Φ

La composition par intrication, opérée par le combinateur ' Φ ', est ici *intrinsèque* puisque l'interprétation des opérateurs composés n'intervient pas.

Prenons un autre exemple en reprenant le combinateur ' C '. L'opérateur converse ' $C+$ ' dérivé d'un opérateur binaire '+' d'addition, est construit de façon intrinsèque²⁵. On exprime ainsi intrinsèquement la commutativité de l'opérateur '+' par l'équivalence entre opérateurs :

$$(6) [C+ = +]$$

Cette propriété de commutativité de l'addition est valable pour différents domaines : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes, vecteurs, matrices...

Toutes les compositions d'opérateurs ne sont cependant pas définissables de façon entièrement intrinsèque. Prenons un

²⁵ Etant donné un opérateur ' X ' quelconque, il ne possède pas en général la propriété de commutativité puisque, par exemple le prédicat « aime » n'est pas équivalent à son converse « C aime » (*Falco aime Esméralda* mais malheureusement, *Esméralda n'aime pas Falco*). Chaque opérateur binaire ' X ' a un opérateur converse ' CX ' construit par le combinateur C , par exemple : [$< = C>$].

exemple. Toujours dans un espace fonctionnel d'opérateurs, prenons la « division » de deux opérateurs que l'on définit informellement comme suit :

$$(7) [(g \text{ divisé par } f)(x) =_{\text{def}} \text{division-de } g(x) \text{ par } f(x) \\ \text{si } f(x) \neq 0 \\ \text{et sinon non définie}]$$

La définition de l'opérateur binaire « divisé-par » portant sur des opérateurs fonctionnels n'est pas entièrement intrinsèque car elle dépend de l'interprétation extensionnelle des composantes, en particulier du co-domaine de 'f'.

D'une façon générale, les combinateurs sont des opérateurs qui expriment des programmes de composition d'opérateurs plus élémentaires. Ils sont donc utilisés pour « construire des opérateurs complexes » à partir d'un certain nombre d'opérandes (opérateurs ou opérandes absolus²⁶). A titre illustratif, précisons, le rôle opératoire du combinateur 'B' dont l'action formalise la composition fonctionnelle (ou ensembliste) de deux opérateurs 'f' et 'g', en posant :

$$(8) [f \circ g =_{\text{def}} Bfg]$$

Cette notation 'f o g' exprime exactement dans le cadre ensembliste, la composition fonctionnelle ordinaire de deux fonctions (opérateurs) puisque nous avons :

$$(8') \begin{array}{ll} (f \circ g)(x) & \\ [f \circ g =_{\text{def}} Bfg] & \text{def. 0} \\ (Bfg)(x) & \text{rempl.} \\ f(g(x)) & \text{élim. B} \end{array}$$

26 Par exemple, X étant un opérande absolu, le combinateur 'K' construit à partir de X, un opérateur dérivé 'KX' qui est une fonction constante puisque 'KXY' ≥ X'. De même, si 'X' est opérande d'un opérateur 'Y', le combinateur 'C*' appliqué à 'X' construit un opérateur 'C*X' dont 'Y' est devenu opérande : '(C*X)Y ≥ YX'

On peut vérifier facilement que la composition fonctionnelle vérifie la propriété d'associativité:

$$(8'') \quad f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Les autres combinateurs élémentaires servent à exprimer des modes de composition plus complexes. Par exemple, le combinateur ' Φ ' exprime l'intrication²⁷ des opérateurs 'Y' et 'Z' qui opèrent « en parallèle et simultanément » sur le même opérande 'U', les deux résultats étant deux opérands de l'opérateur 'X', d'où : $\Phi XYZU = X(YU)(ZU)$.

4.1. Propriétés remarquables des combinateurs

- Les combinateurs sont composables entre eux par l'opération d'application.
- Les combinateurs ne sont pas indépendants, certains combinateurs peuvent être pris comme des combinateurs élémentaires qui permettent de construire des combinateurs dérivés²⁸ : *un combinateur est une expression applicative qui ne contient que des occurrences de combinateurs (élémentaires ou dérivés).*
- Certains combinateurs élémentaires peuvent être pris comme des combinateurs primitifs à partir desquels on peut définir tous les autres combinateurs ; on peut démontrer que les combinateurs 'S' et 'K' sont génériques : ils peuvent être utilisés pour définir tous les autres combinateurs élémentaires et tous les combinateurs qui en sont dérivés.
- Les combinateurs s'organisent dans une structure algébrique : l'ensemble des expressions combinatoires a une structure de

27 Nous avons, dans le cadre des catégories cartésiennes fermées, étudié les propriétés algébriques des deux opérateurs de composition « la greffe » et « l'intrication » sur les arbres, ces deux opérateurs étant en étroite relation avec les combinateurs 'B' et ' Φ '.

28 Par exemple : $[I =_{\text{def}} SKK]$; $[BCC =_{\text{def}} I]$; $[C^* =_{\text{def}} CI]$.

monoïde où 'B' joue le rôle de la composition (associative) et 'I' le rôle de l'élément neutre.

- Pour certains combinateurs (appelés combinateurs réguliers), les constructions s'expriment dans une « algèbre d'arbres ».
- L'action des combinateurs est intrinsèque, c'est-à-dire indépendantes des domaines d'interprétation des opérateurs composés.
- Les combinateurs ont des actions opératoires qui s'expriment par des règles sans faire intervenir des variables liées. La Logique Combinatoire est ainsi un formalisme applicatif « sans variables liées », ce qui simplifie les calculs, en particulier évite les mécanismes de substitution avec une gestion formelle des variables liées par un nécessaire « renommage » de variables, pour éviter, dans certains cas, les télescopes²⁹.

4.2. Propriétés philosophico-logiques des combinateurs

Mentionnons quelques propriétés plus philosophiques des combinateurs³⁰ :

- *Les combinateurs* expriment sous forme d'opérateurs internes au formalisme *des modes de composition intrinsèques*.
- Les combinateurs sont des "processus opératoires" réalisés sous forme d'opérations élémentaires composées entre elles et effectuelles par des machines informatiques ; ces processus opératoires sont *abstraits, généraux et indépendants de toute interprétation dans un domaine particulier* (comme les nombres, les propositions, les constantes logiques, les opérateurs fonctionnels d'un espace de Hilbert, les opérateurs to-

29 Ces télescopes évités par un « renommage » des variables est une des difficultés formelles dans l'automatisation informatique du Calcul des prédicats.

30 On peut se reporter à un exemple d'analyse d'un concept philosophique par la Logique combinatoire dans Desclés (1991). Pour certains aspects philosophiques de la Logique Combinatoire voir aussi Dana Scott (1975).

pologiques de Kuratowski, les opérateurs grammaticaux des langues...).

- Ces processus opératoires expriment des « actes élémentaires de pensée », indépendants de tout support matériel et abstraits de tout objet sur lesquels ils sont susceptibles d'agir³¹. Ces *actes opératoires* s'actualisent lorsqu'ils se concrétisent dans des actes particuliers qui opèrent sur des objets spécifiques (des nombres, des fonctions, des concepts, des propositions...).
- Ces « actes élémentaires de pensée » ne sont pas indépendants entre eux; certains peuvent être pris comme des « actes de base », les autres en étant « dérivées ».
- Ces actes élémentaires permettent de définir de nouveaux « actes opératoires » auxquels on associe des règles spécifiques d'action.

Selon Curry, la Logique Combinatoire apparaît comme étant une « prélogique » à la base d'autres logiques non typées ou typées (logique des compositions de programmes applicatifs élémentaires, logiques propositionnelles et modales, logiques des prédicats et de la quantification, logiques paraconsistantes, logique des objets plus ou moins déterminés³²...). Aux combinateurs accompagnés de leurs propriétés spécifiques (règles d'élimination et d'introduction qui engendrent les règles de β -réduction), on adjoint *des atomes spécifiques à la logique inférentielle*, à savoir les « constantes logiques » usuelles (opérateurs propositionnels et opérateurs de quantification avec leurs règles d'élimination et d'introduction) et des prédicats; il est alors possible de construire, dans le cadre de la Logique Combinatoire une logique dite « illative » (ou inférentielle), c'est-à-

31 Reprenant une caractérisation de Jean Ladrière (1970, 1973), les combinateurs expriment des « formes opératoires pures ».

32 Il s'agit de la LDO qu'Anca Pascu et moi-même construisons pour prendre en compte des objets plus ou moins déterminés, plus ou moins typiques et atypiques. Voir Desclés (1993, 2002), Pascu (1999, 2006) et Desclés et Pascu (2006)...

dire une logique des prédicats et des quantificateurs (frégéens), *sans faire appel à des variables liées*. En y adjoignant des *opérateurs spécifiques à un domaine*, par exemple des opérateurs logico-grammaticaux déterminés par des définitions mettant en œuvre des opérateurs grammaticaux primitifs, et, éventuellement, des opérands absolus (dénnotant alors des objets d'un domaine), on construit des formalismes opératoires qui les prennent en charge, ce qui permet d'en dégager les propriétés les plus spécifiques d'un domaine étudié (domaine de l'analyse syntaxique par les Grammaires Catégorielles étendues (Desclés & Birkri (1995), du grammatical (Desclés 1990), domaines de fonctions, de nombres, de vecteurs, de matrices, domaines des logiques...).

Combinatory logic is a branch of mathematical logic which concerns itself with the ultimate foundations. Its purpose is the analysis of certain notions of such basic character that they are ordinarily taken for granted. They include the process of substitution, usually indicated by the use of variables; and also the classification of the entities constructed by these processes into types or categories, which in many systems has to be done intuitively before the theory can be applied. It has been observed that these notions, although generally presupposed, are not simple; they constitute a prelogic, so to speak, whose analysis is by no means trivial. (Curry 1958, 1)

This combinatory logic will be capable of serving as a foundation for abstract theory of all logic and mathematics, including functions (predicates, relations) or arbitrarily many variables. (Curry 1929, Seldin, 13)

5. Différents opérateurs de quantification

A titre d'exemple, nous allons donner les règles relatives à la définition du « quantificateur universel restreint » (à partir de l'implication matérielle de Russell), sous la forme de deux règles, l'une d'élimination, l'autre d'introduction du quantificateur universel restreint, désigné par ' Π_2 '. Dans ces règles, ' P ' et ' Q ' désignent des prédicats unaires quelconques. On remarquera que la formulation de ces règles ne fait pas appel à la notion de variable liée. L'introduction des constantes logiques dans le cadre de la Logique Combinatoire conduit à une branche particulière, celle de la « logique illative » (inférentielle) (Curry 1958 1972)³³.

Règles (d'élimination et d'introduction des quantificateurs illatifs)

$\Pi_1 Q$	$[t : x], Qx$
----- [elim. Π_1]	----- [intr. Π_1]
Qx	$\Pi_1 Q$
$\Pi_2 Q P, \quad Q(x)$	$Q(x) /- P(x)$
----- [elim. Π_2]	----- [intr. Π_2]
$P(x)$	$\Pi_2 Q P$

L'expression ' $\Pi_1 Q$ ' se lit « tous sont Q » (tous sont des hommes) et l'expression ' $\Pi_1 Q$ ' se lit « tous les Q sont P » (tous les hommes sont mortels). Le quantificateur illatif universel restreint Π_2 peut être défini à partir du quantificateur universel Π_1 et du connecteur ' $\Rightarrow$ ' entre deux propositions. L'introduction du

33 Voir aussi Desclés (1990). Pour une approche assez comparable dans l'esprit de ce que nous développons autour de la définition voir l'article de Denis Miéville (2006) à propos de la quantification.

combinateur ' Φ ' permet de construire, par abstraction, un opérateur d'implication ' $\Phi \Rightarrow$ ' entre deux prédicats, puis l'introduction du quantificateur ' Π_1 ' permet de s'abstraire de l'opérande. En introduisant le combinateur ' B^2 ' (dont la règle d'élimination est ' $B^2XYZU \rightarrow X(YZU)$ '), on compose cet opérateur ' Π_1 ' de quantification avec l'opérateur ' $\Phi \Rightarrow$ '. Nous en déduisons la définition du quantificateur ' Π_2 ' en fonction de composantes déjà définies ou considérées comme des primitives illatives :

$$(1) [\Pi_2 =_{\text{def}} B(CB^2)\Phi \Rightarrow \Pi_1]$$

Nous avons ainsi la déduction :

- | | | |
|----|--|--------------|
| 1. | $\Pi_2 Q P$ | hyp. |
| 2. | $[\Pi_2 =_{\text{def}} B(CB^2)\Phi \Rightarrow \Pi_1]$ | def. Π_2 |
| 3. | $B(CB^2)\Phi \Rightarrow \Pi_1 Q P$ | rempl. |
| 4. | $(CB^2)(\Phi \Rightarrow) \Pi_1 Q P$ | |
| 5. | $B^2 \Pi_1 (\Phi \Rightarrow) Q P$ | |
| 6. | $\Pi_1 (\Phi \Rightarrow Q P)$ | |

Il s'ensuit que la règle d'élimination de Π_2 est déduite de la règle d'élimination de Π_1 :

- | | | |
|----|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $\Pi_1 (\Phi \Rightarrow Q P)$ | hyp. |
| 2. | $Q(x)$ | hyp. |
| 3. | $(\Phi \Rightarrow Q P)(x)$ | elim. Π_1 |
| 4. | $\Rightarrow (Q(x))(P(x))$ | elim. Φ |
| 5. | $P(x)$ | <i>modus ponens</i> |

Ainsi, comme on le sait, l'énoncé *Chaque homme s'aime* ne signifie pas que *Chaque homme aime chaque homme* ; autrement dit, le marqueur *se* n'est pas un pronom objet qui serait un simple substitut formel du sujet ; ce marqueur *se* est un clitique qui exprime une réflexivité, il construit le prédicat complexe intransitif « s'aime » à partir du prédicat transitif « aime ». Ce

prédicat complexe est défini à l'aide du combinateur (de diagonalisation) ' W ', de façon à rendre compte de l'inférence suivante :

Si chaque homme s'aime, et si Socrate est un homme alors Socrate aime Socrate.

Nous avons ainsi la déduction

- | | | |
|----|---|----------------------|
| 1. | (chaque homme)(s'aime) | |
| 2. | Π_2 (est-homme) (s'aime) | |
| 3. | 3.1. (est-homme)(Socrate) | hyp. |
| | 3.2. Π_2 (est-homme) (s'aime) | rappel 2. |
| | 3.3. (s'aime)(Socrate) | elim. Π_2 |
| | 3.4. $[s'aime =_{\text{def}} \text{REFL}_1 \text{ aime}]$ | def. $s'aime$ |
| | 3.5. $\text{REFL}_1 \text{ aime Socrate}$ | |
| | 3.6. $[\text{REFL}_1 =_{\text{def}} W]$ | def. REFL_1 |
| | 3.7. $W \text{ aime Socrate}$ | |
| | 3.8. aime Socrate Socrate | elim. W |

Nous en déduisons, par une voie analogue, la définition du quantificateur existentiel restreint ' Σ_2 ' en fonction du quantificateur ' Σ_1 ' plus primitif et de la constante logique '&' de conjonction :

$$(2) [\Sigma_2 =_{\text{def}} B(CB^2)\Phi \& \Sigma_1]$$

Nous avons défini³⁴, par ailleurs, d'autres quantificateurs, ' Π^* ' et ' Σ^* ', appelés « quantificateurs stars » (respectivement « quantificateur universel star » et « quantificateur existentiel star »), pour formaliser des quantifications relatives seulement aux seules instances typiques d'un prédicat³⁵ et les distinguer de

34 Voir Desclés et Guentcheva (2000) et Desclés (2006).

35 Ainsi, *un alsacien boit de la bière* ne peut pas être analysé par une quantification universelle car cet énoncé affirme seulement que ce sont « les alsaciens typiques » qui boivent de la bière mais pas nécessairement « tous les alsaciens », fait qui serait exprimé alors par *tous les*

celles (quelconques ou indéterminées) qui appartiennent, sans restriction, à son extension. Ces quantificateurs sont conçus comme des opérateurs de détermination qui opèrent sur des termes nominaux en venant ainsi préciser leur « extensité ». Comme nous l'avons montré, ces quantificateurs stars apparaissent comme étant plus primitifs que les quantificateurs illatifs frégéens, introduits ci-dessus, puisque, comme nous l'avons démontré, nous définissons les seconds en fonction des premiers :

$$(3) [\Pi_2 =_{\text{def}} \text{BC}^*\Pi^*]$$

$$(4) [\Sigma_2 =_{\text{def}} \text{BC}^*\Sigma^*]$$

Ces définitions nous permettent de construire des relations comme :

$$(3') \Pi_2 Q P \rightarrow P (\Pi^*Q)$$

$$(4') \Sigma_2 Q P \rightarrow P (\Sigma^*Q)$$

La première relation (3') signifie :

Si tous les Q sont P, il s'ensuit (nécessairement) que les Q *typiques* sont P (mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai).

Par exemple, si tous les alsaciens sont français alors les alsaciens *typiques* sont également français mais, en revanche, si les alsaciens (*typiques*) boivent de la bière, il ne suit pas nécessairement que tous les alsaciens boivent de la bière.

La seconde relation (4') signifie :

alsaciens boivent de la bière. De même, lorsqu'on dit les parisiens sont râleurs, cela ne signifie pas que « tous les parisiens » sont râleurs mais seulement que les parisiens typiques, eux, sont râleurs. La Logique de la Détermination des Objets (LDO) construit un formalisme pour prendre en compte ces notions.

S'il existe un *exemplaire typique* de Q qui est P alors *a fortiori* il existe un exemplaire de Q qui est P (mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai).

Nous en déduisons « un cube » des propositions quantifiées par les opérateurs de quantification ' Π_2 ', ' Π^* ', ' Σ_2 ' et ' Π^* '; ce cube généralise le « carré d'Aristote », restreint aux seuls quantificateurs ' Π_2 ' et ' Σ_2 '.

6. Définition des nombres conçus comme des opérateurs

On peut définir les entiers naturels, l'opérateur de succession par des combinateurs et les axiomes de Peano par des relations entre opérateurs. Par exemple, le nombre '2' peut être défini comme étant l'intrication des deux opérateurs prédicatifs «est-premier» et «est-pair», ces prédicats pouvant être, à leur tour, définis à partir de la notion de divisibilité, qui, elle-même, sera définie à partir de l'opérateur de multiplication et du quantificateur existentiel.

$$(1) [2 =_{\text{def}} \Phi \ \& \ (\text{est-premier}) \ (\text{est-pair})]$$

Le même nombre '2' peut également être défini comme « le successeur du successeur de '0' ». En introduisant le combinateur '**WB**', nous obtenons une nouvelle définition de '2' :

$$(2) [2 =_{\text{def}} \mathbf{WB} \ (\text{successeur-de}) \ (0)]$$

puisque nous avons :

- | | | |
|----|---|---------------|
| 1. | successeur-de (successeur-de (0)) | |
| 2. | B (successeur-de) (successeur-de) (0) | int. B |
| 3. | WB successeur-de (0) | int. W |
| 4. | $[2 =_{\text{def}} \mathbf{WB} \ \text{successeur-de} \ (0)]$ | def. 2 |

6.1. Quelques combinateurs dérivés

Soit 'X' un combinateur quelconque ; nous posons :

$$(3) \begin{aligned} X^0 &=_{\text{def}} I \\ X^1 &=_{\text{def}} X \\ X^{n+1} &=_{\text{def}} X \circ X^n \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons par exemple : $[B^1 = B]$ et $[B^2 = B \circ B = BBB]$. Les symboles f, g, h désignant des opérateurs quelconques et x, y, z des opérands quelconques de l'opérateur complexe construit par les combinateurs, nous en déduisons les actions (exprimées par des β -réductions) associées aux combinateurs dérivés des combinateurs élémentaires :

$$(3') \begin{aligned} B^n f g x_1 x_2 \dots x_n &\geq f(g x_1 x_2 \dots x_n) \\ W^n f g x &\geq f x x \dots x \\ K^n f x_1 x_2 \dots x_n &\geq f \\ \Phi^n f g h x_1 x_2 \dots x_n &\geq f(g x_1 x_2 \dots x_n)(h x_1 x_2 \dots x_n) \end{aligned}$$

$$(3'') \begin{aligned} B^2 f x y z &\geq B(Bf) x y z \geq Bf(x y) z \geq f(x y z) \\ C^2 f x y &\geq C(Cf) x y \geq Cf y x \geq f x y \\ W^2 f x &\geq W(Wf) x \geq W f x x \geq f x x x \\ K^2 f x y &\geq K(Kf) x y \geq K f y \geq y \end{aligned}$$

6.2. Numéraux de Church

Soit X une expression applicative combinatoire. Une suite de combinateurs $Z_0, Z_1, \dots, Z_n, \dots$ appelés des itérateurs, peut être définie par³⁶

$$(4) [X_n =_{\text{def}} Z_n X]$$

Nous avons la récurrence suivante :

36 Voir Curry *et alii* (1972), Barendregt (1980).

$$(5) \begin{aligned} [X_{n+1} &=_{\text{def}} X \circ X_n = \mathbf{B}XX_n = \mathbf{B}X(\mathbf{Z}_nX) = \mathbf{SBZ}_nX] \\ [X_{n+1} &=_{\text{def}} \mathbf{Z}_{n+1}X = \mathbf{SBZ}_nX] \end{aligned}$$

Nous posons³⁷ :

$$(6) [\mathbf{Z}_0 =_{\text{def}} \mathbf{KI}] \quad \text{et} \quad [\mathbf{Z}_1 =_{\text{def}} \mathbf{SB}(\mathbf{KI})]$$

Nous pouvons prendre comme numéraux (numéraux de Church) les combinateurs $\mathbf{Z}_n$. Dans ce cas, nous avons les opérateurs d'addition, de multiplication et de la fonction exponentielle, exprimés par des combinateurs :

$$(7) \begin{aligned} [\mathbf{Z}_{m+n} &=_{\text{def}} (\Phi\mathbf{B}) \mathbf{Z}_m \mathbf{Z}_n] \\ [\mathbf{Z}_{mn} &=_{\text{def}} \mathbf{Z}_m \circ \mathbf{Z}_n = \mathbf{BZ}_m \mathbf{Z}_n] \\ [\mathbf{Z}_n^m &=_{\text{def}} \mathbf{Z}_m \mathbf{Z}_n] \end{aligned}$$

Ainsi, '0', l'opération de succession, les opérations d'addition, de multiplication sont représentées par respectivement par les combinateurs : $\mathbf{KI}$, $\mathbf{SB}$, $\Phi\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$; quant à l'exponentielle, elle est représentée par l'opération d'application.

6.3. Combinateur de récursion

X , Y étant des expressions applicatives qui représentent des fonctions quelconques et k un nombre, Hindley, Lercher et Seldin (1972) donnent le combinateur de récursion $\mathbf{R}$ dont l'action est définie comme suit :

$$(8) \begin{aligned} \mathbf{RXYZ}_0 &=_{\text{def}} X \\ \mathbf{RXYZ}_{k+1} &=_{\text{def}} YZ_k(\mathbf{RXYZ}_k) \end{aligned}$$

Ce combinateur permet de donner une représentation applicative de chaque fonction récursive partielle dans le cadre de la Logique Combinatoire et finalement de développer dans ce cadre la théorie des fonctions récursives.

37 Il s'ensuit que : $\mathbf{Z}_1 ab = \mathbf{SB}(\mathbf{KI})ab \geq \mathbf{Ba}(\mathbf{KI}a)b \geq \mathbf{BaI}b \geq a(\mathbf{I}b) \geq ab$

7. Analyse du paradoxe de Russell

« La non auto-applicativité est auto-applicative » est paradoxale seulement si on donne à cet « objet de pensée » construit le statut d'une proposition³⁸. Pour voir cela, nous désignons par 'F' le concept de « être non auto-applicatif », nous posons la définition :

$$(1) [F =_{\text{def}} \text{BWB}N]$$

En effet, si 'f' désigne un opérateur quelconque et 'N' l'opérateur de la négation propositionnelle, nous avons :

$$(2) F(f) = \text{BWB}N(f) \rightarrow \text{W}(\text{B}N)(f) \rightarrow \text{B}Nff \rightarrow N(ff)$$

Nous en déduisons que l'expression 'FF' (dont la signification est « l'auto-applicativité de la non auto-applicativité » ou encore : « la non auto-applicativité est auto-applicative ») reçoit la formulation applicative suivante :

$$(3) \text{FF} = \text{BWB}N(\text{BWB}N) \rightarrow \text{S}(\text{BWB})(\text{BWB})N \rightarrow \text{WS}(\text{BWB})N$$

En définissant maintenant le combinateur, dit paradoxal, 'Y' :

$$(4) [Y =_{\text{def}} \text{WS}(\text{BWB})]$$

on peut vérifier que nous obtenons une situation de point fixe de l'opérateur 'N' de négation :

$$(5) \text{FF} = YN = N(YN) = N(\text{FF})$$

Ainsi, lorsque 'N' est la négation propositionnelle, l'expression 'FF' est « un objet de pensée » *qui ne peut pas avoir le statut de proposition* car, si tel était le cas, nous aurions alors une contra-

38 L'analyse des paradoxes, en particulier celui de B. Russell est une des motivations de l'introduction par Curry (1958) de la logique combinatoire.

diction ; autrement dit, « *le concept de la non auto-applicativité est auto-applicatif* » *n'est pas une proposition* puisque, par définition de la proposition, elle est nécessairement soit vraie, soit fausse ; or, de par la situation (5) du point fixe de la négation, on a construit une expression qui est équivalente à sa propre négation. Il s'ensuit que cette expression ne peut pas être une proposition, bien qu'un objet de pensée. La définition d'un concept, celui de « la non auto-applicativité », conduit alors assez naturellement à des conséquences logiques qui font découvrir une nouvelle propriété : le point fixe de la négation et, plus généralement, fait apparaître le rôle du combinateur paradoxal dans la construction des situations de point fixe, situation fort banale en mathématiques. Ainsi, la définition d'un concept nous conduit à découvrir des situations nouvelles qui placent le paradoxe de Russell, avec sa formulation dans le cadre de la logique combinatoire, dans un paysage nouveau. Parlera-t-on à ce propos d'un rôle créatif de la définition ? Pour notre part, nous considérons que la réponse devrait être positive.

8. Exemples de définitions de « prédicats complexes » à l'aide des combinateurs

Comment se construisent les prédicats complexes à partir de prédicats plus élémentaires ? Nous allons prendre quelques exemples.

8.1. Définition du prédicat « est-homme »

Reprenons la définition du concept « est-homme » dont Blaise Pascal se moquait :

$$(1) (\forall x) : [\text{est-homme}(x) =_{\text{def}} (\text{est-animal})(x) \\ \& (\text{est-bipède})(x) \& (\text{est-sans-plumes})(x)]$$

Nous allons l'exprimer dans le formalisme de la Logique Combinatoire :

1. $\&(\&(\text{est-animal})(x) (\text{est-bipède})(x))(\text{est-sans-plumes})(x))$
2. 2.1. $\&((\text{est-animal})(x))((\text{est-bipède})(x))$
- 2.2. $\Phi\&(\text{est-animal}) (\text{est-bipède})(x)$ int. Φ
3. $\&(\Phi\&(\text{est-animal})(\text{est-bipède})(x))((\text{est-sans-plumes})(x))$
4. $\Phi\&(\Phi\&(\text{est-animal})(\text{est-bipède}))(\text{est-sans-plumes})(x)$ int. Φ
5. $B^2(\Phi\&)(\Phi\&)(\text{est-animal})(\text{est-bipède})(\text{est-sans-plumes})(x)$ int. B^2
6. $[\text{est-homme} =_{\text{def}} B^2(\Phi\&)(\Phi\&)(\text{est-animal})(\text{est-bipède})(\text{est-sans-plumes})]$
7. $\text{est-homme}(x)$

Sans faire usage de variables liées (astreintes à parcourir un domaine ou un univers de discours), nous posons une définition directe du prédicat en fonction d'autres prédicats jugés plus primitifs :

$$(2) [\text{est-homme} =_{\text{def}} B^2(\Phi\&)(\Phi\&)(\text{est-animal})(\text{est-bipède})(\text{est-sans-plumes})]$$

Si l'on se donne comme primitives sémantiques les notions « est-animal », « est-bipède », « est-sans-plume », le concept « est-homme » peut être défini à partir de ces primitives. Ce concept défini par (2) est le résultat d'une intégration des primitives qui en sont les ingrédients de signification.

8.2. Analyse du prédicat lexical « tue »

Reprenons la décomposition analytique du prédicat lexical « tue » que nous avons déjà présentée. En utilisant maintenant les notations applicatives préfixées, nous pouvons produire une déduction qui permet de montrer comment le prédicat lexical binaire « tue » devient *le résultat d'un processus intégratif* réalisé à l'aide de combinateurs élémentaires introduits progressivement dans la déduction. Ces combinateurs construisent un combinateur plus complexe qui permet de définir un mode de composition des primitives sémantico-cognitives choisies

CHANGE, CAUSE, de l'opérateur de négation 'NON' et du prédicat lexical unaire 'est-vivant' de façon à en déduire « un tout intégré », c'est-à-dire une nouvelle unité prédicative intégrant ses primitives constituantes comme ses ingrédients de signification³⁹ :

- | | |
|--|---------------------|
| 1. CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (NON (est-vivant y))) x | hyp. |
| 2. 2.1. NON (est-vivant y) | hyp. |
| 2.2. B NON est-vivant y | int. B |
| 3. CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (B NON est-vivant y)) x | rempl. |
| 4. 4.1. CHANGE (est-vivant y) (B NON est-vivant y) | |
| 4.2. Φ CHANGE (est-vivant) (B NON est-vivant) y | int. Φ |
| 4.3. S (Φ CHANGE) (B NON) (est-vivant) y | int. S |
| 4.4. B (S (Φ CHANGE)) B NON est-vivant y | int. B |
| 5. CAUSE (B (S (Φ CHANGE)) B NON est-vivant y) x | rempl. |
| 6. B ³ CAUSE (B (S (Φ CHANGE)) B) NON est-vivant y x | int. B ³ |
| 7. [tue = _{def} B ³ CAUSE (B (S (Φ CHANGE)) B) NON est-vivant] | def. |
| 8. tue y x | rempl. |

Le prédicat transitif « tue » est le résultat d'une certaine composition des opérateurs CAUSE, CHANGE et 'NON' avec le prédicat lexical 'est-vivant', cette composition étant exprimée explicitement par les combineurs :

- (3) [tue =_{def} B³ CAUSE (B (S (Φ CHANGE)) B)
NON est-vivant]

Pour être plus précis, le *processus d'intégration* est décrit par le combinateur 'X', d'où la définition plus canonique du prédicat lexical « tue » :

- (4) [tue =_{def} X CAUSE CHANGE NON est-vivant]

- (5) [X =_{def} C (B B B³) (C (B B (B S Φ)) B)]

39 C'est une « définition nominale » prise dans le sens de Pascal, mais avec un mode de composition structurant beaucoup plus complexe.

Ce combinateur 'X' est un *programme applicatif*, composé uniquement d'occurrences de combinateurs élémentaires ; il décrit un agencement structuré des primitives. Lorsque ce programme est exécuté par application aux opérandes 'x' et 'y' (des variables d'actants), il construit une expression (cette fois, sans occurrence de combinateurs), appelée « forme normale », laquelle exprime, par une organisation applicative d'opérateurs et d'opérandes, la signification (« meaning ») du prédicat « tue » en fonction des primitives choisies.

La signification du *definiendum* « tue », dans (3) ou mieux dans (4), est alors entièrement décrite par son *definiens*, c'est-à-dire par une expression applicative qui agence les primitives retenues entre elles au moyen de l'opérateur 'X' (un combinateur); ce dernier est un programme applicatif qui décrit une fonction. Le prédicat « tue » est le résultat d'un processus intégratif opératoire, c'est une nouvelle unité d'un autre niveau de représentation, celui où les prédicats s'appliquent à des opérandes.

Pour construire la signification de la forme propositionnelle 'tue y x', il suffit maintenant de remonter, par une démarche cette fois analytique, à la déduction précédente, en introduisant la définition de « tue » puis en exécutant successivement les actions opératoires déterminées par l'élimination de chaque combinateur élémentaire (en tête de chaque nouvelle expression obtenue à chaque étape), pour en déduire finalement une expression sans aucune occurrence de combinateurs :

(4) CAUSE (CHANGE (est-vivant y) (NON (est-vivant y))) x

Cette expression constitue une « forme normale » qui exprime la signification de la forme propositionnelle de départ 'tue y x'.

Si l'on veut analyser la notion d'agentivité associée à l'actant 'x', et y ajouter un éventuel instrument 'z', dans l'expression 'tue (avec z) y x' (z' (*le chasseur a tué un daim avec son fusil*), notre analyse du prédicat « tue » devient légèrement plus com-

plexe. Utilisant les primitives de CONTROLE et de FAIRE, et non pas celle de CAUSE, réservée à la représentation des vraies situations causales entre deux événements, la « forme normale » serait dans notre conception sémantico-cognitive et présentée dans une notation applicative préfixée (Desclés 1990) :

- (5) CONTR (FAIRE (CHANGE (est-vivant y)
(NON(est-vivant y)) z) x)

qui signifie qu'un agent 'x' contrôle, c'est-à-dire exerce une capacité de déclencher ou d'interrompre, une action qui affecte un patient 'y' par, éventuellement, l'intermédiaire d'un instrument ; lorsque l'instrument 'z' n'est pas précisé, l'agent est en même temps instrument. Par la méthode qui vient d'être décrite on peut en abstraire la nouvelle définition sémantique du prédicat lexical 'tue', avec des rôles assignés aux arguments, en fonction des primitives CONTR, FAIRE, CHANGE, est-vivant et l'opérateur NON.

La construction d'un prédicat lexical à partir de son schème sémantico-cognitif permet d'articuler étroitement des niveaux autonomes d'analyse et de représentation. En effet, un prédicat lexical, qui résulte d'un processus intégratif de synthèse, est une nouvelle unité entièrement autonome, obtenue par un processus de « réunitarisation ». En tant que nouvelle unité, elle possède des propriétés d'agencement syntaxique avec d'autres unités du même niveau mais ces propriétés ne sont pas nécessairement des propriétés du schème sémantico-cognitif qui, lui, fait partie d'un autre niveau de description. Inversement, les décompositions en schèmes permettent d'étudier des réseaux polysémiques associés à un même lexème verbal et parfois à un même prédicat lexical. Pour reprendre un exemple classique, les énoncés *la clef ouvre la porte* et *Luc ouvre la porte* sont représentés dans la langage classique des prédicats par la même expression canonique (pour reprendre une formulation de Quine) :

- (6) (a) ouvre (la clef, la porte)
 en notation applicative préfixée : (ouvre (la porte)) (la clef)
- (b) ouvre (Luc, la porte)
 en notation applicative préfixée : (ouvre (la porte)) (Luc)

Pourtant les deux rôles grammaticaux des termes *la clef* et *Luc* ne sont pas les mêmes, l'un est instrument, l'autre est agent. Le prédicat lexical ouvre se voit donc associer deux schèmes distincts : la description sémantique sous la forme de prédicats et de termes interprétés dans des modèles interprétatifs « à la Tarski » n'est donc pas suffisante et nécessite la prise en compte des différentes significations, décrites par des schèmes distincts, des prédicats lexicaux polysémiques. Les écarts entre les schèmes peuvent être plus importants et ne pas relever uniquement des rôles grammaticaux. Par exemple, en analysant le prédicat lexical « monter » nous avons plusieurs emplois polysémiques, de même schéma syntaxique :

- (7) (a) *Luc monte le col de Saint Vêran*
- (b) *Le ministre monte les prix des denrées alimentaires*
- (c) *Luc monte les valises*
- (d) *Luc monte un film*
- (e) *Luc monte une conférence*

Il est possible de montrer que les différents schèmes qui décrivent les significations du lexème verbal polysémique monte appartiennent à un même réseau avec un archétype commun. Nous ne le ferons pas ici. L'analyse réduite aux seules relations prédicatives ne permettrait pas de dégager cet archétype commun.

Le changement de niveau dans les descriptions par définitions permet d'articuler les niveaux entre eux, dans une archi-

teature linguistique, logique et cognitive, et de faire apparaître les propriétés spécifiques à chaque niveau de représentation : les propriétés, en particulier les propriétés syntaxiques d'un niveau, ne se transmettent pas entre les niveaux. Là encore, nous serions amenés à considérer que ce genre de définition (du prédicat lexical en fonction d'un schème interprétatif, aussi bien dans une démarche analytique que dans une démarche synthétique, possède un rôle créatif, dans un sens de « créatif » qu'il faudrait certainement approfondir.

Ainsi, en logique, les nombres, une fois définis par des combineurs, comme nous l'avons montré plus haut, possèdent des propriétés spécifiques et particulières qui ne nécessitent pas de « redescendre » à leurs définitions combinatoires : ils peuvent être pris comme de nouvelles unités autonomes, à la source du déploiement de l'arithmétique, sans qu'il soit indispensable de revenir aux représentations par les numéraux de Church.

9. Quelques conclusions

L'approche de Pascal doit être complexifiée notamment en introduisant des modes complexes de composition. Définir, c'est établir une relation entre un *definiendum* et un *definiens* qui comprend plusieurs composantes mais ces composantes doivent faire partie d'une organisation structurée, c'est-à-dire être agencées par un programme opératoire de composition. L'utilisation des combineurs de la Logique Combinatoire de Curry permet de définir effectivement des opérateurs de compositions intrinsèques qui expriment de véritables fonctions appliquées à des primitives en vue de construire une nouvelle unité qui peut ainsi avoir un fonctionnement autonome. Nous en concluons que, dans la définition de nouvelles unités complexes, notamment en logique, en linguistique et dans les représentations cognitives et des connaissances :

- les constituants du *definiens* sont souvent des opérateurs (prédicats, relations, fonctions ...);
- la composition des constituants est effectuée par des opérateurs (indépendants des domaines des constituants), les combinateurs jouent ce rôle de composition fonctionnelle;
- les unités créées par des définitions synthétiques acquièrent une certaine autonomie de fonctionnement.

Certaines unités ainsi créées sont de nouveaux « objets de pensée », par exemple des « points fixes » généraux, qui peuvent être parfois paradoxaux⁴⁰, mais la construction de ces « objets de pensée » fait partie du domaine de la logique qui doit les étudier et détecter les processus opératoires qui construisent d'éventuels « monstres paradoxaux », pour ensuite mieux s'en préserver en introduisant certaines restrictions dans l'usage de certaines définitions. Ce fut le cas avec la célèbre Loi V de G. Frege (1893) qui l'obligea à la rectifier à la suite de son côté paradoxal découvert par B. Russell : il fallait limiter la définition qui établissait une relation trop simple entre l'extension et le concept. Les théories des types apportaient des solutions sous la forme de restrictions.

40 Par exemple lorsqu'on interprète certaines expressions construites comme étant des propositions.

Références bibliographiques

- BARENDREGT H. (1980). *The lambda-calculus: its syntax and semantics*. Amsterdam : North-Holland.
- CURRY B.H., FEYS R. (1958). *Combinatory logic*. Vol. I. Amsterdam : North-Holland.
- CURRY H.B., HINDLEY J.R. & SELDIN J.P. (1972). *Combinatory Logic*. vol. II. Amsterdam : North-Holland.
- DESCLÉS J.-P. (1981). De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques-*Mathématiques et sciences humaines* 76, 1-32.
- DESCLÉS J.-P. (1990). *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*. Paris : Hermès.
- DESCLÉS J.-P. (1991). La double négation dans l'Unum Argumentum analysé à l'aide de la logique combinatoire. In : D. Miéville (éd.), *La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement*. Université de Neuchâtel : Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 59, 33-74.
- DESCLÉS J.-P. (1993). Dialogue sur la typicalité. In : *Modèles et concepts pour la science cognitive, hommage à J. F. Le Ny*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble, 139-163.
- DESCLÉS J.-P. & BISKRI I. (1995). Logique combinatoire et linguistique : grammaire catégorielle combinatoire applicative. *Mathématiques, informatique et Sciences Humaines* 32, 39-68.
- DESCLÉS J.-P. (1997). Logique combinatoire, types, preuves et langage naturel. In : D. Miéville (éd.), *Introduction aux logiques non classiques*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 11, 91-160.
- DESCLÉS J.-P. (2002). Categorization : A Logical Approach to a Cognitive Problem. *Journal of Cognitive Science* 3.2, 85-137.

- DESCLÉS J.-P. (2004). Combinatory Logic, Language, and Cognitive Representations. In : P. Weingartner (ed.), *Alternative Logics. Do Sciences Need Them ?* Berlin : Springer, 115-148.
- DESCLÉS J.-P. (2006a). Opérations métalinguistiques et traces linguistiques. Ducard & Normand (dir.), *Antoine Culioli, Un homme dans le langage, Colloque de Cerisy*. Ophrys, 41-69.
- DESCLÉS J.-P. (2006b). Une analyse non frégréenne de la quantification. In : Joray 2006, 263-312.
- DESCLÉS J.-P. & GUENTCHEVA Z. (2000). A non-fregean approach of quantification in natural languages. In : M. Böttner, W. Thümel, *Variable-free Semantics*. Osnabrück : Secolo Verlag, 210-233.
- DESCLÉS J.-P. & CHEONG K. (2006). Analyse critique de la notion de variable. *Mathématiques et sciences humaines* 173, 43-102.
- DESCLÉS J.-P. PASCU A. (2006). Logic of Determination of Objects : The Meaning of Variable in Quantification. *Artificial Intelligence Tools, Architectures, Languages, Algorithms* 15.6, 1041-1052.
- FITCH F. (1974). *Elements of Combinatory Logic*. Yale University Press.
- GINISTI J.-P. (1997). *La logique combinatoire*. Paris : PUF [Que sais-je ? n° 3205].
- GIRARD J.-Y. (2006). *Le point aveugle I, Cours de logique, Vers la perfection*. Paris : Hermann.
- GRIZE J.-B. (1971). Éléments de logique combinatoire. In : *Logique moderne*. Fasc. III. Paris : Gauthier-Villars, 61-76.
- HINDLEY J. R., LERCHER B., SELDIN J. P. (1972). *Introduction to Combinatory Logic*. Cambridge : CUP.
- HINDLEY J. R., SELDIN J. P. (1986). *Introduction to Combinators and Lambda-Calculus*. Cambridge : CUP.
- JORAY P. (sous la dir.) (2006). *La quantification dans la logique moderne*. Paris : L'Harmattan.

- LADRIÈRE J. (1970). Le symbolisme comme domaine de l'opérateur. *Articulation du sens, discours scientifique et parole de foi*. Paris : Aubier-Montaigne, 51-70.
- LADRIÈRE J. (1973). L'explication en logique. In : Apostel et al., *L'explication dans les sciences*. Paris : Flammarion.
- LE NY J-F. (2005). *Comment l'esprit produit du sens*. Paris : Odile Jacob.
- MIÉVILLE D. (2006). Quantification et significations primitives. In : Joray (sous la dir.) 2006, 139-152.
- PASCAL B. (1954). De l'esprit géométrique et de l'art de persuader. In : *Œuvres complètes*. Paris : Bibliothèque de la Pléiade, 575-604 [texte établi et annoté par Jacques Chevalier].
- PASCU A. (1999). *Approche logique de la typicalité*. Thèse, Université de Paris-Sorbonne.
- PASCU A. (2006). *Les objets dans la représentation des connaissances. Application aux processus de catégorisation en informatique et dans les sciences humaines*. Dossier d'habilitation à diriger des recherches, Université de Paris-Sorbonne.
- POTTIER B. (1955). *Systématique des éléments de relation. Étude de morphosyntaxe structurale romane*. Thèse principale pour le doctorat ès lettres, Sorbonne.
- POTTIER B. (2000). *Représentations mentales et catégorisations linguistiques*. Louvain-Paris : Éditions Peeters.
- SCOTT D. (1975). Some philosophical issues concerning theories of combinators. *Lecture Notes in Mathematics* 274. Berlin : Springer-Verlag, 57-82.
- SELDIN J-P & HINDLEY J. R. (eds) (1980). *To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*. London : Academic Press.
- SHAUMYAN S.K. (1987). *A Semiotic Theory of Natural Languages*. Bloomington : Indiana University Press.

LES DÉFINITIONS SONT-ELLES TRIVIALES : RUSSELL, POINCARÉ, LEŚNIEWSKI

François LEPAGE

Russell

En 1903, Bertrand Russell publie un ouvrage assez singulier, *The Principles of Mathematics*, que l'histoire retiendra comme un des textes fondateurs de ce mouvement philosophique qu'on baptisera logicisme. Singuliers, les *Principles* le sont sous plusieurs aspects. Le plus connu est qu'on y retrouve pour la première fois l'exposition claire et une analyse serrée de la contradiction de l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.

Cette contradiction, Russell la rencontre alors que la rédaction de l'ouvrage est presque terminée. Sa présentation et son analyse font l'objet d'un court chapitre de cinq pages, le dixième de l'ouvrage, et le second appendice présente une esquisse de solution.

L'ouvrage n'est donc pas imprégné d'un esprit de crise, que l'on appellera plus tard « la crise des fondements » ; bien au contraire, le ton est serein à l'image de la prétention de la thèse : toutes les mathématiques et même une partie de la physique sont réductibles à quelques principes de logiques ou, pour le dire autrement, sont des constructions logiques qui reposent ultimement sur des primitifs entre lesquels on définit des relations.

La découverte de la contradiction (qui date en fait de 1901) et son insolubilité apparente constituent une catastrophe pour

l'entreprise que justement Russell voulait mener à terme par la rédaction de cet ouvrage : la réduction des mathématiques à la logique. Cette réduction signifie, pour le Russell de cette époque, simplement que la :

Mathématique pure est la classe de toutes les propositions de la forme " p implique q " où p et q sont des propositions contenant une ou plusieurs variables [...] et que ni p ni q ne contiennent de constantes autres que des constantes logiques. (Russell 1972, 3. C'est la première phrase du corps de l'œuvre)

Russell se retrouve donc dans une position délicate : son ouvrage a pour but de convaincre la communauté scientifique qu'une analyse rigoureuse permet d'asseoir tout l'édifice des mathématiques sur un très petit nombre de principes purement logiques et chemin faisant, il montre que ce petit nombre de principes est lui-même incohérent. Comme le lui fera remarquer Poincaré « [L]a logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie ». (1906 : 316)

Une autre particularité de cet ouvrage est l'ampleur de la tâche que Russell prétend accomplir. L'entreprise de réduction ou de reconstruction, selon le point de vue que l'on adopte, va, en effet, très loin.

Partant de principes logiques indubitables, la première partie de l'ouvrage n'est absolument pas une reconstruction de quoi que ce soit mais une analyse régressive qui conduit son auteur à la grammaire logique (le chapitre IV s'intitule *Noms propres, adjectifs et verbes*), et à l'examen minutieux des notions de classe, de fonction propositionnelle, de variable, de relation pour terminer avec la contradiction. La position philosophique de Russell pourrait être qualifiée d'hyperréalisme naïf tant son ontologie foisonne d'entité de tous ordres. Tout est, des hommes aux nombres, en passant par les constantes logiques. Le concept fondamental est celui de terme (*term*).

Tout ce qui peut être un objet de pensée, ou avoir une occurrence dans quelque proposition vraie ou fausse, ou qui peut être compté comme un, je l'appelle un terme. C'est ainsi l'expression la plus englobante du vocabulaire philosophique. Je considérerai comme synonyme les mots unité, individu et entité. Les deux premiers mettent l'accent sur le fait que chaque terme est un, alors que le troisième provient du fait que chaque terme a de l'être, c'est-à-dire est en un certain sens. Un homme, un nombre, une classe, une relation, une chimère, ou n'importe quoi d'autre dont on peut faire mention est assurément un terme; et nier que telle ou telle chose est un terme doit toujours être faux¹. (Russell 1972, 43)

Ce qu'il est important de retenir ici, c'est l'introduction du concept d'*Être*. Russell défend à cette époque un réalisme que l'on pourrait qualifier de débridé². Dans le royaume de l'être on trouve de tout et probablement des cercles carrés, du moins jusqu'à 1905, année de la publication de « On Dénoting »³. Cet hyperréalisme, que Russell avouera explicitement dans son introduction à la deuxième édition des *Principles*, conditionne totalement sa philosophie des mathématiques :

À l'époque où j'écrivais les « *Principles* », je partageais avec Frege une croyance dans la réalité platonique des nombres, qui, dans mon imagination, peuplaient le royaume intemporel de l'*Être*. C'était une croyance réconfortante que j'ai abandonnée avec regret. (Russell 1972, X)

-
- 1 Remarquons que *Les Principes* et les autres textes de Russell de cette période entretiennent une double ambiguïté voire une confusion systématique qui en rendent quelquefois l'interprétation difficile. Russell utilise un vocabulaire dont le domaine sémantique est celui des expressions pour désigner ce à quoi les expressions renvoient. Le cas de l'expression « term » est particulièrement flagrant. Le passage cité ci-dessus est particulièrement troublant. Les termes sont des entités entrant dans la composition des propositions qui sont elles mêmes quelquefois des énoncés et quelquefois ce à quoi renvoient les énoncés
 - 2 Russell avait probablement commencé la lecture de *Meinong* dont il publia de nombreux comptes rendus assez élogieux entre 1899 et 1907. On trouvera trois de ces comptes rendus dans les *Essays in Analysis*. Voir également l'introduction de Douglas Lackey l'éditeur des *Essays* « Russell's Critique of Meinong », 17-20.
 - 3 Repris in (1973, 103-119).

Où encore

Ainsi, la première pensée d'Adam doit avoir été en rapport avec le nombre 1; car aucune pensée ne peut précéder celle-là. Bref, tout savoir doit être une reconnaissance sous peine d'être illusion; l'arithmétique doit être découverte exactement au même sens où Colomb a découvert les Antilles et nous ne créons pas plus les nombres qu'il a créé les Indiens. (Russell 1972, 451)

Cette question du réalisme de Russell doit donc être prise très au sérieux, car c'est un présupposé de tout l'édifice. Cette philosophie conditionne, bien sûr, son ontologie mais aussi son épistémologie et, finalement la question qui nous préoccupe, sa conception de la nature des définitions.

Soulignons d'abord que la définition ne peut pas, pour Russell, être créative au sens où la définition aurait pour conséquence d'introduire un nouvel objet dans le monde de l'*Être* qui viendrait enrichir l'ontologie. Pour lui toute définition est nominale, en un sens que nous allons préciser.

Il y a trois passages importants des *Principles* où la question de la nature des définitions est abordée directement. Le principal de ces passages est celui où Russell définit le nombre cardinal et critique la définition par abstraction des nombres naturels qu'a proposée Peano.

Les notions de base qu'il utilise sont celles de (1) *class-concept*, que je traduirai par concept-de-classe, qui est un prédicat considéré sous l'angle de « prédicat considéré en tant que déterminant une extension de termes que l'on peut réunir en une classe »; (2) de relation *one-one*, que je traduirai par relation biunivoque, qu'il introduit de manière standard. Chaque concept-de-classe définit une classe « et le nombre peut, par conséquent, être regardé comme une propriété de la classe »⁴.

4 Le chapitre des *Principles* où Russell traite de cette question est le premier de la seconde partie qui porte le titre de Numbers. Russell ne fait aucune allusion à la contradiction auquel

(*The Principles*, 113) Il définit d'abord ce que c'est que, pour deux classes, d'avoir le même nombre.

Deux classes ont le même nombre quand, et seulement quand, il y a une relation biunivoque dont le domaine inclut l'une des classes et qui est telle que la classe des corrélés des termes de cette classe est identique à l'autre classe. [...] Quand deux classes ont le même nombre, elles sont dites similaires. (Russell 1972, 113)

Cette définition, une variante de celle de Frege, est un peu complexe pour tenir compte de la classe vide. Après avoir remarqué que la notion de similarité est une relation réflexive, symétrique et transitive, il introduit la définition péanienne du nombre lui-même :

Ces trois propriétés sont ainsi tenues par Peano et le sens commun pour indiquer que la relation a lieu entre deux termes, ces deux termes ont en commun une certaine propriété commune, et vice versa. C'est cette propriété commune que nous appelons leur nombre. Ceci est la définition des nombres par abstraction. (Russell 1972, 114)

Cette définition du nombre par abstraction souffre, selon Russell, d'un défaut absolument fatal, celui de ne pas déterminer de manière univoque le nombre d'une classe. En effet, n'importe quelle propriété commune à toutes les classes similaires et propre aux classes similaires, est, selon la définition par abstraction, le nombre de cette classe. La définition par abstraction détermine une classe de termes qui ont tous en commun d'être en relation avec des classes similaires et de n'être en relation qu'avec elles. Il y a deux approches possibles pour résoudre ce problème. La première consiste à considérer le nombre d'une classe comme la classe de toutes les entités qui possèdent cette propriété d'être en relation avec toutes les classes qui lui sont

conduit ce principe d'extensionnalité non restreint qui vient pourtant faire l'objet du chapitre précédent.

similaires et rien qu'elles. Russell la rejette pour une raison à mon avis, sinon incorrecte, du moins obscure.

Mais cette méthode est inutile d'un point de vue pratique, car toutes les entités, sans exception, appartiennent à chacune de ces classes, de sorte que chaque classe aura comme nombre la classe de toutes les entités de toute sorte et de toute description. (Russell 1972, 115)

La solution que propose Russell, solution qu'il prétend universelle et donc s'appliquant partout où la définition par abstraction s'applique, est la suivante :

Cette méthode consiste à définir le nombre d'une classe comme la classe de toutes les classes similaire à la classe donnée. L'appartenance à cette classe de classes (considérée comme un prédicat) est une propriété commune de toutes les classes similaires et d'aucunes autres; de plus chaque classe de l'ensemble des classes similaires a avec cet ensemble une relation qu'il n'a avec rien d'autre et que chaque classe a avec son ensemble. (Russell 1972, 115)

Russell s'étonne même du fait que Peano ait envisagé d'adopter cette définition pour finalement la rejeter. Il semblerait que pour Peano, la classe des classes similaires à une classe donnée possède des propriétés qu'intuitivement ne possède pas le nombre que l'on cherche à définir. Et Russell s'avoue impuissant à découvrir lesquelles. Il insiste cependant que le nombre est bien une classe de classes et non un concept-de-classe qui détermine cette classe de classes. Car à une même classe de classes correspond plusieurs concepts-de-classe. La classe des classes similaires à la classe des étoiles de notre système solaire est la même que la classe des classes similaires à la classe des chefs de l'Église catholique romaine, mais les concepts-de-classe sont totalement différents.

Cette position sur la nature des nombres est vraiment fondamentale pour la philosophie des mathématiques de Russell. À la

toute fin de l'ouvrage (mis à part les appendices), en fait dans sa conclusion, il revient sur l'ensemble de l'ouvrage et consacre quelques lignes à ce sujet qu'il vaut la peine de citer.

Une définition est toujours soit la définition d'une classe soit la définition de l'unique membre d'un singleton : ceci résulte de manière nécessaire du fait sans équivoque qu'une définition peut seulement être effectuée en assignant une propriété de l'objet ou des objets à définir, c'est-à-dire en donnant une fonction propositionnelle qu'ils devront satisfaire. [...] Et partout où le principe d'abstraction est employé, c'est-à-dire où l'objet à définir est obtenu à partir d'une relation transitive symétrique, une certaine classe de classes sera toujours l'objet requis. (Russell 1972, 497)

Pour Russell donc, cette notion de définition corrige un défaut fondamental de la définition par abstraction qui reste définitivement ambiguë. On peut donc conclure qu'à l'époque des *Principles*, les définitions ne sont pas, pour Russell, créatives au sens où une définition ne crée pas un nouveau terme. Les termes sont immuables et éternels. Doit-on en conclure que les définitions sont stériles ? Russell voit bien le problème que cela pourrait poser. Son but ultime étant de montrer comment on peut reconstruire toutes les mathématiques à partir d'un petit nombre d'indéfinissables logiques par définitions de plus en plus complexes, il ne peut pas accepter que les définitions soient stériles, ou si elles le sont c'est dans un sens inoffensif. C'est curieusement au début de l'ouvrage qu'il aborde cette question, dans le chapitre intitulé *Denoting* qu'on devrait traduire par *De la référence* où *De la dénotation* (cela n'a rien à voir avec le concept de dénotation qui apparaîtra dans « On Denoting »)⁵.

5 Cela n'a d'autant rien à voir que Russell avoue dans son introduction à la seconde édition qu'une des deux découvertes qui l'ont amené à rejeter le platonisme des *Principles* est sa théorie des descriptions. La seconde est l'abandon des classes ! Voir *The Principles*, X.

C'est un curieux paradoxe, mystérieux pour un esprit symbolique, que les définitions, théoriquement, ne sont rien d'autre que des formulations d'abréviations symboliques, sans rapport au raisonnement, introduites pour des raisons de commodité pratiques, alors que, dans le développement d'un sujet, elles requièrent toujours un énorme effort de pensée et contiennent souvent certaines des plus grandes réussites de l'analyse. [...] Un objet peut être présent à notre esprit sans que nous connaissions quelque concept dont le dit objet serait l'instance; et la découverte d'un tel concept n'est pas un simple progrès dans la notation. La raison pour laquelle cela semble être le cas, dès que la définition est trouvée, est qu'il devient totalement inutile de se rappeler l'objet actuellement défini, car seuls les concepts sont pertinents pour nos déductions. Au moment de la découverte, la définition est perçue comme vraie parce que l'objet à définir était déjà dans nos pensées; mais comme partie de notre raisonnement ce n'est pas vrai mais purement symbolique parce que ce que le raisonnement requiert n'est pas qu'il doit impliquer cet objet mais simplement impliquer l'objet dénoté par la définition. (Russell 1972, 63)

Il est peu probable que globalement la théorie de Russell soit cohérente. Elle convient cependant très bien à son entreprise de réduction et implique une épistémologie minimale, celle de la reconnaissance de ce qui est déjà là. Et puis, la fameuse contradiction va compliquer les choses, ce dont il ne se doute pas encore.

Russell et Poincaré

Deux ans plus tard, alors qu'il est toujours dans le brouillard en ce qui concerne la contradiction, Russell publie dans *Mind* un compte rendu de la traduction en anglais de l'ouvrage de Poincaré *La science et l'hypothèse* qui va déclencher une polémique dans laquelle, sans être le centre de gravité, la question du statut des définitions, de leur stérilité ou de leur utilité sera largement débattue. Il faut dire que le ton adopté d'emblée par

Russell est celui de quelqu'un qui cherche querelle. Qu'on en juge par le début du premier paragraphe.

Dans son ouvrage, qui consiste essentiellement d'articles antérieurs légèrement remaniés, les qualités bien connues de M. Poincaré ressortent clairement – sa concision lucide et tranchante, son air de maîtrise facile qui fait souvent apparaître sa pensée moins profonde qu'elle ne l'est et sa capacité à coordonner l'ensemble du domaine des mathématiques et de la physique en un système de pensée unifié. Mais ces qualités, aussi grandes soit-elles, sont accompagnées de ce qui ne peut qu'apparaître comme défauts à quiconque est familier de la philosophie. (Russell 1905, 412)

Ce ton annonce déjà que le débat sera un dialogue de sourds. Bien qu'ils utilisent le même vocabulaire, Russell et Poincaré ne parlent pas vraiment de la même chose.

L'édition originale de *La science et l'hypothèse* date de 1902 et la traduction anglaise de 1905. Le premier chapitre s'intitule « Sur la nature du raisonnement mathématique ». Poincaré y soutient la thèse suivante : la logique, de par le caractère tautologique de la syllogistique, est stérile.

Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on que tout ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ? (Poincaré 1968, 31)

Une première remarque s'impose. Lorsque Poincaré parle de la logique, il parle de la logique aristotélicienne telle que l'a transmise et transformée l'histoire. Il ne parle pas spécifiquement de la nouvelle logique, la logistique disait-on à l'époque, qui commence en gros avec Boole et à laquelle Frege et Russell vont définitivement donner des lettres de noblesse, et qui donne la prééminence au calcul propositionnel. En fait, il ne semble

pas faire de distinction entre les logiciens anciens et les modernes.

Une seconde thèse que soutient Poincaré est que la science mathématique, contrairement à la logique, est créatrice, et que son pouvoir créateur repose essentiellement sur la preuve par induction (Poincaré utilise l'expression maintenant un peu désuète de raisonnement par récurrence).

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogisme. (...) On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particulier toutes les majeures. (Poincaré 1968, 39)

La validité du raisonnement par induction ne peut pas être démontrée. Elle provient de la puissance de l'esprit qui est capable de concevoir la répétition indéfinie d'actes similaires.

Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie. (Poincaré 1968, 41)

Malgré leurs échanges parfois musclés, Russell et Poincaré n'arriveront jamais à un point d'entente tant le fossé est grand. La question de la nature des définitions va cependant dériver vers un contexte légèrement différent. Celui de l'imprédictivité de certaines définitions, de définitions de propriétés qui ne déterminent pas de classes. Russell présente en effet à la fin de 1905 un article où il propose trois voies de solution pour éliminer les paradoxes⁶ ; Russell y présente trois ébauches de théories

6 « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types ». *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 4, 1906, 29-53. Repris in (1973, 135-164). Les références renvoient à cette dernière édition.

qui lui semblent prometteuses pour éviter la contradiction. Ce sont la (a) la théorie zigzag, (b) la théorie de la limitation de taille et (c) la théorie pas de classes. Une première chose intéressante est que Russell présente une matrice qui, selon lui, est commune à toutes les contradictions basées sur l'imprédictivité.

Étant donnée une propriété ϕ et une fonction f telle que, si ϕ appartient à tous les membres de u , $f'u$ existe toujours, a la propriété ϕ et n'est pas un membre de u ; alors la supposition qu'il y ait une classe w de tous les termes qui ont la propriété ϕ et que $f'w$ existe conduit à la conclusion que $f'w$ a et n'a pas à la fois la propriété ϕ . (Russell 1973, 142)

L'enjeu pour Russell est de trouver une façon naturelle et intuitive de bloquer la fabrication de tels monstres. C'est ce que ces trois approches devraient être capables de faire. La théorie zigzag consisterait à axiomatiser la notion de fonction prédicative. Cette approche sera vite abandonnée car elle manque de principes directeurs excepté celui d'éviter la contradiction⁷. La seconde théorie utilise elle aussi la notion de prédicativité mais ce n'est plus la complexité de la propriété qui serait la source de l'imprédictivité mais la taille de la classe à définir. Cette approche lui est suggérée par le paradoxe de Burali-Forti. Là encore Russell n'ira pas très loin. C'est la troisième approche que retiendra Russell. Au moment de mettre sous presse, il fait ajouter une note :

[Note ajoutée le 5 février 1906. Suite à de nouvelles investigations, je n'ai plus de doute que la théorie pas de classe fournit la solution com-

7 Voir (1973, 147).

plète à toutes les difficultés dont il est question dans la première partie de ce texte]⁸. (Poincaré 1968, 164)

Dans cet embryon de théorie, qui deviendra la théorie des types, Russell ne considère plus la fonction propositionnelle comme un primitif et choisit de plutôt utiliser la notion de proposition et de reconstruire celle de fonction propositionnelle.

Soit p une proposition et a un des ses constituants. ' $p(x/a)$ ' dénote ce que p devient en substituant x à a pour toutes ses occurrences dans p . Nous pouvons utiliser cette notation pour affirmer des énoncés généraux comme ' $p(x/a)$ est vraie pour toute valeur de x '. Cette fonction propositionnelle reconstituée est indépendante de a au sens suivant. Soit $q = p(b/a)$. Il est alors équivalent d'affirmer ' $p(x/a)$ est vraie pour toute valeur de x ' et ' $q(x/b)$ est vraie pour toute valeur de x '. On dira que ' $p(x/a)$ ' et ' $q(x/b)$ ' ont la même forme. La conséquence la plus intéressante de ce virage est la suivante :

Ici, les valeurs de x pour lesquelles $p(x/a)$ est vraie remplacent la classe des u ; mais nous ne supposons pas que ces valeurs forment collectivement une entité singulière qui serait la classe composée de ces valeurs. (Russell 1973, 155)

On est loin de l'ontologie des *Principles*. La philosophie de Russell en ce qui concerne les définitions semble avoir pris un virage assez radical. N'oublions pas que cet article a été écrit deux ou trois mois après la publication de « On Denoting ». On peut d'abord remarquer une sorte de "linguistic turn". Les définitions comme celle de $p(x/a)$ ne sont plus de simples truismes. La syntaxe du langage, et même la grammaire, prend un rôle prépondérant. La contradiction pourra être évitée parce que l'on ne s'autorise plus à postuler que l'objet u qui serait la classe des

8 Poincaré se gaussera de cette valse hésitation dans « Les mathématiques et la logique » : 306.

valeurs qui rendent $p(x/a)$ vraie préexiste dans quelque royaume de l'Être. Il y a des combinaisons de symboles qui semblent faire sens et qui pourtant ne dénotent pas. Les définitions prennent donc un nouveau statut même si celui-ci n'est pas tout à fait explicite.

Poincaré attaque alors avec véhémence les théories de Russell dans un article publié dans la *Revue de métaphysique et de morale* intitulé « Les mathématiques et la logique ». Il faut dire que Russell est un peu inconstant : soutenir dans un même texte trois théories incompatibles deux à deux est un exploit que peu de philosophes ont réussi.

Ce qui est le plus intéressant dans l'article de Poincaré n'est cependant pas l'attaque des propositions de Russell mais plutôt la solution qu'il propose aux paradoxes. Une définition ne doit pas contenir de cercles vicieux, c'est-à-dire que la définition d'un ensemble d'objets E ne doit pas faire référence à l'ensemble E comme s'il préexistait à sa définition. Cela implique, si nous ne le savions déjà, que pour Poincaré les définitions ne sont pas triviales, elles créent des objets et ce, à la condition que l'on respecte certains principes comme celui du cercle vicieux.

Poincaré va très loin. Pour lui la définition même du nombre inductif n'est pas prédicative (1905-06, 309). Pour lui, la seule façon de se mettre à l'abri des contradictions, c'est de respecter des principes de non-circularité dans les définitions.

Il est intéressant d'examiner la réponse de Russell dans « Les paradoxes de la logique ».

M. Poincaré croit que tous ces paradoxes viennent d'une espèce de cercle vicieux, et en cela je suis d'accord avec lui. Mais il ne voit pas la difficulté qu'il y a à éviter un cercle de cette sorte. J'essaierai de montrer que, si l'on veut l'éviter, il faut adopter une théorie analogue à ma « no-classes theory » ; en fait, c'est à cette fin que j'ai inventé celle-ci. (Les paradoxes de la logique, 627)

Ainsi donc, Poincaré ne verrait pas la difficulté qu'il y a à éviter le cercle vicieux. À propos de la solution que propose Richard et que Poincaré a reprise dans son article, Russell écrit :

Il propose d'éviter ce cercle vicieux en définissant E « tous les nombres définissables par un nombre fini de mots sans mention de E ». Pour un profane, cette définition semble encore plus circulaire que la première. (Les paradoxes de la logique, 633)

Le problème pour Russell est qu'il faut caractériser de manière indépendante les contraintes que l'on doit imposer aux fonctions propositionnelles pour qu'elles donnent naissance à des classes. Il ne suffit pas de proclamer qu'il faut éviter le cercle vicieux, il faut mettre à jour les principes logiques fondamentaux qui, lorsqu'ils sont respectés, nous assurent que nous ne serons plus entraînés dans des cercles vicieux.

L'idée fondamentale de Russell est que toute proposition portant sur une classe peut se paraphraser par une proposition portant sur les valeurs de variables satisfaisant une fonction propositionnelle. Ce qu'auparavant il considérait comme la définition d'une classe définit maintenant la portée d'une fonction propositionnelle, mais celle-ci n'est pas un objet susceptible d'être une valeur de la fonction propositionnelle. En fait, Russell sera amené plus tard à une certaine réification des classes, mais elles ne pourront être valeurs de la fonction propositionnelle qui lui a donné naissance mais seulement de fonctions propositionnelles d'un type supérieur. Ce sera la *Théorie des types*. Pour l'instant, ce qui importe est qu'une réforme de la syntaxe est nécessaire pour que la possibilité de contradiction disparaisse.

Il importe de remarquer que le principe du cercle vicieux n'est pas lui-même la solution des paradoxes de cercles vicieux, mais seulement la conséquence qu'une théorie doit fournir pour apporter une solution. Par conséquent, il faut construire une théorie des expressions contenant des variables apparentes qui fournisse comme conséquence le

principe du cercle vicieux. C'est pour cette raison que nous avons besoin d'une reconstruction des premiers principes logiques, et que nous ne pouvons pas nous contenter de ce simple fait que les paradoxes sont dus à des cercles vicieux. (Les paradoxes de la logique, 640-641)

Russell marque là un sérieux point dans le match qui l'oppose à Poincaré. C'est la doctrine de l'univers du discours qu'il attaque. Il n'y a pas d'univers du discours. Même un énoncé comme « pour tout x , $x = x$ » n'a pas un domaine sans restriction. Le principe du cercle vicieux tel que proposé par Poincaré viole lui-même ce principe. La proposition de Russell est une réforme en profondeur des processus que l'on considère comme légitime pour introduire de *nouvelles définitions* d'objets.

On constate l'ampleur du chemin parcouru depuis les *Principles*. La richesse de l'ontologie du Russell de 1903 lui permet de se passer d'une théorie autre que triviale et naïve des définitions. La découverte de la contradiction l'a conduit à un sérieux examen de la structure du langage. Arrive alors la découverte de la théorie des descriptions qui porte un coup fatal à sa naïveté. Et c'est toute son ontologie qui sera balayée.

Les cercles vicieux apparaissent quand une phrase contenant des mots tels que tout ou quelque (c'est-à-dire contenant une variable apparente) paraît représenter un des objets auxquels s'applique le mot tout ou quelque. Cette apparence est donc illusoire. La difficulté est qu'il y a des raisons pour croire que tout doit pouvoir signifier absolument tout : ainsi les phrases en question ne peuvent pas du tout représenter des entités⁹. (Les paradoxes de la logique, 648-649)

Poincaré ne répondra pas vraiment à ce texte de Russell. En 1909 il publie, toujours dans la *Revue de métaphysique et de morale*, son dernier texte portant sur l'imprédictivité : « La

9 Ce passage contient une erreur de traduction si on se fie au manuscrit publié dans les *Essays*. L'expression française « phrase » qui apparaît deux fois est une mauvaise traduction de l'expression anglaise « phrase ».

logique de l'infini ». Il y reprend méticuleusement sa théorie du cercle vicieux en l'appliquant aux classifications. On ne peut classer des objets qui n'existent pas encore. Or « toute définition est une classification » (1909 : 402). Il ne reprend pas le combat se contentant de répéter son point de vue. Il met même un terme la discussion en répétant sa profession de foi à propos du rôle de l'intuition.

M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendante de la psychologie ; et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues. (Poincaré 1909, 414)

Russell, Poincaré et Leśniewski

Leśniewski n'a probablement jamais entendu parler de cette querelle entre Russell et Poincaré. Pourtant, la solution logico-philosophique la plus intéressante émergera de son œuvre. En effet, on peut introduire dans l'ontologie, suivant la présentation que Sobociński (1984, 15) fait de l'analyse de Leśniewski, l'équivalent de la notion de classe distributive et de la notion « d'être élément de cette classe distributive » de la manière suivante :

$[AB]: Bel(A) \equiv (\exists a). A \in Kl(a). B \in a$

$A \in Kl(a)$ signifie « A est l'ensemble des objets a » et

$B \in a$ signifie « b est élément de l'ensemble A »

Les deux postulats qui étaient universellement acceptés avant la découverte de la contradiction peuvent s'exprimer formellement de la manière suivante :

A1 $[a].[\exists A].A\in Kl(a)$

A2 $[ABab].A\in Kl(a).A\in Kl(b).B\in b.\supset.B\in a$

Ces deux postulats, comme le montre Sobociński conduisent effectivement à la contradiction, ce qui n'est pas étonnant.

Partant de la définition

$$[A].\therefore A\in^* \equiv A\in A:[a]:A\in Kl(a). \supset. \sim(A\in A)$$

où $A\in^*$ peut être interprété comme signifiant « A est une classe qui n'est pas élément d'elle-même », on montre les deux théorèmes suivants qui sont contradictoires :

$$[A].\equiv \sim A\in Kl(*) \text{ et } [\exists A].\equiv A\in Kl(*)$$

En fait, ces deux postulats sont faux dans le système de Leśniewski lorsque les « classes » sont entendues au sens collectif. Leur apparente vérité intuitive repose sur une confusion, sur un usage ambigu du terme « classe ». Ce terme est utilisé pour désigner à la fois la classe comme une multiplicité – classe distributive – et la classe comme unité – la classe collective.

Paradoxalement, ce résultat n'est pas une conséquence des systèmes de Leśniewski : il en est le point de départ. C'est l'examen de la contradiction qui l'amènera à développer des systèmes dont les postulats non seulement sont libres de contradiction mais sont également ouverts, jamais totalement déployés. Les solutions de Russell et de Zermelo apparaissent alors comme *ad hoc* et superficielles et ne constituent pas une précaution contre l'apparition d'autres contradictions.

Le paradoxe ne sera résolu que lorsque nous serons convaincus que nous avons utilisés soit des règles de raisonnement incorrectes, soit ou des présuppositions fausses dans la construction du paradoxe [...]
(Sobociński 1984, 12)

Leśniewski consacra sa vie à l'élaboration de systèmes fondationnels. La réalisation de ce programme ne sera possible

que par l'introduction du concept de définition-thèse qui sera la pierre angulaire de son œuvre. Ces définitions-thèses de par leurs constructions mêmes, nous assurent que le système est libre de toute contradiction. Comme le remarque Luschei :

La "pureté" sémantique et le risque de paradoxes exigent que toute définition d'une constante nouvelle, bien qu'elle ne soit jamais une proposition relative à une thèse antérieure, soit assertée comme une thèse identique à elle-même et précédant n'importe quelle thèse ultérieure du système. (The Logical Systems : 222-223, cité par Peeters 2006, 44)

Les définitions ne sont plus triviales mais créatives. Bien plus, on montre aisément que le système ne peut conduire à des contradictions. Les définitions deviennent ainsi le véritable fondement de la structure des systèmes logiques.

Pourquoi les systèmes de Leśniewski n'ont-ils pas reçu l'accueil qu'il méritait par la communauté des logiciens. Il est difficile de répondre à ce genre de questions. Une des raisons est probablement qu'il est arrivé trop tard, à une époque où l'on admettait que la crise des fondements était terminée et où d'autres défis étaient relevés. Une autre raison est sans doute que la présentation des systèmes de Leśniewski était assez hermétique. Comme le remarque Sobociński :

Ce système, qui diffère de bien des façons des systèmes contemporains, est non contradictoire (ce qui se prouve facilement) et constitue une base adéquate pour la construction des mathématiques contemporaines. Il n'est toutefois pas facile de se faire une impression générale du système, pas plus qu'il ne l'est de pénétrer la psychologie qui est à son origine – de ce que Leśniewski pensait précisément du paradoxe de Russell. (Sobociński 1984, 11)

Près de soixante-dix ans après sa disparition, ce n'est toujours pas facile.

Références bibliographiques

- DETLEFSEN M. (1992). Poincaré against the logicians. *Synthese* 90, 349-378.
- HEINZMANN G. (1985). *Entre Intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*. Paris : Blanchard.
- HEINZMANN G. (1986). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Paris : Blanchard.
- PEETERS M. (2006). *Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski*. Fasc. IV: *L'œuvre de jeunesse*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique.
- POINCARÉ H. (1905-06). Les mathématiques et la logique, *Revue de métaphysique et de morale* 13, 815-835 ; 14 17-34 et 294-317.
- POINCARÉ H. (1909). La logique de l'infini. *Revue de métaphysique et de morale* 17, 461-482.
- POINCARÉ H. (1968). *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.
- RUSSELL B. (1905). Review of Science and Hypothesis by H. Poincaré. *Mind* 14.55, 412-418.
- RUSSELL B. (1972). *The Principles of Mathematics*. London : George Allen & Unwin Ltd [1903].
- RUSSELL B. (1973). *Essays in Analysis*. D. Lackey ed., London : George Allen & Unwin Ltd.
- RUSSELL B. Les paradoxes de la logique. *Revue de métaphysique et de morale* t. XIV, 627-650. La version originale en anglais a été publiée dans les *Essays in Analysis*, 190-214.
- SOBOCINSKI B. (1984). Lesniewski's analysis of Russell's paradox. In : Jan T. Szrednicki, V.F. Rickey (eds), J. Czelakowski (ass. ed.), *Lesniewski's systems: ontology and mereology*. La Haye : M. Nijhof, 11-44

DÉFINITIONS EXPLICITES ET ABSTRACTION

Pierre JORAY

Préambule

En usant du *Principe de Hume* pour introduire par abstraction le nombre cardinal au sein du calcul des prédicats du deuxième ordre, les « néo-frégéens »¹ s'opposent curieusement à l'un des réquisits les plus centraux du projet logiciste de Frege : obtenir un édifice où chacun des termes arithmétiques se trouverait défini d'une manière explicite par les termes primitifs de la base logique. Sans doute convient-il, pour éviter les impasses du logicisme classique, d'affaiblir les conditions très exigeantes que Frege s'était imposées. Mais le risque encouru est que la démarche ne puisse plus être qualifiée de *logiciste* puisqu'elle s'appuie sur une définition non explicite du nombre, posée à titre d'axiome additionnel. En traitant manifestement le nombre comme un terme primitif, on compromet en effet le caractère éliminable de la définition, ainsi que la volonté chère aux logi-

1 Le projet néo-frégéen de C. Wright et B. Hale peut brièvement être décrit comme une réduction de l'arithmétique au calcul des prédicats du deuxième ordre s'appuyant sur une définition « implicite » du nombre cardinal. Cette définition, qui prend la position d'un axiome dans la construction, consiste en l'expression suivante, dite *Principe de Hume*, et dans laquelle « $Nx:Fx$ » doit être comprise comme signifiant « le nombre cardinal du concept F » et « $F \approx G$ » comme signifiant « il existe une relation biunivoque entre les objets tombant sous F et ceux tombant sous G » : $(\forall FG)(Nx:Fx = Nx:Gx \equiv F \approx G)$. Pour plus de détails, cf. Wright (1983), Hale & Wright (2001) et, dans la présente collection, Ebert & Rossberg (2007).

cistes de voir les termes arithmétiques déterminés d'une manière univoque par les constantes de pure logique².

Ainsi, nous apparaît-il préférable de considérer qu'une approche logiciste de l'arithmétique réclame l'usage exclusif de définitions explicites. Conserver une telle contrainte dans le projet logiciste que nous avons mené³ n'est pas allé sans soulever certaines interrogations. En effet, si la définition explicite constitue une démarche sûre et pleinement transparente d'introduction des termes dérivés, elle est aussi souvent perçue comme un moyen trop faible, ne permettant aucune véritable expansion des théories. Depuis Whitehead et Russell, la définition explicite est conçue en logique comme un outil purement abrégatif et dénué d'importance proprement théorique.

Cette vue usuelle est pourtant erronée. Bien que largement ignoré des approches standard, cet état de fait était déjà connu dès les années vingt et nourrissait de riches discussions parmi les membres de l'Ecole de Varsovie. Les systèmes logiques de S. Leśniewski, faisant de la définition explicite un outil logique central et interne à l'axiomatique, en sont le meilleur témoin aujourd'hui. Ils constituent à nos yeux un cadre théorique adéquat pour fonder une entreprise logiciste.

Bien que se situant dans le cadre de notre travail relatif à l'arithmétique, cet article est spécifiquement consacré aux effets que l'ajout de définitions explicites peut avoir sur une théorie formalisée. Recherchés par certains, refusés par d'autres, les plus remarquables de ces effets sont ceux des définitions que Łukasiewicz qualifiait de « créatives », à savoir celles qui s'avèrent nécessaires à l'établissement de résultats ne mentionnant pas les termes définis. De Leśniewski, qui en fut le plus

2 Pour une discussion sur ce point, cf. Joray (2007).

3 Projet traité dans le cadre du Centre de Recherches Sémiologiques de l'Université de Neuchâtel, en collaboration avec N. Gessler et C. Degrange et avec le soutien du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. Cf. dans la présente collection, Gessler, Joray, Degrange (2005) et Joray (2007).

ardent promoteur, il ne nous est guère parvenu de réflexions quant à l'enquête précise que nécessitait l'usage de telles définitions. Ses systèmes, ainsi que les directives définitoires méticuleusement formalisées qu'ils contiennent, nous sont en revanche connus⁴ et ont permis de mettre en évidence qu'il est possible d'user des définitions créatives comme d'un outil remarquable d'expansion et de démonstration, tout en conservant les vertus attendues de la définition explicite (univocité, éliminabilité, non contradiction).

A notre connaissance, Leśniewski n'a jamais répondu à la critique de Lukasiewicz, qui considérait de telles définitions comme des axiomes cachés. Notre projet de construction logicienne de l'arithmétique ayant pour singularité de recourir à des définitions créatives, il nous fallait répondre à cette objection cruciale puisque la valeur de notre démarche en était pleinement dépendante. Cet article se propose d'enrichir les résultats que nous avons déjà publiés concernant cette problématique⁵, en mettant en évidence que la créativité des définitions explicites ne repose pas sur l'introduction de significations nouvelles, mais sur leur dimension abstractive. Contrairement aux définitions « abrégatives », les définitions de Leśniewski ont en effet pour particularité remarquable de mettre à profit cette dimension. Il s'ensuit que les définitions autorisent le déclenchement de certaines possibilités déductives du langage formel concerné.

1. Les définitions explicites

Dans la mesure où les définitions explicites sont utilisées dans une grande diversité de contextes symboliques et avec la

4 Pour une présentation complète de ces systèmes nommés Protothétique, Ontologie et Méréologie, cf. Miéville (1984) et, dans la présente collection, Gessler, Miéville, Peeters (2001-07).

5 Joray (2005a), (2005b) et (2006).

visée d'introduire des termes de différentes catégories sémantiques – aussi bien des noms, des foncteurs que des connecteurs ou encore des opérateurs – il est assez délicat d'en donner une caractérisation générale qui ne dépende pas du cadre linguistique particulier où on entend y recourir. Par opposition à une définition « implicite » qui consiste à stipuler un énoncé ou schéma d'énoncé présentant un usage spécifiant d'un terme nouveau, on parle couramment de définition *explicite* lorsque le terme à introduire n'est pas lui-même utilisé en vue de déterminer la signification qui va lui être attachée. Plus précisément, on reconnaît une telle définition par le fait qu'elle pose comme équivalentes (ou comme ayant même signification) deux expressions propositionnelles distinctes dont la première – dite *definiendum* – introduit le terme à définir et la seconde – dite *definiens* – présente la signification qui va lui être associée, par le biais exclusif des « anciens » termes. Ainsi, dans les exemples suivants :

$$P \vee Q \quad =df \quad \sim P \supset Q$$

$$x \neq y \quad =df \quad \sim(x=y)$$

$$\text{Inv}(R)(x,y) \quad =df \quad R(y,x)$$

$$x \in \cup(E,F) \quad =df \quad (x \in E) \vee (x \in F)$$

peut-on à chaque fois reconnaître des énoncés de la forme générale :

$$\text{Definiendum} \quad =df \quad \text{Definiens}$$

où *=df* exprime une relation d'équivalence entre un *definiendum* et un *definiens* qui devront répondre aux conditions suivantes :

1. Le *definiendum* contient une expression de la forme $\alpha(v_1, \dots, v_n) \dots (v_j, \dots, v_k)$, où α (le symbole à définir) est

un symbole absent du langage dans lequel la définition est posée et $v_1, \dots, v_k$ sont k ($k \geq 0$) variables indiquant les places des éventuels arguments de α .

On notera au sujet de cette première condition : a) que les arguments ne sont répartis en plusieurs parenthèses que lorsqu'il s'agit de définir un foncteur formateur de foncteur (cf. notre 3^e exemple ci-dessus) ; b) que la forme $\alpha(v_1, \dots, v_n) \dots (v_j, \dots, v_k)$ constitue une partie seulement du *definiendum* lorsque la constante à introduire n'est pas d'une catégorie propositionnelle mais, par exemple, d'une catégorie nominale (cf. le 4^e exemple ci-dessus).

2. α et les variables $v_1, \dots, v_k$ apparaissent dans le *definiendum* à une et une seule occurrence.
3. Le *definiens* est une expression bien formée du langage où la définition est posée ; il ne contient que des symboles primitifs ou préalablement définis (en particulier, il ne contient pas α).
4. Le *definiens* ne contient comme variables (libres) que des variables qui apparaissent dans le *definiendum*.

Dans le cadre de cette caractérisation générale, il est possible de distinguer deux familles de définitions explicites. Eu égard à la manière dont se trouve exprimée la relation d'équivalence entre *definiendum* et *definiens*, nous parlerons respectivement de définitions *externes* ou *internes*.

1.1. Les définitions externes

Héritière des *Principia Mathematica*, la conception externe des définitions explicites est aujourd'hui encore la plus couramment pratiquée par les logiciens. En usant de métavariables telles que $P, Q, \dots$ ainsi que d'un relateur métalinguistique

usuellement noté $=df$, on peut par exemple définir le connecteur de disjonction $\vee$ sur la base du conditionnel $\supset$ et de la négation propositionnelle $\sim$. Pour ce faire, on posera par exemple l'expression suivante :

$$(Df_{\vee}) : P \vee Q =df \sim P \supset Q$$

Il y a trois raisons pour lesquelles une définition de ce type mérite le qualificatif d'*externe*. La première est son caractère proprement métalinguistique. En effet, ni le relateur $=df$, ni les variables P et Q ne relèvent du langage objet, c'est-à-dire du langage que le symbole à définir doit venir enrichir. En outre, le fait que $=df$ n'apparaisse pas parmi les primitifs du langage en question en font une constante qui n'est en aucune manière réglée par l'axiomatique fixant les significations logiques de base. Les auteurs des *Principia* s'expriment à ce sujet sans ambiguïté. Dans leur introduction, on lit en effet

although we employ definitions and do not define "definition", yet "definition" does not appear among our primitive ideas, because the definitions are no part of our subject, but are, strictly speaking, mere typographical conveniences. (Whitehead & Russell 1927, 11)

La seconde raison tient à ce que le terme défini ne se trouve aucunement intégré au langage pour lequel la définition est posée. De fait, le langage objet reste toujours le même ensemble de formules. Donné une fois pour toute par son vocabulaire et ses règles de formation, il n'est pas susceptible d'être élargi, sinon à être étendu à un langage distinct du premier. C'est ainsi que les termes introduits par définition ne sont disponibles que dans le métalangage et qu'ils ne font que donner la possibilité de désigner d'une manière abrégée les formules jugées parfois trop longues, et peut-être pas assez suggestives, du langage formel officiel.

Enfin, troisièmement, avec un tel outil, il demeure impossible de rendre compte dans le cadre strict d'une théorie formalisée de l'usage naïf qui est fait des définitions dans la version informelle de cette théorie.

Afin d'éclaircir ce dernier point, nous allons en donner une illustration dans le cadre simple du calcul propositionnel. Donnons-nous, pour commencer, une axiomatisation du calcul classique s'appuyant sur trois axiomes et deux règles d'inférence usuelles, le détachement du conditionnel (*modus ponens*) et la substitution :

Système L

Alphabet : $\{\supset, \sim, (,), p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$.

Formules : (a) Tout p_i est une formule.

(b) Si α et β sont des formules, alors $\sim\alpha$ et $(\alpha \supset \beta)$ en sont aussi.

Rien sinon n'est formule.

Axiomes : (A1) $p_1 \supset (p_2 \supset p_1)$

(A2) $(p_1 \supset (p_2 \supset p_3)) \supset ((p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \supset p_3))$

(A3) $(\sim p_1 \supset \sim p_2) \supset ((\sim p_1 \supset p_2) \supset p_1)$

Règles : *DET* et *SUB*

Il est bien connu que le système *L* est *fondé* et *complet*, en ce sens que l'ensemble des thèses de *L* coïncide exactement avec l'ensemble des tautologies contenant le conditionnel et la négation. Les trois tautologies suivantes sont, par exemple, des thèses de *L* :

(T1) $p_1 \supset p_1$

(T2) $(p_1 \supset p_2) \supset ((p_1 \supset \sim p_2) \supset \sim p_1)$

(T3) $\sim\sim(p_1 \supset p_1)$

En outre, le système L est *fonctionnellement complet*. Toute fonction de vérité y est en effet exprimable et l'on peut choisir de mettre l'accent sur certaines d'entre elles en posant des définitions externes, par exemple, pour la conjonction, la disjonction ou encore pour une fonction moins usitée, à laquelle nous associons ici le symbole $\#$:

$$(Df\wedge) \quad P \wedge Q =_{df} \sim(P \supset \sim Q)$$

$$(Df\vee) \quad P \vee Q =_{df} \sim P \supset Q$$

$$(Df\#) \quad P \# Q =_{df} \sim(P \supset Q)$$

Considérons maintenant L^* , une expansion de L obtenue par l'introduction de nouvelles variables (les f_i , destinées à jouer le rôle de variables de connecteurs binaires), ainsi que du quantificateur universel $\forall$ (destiné à lier uniquement les variables f_i). Dans le détail, nous obtenons :

*Système L^**

Symboles ajoutés :

$$\{\forall, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}.$$

Clauses additionnelles pour les formules :

- (c) Si α et β sont des formules, alors $(\alpha f_i \beta)$ en est aussi une.
- (d) Si α est une formule, alors $(\forall f_i)\alpha$ en est aussi une.

Règles additionnelles :

- $\forall i$ Si $\alpha \supset \beta$ est une thèse, alors $\alpha \supset (\forall f_i)\beta$ en est également une, pour autant que α ne contienne aucune occurrence libre de f_i .
- $\forall e$ Si $\alpha \supset (\forall f_i)\beta$ est une thèse, alors $\alpha \supset \beta [f_i / \tau]$ en est également une, où τ est une constante de connecteur binaire ou une variable f_j libre pour f_i dans β .

Clairement L constitue un sous-système de L^* en ce sens que toutes les formules et thèses de L restent respectivement des formules et des thèses de L^* . En dehors de ces formules communes aux deux langages, il y a évidemment des thèses de L^* qui ne sont ni des thèses, ni même des formules de L . C'est le cas par exemple de la thèse T4 que nous donnons ci-dessous, accompagnée de sa preuve :

$$(T4) \quad \sim(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1)$$

- | | | |
|----|--|----------------------------------|
| 1. | $p_1 \supset p_1$ | [T1] |
| 2. | $(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset (\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1)$ | [1, SUB] |
| 3. | $(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)$ | [2, $\forall e, f_1 / \supset$] |
| 4. | $(p_1 \supset p_1) \supset ((\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1))$ | [A1, SUB] |
| 5. | $(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1)$ | [1, 4, DET] |
| 6. | $((\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \supset p_1)) \supset (((\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)) \supset \sim(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1))$ | [T2, SUB] |
| 7. | $((\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)) \supset \sim(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1)$ | [5, 6, DET] |
| 8. | $\sim(\forall f_1)\sim(p_1 f_1 p_1)$ | [3, 7, DET] |

Si nous nous accordons à dire qu'une formule comme « $p_1 \supset p_1$ » exprime le caractère, disons, « répétitif » du conditionnel, alors la preuve que nous venons de voir est celle d'une formule qui peut être comprise comme niant qu'aucun connecteur binaire n'est répétitif (la formule exprime alors : *il existe au moins un connecteur répétitif*). On remarquera à la ligne 2 que la preuve s'appuie sur le remplacement de f_1 par le connecteur $\supset$ (connecteur qui est justement répétitif).

Mais revenons maintenant à la question des définitions explicites externes et considérons la définition déjà donnée plus haut du connecteur binaire # :

$$(Df\#) \quad P \# Q =_{df} \sim(P \supset Q)$$

Sur la base de celle-ci, il nous est désormais possible de présenter la dérivation de la formule T5 suivante, dont nous pouvons

remarquer qu'elle ne contient aucune occurrence de # et que nous pouvons comprendre comme niant que tous les connecteurs soient répétitifs (T5 exprimant alors : *il existe au moins un connecteur non répétitif*).

$$(T5) \quad \sim(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1)$$

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $\sim(p_1 \# p_1)$ | [T3, Def#] |
| 2. $(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset (\forall f_1)(p_1 f_1 p_1)$ | [T1, SUB] |
| 3. $(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \# p_1)$ | [2, $\forall e, f_1 / \#$] |
| 4. $\sim(p_1 \# p_1) \supset ((\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \# p_1))$ | [A1, SUB] |
| 5. $(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \# p_1)$ | [1, 4, DET] |
| 6. $((\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset (p_1 \# p_1)) \supset (((\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \# p_1)) \supset \sim(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1))$ | [T2, SUB] |
| 7. $((\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \# p_1)) \supset \sim(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1)$ | [3, 6, DET] |
| 8. $\sim(\forall f_1)(p_1 f_1 p_1)$ | [5, 7, DET] |

Si cette dérivation semble parfaitement acceptable, il convient pourtant de relever qu'au contraire de celle présentée plus haut pour T4, il ne s'agit pas d'une *preuve formelle* de T5. Dans un système comme L^* , une preuve formelle est nécessairement constituée d'une suite de formules du système en question. Or, puisque # n'est pas un élément du vocabulaire de L^* , les expressions des lignes 1, 3, 4, 6 et 7 de la dérivation ne sont pas des formules de L^* . Ces expressions, de fait, ne sont que des *abréviations* de formules officielles. Dans ce genre de situations, on rétorquera usuellement que la remarque est excessivement procédurière puisque, pour obtenir des preuves formelles officielles à partir de telles dérivations, il suffit d'éliminer les termes définis afin d'obtenir une suite de véritables formules de L^* . Les définitions explicites que nous avons examinées sont en effet éliminables dans le sens suivant :

Une définition D d'une constante d est **éliminable** dans un langage S si et seulement si toute formule de S contenant une ou des occurren-

ces de d peut être montrée, sur la base de D , équivalente à une formule sans occurrence de d .

La définition de $\#$ est bien éliminable dans L^* . Pourtant, après élimination de toutes les occurrences du terme défini $\#$, la suite obtenue ici ne constitue toujours pas une preuve formelle. On a bien alors à chacune des lignes une formule de L^* , mais c'est désormais l'application des règles d'inférence qui pose problème. Comme on le voit ci-dessous, la formule obtenue en ligne 3 ne peut plus être justifiée à partir de la ligne 2 par la règle $\forall e$, car aucun remplacement de f_1 dans « $p_1 f_1 p_1$ » ne peut conduire à « $\sim(p_1 \supset p_1)$ ».

$$2. (\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset (\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \quad [T1, SUB]$$

$$3. (\forall f_1)(p_1 f_1 p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1) \quad [2, \forall e, f_1 / ?] \text{ impossible !}$$

De fait, on peut montrer qu'il n'existe aucune preuve de T5 dans L^* et donc que cette formule ne fait pas partie des thèses de ce système⁶.

Au terme de ce détour, il convient de rappeler que nous entendions illustrer la troisième raison invoquée du caractère externe des définitions abrégatives standard, à savoir qu'elles n'offrent pas la possibilité de rendre compte formellement de l'usage naïf des définitions. En interprétant intuitivement les formules T4 et T5 comme exprimant respectivement « il y a au moins un connecteur binaire répétitif » et « il y a au moins un connecteur binaire non répétitif », nous avons implicitement considéré L^* comme formalisant une théorie naïve des connecteurs propositionnels, théorie dans laquelle, nous le savons, ces deux expressions sont vraies. N'ayant aucun statut au sein même du système formel L^* , la définition abrégative de $\#$ ne peut être

6 Pour la démonstration, cf. Joray (2005a, 193).

d'aucun secours dans la formalisation du raisonnement intuitif⁷ qui mène à T5.

Plus grave peut-être est alors la confiance que nous plaçons dans les définitions abrégatives du fait de leur caractère éliminable. Notre exemple montre qu'une pratique peu attentive de ces définitions nous amène à considérer comme formellement démontrable une vérité qui en fait ne peut pas recevoir de preuve dans le système en question. Une fois cette illusion de complétude écartée par une plus grande attention, on pourra sans doute renforcer la base axiomatique de L^* de façon à obtenir un système où toute vérité de la théorie naïve soit démontrable.

Le choix méthodologique de Leśniewski fut différent. Il consista à estimer que la définition explicite devait être intégrée comme un moyen formel de démonstration des thèses. Autrement dit, il fit le choix d'une conception des définitions explicites comme *internes* aux systèmes formels.

1.2. Les définitions internes

Dans la conception interne des définitions telle qu'on la trouve chez Leśniewski, la relation d'équivalence entre le *definiendum* et le *definiens* doit être exprimée par des moyens propres au langage objet. L'usage d'un relateur métalinguistique comme *=df* se trouve alors proscrit au profit des seuls termes primitifs du langage adopté⁸. L'idée est simple. Dans un langage propositionnel comme L , dont les primitifs sont le conditionnel et la négation, on prouve que deux formules F_1 et F_2 sont *équivalentes* en montrant que les deux expressions suivantes sont des thèses :

⁷ Un tel raisonnement intuitif consisterait *grosso modo* en ceci : le conditionnel étant répétitif, le connecteur correspondant à la négation du conditionnel ne peut pas l'être et cela montre qu'il y a des connecteurs répétitifs et d'autres qui ne le sont pas.

⁸ Pour les questions liées à la définition dans les systèmes de Leśniewski, cf. les fascicules I et II de D. Miéville dans Gessler, Miéville, Peeters (2001-07).

$$\vdash F_1 \supset F_2$$

$$\vdash F_2 \supset F_1$$

L'idée de Leśniewski fut de munir la base axiomatique d'une règle permettant, sous certaines conditions bien précisées, d'inscrire à titre de thèses deux formules conditionnelles incluant un *definiendum* et un *definiens*, à savoir :

$$\vdash \text{Definiendum} \supset \text{Definiens}$$

$$\vdash \text{Definiens} \supset \text{Definiendum}$$

Dans le cas d'un système incluant le biconditionnel $\equiv$ à titre de primitif, la définition pourrait en outre être posée par l'inscription d'une unique thèse biconditionnelle⁹ :

$$\vdash \text{Definiendum} \equiv \text{Definiens}$$

Bien que résultant d'un acte volontaire (choix d'un symbole nouveau et d'un *definiens* adéquat) les expressions définitoires sont néanmoins des thèses dans la mesure où elles sont obtenues par l'application d'une règle explicitée dans la base axiomatique¹⁰.

Dans un système L^{*Def} , une version de L^* augmentée d'une règle définitoire à la Leśniewski, la dérivation de T5 commencerait par les lignes suivantes, dont les deux premières constituent la définition explicite de # et sont obtenues par application de la nouvelle règle :

9 C'est ainsi que la règle se présente dans les systèmes de Leśniewski et qu'elle se trouve aussi exploitée dans la thèse de doctorat de Tarski (1923). En outre, d'autres formes sont également possibles, cf. Lejewski (1958) et aussi Joray (2003).

10 On trouve une version méticuleusement formalisée de cette règle dans Leśniewski (1931). Cf. aussi la discussion et la présentation modernisée de cette règle dans Rickey (1975).

1. $(p_1 \# p_2) \supset \sim(p_1 \supset p_2)$ [DEF (a)]
2. $\sim(p_1 \supset p_2) \supset (p_1 \# p_2)$ [DEF (b)]
3. $(p_1 \# p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)$ [1, SUB]
4. $(p_1 \supset p_1) \supset ((p_1 \# p_1) \supset (p_1 \supset p_1))$ [A1, SUB]
5. $(p_1 \# p_1) \supset (p_1 \supset p_1)$ [T1, 4, DET]
6. $((p_1 \# p_1) \supset (p_1 \supset p_1)) \supset (((p_1 \# p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)) \supset \sim(p_1 \# p_1))$ [T2, SUB]
7. $((p_1 \# p_1) \supset \sim(p_1 \supset p_1)) \supset \sim(p_1 \# p_1)$ [5, 6, DET]
8. $\sim(p_1 \# p_1)$ [3, 7, DET]

Puisque la ligne 8 de cette preuve correspond à la première ligne de la dérivation de T5 donnée plus haut, nous disposons maintenant d'une preuve formelle de T5 dans L^{*Def} . Cet exemple illustre bien le caractère *interne* des définitions dans un tel système :

(1) A titre de thèses de L^{*Def} , les expressions définitoires des lignes 1 et 2 constituent des formules officielles du langage objet. Aussitôt la définition posée, le nouveau symbole # se trouve, de fait, intégré aux constantes du langage objet. L'ensemble des formules du système est alors élargi aux expressions de la forme $(\alpha \# \beta)$.

(2) Comme on peut le voir aux lignes 3-8, la façon dont la définition se trouve exploitée dans une preuve est entièrement réglée par les moyens officiellement déclarés dans la base axiomatique.

(3) Le fait que T5, qui n'est pas une thèse de L^* , soit prouvable dans L^{*Def} montre que les définitions jouent un rôle prépondérant dans les moyens déductifs de ce dernier système.

2. Créativité

La découverte par Leśniewski du caractère créatif des définitions explicites déclancha des réactions qui furent, dès les années vingt, l'objet d'une polémique au sein de l'Ecole de

Varsovie¹¹ : d'un côté Leśniewski adoptait des systèmes logiques incluant une règle définitoire et soutenait « que les définitions devaient être les plus créatives possibles », de l'autre Łukasiewicz rejetait les définitions créatives, soutenant qu'elles n'étaient rien moins que des « axiomes masqués » et qu'il fallait donc s'en tenir aux définitions purement abrégatives de Whitehead et Russell¹². La formule T5 de notre exemple ci-dessus ne comportant aucune occurrence de terme défini, la définition de # est bel et bien *créative* au sens que Łukasiewicz et Leśniewski donnèrent à cet adjectif dans la littérature. En clair :

Une définition D d'une constante d est **créative** dans un langage S si et seulement si il existe une formule F de S , sans occurrence de d et telle que F n'est prouvable dans S qu'avec l'aide de D (ou d'une autre définition).

Traditionnellement l'innocuité des définitions explicites était conçue comme allant de pair avec le caractère éliminable des définitions abrégatives. Or ce que les réflexions de Leśniewski permettent de montrer, c'est qu'une définition éliminable peut néanmoins être créative et donc jouer un rôle incontournable dans les moyens démonstratifs d'un système formel. Reste que pour justifier le recours aux définitions internes dans notre programme logiciste (Gessler, Joray, Degrange 2005), il faut également dégager avec précision *ce qu'*elles introduisent dans le formalisme, afin de déterminer s'il ne convient pas d'y voir, comme le pensait Łukasiewicz, des axiomes cachés.

2.1. L'argument de Łukasiewicz

Pour montrer que l'inscription de définitions créatives relève d'un ajout implicite d'axiomes, Łukasiewicz s'appuyait sur des

11 Sur les circonstances et l'objet de cette polémique, cf. Joray (2006).

12 L'échange que nous reprenons ici entre Łukasiewicz et Leśniewski se trouve consigné dans les comptes rendus de Łukasiewicz (1928).

exemples construits dont le plus caractéristique fut publié en 1939, dans son article sur le calcul équivalentiel¹³. Dans la section qu'il consacre à la définition créative, Łukasiewicz présente un système biconditionnel assez étrange, constitué d'une tautologie posée à titre d'unique axiome, ainsi que de trois règles d'inférence (le détachement du biconditionnel *E*, la substitution et une règle autorisant l'inscription de définitions sous forme d'expressions biconditionnelles). Dans son écriture préfixée, le système, que nous nommons ici Luk^{Def} , se présente ainsi :

Système Luk^{Def}

Axiome : $EEsEppEEsEppEEpqEErqEpr$

Règles : *DET, SUB, DEF*

Łukasiewicz montre alors que les seules thèses que l'on peut prouver sans usage de la règle *DEF* sont les instances de substitution de l'axiome (la forme particulière de celui-ci excluant en effet l'application de *DET*). Puisque de nombreuses tautologies biconditionnelles ne sont pas de telles instances de substitution, il apparaît que Luk^{Def} amputé de *DEF* serait un système *incomplet* du calcul biconditionnel classique. En particulier, les deux tautologies suivantes n'y seraient pas démontrables :

(*) Epp

(**) $EEpqEErqEpr$

A noter que (**), connue comme « formule de Meredith », est suffisante, à titre d'axiome unique et associée à *DET* et *SUB*, pour obtenir un calcul biconditionnel complet.

S'autorisant désormais l'usage de *DEF* dans Luk^{Def} , Łukasiewicz montre alors par la preuve qui suit que (**), qui

13 Łukasiewicz (1939).

n'était pas prouvable sans *DEF*, le devient à la suite de la définition d'un connecteur unaire (le *verum*, noté ici V) :

1. $EVpEpp$ [DEF]
2. $EEVpEppEEVpEppEEpqEErqEpr$ [Ax, SUB (s / Vp)]
3. $EEVpEppEEpqEErqEpr$ [1, 2, DET]
4. $EEpqEErqEpr$ [1, 3, DET] (Formule de Meredith)

D'incomplet qu'il était sans l'usage de *DEF*, le système Luk^{Def} devient donc complet par l'effet créatif de la définition posée en ligne 1. Pour Lukasiewicz, la définition revient ici à un ajout caché d'axiome car elle ne se limite pas à introduire le connecteur V ; elle participe implicitement, mais de manière cruciale, à la caractérisation du connecteur primitif E.

Si Lukasiewicz a raison de soutenir qu'une telle créativité doit être le fait d'un axiome déclaré, il se trompe cependant sur un point important qui aurait rendu son exemple de définition inacceptable aux yeux de Leśniewski : la définition de V n'est pas ici une définition *explicite*. En effet, dans le contexte où la définition se trouve inscrite, la tautologie (*) n'est pas encore dérivable et cela signifie que la définition posée en ligne 1 exprime, par le biais de E, une relation entre *definiendum* et *definiens* qui n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas même réflexive. Si l'exemple de Lukasiewicz présente bien un cas de créativité nécessitant l'inscription de la définition à titre d'axiome, aucune conclusion ne peut en être tirée quant à la créativité des définitions explicites. En outre, nous avons montré (Joray 2005b) que dans le cadre de logiques propositionnelles simples (sans quantification ni variables de connecteurs) aucune définition explicite ne peut être créative.

2.2. Le potentiel de créativité

Face à la forte créativité de l'exemple de Lukasiewicz, celle des définitions explicites est beaucoup plus modeste. Tout

d'abord, il convient de souligner qu'une définition explicite n'est pas susceptible d'introduire une signification qui aurait été jusque là absente du langage où elle se trouve posée. En effet, dans une définition explicite, c'est le *definiens* qui exprime la signification qui va être attachée au *definiendum*. Or, puisque le *definiens* ne doit contenir que des termes primitifs ou déjà définis, cette signification est forcément disponible avant l'inscription de la définition.

Ce qui se trouve modifié par contre, c'est le mode d'expression de cette signification. Dans la série des langages L , L^* et L^{*Def} discutés en section 1, il est possible, sans aucun recours à des définitions et par composition des connecteurs primitifs, d'exprimer l'application de n'importe quelle fonction de vérité à des propositions données. Ce que la définition introduit, c'est la possibilité de désigner ces fonctions par le biais d'une appellation qui leur est propre. Dès lors, plutôt que de simplement user de la fonction, il est désormais possible d'exprimer quelque chose à son sujet, c'est-à-dire de lui faire jouer le rôle d'argument.

Pour que cette nouveauté soit féconde, il convient cependant que le langage où se trouve inscrite la définition présente des moyens syntaxiques permettant de l'exploiter. Ainsi la définition de $\#$ reste-t-elle stérile dans le langage simple du système L , alors qu'elle est créative dans l'expansion L^* dont les moyens syntaxiques de base sont plus développés.

3. Abstraction et appellation

L'idée que les définitions explicites sont purement abrégatives et ne peuvent introduire, comme le disent les auteurs des *Principia*, que des « facilités typographiques » (1927, 11) est très réductrice. Poser une pure abréviation, c'est par exemple décider de nommer à fin de brièveté « CdRS » ce qui jusqu'alors

était nommé « Centre de Recherches Sémiologiques », ou encore d'user du signe « °C » en lieu et place des mots « degré Celsius ». On ne procède à une pure abstraction que lorsque l'on remplace par une nouvelle appellation (généralement plus courte) une appellation déjà existante et de la même catégorie syntaxique.

Les définitions explicites font, pour la plupart, beaucoup plus que de poser une abréviation. Dans notre définition de # :

$$(Df\#) \quad P \# Q = df \sim(P \supset Q)$$

le *definiens* « $\sim(P \supset Q)$ » ne contient aucune appellation de la fonction que nous voulons associer au nouveau symbole #. L'expression définitoire n'est qu'un résumé d'une procédure complexe dont l'abréviation n'est qu'une phase relativement secondaire sur le plan théorique. Cette procédure peut être décrite par les cinq étapes suivantes :

1. On sélectionne une expression du fait de l'intérêt que l'on entend porter à telle ou telle signification. Cette expression servira de *definiens*. Dans notre exemple on sélectionne

$$\sim(P \supset Q).$$

2. On procède à une analyse grammaticale de l'expression retenue. Les règles de formation du langage concerné doivent permettre de déterminer l'appartenance catégorielle de chacun de ses constituants, ainsi que leur statut respectif de constante ou de variable. En résumé, dans notre exemple, on doit disposer des paramètres présents dans le diagramme suivant :

$$\sim (\begin{array}{c} P \\ s/s \\ C^{ste} \end{array} \supset \begin{array}{c} Q \\ s/ss \\ C^{ste} \end{array}) \text{ Catégorie de l'expression : } s$$

3. On *abstrait* les éléments variables et on obtient une expression fermée dont les paramètres dégagés lors de l'étape 2 permettent de déterminer la catégorie. Cette expression fermée constitue une *appellation* de la signification visée. Dans notre exemple, on abstrait le couple d'arguments $\langle P, Q \rangle$ et l'expression fermée obtenue est de catégorie *s/ss* (connecteur propositionnel binaire) :

$$\langle P, Q \rangle [\sim(P \supset Q)] \quad \text{Catégorie de l'appellation : } s/ss$$

4. On impose un symbole comme *abréviation* de l'appellation obtenue à l'étape 3 par abstraction. L'abréviation reçoit la même catégorie que l'appellation qu'elle abrège. Dans notre exemple :

$$\# := \langle P, Q \rangle [\sim(P \supset Q)]$$

5. On *applique* le nouveau symbole aux mêmes arguments que ceux abstraits à l'étape 3 et ceci en conformité aux règles de formation relatives aux éléments de sa catégorie dans le langage concerné. On obtient alors le *definiendum*. Dans notre exemple, les règles imposent qu'un élément de catégorie *s/ss* reçoive ses arguments à gauche et à droite. On obtient donc le *definiendum* :

$$P \# Q$$

Cette analyse montre que les deux mécanismes sous-jacents à l'inscription d'une définition explicite sont l'abstraction et l'imposition d'une pure abréviation. Mais comme l'imposition relève de l'étiquetage et non d'un processus de créativité, l'aspect novateur des définitions leśniewskiennes doit être imputé au mécanisme de l'abstraction. Plus précisément, en faisant de la définition explicite un outil interne aux formalismes, on augmente la puissance des systèmes axiomatiques en donnant

accès aux possibilités qu'offre l'abstraction, alors que ces possibilités restent inopérantes avec les définitions externes.

Conclusion

Paradoxalement nous obtenons donc que l'opposition historique que nous avons retracée entre les positions théoriques de Lukasiewicz et Leśniewski se doit d'être nuancée. En effet, si nous ne pouvons concéder à Lukasiewicz l'idée qu'un réel impact des définitions explicites créatives les placerait au même statut que les axiomes, nous avons cependant montré que le potentiel des définitions créatives internes se limite aux effets d'une procédure d'abstraction. Comme cette procédure est de nature purement logique, nous avons ainsi montré que les systèmes de Leśniewski constituent une base adéquate en vue d'une construction logiciste de l'arithmétique.

Références bibliographiques

- EBERT P. A. & ROSSBERG M. (2007). What is the Purpose of Neo-Logicism ? In : Joray (ed.), *Contemporary Perspectives on Logicism and the Foundation of Mathematics*. Université de Neuchâtel : Travaux de Logique 18, 33-61.
- GESSLER N., JORAY P., DEGRANGE C. (2005). *Le logicisme catégoriel*. Université de Neuchâtel : Travaux de Logique 16
- GESSLER N., MIÉVILLE D., PEETERS M. (2001-07). *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski*. Université de Neuchâtel : Travaux de Logique, cinq cahiers spéciaux.
- HALE B. & WRIGHT C. (2001). *The Reason's Proper Study. Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford : Clarendon.
- JORAY P. (2005a). Should Definitions be Internal ? In : M. Bilkova & L. Behounek (eds), *The Logica Yearbook 2004*. Praha : Filosofia, 189-99.
- JORAY P. (2005b). *What is wrong with creative definitions ? Logica* (Univ. de Wroclaw), 23.
- JORAY P. (2006). *La définition dans les systèmes logiques de Łukasiewicz, Leśniewski et Tarski*. In : Pouivet & Rebuschi 2006, 203-222.
- JORAY P. (2007). A New Path to the Logicist Construction of Numbers. In : Joray (ed.), *Contemporary Perspectives on Logicism and the Foundation of Mathematics*. Université de Neuchâtel: Travaux de Logique 18, 147-65.
- LEŚNIEWSKI S. (1931). Ueber Definitionen in der sogenannte Theorie der Deduktion. In: Leśniewski 1992, 629-648.
- LEŚNIEWSKI S. (1992). *Collected Works*. Surma S. J., Srzednicki J. T. & Barnett D. I. (eds). Dordrecht : Kluwer / Warszawa : PWN.

- LUKASIEWICZ J. (1928). Sur les définitions dans les systèmes déductif / Le rôle des définitions dans les systèmes déductifs (2 cptes rendus de conférences). [Trad. fr. de Blaszczyk M., en annexe à Joray 2006].
- LUKASIEWICZ J. (1939). The Equivalential Calculus, In : Lukasiewicz, *Selected Works*, L. Borkowski (ed). Amsterdam : North Holland / Warszawa : PWN, 1970, 250-277.
- MIÉVILLE D. (1984). *Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Leśniewski. Protothétique – Ontologie – Méréologie*. Berne : Peter Lang.
- POUVET R. & REBUSCHI M. (éds) (2006). *La philosophie en Pologne 1918-1939*. Paris : Vrin.
- RICKEY V. F. (1975). Creative Definitions in Propositional Calculi. *Notre-Dame Journal of Formal Logic* 16.2, 273-294.
- TARSKI A. (1923). Sur le terme primitif de la logistique. In : *Logique, Sémantique, Métamathématique*, T.1. Paris : A. Colin. [Trad. fr. de Granger G.-G.].
- WHITEHEAD A N. & RUSSELL B. (1927). *Principia Mathematica*. Cambridge : CUP (2nd edition; 1st ed. 1910).
- WRIGHT C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press.

D'UNE DÉFINITION À L'AUTRE

Denis MIÉVILLE

It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet, in the development of a subject, they always require a very large amount of thought and often embody some of the greatest achievement of analysis.
(Russell 1956, 63; 1^{ère} édition 1903)

Préambule

Aborder toute une réflexion sur le thème de la définition en logique pose d'emblée trois problèmes. Il y a tout d'abord l'étude des procédures définitoires en présence dans une théorie logique. Il y a ensuite la question associée à la nature des objets logiques explicitement et implicitement définis. Il y a enfin la nécessité d'aborder les raisons qui ont conduit aux choix des objets définis. Dans la suite de mon propos, je traverserai la théorie des systèmes formels du premier ordre en m'efforçant d'y débusquer tout ce qui touche à une démarche définitoire quelle qu'elle soit. Je m'interrogerai ensuite sur la nature de ce qui est défini et sur les raisons qui ont contribué à opérer certains choix. Je proposerai enfin les linéaments d'une théorie à même de donner un accès à l'ensemble de plus grande extension

des connecteurs logiques concernés par le traitement de la vérité et par celui de la gestion des prédicats.

Où il est question de la théorie des systèmes formels et des définitions qui y affleurent

La théorie des systèmes formels à-la-Hilbert se présente comme le parangon de l'explicitation, de l'exactitude et de la clarté, et notamment en ce qui concerne les concepts logiques. Il y est expliqué qu'un système du premier ordre, dans son appréhension syntaxique, est la donnée de quatre ensembles : un vocabulaire au plus dénombrable, un ensemble décidable d'expressions dites bien formées, un ensemble décidable d'axiomes proposés généralement de manière schématique, puis un ensemble fini et décidable de mise en relations d'expressions bien formées. Il s'agit, à ce niveau, d'offrir la pré-caractérisation d'une langue formelle qui pour l'instant n'a de signification qu'au niveau de la perspective donnée au projet qui la soutient : être une langue formelle dotée d'une certaine perfection et d'une décidabilité affirmée. La détermination des ensembles décidables définis et hiérarchisés, composés d'éléments non effectivement interprétés, n'ont donc qu'une signification prédéfinie par l'intention associée à leur futur usage. A cette étape-là de la description de la syntaxe, *de jure*, toute inscription n'a que le sens d'être un élément d'un ensemble et n'a donc aucune signification hors cette appartenance; cependant, de fait, un projet l'habille d'une intention associée à ce qu'on va en faire. Puis, des méta-définitions donnent vie formelle et déductive à cette famille de langages possibles. On pose ainsi la signification des notions de preuve, de théorème, de déduction syntaxique et de conclusion syntaxique, et donc de conséquences syntaxiques ; chacune de ces entités n'ayant ici encore que le sens d'être une inscription complexe appartenant à un ensemble. Ce qui est dé-

fini à ce stade sont des familles de formes. En ce temps-là des significations posées, tout est jeu de signes vides de toute signification effectivement sémantique. Mais, ici encore, je le répète, le choix des termes utilisés pour décrire ces constructions, révèle le projet sous-jacent à ces objets formels. Puis viens alors le temps d'associer une sémantique à un tel édifice. C'est alors que, par exemple, les symboles de constantes héritent effectivement leur statut de désigner effectivement des entités individuelles ; il en va ainsi pour toute autre inscription.

Dans le champ de cette théorie, le projet particulier consistant à représenter les deux logiques classiques fondamentales que sont la logique des propositions et celle des prédicats du premier ordre prévaut. Ce projet est associé à la volonté de construire en excluant toute possibilité de contradiction et en s'efforçant de façonner à terme un équilibre parfait entre l'édifice syntaxique et celui, sémantique. Toute cette construction est donc liée à une prédétermination méthodologique (le décidable, la non contradiction, l'équilibre entre deux structure,...) et est associée à une pré-sémantique extensionnelle. D'une certaine manière, les formes non interprétées sont doublement prédéterminées. De telles prédéterminations vont conduire à façonner les premières formes syntaxiques non interprétées idéalement conçues pour recevoir l'interprétation standard prévue. Ce n'est pas une tromperie, mais une garantie pour disposer d'un réceptacle complexe et parfait, conçu pour recevoir deux théories logiques majeures et pour en étudier et en vérifier les limitations. Cette prédétermination trouve sa conclusion théorique idéale dans l'explicitation d'une théorie des modèles à même d'offrir une signification extensionnelle aux formes de la syntaxe.

Cette manière de voir et de dire les choses peut sembler quelque peu artificielle, mais elle est utile pour aborder quelques réflexions à propos de la définition. Dans cette manière de concevoir les objets de la théorie des systèmes formels, il y a en effet de la définition un peu partout :

- définitions explicites ;
- définitions implicites ;
- définition schématique ;
- définition métalinguistique ;
- définitions inductives de certaines catégories d'objets syntaxiques ;
- définition explicite du rôle syntaxique de ces objets ou de l'organisation de ces objets ;
- définition implicite de leur rôle syntaxique primitif par la base axiomatique ;
- définition implicite et pré-sémantique de ce qu'est une constante logique.

Il est particulièrement intéressant d'étudier de quelle manière les significations primitives sont inscrites dans un tel système. Elles sont généralement données par des schémas d'axiomes. Ces significations primitives sont définies de manière implicite dans le sens où elles ne sont pas ancrées sur d'autres concepts plus fondamentaux. Elles habitent leurs propriétés à travers les relations qu'elles donnent à voir d'elles-mêmes au sein de la base axiomatique ; chacune d'entre elles se définissant par le jeu associatif qu'elle joue avec elle-même ainsi qu'avec les autres significations primitives. Si l'on considère la logique classique des propositions conçue sur les constantes logiques de négation et de conditionnelle, la base axiomatique suivante exprime fort bien cette approche définitoire implicite parce que solidairement organique. D'une certaine manière, la signification primitive d'un terme particulier prend sens dans une inscription à travers le jeu des citations qu'il a de lui-même et de relation qu'il soutient avec d'autres termes primitifs :

$$A1 : (A \supset (B \supset A))$$

$$A2 : ((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$$

$$A3 : ((\sim A \supset \sim B) \supset ((\sim A \supset B) \supset A))$$

Ces significations primitives ne sont donc pas fournies par des définitions explicites au sens où leur *definiendum* (ce qui est défini) n'est pas associé à un *definiens* (ce qui explicite ce qui est défini) selon le canon de ce qui relève des définitions explicites (Carnap 1949) :

- inscription d'une relation d'équivalence entre *definiens* et *definiendum* ;
- inscription d'un terme de foncteur nouveau dans le *definiendum* et qui n'apparaît pas dans le *definiens* ;
- aucune répétition dans le *definiendum* ;
- les variables du *definiens* sont également représentées dans le *definiendum*, et vice-versa.

Dans un tel cadre logique, un choix de significations primitives est effectué, un choix donnant accès à l'ensemble des constantes logiques dites élémentaires et associées aux catégories S/SS et S/S. Quant à la logique des prédicats du premier ordre, un opérateur logique de quantification, inscrit comme terme primitif dans une base axiomatique solidaire de la conditionnelle et de la négation, permettra de fonder la gestion logique prédicative (S/NN...N) et fonctionnelle (N/N....N) :

A4 : $(\forall x)A(x) \supset A(t)$ pour autant que t soit libre pour x dans $A(x)$

A5 : $(\forall x)(B \supset A(x)) \supset (B \supset (\forall x)A(x))$ pour autant que B ne contienne pas de x libre.

Le choix des significations primitives est fait de telle manière à pouvoir accéder à l'ensemble des constantes logiques que la logique du premier ordre contient « officiellement ». Un tel choix n'est pas toujours fait sans raison gnoséologique. Russell (1903), par exemple, avait une affection toute particulière pour la constante de conditionnelle dans la mesure où elle était l'emblème cognitif de la relation d'inférence logique et se devait

donc, à ce titre, d'être la signification primitive première. Il a même hésité à introduire, pour attribuer à la conditionnelle ce statut de constante logique fondamentale, une quantification propositionnelle ! L'opérateur de négation ne lui étant pas indifférent, il reviendra à une construction plus sage de sa logique en la concevant sur la base de la conditionnelle et de la négation, et en tournant le dos à la quantification propositionnelle (Russell 1906).

Parfois, à partir des significations primitives qu'un système contient, la définition d'un foncteur faussement nouveau est proposée: la conjonction par exemple si les constantes primitives résident en la présence des constantes de négation et de conditionnelle. On parle alors d'abréviation ou de commodité linguistique. De tels imports abréviatifs sont de fait le résultat de définition explicite et révèlent aussi, hors leur fonction abrégative, l'importance cognitive ou systémique que l'on accorde à la constante ainsi définie ; ils manifestent également l'existence d'une règle d'inférence cachée, rarement explicitée ; en effet, s'il est posé que

$A =_{df} B$, par définition explicite, cette règle nous autorise à inscrire dans le système, par exemple, les théorèmes suivants :

$\vdash A \supset B$ et $\vdash B \supset A$, ou $\vdash A \equiv B$.

Dans ce contexte, toute définition nouvelle reste abrégative, mais, rappelons-le, elle porte la marque de la valeur cognitive ou systémique que lui attribue l'auteur du système, et manifeste une valeur expressive. Elle n'a pas dans le cadre de la logique du premier ordre de valeur cognitive véritablement créative. Cela heurtait déjà Russell qui, évoquant ses systèmes, le regrettait :

It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic

abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet, in the development of a subject, they always require a very large amount of thought and often embody some of the greatest achievement of analysis. (1956, 63; 1^e éd. 1903)

Premier bilan

Dans mes propos un peu impressionnistes se dégagent différents types de définitions ; celles qui retiendront plus particulièrement, ici, mon attention, concernent les définitions implicites et les définitions explicites. Les premières sont associées à la démarche axiomatique qui permet d'ancrer une signification primitive ; la deuxième permet à partir des significations préalablement introduites dans un système d'en inscrire de nouvelles ; celles-ci n'auraient alors qu'une fonction abrégative.

Une définition explicite n'aurait donc pas de rôle logique créatif ; sa fonction serait expressive (fonction d'usage), technique en contribuant à faciliter une démonstration ou subjectivement cognitive dans le sens de l'importance attribuée par un logicien au terme qu'il inscrit

La fonction abrégative n'est pas fondamentale, mais elle n'est pas à négliger. La fonction technique n'est pas sans avantage. Quant à la fonction expressive, elle est une fonction importante que la logique se doit également d'assumer. En effet, le devoir du logicien consiste aussi à être l'artisan qui a la compétence et la fonction d'explicitier les foncteurs logiques mis en œuvre dans les raisonnements logiques quels qu'ils soient et non pas seulement en fonction d'un problème spécifique à résoudre. Une telle position impose de s'interroger sur la liste des significations que la logique devrait prendre en compte. Elle conduit à penser et à concerver les critères permettant de déterminer ces foncteurs logiques et, davantage encore, de les définir indépendamment d'un moment donné du développement de la logique.

Mais, cela fait-il véritablement sens de s'intéresser à d'autres opérateurs de vérité dans le contexte de la bivalence et du prédicatif que ceux officiellement attestés ?

Nous le savons tous, la logique du premier ordre est et reste un instrument pauvre et rudimentaire, et donc peu commode pour décrire des articulations logiques autres que celles nécessaires pour fonder l'arithmétique ; elle est donc inadaptée pour représenter explicitement d'autres mécanismes que la pensée en discours met en œuvre pour construire et conduire ses raisonnements. La manière de traiter la négation logique en la pliant au principe d'obversion (Boole 1847) est exemplaire à cet égard. Ce principe stipule que :

A universal-affirmative proposition is convertible into a universal-negative, and vice-versa by negation of the predicate. (...)

A particular-affirmative proposition is convertible into a particular-negative, and vice-versa by negation of the predicate. (1965, 29; 1^e éd. 1847)

En acceptant ce principe, les négations nominale et propositionnelle se neutralisent et cette absorption n'est pas sans conséquence dans la mesure où :

[Elle] fait évanouir le couplage de deux termes au profit de la complémentation, ce qui ne va pas sans quelque artifice : la contradiction purement formelle ne s'associe plus à la contrariété sémantique. La répartition des choses en classes prend désormais le pas sur l'articulation des pensées. (Frey 1987, 60 ; Miéville 1991)

De plus, elle exclut l'inscription d'une négation en termes de foncteur de prédicat de la catégorie des fonctions propositionnelles de la catégorie (S/N)/(S/N). La définition d'une telle négation posséderait en plus d'une valeur expressive, une force « créative » dans le sens où elle permettrait la description de propriétés nouvelles et fondées entre d'une part les objets qui

sont concernés par un couple de propriétés duales (une notion), et les objets qui ne sont pas associés à une telle notion. Dans l'univers raisonnable des nombres, le nombre dix-huit est concerné par le couple de propriétés duales pairité/impairité, alors que le nombre Pi ne l'est pas ! Elle permettrait même de proposer dans le cadre d'un calcul des prédicats développé la description d'une nouvelle forme du tiers exclu :

$(\forall ga) ((g(a) \vee \bar{g}(a)) \vee \sim(g(a) \vee \bar{g}(a)))$, $\bar{g}$ et g étant considérés comme les dualités complémentaires d'une notion. Ainsi, par rapport à l'exemple ci-dessus, cette thèse porterait tout à la fois la force de la loi du tiers exclu agrémentée d'une distinction duale :

Soit Pi est pair soit il est impair, ou, il n'est ni pair, ni impair.

Une réflexion semblable pourrait être conduite sur le rôle logique de certaines opérations de référencement fondées sur les foncteurs de relatives ou certaines fonctions logiques de subordination. Ces quelques exemples manifestent pleinement la possibilité d'une quête effective de nouvelles constantes logiques au-delà de celles dites officielles. A cet égard, l'encouragement bien lointain de Tarski reste une véritable invitation pour poursuivre cette exploration :

La logique est à bon droit considérée comme la base de toute les autres sciences, ne fût-ce que pour cette raison que dans tout argument nous employons des concepts tirés de la logique, et que toute inférence correcte procède en conformité avec les lois de cette discipline. (1941, 95)

Où il est question de constantes logique

Comment donc procéder pour offrir une expansion définitoire de la logique du premier ordre à même de rendre compte de significations logiques nouvelles expressives ou créatives ? A partir de quels termes primitifs procéder ? Quelle procédure définitoire choisir ? En écho à ces interrogations, le problème de la détermination des critères déterminant l'essence de ce qu'est une constante logique se pose. Ce problème n'est pas simple, mais ne saurait être évité lorsqu'on se propose d'aborder la définition de toute constante de n'importe quelle catégorie syntactico-sémantique concerné par le propositionnel et le prédictif.

Le problème des constantes logiques est le problème de tracer une démarcation, d'une manière qui soit fondée sur des principes et n'apparaisse pas comme arbitraire, de l'ensemble des expressions dont la logique devrait s'occuper en tant qu'elles sont responsables de la correction logique des arguments – cet ensemble étant distinct en principe de l'ensemble des expressions dont la logique s'occupe effectivement à un moment particulier de son histoire. (Gomez Torrente 2002, 2)

Tarski a apporté sa contribution à cet édifice conceptuel :

A notion is logical if and only if it is invariant under all permutations of the individuals in the "world" (or universe of discourse). (1966, 149)

Cette apparente transparence cache des difficultés et des subtilités non négligeables et d'aucun s'y sont confrontés avec talent, j'évoquerai notamment les travaux de Gila Sher qui propose une définition parente de celle de Tarski :

An operator O is logical if and only if it is invariant under all isomorphism of its arguments-structures. (2007, 4)

Je tiens surtout à mentionner à ce sujet la réflexion la plus achevée que je connais et que l'on peut suivre dans l'éblouissante thèse de Denis Bonnay : *Qu'est-ce qu'une constante logique ?*

La question de la caractérisation des constantes logiques est un des problèmes fondamentaux de la philosophie de la logique. De cette caractérisation dépend en particulier la définition de la notion de conséquence logique, qui permet d'évaluer la validité de nos inférences. Selon une des approches classiques de cette question, les constantes logiques ont ceci de spécial qu'elles dénotent des opérations qui sont invariantes par permutation des objets du domaine de discours. Le but de ce travail est d'évaluer les fondements conceptuels de cette proposition et les problèmes qu'elle pose. Nous défendons, à la lumière d'une révision des justifications de la thèse traditionnelle, une nouvelle caractérisation des constantes logiques en termes d'invariance par isomorphisme potentiel, qui permet de rendre compte à la fois de la généralité de la logique et de son absence de contenu empirique et, en un sens qui sera précisé, mathématique. (Bonnay 2007)

Il n'est pas le lieu ici de développer l'analyse que ce jeune auteur propose. Sa démonstration est concluante et offre le critère de démarcation attendu pour enfin se donner les moyens de pénétrer le monde de toutes les constantes logiques d'une théorie maximale des propositions et des prédicats.

Sur cet acquis et par rapport à mes objectifs, de nouvelles questions doivent être posées :

1. Dans quel cadre logique vais-je m'inscrire ?
2. Quelle procédure définitoire choisir ?
3. Quelles opérations logiques fondamentales sélectionner ?
4. Ces opérations sont-elles invariantes par permutation ?
5. Le mécanisme définitoire sélectionné n'introduit-il pas de contradiction ?
6. Un tel mécanisme ne sur-génère-t-il pas une totalité extravagante de foncteurs ?

7. L'introduction de nouveaux foncteurs n'induit-elle pas d'ambiguïtés syntaxico-sémantique ?

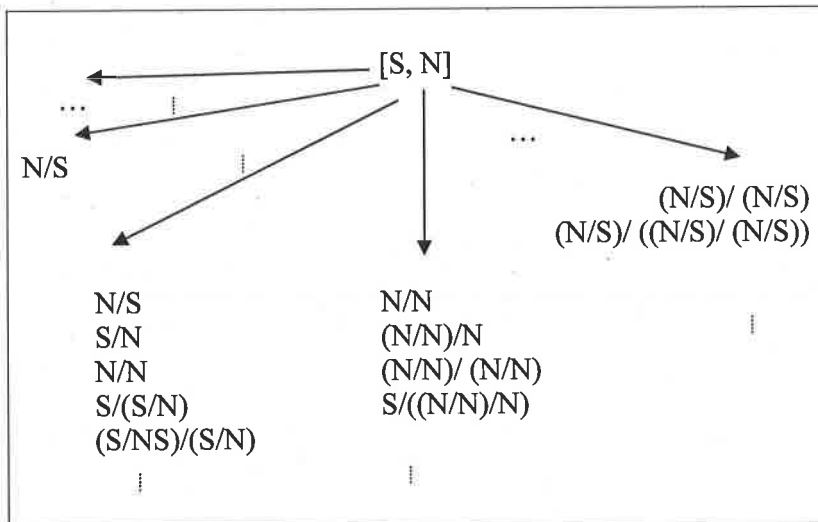
Je tiens à m'engager dans le développement d'un langage logique à même de pouvoir porter la définition de toute constante et foncteur logiques concernés par le traitement du propositionnel et de l'extensionnel. Les catégories des propositions S et des noms N sont donc nécessairement fondamentales. De plus je veux conserver le principe de bivalence, d'extensionnalité et bien entendu, de non contradiction. Je ne m'engagerai donc pas dans ce que d'aucun appelle les logiques appliquées (les logiques modales, les logiques multivalentes,...). L'objectif d'atteindre l'extension maximale des foncteurs logiques conçus sur la base des catégories des noms et des propositions me contraint à disposer d'un système qui sur une base axiomatique modeste, peut être développé progressivement en fonction de ses significations primitives et de ce qui y a déjà été défini. Une grammaire syntaxique préalable et épuisant tous les possibles n'est donc, tout simplement, pas concevable. Le mécanisme définitoire doit ainsi être une procédure développementale conçue (sur) et respectant l'histoire de ses applications successives.

La définition explicite est un candidat fort approprié pour contribuer à honorer le dessein poursuivi. Les conditions en sont simples (*cf.* p. 163). Cette procédure définitoire sera inscrite comme une règle d'inférence introduisant des expressions biconditionnelles comme des théorèmes du système pour autant qu'elle respecte les conditions de toute bonne définition explicite.

Une des conditions pour réaliser une définition explicite est que le *definiendum* et le *definiens* soient dans la relation d'équivalence logique. Les propositions A et B sont dites équivalentes si et seulement si le résultat de l'opération de biconditionnelle est une tautologie : $\vdash A \equiv B$. Le choix de l'opérateur de biconditionnelle comme terme primitif s'impose donc et ex-

plique également la forme biconditionnelle annoncée de toute thèse de définition explicite. De plus, la biconditionnelle est incontestablement une constante logique au sens de l'invariance. Quant au foncteur à même d'être mis en œuvre en tant que terme primitif pour fonder le traitement extensionnel, il suffira de choisir un epsilon, ϵ de la catégorie S/NN, et de le faire de manière à l'associer à une grammaire des types de façon à garantir l'invariance.

Sur la base de ces deux constantes logiques, ϵ et $\equiv$, inscrites comme constantes primitives, et en se dotant d'une quantification d'ordre supérieur, il est dès lors possible de construire très explicitement une procédure définitoire donnant accès à l'ensemble de toutes les constantes logiques d'une quelconque catégorie syntaxico-sémantique conçue inductivement sur celles des noms, N et celle des propositions S :



Ce schéma est de nature à suggérer l'ampleur et la générosité de ce projet de construction d'une logique classique maximale. Une telle aventure peut apparaître comme une invitation illusoire. Et cependant, force est d'admettre qu'il est réalisé, et réalisé depuis fort longtemps ! En effet, Stanislaw Leśniewski [1886-1939], après la découverte qu'il fait de l'antinomie russellienne et de la logique symbolique réagit vivement aux objets théoriques qu'il découvre. Ses réactions le projettent littéralement dans une réflexion visant à construire une logique non pas limitée aux objectifs du logicisme, mais construite en fonction même de son dessein le plus généreux ; elle se devait donc d'être maximale, offrant la possibilité d'inscrire toute constante de n'importe quelle catégorie syntaxico-sémantique conçu sur la base des catégories fondamentales des noms et des propositions (Leśniewski 1992). Le projet achevé est constitué des deux systèmes que sont la protothétique (logique des propositions maximale, Miéville 2007) et l'ontologie (logique des prédicats d'ordre supérieur et maximal : Miéville 2004). Ces systèmes se caractérisent par leur richesse expressive, leur pouvoir créatif au sens de permettre la définition de foncteur porteur d'idée nouvelle permettant l'inscription de thèses nouvelles, ne contenant pas le terme nouvellement défini et ne pouvant pas être démontré sans ce nouveau terme. Ainsi, ici, la définition explicite perd son rôle purement abrégatif pour habiter une dimension explicitement et/ou expressivement créative. Ce système est l'expression d'une réflexion qui prend pour objet la logique pour elle-même et non pas la logique comme outil pour résoudre un problème spécifique. Ceci n'empêche pas, par ailleurs, d'apporter à sa manière une réponse claire et élégante au problème du logicisme (Gessler *et al.* : 2005). Les mécanismes inférentiels y sont subtiles et celui propre aux procédures définatoires extrêmement puissant. De plus, pour obvier à l'impossibilité de fournir une grammaire syntaxique entièrement déterminée, la détermination de la nature des inscriptions et de

leur catégorie se fait de manière contextuelle, permettant ainsi une homonymie bien utile pour désigner des foncteurs différents mais ayant une complicité en termes de propriétés. Enfin, the last but not the least, ils sont non contradictoires.

Épilogue

L'étude de l'œuvre de Leśniewski entraîne le logicien à remettre en cause des concepts que la récente tradition logique et un cortège d'habitudes lui font prendre pour l'expression d'une évidente conformité ; elle lui offre surtout la maîtrise de la puissance expressive et créative d'une théorie logique parfaitement et maximale accomplie. Elle lui ouvre la porte d'un monde de concepts logiques inscrits via une règle d'inférence définitoire. La définition explicite s'y habille alors aussi d'un rôle constructif important, celui de générer progressivement dans l'histoire du développement d'un système de nouvelles significations logiques.

Leśniewski ontology remains an early source of a language whose terminology is thoroughly explained ; whose coherence is contextually determinate and unambiguous ; whose type theory adheres closely to categories which must be recognized in ordinary language ; and whose directives for development mirror the contextually determinate development that is to be expected of a vehicle for communication. (Canty 1984, 163)

Ces définitions permettent donc de répondre au regret de Russell dans la mesure où elles incarnent effectivement « some of the greatest achievement of analysis ». Elles incarnent l'activité génétiquement fondatrice de la logique pure.

Références bibliographiques

- BONNAY D. (2007). *Qu'est-ce qu'une constante logique ?*
Thèse de doctorat en philosophie. Université de Paris I.
- BOOLE G. (1965). *The Mathematical Analysis of Logic*. Oxford : Blackwell [1^e éd. 1947].
- CANTY J.T. (1989). Ontology : Lesniewski's Logical Language.
In : Szrednick & Rickey (eds), 1984, 149-163.
- CARNAP R. (1949). *The Logical Syntax of Language*. London : Routledge & Kegan.
- FREY L. (1987). De la négation dans la logique d'Aristote.
Revue Européenne des Sciences Sociales 25.77, 45-60.
- GESSLER N., JORAY P. & DEGRANGE C. (2005). *Le logicisme catégoriel*. Université de Neuchâtel : Travaux de logique 16.
- GOMEZ TORRENTE M. (2002). The problem of logical constants.
Bulletin of Symbolic Logic 8.1, 1-37.
- LEŚNIEWSKI S. (1992). *Collected Works* (2 vols). Surma S.J., Szrednicki J.T., Barnett D.I. (eds) Warszawa : PWN/Dordrecht : Kluwer.
- MIÉVILLE D. (2001). *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski*. Fasc. I : *La protothétique*. Université de Neuchâtel, Travaux de logique hors série.
- MIÉVILLE D. (2004). *Introduction à l'œuvre de S. Leśniewski*. Fasc. II : *L'ontologie*. Université de Neuchâtel, Travaux de logique hors série.
- RUSSELL B. (1956). *The Principles of Mathematics*. London : Allen & Unwin [1^e éd. 1903]
- RUSSELL B. (1906). The Theory of Implication. *American Journal of Mathematics*, 159-202.
- SHER G (2007). Tarski's Thesis. In : D.F. Patterson (ed.), *Alfred Tarski : Philosophical Background, Development and Influence*. Oxford : OUP.

- SRZEDNICKI J.T. & RICKEY V.F. (eds). (1984). *Lesniewski's Systems: Ontology and Mereology*. Boston, La Haye : Nijhoff / Wrocław Ossolineum.
- TARSKI A. (1941). *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. Oxford : OUP.
- TARSKI A. (1986). What are Logical Notions ? *History and Philosophy of Logic* 7, 143-154.

DÉFINIR LA LOGIQUE, UNE QUESTION DE SIMPLICITÉ

Denis BONNAY

1. Que veut-on définir ?

Qu'est-ce qu'un raisonnement correct ? La logique vise traditionnellement à répondre à cette question, de sorte que, s'il s'agit de définir la logique, on doit commencer par comprendre les tenants et les aboutissants du problème. Considérons un argument particulier :

Tous les philosophes sont sages
Certains hommes sont philosophes

(1) -----
Certains hommes sont sages

Intuitivement l'argument (1) est bien un argument valide. Les prémisses étant posées, la conclusion suit nécessairement. Mais en vertu de quoi (1) est-il correct ? Parce que la logique s'intéresse seulement aux arguments qui sont valides en vertu de leur forme, on dira que (1) est correct en tant qu'instance d'un schéma valide, donné par :

Tous les X sont Y
Certains Z sont X

(2) -----
Certains Z sont Y

On obtient (2) à partir de (1) en faisant abstraction du contenu particulier de l'argument, qui est véhiculé par les expressions comme « philosophes », « hommes » ou « sages », et en ne retenant que la *forme logique* des énoncés figurant comme prémisses ou comme conclusions. Cette forme logique est obtenue en remplaçant les expressions « non logiques » par des lettres schématiques et en ne gardant constantes que les expressions « logiques », précisément appelées « constantes logiques ». On a ainsi décomposé le travail du logicien en deux tâches distinctes. D'une part, il doit expliquer ce qu'est un schéma d'argument valide, d'autre part, il doit expliquer ce qu'est la forme logique d'un énoncé, et en particulier faire la différence entre les expressions non logiques et les expressions logiques. La définition par Tarski (1936) de la conséquence logique répond au premier problème ; c'est une définition sémantique, en termes de préservation de la vérité (pour toute interprétation possible des lettres schématiques, si les prémisses sont vraies, alors la conclusion est vraie), d'autres définitions sont possibles, notamment en termes preuves-théoriques (un argument sera valide s'il est possible de prouver la conclusion à partir des prémisses en utilisant un certain nombre de règles d'inférences élémentaires). La logique mathématique moderne commence comme discipline avec ces définitions, et les grands résultats méta-logiques classiques, comme le théorème de complétude, s'emploient à en tirer toutes les conséquences.

Reste le second problème. Qu'en est-il du choix du vocabulaire logique ? Tarski, lorsqu'il propose sa définition de la notion de conséquence, exprime son scepticisme quant à la possibilité d'y apporter une solution autre que conventionnelle. On peut simplement décider de considérer certaines expressions comme logiques – les connecteurs booléens de la logique propositionnelle et les quantificateurs existentiel et universel. Ce choix étant fait, les prédictions que l'on obtient concernant la validité des arguments sont en accord avec nos jugements pré-

théoriques. *Ex post*, le choix du vocabulaire logique s'en trouve validé.

On ne saurait sous-estimer l'importance de ce choix. Certains déterminants de la langue naturelle comme « tous » ou « certains », et leur contrepartie dans les langages artificiels de la logique, sont systématiquement considérés comme logiques. Mais en va-t-il de même pour tous les déterminants ? « La plupart », par exemple, est-il lui aussi un déterminant exprimant une notion logique ? A ne considérer que la langue naturelle, on serait tenté de répondre positivement, par parité. Pourtant « la plupart » n'est pas définissable dans la logique classique du premier ordre. Doit-on en conclure que la logique classique ne couvre pas la totalité du domaine de la logique, ou à l'inverse que les apparences sont trompeuses et que « la plupart » exprime une notion qu'on devrait considérer comme intrinsèquement arithmétique et pas comme logique au sens strict ? De même, on s'accorde pour considérer la quantification existentielle sur les variables du premier ordre comme logique, mais qu'en est-il de la quantification existentielle sur les variables du *second* ordre ? S'il s'agit là encore d'une expression logique, la logique du second ordre ne sera pas des mathématiques déguisées, mais une logique authentique, et les limites de la logique s'étendront bien loin, puisqu'on peut trouver par exemple un énoncé de la logique du second ordre qui est logiquement vrai si et seulement si l'hypothèse du continu est vraie.

Pour caractériser les limites de la logique, il est donc crucial de pouvoir définir la classe des expressions logiques, c'est-à-dire la classe des constantes logiques, afin de déterminer quelles sont les expressions qui contribuent de manière essentielle à la correction de nos raisonnements. Cette question se double d'une autre question : comment définit-on les constantes logiques elles-mêmes ? c'est-à-dire, comment définit-on telle ou telle expression particulière, afin de pouvoir l'utiliser dans la caractérisation indépendamment fournie de la notion de conséquence

logique ou de schéma d'argument valide ? Les deux questions sont liées ; répondre à la première, c'est dire quels moyens on a le droit d'utiliser pour répondre à la seconde.

2. Simplicité des définitions et simplicité de la logique

Toute entreprise de définition est délicate, mais l'entreprise que l'on vient de décrire l'est tout particulièrement. Le problème vient de ce que l'on pourrait appeler le *réquisit de simplicité des définitions* : une bonne définition est une définition qui définit le moins élémentaire à l'aide du plus élémentaire. Il est possible et informatif de définir ce qu'est un nombre premier à l'aide de notions arithmétiques élémentaires, comme celles de nombre entier et de produit. Mais à l'inverse, il serait absurde de vouloir définir ce qu'est un nombre entier à l'aide de la notion de nombre premier, parce que la notion de nombre entier est plus élémentaire que la notion de nombre premier. Mais alors la simplicité de la logique va poser problème : les notions logiques sont 'on ne peut plus simples', et la logique est une discipline que l'on ne saurait fonder sur nulle autre, puisque toutes les autres disciplines utilisent les principes de la logique. C'est ce que l'on pourrait appeler le *principe de simplicité de la logique*. Le problème qui se pose lorsqu'on cherche à définir la logique – c'est-à-dire définir les limites de la logique et définir les expressions logiques – résulte alors du conflit entre le réquisit de simplicité des définitions et le principe de simplicité de la logique. Si l'on doit définir à l'aide du plus simple, et que rien n'est plus simple que la logique, comment pourrait-on définir la logique ?

Ce problème est un cas particulier d'un problème classique, celui de l'indéfinissabilité des termes primitifs, que Pascal, dans son opuscule sur l'esprit géométrique, évoque en ces termes :

[...] il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir en supposeraient de précédents pour servir à leur explication [...]. Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs, qu'on ne peut plus définir.

Et Pascal de se moquer de ceux qui vont contre cette évidence, et s'emploient à définir ce qui ne peut l'être, comme celui qui définissait la lumière comme un mouvement lumineux des corps lumineux.

Doit-on renoncer à définir les termes primitifs ? C'est la leçon que tire Pascal. A la suite de Hilbert¹, on en a tiré une autre, en distinguant définitions implicites et définitions explicites. On peut définir explicitement la notion de triangle à partir de notions primitives comme celle de droite. On ne peut pas définir explicitement la notion de droite (sauf à prendre d'autres termes primitifs, qui échapperaient à leur tour à la définissabilité explicite). Mais l'on peut considérer que les axiomes de la géométrie définissent *implicitement* les termes primitifs de la géométrie. On ne peut pas définir explicitement ce qu'est un point ou une droite, et Pascal a raison d'insister sur la vanité qu'il y aurait à tenter de le faire, mais on le fait implicitement en acceptant certains axiomes pour la géométrie : points et droites sont les (types d') objets qui satisfont ces axiomes.

La question du statut des définitions implicites – s'agit-il vraiment de définitions ? – excède de beaucoup l'objet du présent article. Le point important pour nous ici est à vrai dire indépendant de la manière dont cette question est tranchée. Il s'agit du point suivant : les définitions implicites présupposent les termes logiques. Les axiomes de la géométrie qui définissent implicitement les termes primitifs de la géométrie sont formulés à l'aide des expressions de la logique. Il ne semble donc pas que

1 Voir sur ce point la correspondance entre Hilbert et Frege à propos des *Grundlagen der Geometrie*, dans laquelle Hilbert envisage, sans employer le terme qui remonte à Gergonne, les axiomes comme des définitions implicites.

la possibilité de se rabattre sur des définitions implicites permette d'éviter la violation du réquisit de simplicité. En effet, pour pouvoir même formuler de telles définitions, on a besoin des notions logiques, de sorte que le réquisit de simplicité serait violé *même* pour des définitions seulement implicites.

Si l'on veut définir les constantes logiques (et la classe des constantes logiques), il semble donc nécessaire de renoncer soit au principe de la simplicité de la logique, soit au réquisit de simplicité des définitions. Y a-t-il des manières de le faire qui n'enlèvent pas à l'entreprise de définition son intérêt ? Imaginons une solution qui repose sur un renoncement au réquisit de simplicité des définitions : comment une définition de la logique à l'aide de notions plus complexes peut-elle saisir ce qui est propre à la logique, et quel intérêt épistémologique y a-t-il à définir le simple à l'aide du complexe ? Réciproquement, imaginons une solution qui repose sur un renoncement au réquisit de simplicité de la logique : qu'y a-t-il donc de plus simple que la logique, sur quoi une telle définition puisse se fonder, et quel intérêt y a-t-il à définir la logique dans une perspective théorique qui refuse le principe de simplicité ?

3. Approche modèle-théorique et approche preuve-théorique

Comme on l'a rappelé un peu plus haut, il existe deux approches rivales de la notion de conséquence logique : l'approche modèle-théorique et l'approche preuve-théorique. L'approche modèle-théorique est une approche sémantique, en termes de préservation de la vérité. Un ensemble d'énoncés Γ a pour conséquence logique au sens modèle-théorique un énoncé φ (notation $\Gamma \models \varphi$) si et seulement si toute structure qui rend vrais tous les énoncés de Γ rend également vrai φ . L'approche preuve-théorique est une approche syntaxique, en termes d'existence d'une preuve formelle. Un ensemble d'énoncés Γ a

pour conséquence logique au sens preuve-théorique un énoncé φ (notation $\Gamma \vdash \varphi$) si et seulement si il existe une dérivation de φ sous hypothèses Γ , c'est-à-dire si et seulement il est possible de dériver φ à partir de Γ en utilisant les règles logiques élémentaires.

Les formulations que nous venons de donner sont incomplètes. Pour obtenir une définition modèle-théorique en bonne et due forme, il faut définir précisément ce que l'on entend par modèle – on peut utiliser des structures d'interprétation pour un langage classique du premier ordre et la notion classique de vérité dans un modèle, mais on pourrait également utiliser des modèles pour la logique intuitionniste. De manière analogue, pour obtenir une définition preuve-théorique en bonne et due forme, il faut définir ce que l'on entend par dérivation – on peut utiliser un calcul des séquents multi-conclusions pour la logique classique du premier ordre, mais on pourrait également utiliser la déduction naturelle intuitionniste par exemple.

Toutefois, même sans entrer dans ces détails, on comprend la forme que prend dans chaque cas une définition de la logique. Dans l'approche modèle-théorique, définir *telle* constante logique, c'est définir sa contribution compositionnelle à la valeur sémantique des formules dans un modèle. Par exemple, pour le cas propositionnel, on définit la conjonction en donnant une fonction de vérité. Définir la *classe* des constantes logiques, c'est donner la classe des interprétations possibles pour une expression logique. Pour le cas propositionnel à nouveau, il s'agit de la classe des fonctions de vérité. Dans l'approche preuve-théorique, définir *telle* constante logique, c'est donner les règles d'inférence qui lui sont associées. Pour reprendre l'exemple de la conjonction, et dans un format de déduction naturelle, il s'agit de la capacité à inférer $A \& B$ à partir de A et de B , de la capacité à inférer A à partir de $A \& B$, et de la capacité à inférer B à partir de $A \& B$. Définir la *classe* des constantes logiques, c'est

caractériser les ensembles de règles d'inférence qui peuvent être considérées comme des ensembles des règles d'inférence proprement logiques, susceptibles de donner la signification d'une expression logique.

Nous nous proposons maintenant de considérer deux entreprises particulières de définition, l'une dans le style preuve-théorique, due à Sambin, l'autre dans le style modèle-théorique, due à Tarski, et de voir comment elles tentent de résoudre au moins partiellement le conflit entre le principe de simplicité de la logique et le réquisit de simplicité des définitions, les renoncements qu'elles opèrent et les conséquences qui en découlent quant au projet de la définition de la logique.

4. Approche preuve-théorique et simplicité de la logique

Considérons un format particulier pour les preuves formelles, le calcul des séquents. Un séquent est une suite de symboles de la forme $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$ où les A_i et les B_i sont des formules, les unes (les A_i) servant de prémisses, les autres (les B_i) de conclusion. L'interprétation intuitive d'un tel séquent est qu'à partir de A_1 et A_2 et ... et A_n on peut obtenir B_1 ou B_2 ou ... ou B_n . On s'autorise de cette interprétation intuitive pour dire que la virgule à gauche du symbole $\vdash$ correspond à une conjonction, alors que la virgule à droite du même symbole correspond à une disjonction. Cela est corroboré par les règles suivantes :

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n \quad A_1, \dots, A_n \vdash B_1, B_2, \dots, B_n}{A_1 \& A_2, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n \quad A_1, \dots, A_n \vdash B_1 \vee B_2, \dots, B_n}$$

La première règle est la règle d'introduction à gauche de la conjonction $\&$. La seconde est la règle d'introduction à droite de la disjonction $\vee$.

Sambin (voir Sambin, Battilotti et Faggian 2000) propose d'exploiter cette idée afin de définir systématiquement les constantes logiques. L'idée générale est que les constantes logiques reflètent les « signes de ponctuation »² du métalangage dans lequel est caractérisée la relation de conséquence preuve-théorique. A chaque constante est alors associée une « équation définitionnelle » qui la définit. Dans le cas de la conjonction, l'équation définitionnelle est :

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

$$A_1 \& A_2, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

Cette équation est la donnée d'une double règle. De bas en haut, on retrouve la règle habituelle d'introduction à gauche de $\&$, qui nous dit comment obtenir $\&$ à partir de la virgule à gauche. De haut en bas, on a ce que Sambin appelle la règle de réflexion implicite, qui nous dit qu'on peut inversement retrouver la virgule à partir de $\&$. La règle habituelle d'introduction à droite de la conjonction,

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1 \qquad A'_1, \dots, A'_n \vdash B_2$$

$$A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n \vdash B_1 \& B_2$$

est dérivable à partir de la règle de réflexion implicite. Etant fixé un métalangage dans lequel est décrite la relation primitive de conséquence logique, la classe des constantes logiques est la classe des expressions qui sont caractérisées par des équations définitionnelles du genre de celle que l'on vient de voir. Le paramètre constitué par le métalangage est important : plus celui-ci est riche, plus l'on pourra caractériser de constantes logiques (par exemple, le carré de la logique modale pourra être considéré comme logique si les séquents employés sont suffisamment

2 L'expression est de Dosen (1994), dont les idées sont proches de celles de Sambin.

structurés). Par contre, la constante « Tonk » imaginée par Prior, et caractérisée par les règles suivantes « $A \vdash A \text{ tonk } B$ » et « $A \text{ tonk } B \vdash B$ », ne sera pas considérée comme une constante logique admissible, car elle n'est pas la « solution » d'une équation définitionnelle³.

Comment l'entreprise de définition preuve-théorique que l'on vient d'esquisser se situe-t-elle relativement au conflit entre le principe de simplicité de la logique et le réquisit de simplicité des définitions ? On peut d'abord remarquer que les équations définitionnelles ne sont que des définitions implicites : elles ne fournissent pas un *definiens* qui serait systématiquement substituable à la constante définie dans tous les contextes ; elles se contentent de contraindre la signification des constantes logiques à partir de la signification déjà attachée aux symboles en termes desquels les constantes sont définies, à savoir « , » et « $\vdash$ » dans le cas propositionnel. En effet, même à supposer que l'on considère seulement des formules intervenant dans des séquents, une constante logique ayant une occurrence à l'intérieur d'une formule dans un séquent ne peut pas être « remplacée » par une combinaison de « , » ou « $\vdash$ ». Le remplacement n'est possible que dans le contexte très particulier donné par l'équation définitionnelle définissant la constante – effectuer le remplacement du *definiendum* par le *definiens* correspond alors à utiliser la règle de réflexion implicite.

Cependant, on l'a dit, se contenter de définitions implicites ne suffit pas à résoudre le conflit entre simplicité des définitions

3 L'ajout de « Tonk » à un système de preuve dans lequel la relation ' $\vdash$ ' est transitif rend ce système inconsistant. C'est en ce sens que « Tonk » est une constante pathologique. Voir Bonnay & Simmenauer (2005) pour une analyse de la manière dont le problème des « fausses » constantes logiques du genre de Tonk est résolu grâce à l'idée d'équation définitionnelle. Le problème de Tonk est que les règles qui le définissent implicitement sont éminemment créatives ; l'on peut prouver que toutes les règles qui sont engendrées par des équations définitionnelles sous certaines conditions ne sont pas créatives. Joray (2008) montre que le problème de la créativité se pose également pour des constantes logiques introduites à l'aide de définitions explicites.

et simplicité de la logique. Si l'on veut sauvegarder le réquisit de simplicité des définitions, il faut encore se donner quelque chose de plus primitif que les constantes logiques que l'on définit. Ce quelque chose de plus primitif, c'est, dans le cadre de Sambin, la relation de conséquence logique et les signes de ponctuation dont les propriétés sont analysées dans le métalangage. L'ordre des raisons – et des définitions – est alors le suivant : on se donne une relation de conséquence que l'on décrit dans le métalangage en termes de séquents. Typiquement cette relation est supposée satisfaire certaines propriétés, qui correspondent à ce que l'on appelle les règles structurelles, comme l'échange :

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

$$A_2, A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

ou encore l'affaiblissement :

$$A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

$$C, A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_n$$

Ensuite, et ensuite seulement, on peut, sur la base de cette relation de conséquence, définir les différentes constantes logiques comme « reflétant » dans le langage objet telles ou telles expressions utilisées dans le métalangage dans lequel sont décrits les séquents. Les constantes logiques que l'on définit se retrouvent alors dépendantes des choix qui ont été faits à propos de la relation de conséquence logique. Par exemple, en l'absence de règles d'affaiblissement et de contraction, on obtiendra les constantes de la logique linéaire. En présence de ces règles au contraire, on obtiendra les constantes de la logique classique. Cette dépendance est dans une certaine mesure bienvenue. Elle permet de ressaisir ce qu'il y a de commun aux différentes « versions » d'une même constante logique déclinées à travers

différents systèmes logiques – une même équation définitionnelle caractérise la conjonction multiplicative de la logique linéaire et la conjonction habituelle de la logique classique, la différence entre les deux venant du contexte dans lequel s'opère la définition.

On voit néanmoins également ce que l'on perd. Au lieu d'utiliser les constantes logiques afin de définir la notion de conséquence logique, on traite la notion de conséquence elle-même comme primitive afin de se donner le « plus élémentaire » permettant de définir les constantes logiques sans violer le réquisit de simplicité des définitions. Le prix à payer est alors de laisser inanalysée la notion de conséquence logique ; notamment, les différentes propriétés structurelles possibles restent comme des paramètres libres, qui engendrent les différences entre les systèmes logiques, mais pour lesquels on ne dispose pas de justification indépendante. Dans une certaine mesure, s'il s'agit de définir la logique, le problème n'a été que repoussé : il devient celui d'une caractérisation de la relation de conséquence logique. Pour le dire autrement, le contournement du principe de simplicité de la logique n'est qu'apparent. La stratégie adoptée par Sambin consiste en réalité à isoler *au sein de la logique* quelque chose de plus élémentaire, à savoir les séquents et la relation donnée par « $\vdash$ », pour définir (implicitement) ensuite des choses moins élémentaires, à savoir les constantes logiques qui reflètent les expressions utilisées pour décrire les séquents dans le métalangage. Plutôt qu'une définition de la logique, ce qui a lieu est donc une réorganisation au sein de la logique. Le problème d'une définition des expressions « $,$ » et « $\vdash$ », et d'une analyse de la relation de conséquence logique, reste, lui, entier.

Indépendamment des lumières que jette l'entreprise de Sambin sur les propriétés inférentielles des constantes logiques, il se pourrait que, du point de vue de l'entreprise de définition, la leçon à tirer concerne les limites de toute stratégie visant à

renoncer au principe de simplicité de la logique. Si l'on définit les constantes logiques à l'aide de quelque chose de plus simple, qui relève encore du domaine de la logique, la démarche est tout à fait sensée. En réalité, elle ne viole pas le principe de simplicité de la logique. Toutefois, elle ne fait que repousser le problème d'un cran. Si l'on choisissait au contraire de définir les constantes logiques à l'aide de quelque chose de plus simple, qui ne relève plus du domaine de la logique, alors on pourrait espérer faire mieux que repousser le problème. Mais cette fois le principe de simplicité de la logique, qui semble consubstantiel à l'idée que nous nous faisons de la logique, serait bel et bien violé.

5. Approche modèle-théorique et invariance

Peut-être alors convient-il de renoncer au réquisit de simplicité des définitions plutôt qu'au principe de simplicité de la logique. La définition des constantes logiques dans l'approche modèle-théorique de la conséquence nous semble correspondre à ce choix, et c'est vers elle que nous nous tournons maintenant.

Nous avons déjà donné l'exemple élémentaire de la définition de la conjonction comme fonction de vérité dans le cas propositionnel. Cette manière de faire s'étend-elle au-delà de la logique propositionnelle ? La réponse est positive, et l'on peut voir que, dans le cas de la quantification existentielle par exemple, la clause récursive habituelle de la satisfaction dans un modèle contient une définition du quantificateur en jeu. Une formule $\exists x\varphi(x)$ est satisfaite dans un modèle M relativement à une assignation σ (notation $M \models \exists x\varphi(x) \sigma$) si et seulement si, intuitivement, il y a des objets du domaine qui ont la propriété $\varphi(x)$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un objet a tel que $M \models \varphi(x) \varphi[x:=a]$ où $\varphi[x:=a]$ est l'assignation qui est identique à

σ , sauf peut-être sur la variable x à laquelle elle assigne la valeur a . Ce faisant, on n'a fait qu'affirmer une certaine propriété de l'ensemble des objets qui satisfont $\varphi(x)$ (dans M , relativement à σ), à savoir que cet ensemble est non vide – puisqu'on peut choisir un a tel que... Autrement dit, le quantificateur existentiel $\exists$ peut être vu comme un prédicat de second ordre, qui est interprété sur M par une fonction $Q_\exists$ de l'ensemble des parties de M dans M , qui rend la valeur vrai si et seulement si on l'applique à un ensemble non vide.

On vient de définir $\exists$, et cette définition, que l'on pourrait donner sous la forme d'une définition explicite, s'effectue au sein de la métathéorie que l'on utilise pour définir la sémantique du système logique que l'on étudie, typiquement une version de la théorie des ensembles. On n'a pas encore pour autant isolé la classe des constantes logiques, puisqu'on n'a pas caractérisé l'ensemble des fonctions qui pouvaient être utilisées comme interprétation de symboles logiques. Dans le cas propositionnel, la question se pose à peine : les constantes habituelles sont interprétées par des fonctions de vérité, et toute fonction de vérité est l'interprétation potentielle d'un connecteur propositionnel. Dans le cas des quantificateurs, la chose est moins évidente. Par exemple, on pourrait considérer un quantificateur existentiel « il existe un ami de Jean tel que » qui donnerait la valeur vrai à tous les sous-ensembles du domaine d'interprétation qui sont non vides « en termes d'amis de Jean », c'est-à-dire à tous les sous-ensembles du domaine dont un élément au moins est un ami de Jean. Intuitivement, le quantificateur existentiel spécialisé en amis de Jean n'est pas un quantificateur logique, précisément parce qu'il est « spécialisé » et qu'il est lié à une propriété empirique, à savoir être un ami de Jean. Parmi tous les prédicats de second ordre que l'on peut imaginer, seuls ceux qui sont suffi-

samment généraux et suffisamment formels devraient être considérés comme logiques⁴.

Tarski (1986), revenant sur le scepticisme qu'il avait exprimé dans son article sur la notion de conséquence logique, a proposé un critère⁵ permettant de distinguer les opérations qui sont susceptibles de servir d'interprétation à des symboles logiques et celles qui ne le sont pas. Selon ce critère, on dira qu'une opération sur un domaine est logique si et seulement si elle est invariante par permutation. Dans le cas d'une opération Q servant à interpréter sur un domaine M un prédicat unaire de second ordre – Q est alors une fonction de l'ensemble des parties de M dans l'ensemble $\{V, F\}$ des valeurs de vérité – on obtient la définition suivante : Q est *logique* si et seulement si pour toute permutation p sur M , et pour tout sous-ensemble A de M , $Q(A) = Q(p(A))$. Une permutation p est ici simplement une bijection de M dans M , et $p(A)$ est l'ensemble des éléments x du domaine tels que $p^{-1}(x)$ est dans A . Typiquement, le quantificateur existentiel passe le test. Si $Q_{\exists}(A) = V$, c'est que A est non vide. Prenons alors une permutation arbitraire p . L'image de A par p est encore un sous-ensemble non vide, donc $Q_{\exists}(p(A)) = V$. Inversement si A est vide, $p(A)$ le sera tout autant. Il n'en va pas de même pour le pseudo quantificateur existentiel « il existe un ami de Jean tel que... ». En effet, on peut par exemple considérer un ensemble $\{\text{Henri}\}$ où Henri est un des amis de Jean, et une permutation p qui envoie Henri sur Laurent, Laurent n'étant pas un ami de Jean. Dans ce cas, on a $Q(\{\text{Henri}\}) = V$, $Q(\{\text{Laurent}\}) = F$ et $p(\{\text{Henri}\}) = \{\text{Laurent}\}$. Donc Q n'est pas invariant par permutation.

4 Voir Bonnay (2008) pour une analyse conceptuelle détaillée des rapports entre généralité et formalité.

5 Ce critère a été utilisé indépendamment dans la littérature sur les quantificateurs généralisés. Voir Mostowski (1957). Sher (1991) présente une défense systématiquement de l'invariance par permutation comme critère de logicité.

Les quantificateurs de la logique du premier ordre sont interprétés par des opérations invariantes par permutation, et les prédicats de second ordre ayant un contenu empirique sont écartés par le critère de Tarski. Mais, à l'instar de « il existe une infinité de x tels que », de « il existe un nombre indénombrable de x tels que », ou encore de « il existe exactement $\aleph_1$ x tels que » (où $\aleph_1$ est le premier cardinal indénombrable), il y a beaucoup de quantificateurs qui ne sont pas des quantificateurs de la logique du premier ordre, qui ne sont pas non plus définissables au premier ordre, et qui sont cependant invariants par permutation et donc logiques selon le critère de Tarski. Si l'on accepte le critère de Tarski, cela suggère simplement que la logique du premier ordre n'épuise pas le domaine de la logique : on peut l'enrichir de nouveaux quantificateurs, comme les quantificateurs de cardinalités infinies précédents, et obtenir un langage que l'on peut encore qualifier à bon droit de logique. L'entreprise de définition de la logique nous amènerait à redéfinir les limites de la logique – si l'on considère que la logique du premier ordre marque les limites « classiques » de la logique, mais cela pourrait être précisément les vertus de l'entreprise que de nous montrer que ces limites doivent être reconsidérées.

6. La revanche de la simplicité

Qu'en est-il de la stratégie de définition que l'on vient d'esquisser relativement au problème particulier que pose la définition de la logique, à savoir le conflit entre le principe de simplicité de la logique et le réquisit de simplicité des définitions ? Les définitions que l'on donne pour les constantes logiques sont données dans la théorie des ensembles – les expressions logiques sont interprétées par des opérations sur les ensembles qui servent de domaine aux structures d'interprétation. Le réquisit de simplicité des définitions est violé d'emblée, pour

autant que la théorie des ensembles est moins simple que la logique. En effet, la théorie des ensembles est une théorie mathématique particulière que l'on peut formuler grâce à la logique et il semble que ses axiomes et théorèmes jouissent d'une évidence moindre que les lois logiques – l'hypothèse du continu est un principe discuté, sur la validité duquel les théoriciens des ensembles peuvent être en désaccord, alors que la plupart des mathématiciens⁶ s'accorderaient sur la validité des lois de la logique classique. Néanmoins, l'entreprise de définition ne perd pas tout son intérêt, dans la mesure où on accepte de ne pas la considérer uniquement dans une perspective fondationnelle. En adossant la logique à la théorie des ensembles, *via* une définition ensembliste des constantes logiques, on prend acte de ce que logique et mathématiques forment un tout. La logique fournit l'arrière-plan dans lequel les théories mathématiques sont développées. Réciproquement, les mathématiques fournissent l'arrière-plan dans lequel les langages logiques sont définis et étudiés⁷, et l'on peut ce faisant obtenir des résultats métathéoriques hautement non triviaux portant sur les systèmes étudiés.

Mais alors le principe de simplicité de la logique est-il respecté ? Une fois qu'on a accepté de travailler dans un cadre ensembliste, il appartient précisément au critère de logicité, destiné à isoler parmi les opérations sur un domaine donné celles qui sont logiques, d'assurer que la spécificité des notions logi-

6 Bien sûr un mathématicien intuitionniste sera en désaccord avec un mathématicien classique par exemple quant à la validité du tiers-exclu. Il n'en restera pas moins que le développement des théories mathématiques présuppose un accord sur la logique dans laquelle ces théories sont développées, puisque ce qui compte comme un théorème d'une théorie mathématique donnée dépend des lois logiques acceptées. Au moins dans cette mesure, l'accord sur les vérités logiques apparaîtra comme plus fondamental que l'accord sur les vérités de telle ou telle théorie mathématique.

7 En particulier, Sher (1991) place cette idée d'échange théorique entre logique et mathématiques au cœur de sa conception de la logique associée à l'adoption du critère de Tarski.

ques est bien prise en compte. L'analyse conceptuelle de Tarski qui le mène au critère d'invariance par permutation vise bien dans une certaine mesure à rendre compte du caractère élémentaire de la logique, où l'élémentaire est assimilé au général. En effet, Tarski justifie l'adoption du critère d'invariance par permutation en référence au classement par Klein des théories géométriques à l'aide de leurs invariants. La géométrie euclidienne étudie les notions invariantes relativement aux transformations de l'espace qui préservent les ratios de distance. La topologie étudie les notions invariantes relativement aux transformations de l'espace qui préservent la continuité. Intuitivement, la topologie est plus élémentaire que la géométrie euclidienne ; la géométrie euclidienne s'intéresse à un type bien particulier d'espace, les espaces euclidiens, alors que la topologie ne s'intéresse qu'aux propriétés les plus générales de l'espace. Le point est alors que cette différence dans les degrés de généralité peut être mesurée à travers la relation d'ordre correspondant aux classes de transformation associées. Plus une théorie est invariante relativement à une large classe de transformations, c'est-à-dire plus elle fait abstraction des propriétés particulières des domaines étudiées, plus elle est générale. Toute transformation qui préserve les ratios de distance est continue, mais la réciproque n'est pas vraie. Pour cette raison, la topologie est plus générale que la géométrie euclidienne. Tarski, parce qu'il identifie la logique à la théorie la plus générale est alors conduit à l'identifier à l'étude des notions invariantes par la plus grande classe de transformations, qui n'est autre que la classe de toutes les permutations

Si l'on accepte l'équation entre généralité et simplicité, et la formalisation des degrés de généralité en termes d'ordre engendré par les classes de transformation associées, on devrait considérer que le critère de Tarski permet de sauvegarder le principe de simplicité de la logique alors même que le réquisit de simplicité des définitions a été abandonné. Ce critère sauvegarderait le

principe de simplicité de la logique en isolant, parmi toutes les opérations définissables de manière ensembliste, celles qui ont la généralité qui sied aux opérations logiques. Mais on a vu que des propriétés comme « être le premier cardinal indénombrable » passaient le test de Tarski. Intuitivement, de telles notions sont pourtant typiquement des notions ensemblistes qui « manquent de simplicité » : la question de savoir ce qui compte comme premier cardinal indénombrable est disputée, puisque l'hypothèse du continu l'est. Il y aurait donc une sorte de revanche de la simplicité. En abandonnant le réquisit de simplicité des définitions, on a accepté de travailler dans un langage ensembliste pour définir la logique. Ce faisant, on a cherché à capturer la spécificité de la logique, sa généralité, à travers le critère de Tarski en termes d'invariance par permutation. Mais, sans doute parce que la théorie d'arrière-plan que l'on utilise, la théorie des ensembles, est une théorie tout sauf simple, on a néanmoins laissé s'infiltrer, pour ainsi dire, des notions éminemment complexes au sein des notions logiques.

Si le critère de Tarski capture bien l'idée de généralité, ce qui précède suggère que l'équation entre généralité et simplicité n'est pas correcte. Certaines opérations invariantes par permutations sont tout sauf simples. Donc si les opérations invariantes par permutation sont bien les opérations les plus générales, il y a des opérations parmi les plus générales qui ne sont pas pour autant simples. Conceptuellement, ceci n'est d'ailleurs pas tellement surprenant : la généralité d'une opération la caractérise relativement à son domaine d'application, une opération générale est indifférente aux propriétés particulières des objets. Mais pourquoi devrait-on s'attendre à ce que toutes les opérations de ce genre soient élémentaires ? Afin de ne pas faire perdre à l'entreprise de définition une grande partie de son intérêt, et afin d'obtenir une caractérisation de la classe des expressions logiques qui soit en accord avec le principe de simplicité de logique,

il conviendrait donc de compléter le critère de Tarski par une contrainte *sui generis* de simplicité.

7. La simplicité en théorie des ensembles

La situation est alors la suivante. Dans une métathéorie ensembliste, on définit les opérations sur les domaines d'interprétation susceptibles de constituer des interprétations admissibles pour des symboles logiques. Parmi toutes les opérations possibles, seules les plus générales nous intéressent, ce sont celles qui satisfont le critère de Tarski. Mais parmi les plus générales, on ne voudrait encore retenir que les plus simples. Mais comment capturer la simplicité d'une opération ? On pourrait même objecter que la simplicité d'une opération est une propriété épistémique subjective, qui est relative à celui qui considère l'opération en question. Et que cette propriété épistémique dépend notamment du « niveau d'entraînement » du sujet en question. « Être dénombrable » est certainement une notion complexe pour l'homme de la rue, elle cesse de l'être pour l'étudiant en mathématiques, et elle est « triviale » pour le théoricien des ensembles. Il serait alors douteux qu'il soit possible de capturer une bonne notion de simplicité pertinente pour la délimitation de la classe des expressions logiques. En effet, il n'existerait pas de notion objective de simplicité à capturer, et les notions subjectives variables de simplicité qui existent seraient à la fois difficiles à formaliser et peu pertinentes quant à la délimitation de la logique, s'il est vrai que l'on doit donner une réponse objective à la question de savoir ce qui compte comme logique.

A y réfléchir davantage, cette objection n'est peut-être pas aussi dirimante qu'il peut sembler au premier abord. En effet, on ne cherche pas à caractériser une notion « absolue » de simplicité. On a accepté de travailler dans un cadre métathéorique en-

sembliste, et *dans ce cadre*, on se demande ce qui compte comme des opérations élémentaires. La simplicité que l'on cherche à capturer est la simplicité relativement à la théorie des ensembles qui nous sert de théorie d'arrière-plan. La simplicité ne devrait pas alors être indexée sur les capacités cognitives variables des sujets, mais sur les propriétés de la théorie d'arrière-plan.

Qu'est-ce alors qu'une opération simple relativement à la théorie des ensembles dans laquelle cette opération est définie ? Pour esquisser une réponse à cette question, nous allons nous inspirer des travaux réalisés à partir des années 1970 sur les définitions ensemblistes des logiques abstraites et sur les logiques absolues⁸. Nous allons en fait voir deux lignes de réponses, convergentes. La première est sémantique : étant donné un modèle de la théorie des ensembles, une opération définie à l'intérieur de ce modèle pourrait légitimement être considérée comme simple si elle ne dépend pas trop des caractéristiques spécifiques de ce modèle. Imaginons que l'on passe d'un modèle particulier à un modèle plus 'gros' qui le contient, une opération simple devrait donner les mêmes résultats lorsqu'on passe du 'petit' au 'gros' modèle, et inversement. Considérons une opération qui détermine si un ensemble est dénombrable, c'est-à-dire s'il existe une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des entiers. Plaçons-nous dans un modèle dénombrable de ZFC et considérons dans ce modèle un ensemble indénombrable particulier. Il n'existe pas *dans ce modèle* de bijection entre cet ensemble et l'ensemble des entiers du modèle. Mais rien n'empêche – et on peut le faire par forcing – de se placer dans un modèle plus grand dans lequel une telle bijection existe. Le même ensemble apparaîtra alors comme dénombrable dans ce nouveau modèle. En ce sens, « être indénombrable » n'est pas une propriété simple ; c'est une propriété qui dépend de

8 Voir la présentation générale, voir Väänänen, (1985).

l'existence de telle ou telle bijection dans le modèle, et des bijections qui n'existent pas dans un 'petit' modèle dénombrable peuvent exister dans un plus 'gros'. La notion technique d'absoluité⁹, introduite par Gödel (1940), vise précisément à capturer cette idée. Relativement à une théorie T , une formule est dite persistante si elle est préservée lorsqu'on passe d'un modèle de T à une extension finale de ce modèle qui est encore un modèle de T . Une formule absolue relativement à T est une formule qui est persistante et dont la négation est encore persistante. Une opération absolue relativement à une théorie T est une opération définissable à l'aide d'une formule absolue. Si l'absoluité reflète bien le desideratum de simplicité, nous devrions donc nous intéresser aux opérations qui sont absolues relativement à la théorie ensembliste d'arrière-plan, disons aux opérations absolues relativement à ZFC.

Selon une autre ligne de réponse, la simplicité d'une opération définie de manière ensembliste pourrait être évaluée en fonction de la simplicité syntaxique de la formule qui la définit¹⁰. Typiquement, la complexité d'une formule est liée aux alternances de quantificateurs de cette formule. Soient $\varphi(x)$, $\varphi'(x,y,z)$ des formules sans quantificateurs non bornés, on considèrera volontiers que la formule $\exists x\varphi(x)$ est plus simple que la formule $\forall x\exists y\forall z \varphi'(x,y,z)$. On dit qu'une formule est Σ_1 si elle est équivalente à une formule comme $\exists x\varphi(x)$, c'est-à-dire à une formule constituée par un préfixe de quantificateurs existentiels et une formule sans quantificateurs non bornés. On dit qu'une formule est Π_1 si elle est équivalente à une formule comme $\forall x\varphi(x)$, c'est-à-dire à une formule constituée par un

9 Le fait que certaines opérations invariantes par permutation ne soient pas absolues est également mentionné par Feferman (1999), qui y voit un argument contre le critère de Tarski.

10 La pertinence d'une caractérisation syntaxique de la simplicité des opérations logiques, indépendamment du critère d'absoluité, nous a été suggérée par J. van Benthem.

préfixe de quantificateurs universels et une formule sans quantificateurs non bornés. Une formule est Δ_1 si elle est à la fois Π_1 et Σ_1 . D'un point de vue syntaxique, une formule Δ_1 peut raisonnablement être considérée comme une formule exprimant une propriété « simple » puisqu'on peut la voir soit comme une formule purement existentielle, soit comme une formule purement universelle.

Cette approche syntaxique de la simplicité a ses limites. Si, intuitivement, la complexité quantificationnelle du *definiens* apparaît certes comme une bonne mesure du degré de complexité du *definiendum*, nous n'avons sans doute pas donné d'arguments complètement convaincants quant à la nécessité d'identifier simplicité et définissabilité *par une formule Δ_1* . Après tout, être définissable par une formule Δ_0 (sans quantificateurs non bornés), c'est être encore plus simple qu'être définissable par une formule Δ_1 , et il en va *a fortiori* de même pour les opérations définissables sans quantificateurs du tout (même bornés). Néanmoins, un résultat technique, prouvé par Feferman et Kreisel (voir Feferman 1968), établit une corrélation remarquable entre simplicité syntaxique et absoluité : les formules absolues relativement à une théorie T sont précisément les formules Δ_1 relativement à cette théorie. Malgré le vague qui entoure le passage de la comparaison de la complexité des formules par la comparaison de leur complexité quantificationnelle à l'identification des formules Δ_1 comme les formules suffisamment simples, la convergence de la notion sémantique de simplicité – en termes d'absoluité – et de la notion syntaxique – être définissable par une formule Δ_1 – suggère que le concept de simplicité que l'on capture ainsi est relativement robuste. En effet, on peut dire, de manière quelque peu relâchée, que ce qui est simple lorsque l'on regarde les modèles est le même que ce qui est simple lorsque l'on regarde les formules.

Arrivés là, nous devrions considérer que les opérations logiques sont les opérations qui sont à la fois générales et simples. Cette caractérisation est une caractérisation précise, dans la mesure où le test de Tarski nous permet d'isoler les opérations générales et où la notion gödelienne d'absoluité nous permet d'isoler les opérations simples. Cette caractérisation n'est pour autant, en l'état, qu'une suggestion. Contentons-nous ici d'esquisser certains développements attendus. D'un point de vue technique, on voudrait identifier les systèmes qui vont compter comme logiques si l'on accepte de délimiter sur ces bases la classe des constantes logiques. Les résultats de Barwise (1972) sur les logiques « absolues » donnent des éléments de réponse, en pointant le rôle particulier joué par les logiques infinitaires comportant des conjonctions et disjonctions infinies mais des quantifications seulement sur des ensembles finis de variables. D'autres questions sont ouvertes. La notion d'absoluité est relative à la théorie des ensembles sous-jacentes. ZFC est une théorie « riche ». On pourrait considérer qu'il serait davantage pertinent, si c'est la simplicité qui nous intéresse, de considérer une théorie des ensembles elle-même plus simple comme KP. De plus, l'articulation technique et conceptuelle entre invariance, généralité et simplicité demanderait à être analysée plus finement. Bonnay (2008) soutient, sur la base d'une conception plus large de la notion d'invariance, que l'invariance par permutation ne permet pas de capturer adéquatement la généralité, et propose d'utiliser la contrainte d'absoluité comme une contrainte non pas sur les opérations définies mais sur les notions d'invariance utilisées. La correspondance avec les logiques absolues au sens de Barwise n'est que partielle.

8. Conclusion

Nous avons cherché à préciser la nature du projet d'une définition de la logique, compris comme définition des constantes logiques, et à mettre en relief la difficulté conceptuelle propre d'un tel projet, à travers la tension entre le réquisit de simplicité des définitions et le principe de simplicité des définitions. Nous ne pensons pas que cette tension constitue un obstacle insurmontable, qui établirait la vanité de l'entreprise. Mais nous pensons que l'on peut évaluer toute tentative de réalisation à la lumière de la manière dont elle résout cette tension.

Nous avons discuté deux approches particulières, une approche preuve-théorique et une approche modèle-théorique, dont nous avons suggéré qu'elles correspondaient à deux manières différentes de négocier la résolution de la tension entre simplicité des définitions et simplicité de la logique. Nous avons cherché à éclairer des travaux antérieurs (Bonnay, 2008) à la lumière de cette problématique, travaux qui se plaçaient spécifiquement dans le cadre modèle-théorique. Définir de manière ensembliste les notions logiques, c'est renoncer d'emblée au réquisit de simplicité des définitions. Dans une perspective non fondationnelle visant à comprendre les échanges entre logique et mathématiques, un tel renoncement fait sens. Tout l'enjeu devient alors de voir si, et comment, l'on peut retrouver l'idée de simplicité de la logique alors même qu'on a accepté de travailler dans une théorie d'arrière-plan ensembliste « complexe ». Utiliser pour ce faire la notion d'absoluité, ou ses équivalents syntaxiques, constitue notre suggestion, qui se situe ainsi dans le prolongement des travaux mathématiques sur les logiques absolues.

Références bibliographiques

- BARWISE J. (1972). Absolute logics and $L_{\infty, \omega}$. *Annals of Mathematical Logic* vol. 4, 309-340.
- BONNAY D. (2008). Logicality and invariance. *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 14.1, 29-68.
- BONNAY D. & SIMMENAUER B. (2005). Tonk strikes back. *Australasian Journal of Logic* vol. 3, 33-44.
- DOSEN K. (1994). Logical constants as punctuation marks. *Notre Dame Journal of Formal Logic* vol. 30, 362-81.
- FEFERMAN S. (1968). Persistent and invariant formulas for outer extensions. *Compositio Mathematica* vol. 20, 29-52.
- FEFERMAN S. (1999). Logic, logics, and logicism. *Notre Dame Journal of Formal Logic* vol. 40, 31-54.
- GÖDEL K. (1940). The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. *Annals of Mathematical Studies* vol. 3, Princeton, Princeton University Press. [Réimpr. in : S. Feferman *et alii* (eds), *Kurt Gödel, Collected Works*. Oxford : OUP, 1990, vol. II, 33-101].
- HILBERT D. (1899). Lettre à Frege du 29 décembre 1899. In : F. Rivenc & Ph. Rouilhan de, *Logique et fondement des mathématiques*. Paris : Payot, 1992 [Tr. fr. J. Dubucs].
- JORAY P. (2008). Définitions explicites et abstraction, ici-même, 135-157.
- MOSTOWSKI A. (1957). On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae* vol. 44, 12-36.
- PASCAL B. (1963) *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*. In : B. Pascal, *Œuvres complètes*. Paris : Seuil, 348-358.

- SAMBIN G., BATTELOTTI G. & FAGGIAN C. (2000). Basic logic : reflection, symmetry, visibility. *Journal of Symbolic Logic* vol. 65, 979-1013.
- SHER G. (1991). *The Bounds of Logic*. Cambridge : MIT Press.
- TARSKI A. (1936). Über den Begriff der logischen Folgerung (On the concept of logical consequence). *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique* vol. 7, 1-11 [Trad. ang. in : Tarski 1983, 409-20].
- TARSKI A. (1986). What are logical notions. *History and Philosophy of Logic* vol. 7, 143-154.
- VÄÄNÄNEN J. (1985). Set-Theoretic definability of logics. In : J. Barwise & S. Feferman (eds), *Model-Theoretic Logics*. New York : Springer, 599-644.

DÉFINITION STRATIFIÉE DE LA VÉRIDICITÉ

Denis VERNANT

La philosophie occidentale se définit depuis l'origine comme quête du vrai. De Platon à Tarski¹, la vérité fut son objet premier. Dès lors, la question philosophique par excellence est celle de la *définition* du vrai. C'est précisément cette question que nous voudrions réexaminer ici.

0. La définition philosophique

La recherche d'une définition du vrai impose une réflexion préalable sur la méthodologie de la définition philosophique. Selon nous, toute définition proprement *philosophique* doit répondre aux deux réquisits suivants : une analyse dialectique préalable ; un traitement stratifié de la complexité de ce qui est à définir.

0.1. L'analyse dialectique

Aristote nous a appris que tout traitement philosophique d'une question doit commencer par l'examen de la signification des termes employés, de la diversité des argumentations utilisées, et de la valeur des idées communément admises². Le Stagirite n'avait pas attendu la philosophie analytique pour pro-

1 Sa devise, démarquée de l'adage antique, était précisément : *Inamicus Plato sed magis amica veritas* !

2 Cf. *Topiques*, trad. par J. Brunschwig, Paris : Belles Lettres, 1967, 1,1, 100 a 18-21 & 1,2, 101 a 34-36.

poser une présentation et une analyse langagière de la question. À cette analyse langagière initiale, il adjoignait un examen dialectique permettant initialement de parcourir et de critiquer le lieu commun [*topos*] où s'échangent les significations admises et l'opinion courante [*doxa*].

Pour ce qui concerne la signification du terme « vrai » appliqué à la quête philosophique, nous écarterons d'emblée les usages où ce terme fonctionne comme qualificatif d'objet, c'est-à-dire d'entité extra-langagière, synonyme de *véritable* (« C'est un vrai socialiste »), d'*authentique* (« C'est un vrai Delacroix »), de *juste* (« Il joue vrai »), de *fidèle* (Ce tableau est criant de vérité »)³.

Outre le traitement langagier de la question, nous assumerons la *nature langagière* de ce qui est à définir. Aussi interpréterons-nous le terme « vrai » comme prédicat d'une *entité langagière* (dont le statut sera précisé progressivement). C'est pourquoi la question deviendra celle non du vrai, mais de la *véridicité* : de ce qui est *dit* vrai⁴. Ce faisant, nous retrouvons, en-deçà même d'Aristote, l'affirmation fondatrice de la nature discursive, et, mieux, *dialogique* de l'exercice philosophique tel qu'il ressort

3 Il convient par ailleurs de distinguer la problématique de la véridicité de celle de la véracité, cf. D. Vernant (1997, chap. IV, 59-85). Voir aussi G. Frege (1971, 171) (« Recherches logiques, 1 La pensée ») : « On n'emploiera pas le mot [vérité] au sens de "vérace" ou "sincère", ni au sens qu'il reçoit dans les questions d'art, par exemple quand on traite de la vérité dans l'art, quand on donne la vérité comme but à l'art, quand on parle de la vérité d'une œuvre d'art ou d'un sentiment vrai. On peut aussi placer le mot "vrai" devant un autre mot pour dire que ce dernier doit être pris dans son sens propre, non adulté ».

4 Toute l'œuvre de Jean-Blaise Grize, à l'hommage duquel nous sommes heureux de nous associer ici, témoigne de cette nécessité d'aborder les aspects épistémologique, logique, et psychologique dans et par l'analyse des langages formels et naturels, des schématisations symboliques, et des interactions sociales. À noter qu'on attribue souvent la vérité à la croyance, mais celle-ci, dans la conception représentationnelle, s'interprète en termes d'*attitude propositionnelle*. Sur la nature des « états mentaux », cf. D. Vernant (2008, chap. VII).

de la pratique socratique et de la méthode « dialectique » des Mégariques⁵.

Quant à l'opinion courante, massivement et presque exclusivement admise, il s'agira, bien entendu, de la définition correspondantiste traditionnelle. Nous en rappellerons initialement les critiques principales. Pour sortir de l'impasse à laquelle conduit inéluctablement l'approche représentationnelle et réaliste qu'impose cette définition correspondantiste, nous devons alors adopter une démarche actionnelle et constructiviste.

0.2. La stratification de la question

Secouant le joug de la tradition imposée par la reprise platonicienne⁶, nous poserons la question de la véridicité en revenant aux intuitions inaugurales et en les enrichissant des développements conceptuels et analytiques autorisés par les recherches contemporaines sur le langage et son usage dialogique.

Afin d'assurer clarté, rigueur et précision dans la définition de ce phénomène complexe qu'est la véridicité, nous développerons une *approche stratifiée* qui, pas à pas, en examinera les aspects logique, pragmatique, dialogique, et enfin praxéologique. Chaque niveau, conformément à ses propres contraintes, fournira un apport spécifique à l'enquête philosophique globale.

Le niveau logique, essentiellement tarskien, proposera une définition liminaire de l'usage *sémantique* du prédicat de vérité appliqué aux *énoncés*.

5 Chez les Mégariques, la pratique « dialectique » de l'échange questions/réponses fut systématisée pour devenir une méthode discursive et rationnelle d'établissement du vrai, cf. R. Muller (1988, Partie 2, chap. III).

6. Platon opéra un glissement de la pratique philosophique à sa représentation théâtrale, de l'échange oral à sa restitution écrite. De la maïeutique socratique ne subsista plus que son ombre, du dialogue effectif, sa relation dialogale. La méthode dialectique fut ravalée au statut de propédeutique à la Réminiscence comme souvenir de la contemplation des vérités éternelles, cf. notamment la fin de l'interrogatoire de l'esclave dans le *Menon*, 86b-86e.

Le niveau proprement pragmatique, avec Austin, traitera des *énonciations* déclaratives engageant un rapport du locuteur au vrai. Il permettra d'esquisser une définition illocutoire des *actes véridictionnels*.

Le niveau dialogique fournira ensuite les règles du *jeu véridictionnel* permettant de s'accorder aussi bien sur la validité formelle des dialogues *a priori* que sur la « vérité matérielle » des discussions prosaïques. L'enjeu sera celui d'une *Logique Dialogique de la Véridicité*.

Enfin, le niveau praxéologique permettra de rendre raison en termes résolument actionnels des rapports des mots aux mondes, du langage au « réel ». La distinction d'une pluralité de *registres de véridicité* permettra de déterminer pour les différents champs concernés les règles d'évaluation méthodique de la véridicité.

Cette approche stratifiée autorisera seule une *définition philosophique complète de la vérité* en permettant une analyse conceptuelle de la notion, de ses usages, de ses porteurs, ainsi que des critères du vrai.

Sans pouvoir ici entrer dans les détails à chaque niveau, ni même en proposer la formalisation que nous avons développée ailleurs, nous espérons en dire suffisamment pour étayer notre présente thèse selon laquelle la question *philosophique* de la vérité requiert une *analyse stratifiée* du concept de *véridicité*.

1. La tradition correspondantiste

Pour le sens commun, la vérité ne fait pas véritablement question. Il suffit de constater qu'il fait beau pour garantir la vérité de l'énonciation « Il fait beau ». À ce niveau de généralité, tout le monde sera d'accord. Reste à interpréter précisément ce que cela signifie. Or, la tradition philosophique vient immédiatement proposer son *interprétation correspondantiste* :

l'énonciation « Il fait beau » est vraie si elle correspond au fait constaté selon lequel il fait beau.

Cette conception, qui remonte à Platon⁷, est encore soutenue par le Wittgenstein du *Tractatus*. La correspondance entre la proposition-image [*Satz-Bild*] et le fait dont elle est l'image est alors interprétée en termes d'*isomorphie structurelle* et de loi de projection :

Le disque de phonographe, la pensée musicale, la notation musicale, les ondes sonores sont tous, les uns par rapport aux autres, dans la même relation représentative interne [*jener abbildenden internen Beziehung*] que le monde et la langue. À tous est commune la structure logique⁸.

Cette réinterprétation, apparemment rigoureuse en ce qu'elle fait appel aux concepts fondamentaux de la logique des relations⁹, semble apporter une définition satisfaisante et par là-même définitive. Cela semblerait justifier le fait que l'homme de la rue se repose sur son solide bon sens et que le philosophe continue de dormir de son sommeil dogmatique. Et pourtant, cette définition correspondantiste de la vérité, si répandue soit-elle, ne saurait résister à un examen un tant soit peu attentif.

2. Critique de la conception correspondantiste

La conception correspondantiste traditionnelle peut faire l'objet de plusieurs critiques. Nous n'en retiendrons pour notre propos que trois principales.

La première porte sur la possibilité d'un découpage structurel qui soit apte à assurer la correspondance entre la proposition et

7 Cf. le *Sophiste*, 262e-263b.

8 4.014. Voir aussi 3.11, 3.12, 4.0141 et J. Bouveresse (1976, chap. 1, § 6, 176-184). À noter que cette correspondance se *montre*, mais ne saurait se *dire*.

9 Sur la définition logique du concept crucial de structure, cf. D. Vernant (2001, § 3.1.4.4).

le fait. Il ne saurait y avoir toujours *correspondance* termes à termes entre les éléments de l'énonciation et ceux du fait. Russell avait déjà noté que l'énoncé « Socrate précéda Platon » contient trois mots alors que le fait correspondant n'en comporte que deux dans un certain rapport et il avait insisté sur le fait que dès que l'on recourt aux possibilités du langage secondaire qui intègre les connecteurs, la correspondance biunivoque disparaît¹⁰. Quand on a affaire à des énoncés atomiques, descriptifs, du type : « La Lune est ronde », on conçoit bien le fait correspondant, mais, sauf à admettre l'existence de faits négatifs, l'usage de la négation n'autorise plus la correspondance et, par exemple, il est difficile de voir quel fait vérifie un conditionnel contrefactuel du genre : « Si j'avais pu intervenir, cela ne se serait pas passé comme cela »¹¹.

La deuxième objection, cruciale, met en cause la nature des termes de la relation de correspondance. Cette critique est au centre de l'analyse proposée par Frege en 1918 de la notion de vérité. Pour que la *relation* de correspondance ait un sens, il est nécessaire que ses termes soient de *même nature*. Donc, on ne peut comparer ce qui relève du langage, l'énoncé, de la représentation et ce qui relève du réel, le fait :

Un accord ne peut être total que si les choses en accord coïncident, donc ne sont pas de nature différente. On doit pouvoir prouver l'authenticité d'un billet de banque en l'appliquant par recouvrement sur un billet authentique. Mais tenter d'obtenir le recouvrement d'une pièce d'or par un billet de vingt marks serait ridicule. Le recouvrement d'une chose par une représentation ne serait possible que si la chose était, elle aussi, une représentation. Et si la première s'accorde parfaitement avec la seconde, elles coïncident. Or, c'est précisément

10 Cf. B. Russell (1926, chap. 13, 275).

11 Dans le même ordre d'idées, on peut soutenir que la procédure référentielle est tributaire non des seuls mots isolés, ni même de la phrase, mais de la langue conçue comme structure, au sens saussurien du terme cette fois. Dès lors, la question de l'isomorphie se déplace au niveau supérieur des relations langue/monde.

ce que l'on ne veut pas quand on définit la vérité comme l'accord d'une représentation avec quelque chose de réel. Il est essentiel que l'objet réel et la représentation soient différents. À ce compte, il n'y a pas d'accord parfait, pas de vérité parfaite. Il n'y aurait donc absolument rien de vrai, car ce qui est à moitié vrai n'est pas vrai. (Frege 1971, 172)

À cette critique, dirimante, de la relation elle-même, s'ajoute celle portant cette fois sur le statut du relaté. On peut en effet s'interroger sur le statut présupposé de réalité ultime, non discursive, du fait ainsi que sur la possibilité de sa connaissance directe, par accointance. Double interrogation donc : ontologique et gnoséologique.

Dans la philosophie de la représentation, la question de la nature du fait avait alimenté le débat entre Locke et Berkeley. Contre Locke, Berkeley mettait en cause la matérialité même des choses et donc leur indépendance par rapport aux idées :

Mais, direz-vous, bien que les idées elles-mêmes n'existent pas hors de l'esprit, il peut, cependant, y avoir des choses semblables à elles dont elles sont des copies ou des ressemblances, choses qui existent hors de l'esprit dans une substance non pensante. Je réponds qu'une idée ne peut ressembler à rien qu'à une idée ; une couleur, une figure ne peuvent ressembler à rien qu'à une autre couleur ou figure. Si nous regardons un tant soit peu dans nos pensées, nous trouverons qu'il nous est impossible de concevoir de la ressemblance si ce n'est entre nos idées. De plus, je demande si ces originaux supposés, ou choses extérieures, dont nos idées sont les peintures ou les représentations, sont eux-mêmes perceptibles ou non ? S'ils le sont, alors ce sont des idées et nous avons gain de cause, mais si vous dites qu'ils ne le sont pas, j'en appelle à quiconque pour savoir s'il est sensé d'affirmer qu'une couleur est semblable à quelque chose d'invisible, que le dur ou le mou sont semblables à quelque chose d'intangible et ainsi de suite. (Berkeley 1991, § 8)

Le pendant gnoséologique de cette question ontologique est celui du mode de connaissance des faits. Est en cause alors la possibilité d'une *présentation immédiate*, antépédicative, des faits, que ce soit sous forme de perception directe ou d'accointance. La critique contemporaine de l'empirisme et du réalisme naïf conduit à récuser toute possibilité d'accès direct aux « faits ». Sans même faire appel aux théories contemporaines de la perception, il suffit de rappeler par exemple que le « second » Wittgenstein prenait argument des illusions d'optique pour récuser le caractère neutre et direct de la perception. Le « voir » constitue une *expérience vécue* [*Erlebnis*] qui se révèle dès que se déploie la diversité des *aspects*, des points de vue possibles. Le canard de Jastrow¹² peut simplement être vu comme un canard, mais sous un certain *autre aspect*, il peut aussi être *vu comme* un lièvre :

Certaines choses relatives à la vision nous semblent énigmatiques parce que la vision en elle-même nous semble trop compréhensible. [.../...] Le concept d'aspect est apparenté au concept de représentation. En d'autres termes : le concept « Je le vois maintenant comme » est apparenté à « Je me représente maintenant *ceci* ». (Wittgenstein 1989, 345)

De ces arguments – et de bien d'autres encore¹³ – il semble que l'on puisse conclure comme Frege :

Ainsi échoue-t-on à tenter d'expliquer la vérité comme un accord. Mais tout autre tentative pour définir l'être vrai échoue également. (Frege 1971, 173)

12 Cf. Wittgenstein (1989, 2^e partie, XI, 326).

13. Par exemple, Russell et le premier Wittgenstein considéraient que les faits *atomiques* étaient *indépendants* les uns des autres. Wittgenstein s'aperçut rapidement, notamment à propos des couleurs, qu'il n'en était rien, ce qui le conduira à une conception actionnelle et holiste de l'*arrière-plan*.

Comme Moore et le Russell de 1903, Frege admit la vérité comme idée primitive *indéfinissable*. On sait cependant que Tarski parvint dans les années 30 à une définition logique rigoureuse de la vérité. Il convient donc de l'examiner pour apprécier en quoi elle peut apporter une première réponse à notre interrogation, proprement philosophique, sur la véridicité.

3. La définition logique de la vérité

Unique docteur de Lesniewski, Alfred Tarski, dans son article « Le concept de vérité dans les langages formalisés » de 1933, repris dans « La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique » en 1944, définit logiquement la vérité, plus précisément l'extension du terme « vrai » :

Il s'agit en effet – compte tenu de tel et tel langage – de construire une définition de l'expression « énoncé vrai », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. (Tarski, 1972, vol. 1, 159, trad. modifiée)

De cette définition, qui inaugure la sémantique formelle, nous ne retiendrons que quelques traits nécessaires à la construction du concept de véridicité.

Tarski définit les usages matériellement adéquats du concept de vérité au moyen de sa fameuse *Convention T* :

X est vrai si et seulement si *p*.

Il en résulte que la vérité est prédiquée d'un énoncé¹⁴ et constitue donc un métaprédicat. Et ce métaprédicat est tributaire du

14 Nous ne reprenons pas ici le choix par G. Kalinowski du terme de « proposition » pour traduire *zdanie* dans « Le concept de vérité dans les langages formalisés ». On notera que Tarski utilise dans l'article de 1944 « The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics » le terme anglais de « sentence », et que, dans l'article de 1933, il prend soin de préciser qu'il s'agit d'une « entité linguistique », cf. p. 163, note 3.

langage dans lequel l'énoncé en question prend sens. La vérité ne s'applique qu'à des objets langagiers.

Comme on le sait, Tarski assigne des conditions de correction formelle au langage en jeu¹⁵. Mais nous importe seulement ici le fait, simple et fondamental, selon lequel *la vérité est relative à un langage donné*. On ne saurait donc plus parler de vérité en soi ou, comme le faisaient Descartes et les représentationalistes, d'idées vraies appréhendées indépendamment de toute expression langagière. *Ab initio*, la vérité n'advient que dans et par un langage :

C'est ce que les hommes *disent* qui est vrai et faux ; et ils sont d'accord dans le *langage* qu'ils utilisent. (Wittgenstein 1989, § 241)

On obtient là le premier trait, proprement fondamental, du concept de véridicité : la vérité doit pouvoir se *dire*.

Toutefois, nous pouvons encore faire un pas de plus en compagnie de Tarski en nous interrogeant sur l'interprétation *philosophique* de sa définition logique du métaprédicat de vérité. Il s'agit notamment de savoir si sa définition justifie logiquement l'interprétation correspondantiste. Des lecteurs peu scrupuleux n'hésitent pas à trancher par l'affirmative¹⁶. De fait, au début de son article de 1933, Tarski voulant « rendre justices aux intuitions aristotéliennes », évoque la définition correspondantiste traditionnelle et, dans celui de 1944, il se réfère explicitement à la « conception classique aristotélienne de la vérité »¹⁷. Il indique qu'il s'est inspiré de cette intuition initiale pour construire sa définition. En bon élève de Lesniewski, il a inauguré sa réflexion par Aristote (recourant par là-même à la méthodologie prônée par Aristote ! cf. *supra*, 01). Mais cela ne permet en rien

15 On sait que, pour éviter les paradoxes, ce langage doit être *formellement spécifiable* et *sémantiquement ouvert* (distinguant des niveaux de langage).

16 C'est notamment le cas de Popper, cf. *Conjectures et Réfutations*, 331.

17 Cf. respectivement pages 162 et 270.

d'en inférer que sa fameuse convention *T* *doive* s'interpréter en termes correspondantistes, tels :

L'énoncé « la neige est blanche » est vrai si et seulement si le *fait* est que la neige est blanche.

En réalité, si Tarski part bien de l'intuition aristotélicienne à titre heuristique, il aboutit à une définition purement logique. Cela ne veut pas dire que sa définition récuse l'interprétation correspondantiste. Comme on vient de le voir, une telle interprétation est parfaitement possible. Mais – et c'est là l'essentiel – *d'autres le sont tout autant*. La définition formelle de Tarski autorise plusieurs interprétations et, en cela, s'avère *philosophiquement neutre* :

En fait, la définition sémantique de la vérité n'implique rien concernant les conditions sous lesquelles un énoncé tel que « La neige est blanche » peut être asserté. Elle implique seulement que toutes les fois que nous assertons ou *rejetons* cet énoncé, nous devons être prêts à asserter ou à *rejeter* l'énoncé corrélatif : « L'énoncé "La neige est blanche" est vrai ». Ainsi pouvons-nous accepter la conception sémantique de la vérité sans abandonner nos positions épistémologiques quelles qu'elles soient. Nous pouvons demeurer des réalistes naïfs, des réalistes critiques ou des idéalistes, des empiristes ou des métaphysiciens – tout ce que nous étions auparavant. La conception sémantique de la vérité est *entièrement neutre* par rapport à toutes ces attitudes. (Tarski 1972-1974, vol. 2, 295, traduction modifiée, nous soulignons)

Techniquement, la définition logique tarskienne n'impose que l'*assertabilité* de l'énoncé en question. Cette définition est philosophiquement neutre en ce qu'elle n'engage pas sur les *conditions* d'assertabilité de cet énoncé. Elle signifie que lorsqu'on asserte le métaénoncé « "La neige est blanche" est vrai », on est prêt à asserter l'énoncé « La neige est blanche ». Réciproquement, l'assertion du métaénoncé « "La neige est blanche" est

faux », requiert le *rejet*, la dénégation de l'énoncé « La neige est blanche ». En fidèle héritier de la tradition twardowskienne, Tarski met sur le même plan acceptation et rejet [*odrzućenie*], assertion et dénégation. Si la négation relève du contenu de l'énoncé, la fausseté relève bien d'un acte véridictionnel de rejet, de dénégation¹⁸. Dès lors, la question du vrai et du faux se réduit à celle d'un *engagement véridictionnel* sur l'énoncé : son assertion ou sa dénégation¹⁹. Mais Tarski ne va pas plus loin. Il convient en effet de distinguer la question sémantique d'une *définition* du prédicat de vérité de celle, gnoséologique, de l'élaboration d'un *critère* de vérité²⁰.

In fine, la définition tarskienne ne s'avère pas purement *décisionnelle* puisqu'elle ne réduit pas l'attribution de la vérité à un simple énoncé²¹, mais à un *acte d'engagement* sur cet énoncé :

18 On ne confondra pas l'opérateur logique de négation avec l'acte pragmatique de dénégation. Pour sa définition, cf. notre article « La genèse logique du concept de dénégation de Frege à Slupecki », dans R. Pouivet & M. Rebuschi (2006).

19 Assertion et dénégation constituent des actes d'*estimation* par lesquels le locuteur s'engage véridictionnellement. Il peut aussi se désengager par une simple *considération*. Sur la logique pragmatique des actes véridictionnels et son axiomatisation en un *hexagone alternatif* des oppositions, cf. D. Vernant (2008, chap. VI & Annexe).

20 Cf. Roger Martin (1964, chap. V, 92-9) : « Quand nous nous demandons si une phrase d'une langue étrangère est vraie au sens usuel du mot, nous commençons par la traduire et nous examinons ensuite si sa traduction est vraie. Nous dirons ainsi que *Es regnet* est une phrase allemande vraie si et seulement si il pleut .../... Il est bien évident en effet qu'une définition sémantique de la vérité ne prétend pas tenir lieu de critère de vérité : dire "*Es regnet*" est vrai "si et seulement si il pleut" n'a jamais permis à personne de savoir s'il pleuvait ou non. Il en va de même quand on traduit, non une langue étrangère, mais une langue formelle. On ne peut donc reprocher à la sémantique de ne pas aider à résoudre un problème qui est en dehors de son domaine ».

21 On prendra ainsi garde au fait que « Il est faux que *p* » n'est pas équivalent à $\sim p$. La question du faux (comme du vrai) se pose en termes de jugements exprimés par des actes de discours (assertion et dénégation) et non des seuls contenus propositionnels.

L'énoncé « la neige est blanche » est vrai si et seulement si l'on a des raisons d'asserter que la neige est blanche²².

Comme on le constate, l'approche tarskienne présente le grand mérite de bien poser la question de la vérité et d'en fournir la définition sémantique initiale. Pour autant, elle est loin d'épuiser l'interrogation philosophique. Il importe maintenant, avant même d'en venir aux critères de véridicité, de s'interroger sur le concept d'assertabilité sur lequel se clôt la définition logique.

4. Dimension pragmatique de la véridicité

Dans une perspective strictement logique, on conçoit aisément que les porteurs de vérité soient les énoncés d'un langage artificiel dont on s'est assuré de la correction formelle et de l'ouverture sémantique. Il ne saurait en être de même dès lors que l'on s'intéresse à la vérité dans une perspective pragmatique mettant en jeu la langue naturelle et son utilisation effective dans un contexte actionnel déterminé. Sur quoi porte alors le prédicat de vérité ? Des éléments de réponse sont fournis par Austin dans son article de 1950 sur « La vérité »²³.

Pour lui, la vérité s'applique non à une proposition logique, ni même à un énoncé sémantique, mais à une *énonciation* en tant qu'*acte* d'énonciation daté et situé :

Une énonciation est faite, et cela constitue un événement historique : l'énonciation par un certain locuteur ou écrivain de certains mots (une

22 À noter que la théorie standard des actes de discours assigne à l'assertion pour *condition préparatoire* que « le locuteur a des raisons de croire en la vérité du contenu propositionnel », D. Vanderveken (1988, chap. IV, 127).

23 À noter que, dans cet article, Austin recourt à la « méthode Aristotélicienne » en s'interrogeant d'abord sur le qualificatif de « vrai », puis en réinterprétant le correspondantisme, Cf. Austin (1994, 92-102).

phrase) adressée à un public, qui font référence à une situation ou à un événement, etc., historique²⁴. (Austin 1994, 97)

Le même énoncé « C'est à moi », ayant une signification sémantique fixée abstraitement, peut engendrer deux énonciations qui, selon le locuteur et la situation, peuvent recevoir des valeurs de vérité différentes²⁵. Reste qu'Austin est conscient du fait selon lequel la vérité n'est pas en cause dans toute forme d'énonciation. Aussi exclut-il explicitement :

Une formule d'un calcul, une énonciation performative, un jugement de valeur, une définition, ou encore quand [l'énonciation] fait partie d'une œuvre de fiction. (Austin 1994, 109)

Hormis celui du jugement axiologique²⁶, les autres cas relèvent tous à divers titres de stratégies pragmatiques de *désengagement*. Ceci confirme que la vérité n'est en jeu que dans le cas d'énonciations *déclaratives* exprimant un *engagement véridictionnel* du locuteur, donc dans les cas d'assertion ou de dénégation par lesquels le locuteur admet ou rejette la vérité de ce qu'exprime le contenu propositionnel. On obtient ainsi la version pragmatique de l'assertabilité tarskienne.

Mais Austin fait un pas de plus en spécifiant que la vérité engage un rapport entre les mots et le monde²⁷. D'une certaine

24 Nous traduisons *statement* par « énonciation » et non, comme le traducteur, par « affirmation » (au sens usuel) dans la mesure où nous réservons ce terme pour nommer l'opération logique opposée à la négation. Comme on va le voir, il s'agit en fait d'énonciations *déclaratives* visant la vérité.

25 « On peut utiliser la même phrase pour faire des énonciations différentes (je dis : "C'est à moi", vous dites : "C'est à moi" »), cf. Austin (1994, 96).

26 Nous ne pouvons ici poser la question des valeurs qui se distingue de celle de la vérité, de même qu'on ne saurait confondre pragmatique et éthique, cf. notre article : « Trois remarques sur le langage et la morale, ou l'apport de la pragmatique à la métaéthique », dans J.-Y. Goffi éd. (2005).

27 Cf. « La vérité », p. 97 : « Il doit exister autre chose que des mots à propos de quoi communiquer au moyen des mots : on pourrait l'appeler "le monde" ». Chez Searle, cette nécessité du monde comme corrélat référentiel prend la forme d'une *présupposition*. Pour

façon, on retrouve alors l'interprétation correspondantiste. Mais celle-ci est fortement amendée et c'est précisément en cela qu'elle nous intéresse ici. En effet, Austin insiste sur le fait que ce rapport des mots au monde n'est en rien de simple dépicition :

Pour être vraie, une énonciation n'a pas plus besoin de reproduire, disons, la « multiplicité », ou la « structure », ou la « forme » de la réalité qu'un mot n'a besoin d'être onomatopéique, ou l'écriture pictographique. Supposer qu'il en est ainsi, c'est tomber à nouveau dans l'erreur qui consiste à retrouver dans le monde les caractéristiques de la langue. (Austin 1994, 101-102)

Le rapport au monde est un rapport *référentiel*, de nature conventionnelle. Il met en œuvre des *conventions descriptives* générales relevant du *type* de situation et d'événement, ainsi que des *conventions démonstratives*, indicielles, particulières relevant de l'*occurrence* idiosyncrasique de l'événement en cause :

On dit d'une énonciation qu'elle est vraie quand l'état de choses historique auquel la relie les conventions démonstratives (celui auquel elle « fait référence ») est du même type que celui auquel les conventions descriptives relient la phrase utilisée pour faire cette énonciation²⁸. (*Ibidem*, 98)

On remarquera ici le statut très particulier assigné au fait : c'est un état de choses ou un événement qui n'est pas *donné* mais *établi* :

Quand un détective dit : « Voyons les faits », il ne se met pas à quatre pattes sur le tapis, mais commence par énoncer une série d'énonciations ; on parle même d'« établir les faits ». (*Ibidem*, 99)

Le fait ne saurait s'atteindre autrement que par une *description* langagière :

une analyse critique de la conception searlienienne du monde dans ses dimensions physiques et sociales, cf. C. Cagnat (2004).

- 28 Les conditions démonstratives explicitent la dimension indexicale, partant pragmatique, que négligeait Tarski (cf. l'énonciation « C'est à moi »).

Quand une énonciation est vraie, il existe bien sûr un état de choses qui la rend vraie, tout à fait distinct de l'énonciation vraie qui en rend compte ; mais il est tout aussi sûr que nous ne pouvons décrire cet état de choses qu'avec des mots (soit les mêmes, soit, avec de la chance, d'autres). Je ne peux décrire la situation dans laquelle il est vrai de dire que j'ai la nausée qu'en disant que c'est une situation dans laquelle j'ai la nausée (ou j'éprouve des sensations de nausée). Toutefois, entre affirmer, même sincèrement, que j'ai la nausée et avoir la nausée, il y a un gouffre profond. (*Ibidem*, 100).

On mesure ici l'importance cruciale du dire dans le processus véridictionnel. L'enjeu est bien celui de *l'établissement du fait* par le discours, par le dire. Le fait n'est pas donné en soi, mais résulte d'une construction d'abord de nature langagière²⁹. Les prédicats de vérité et de fausseté portent sur ce qu'on *dit* du « monde » et engagent une acceptation ou un refus d'une *description* proposée d'un « fait » singulier. Sous cet angle, la vérité n'est pas seulement relative à une langue, mais aussi et surtout à son *utilisation pragmatiquement située et datée*. Dès lors, la vérité admet des degrés et ce qu'Austin appelle des « dimensions » différentes :

Est-il vrai ou faux que Belfast est au nord de Londres ? Ou que la Voie Lactée à la forme d'un œuf au plat ? Ou que Beethoven était alcoolique ? Ou encore que Wellington a gagné la bataille de Waterloo ? Le succès des énonciations varie, tant en degré qu'en dimension ; les énonciations correspondent toujours plus ou moins approximativement aux faits, de différentes manières en différentes circonstances, à des fins différentes. (*Ibidem*, 108)

Le degré et le type d'engagement véridictionnel varie ainsi selon le contexte pragmatique, notamment le locuteur, l'auditeur, leurs intentions, la situation et les fins poursuivies,

29 Cf. Austin (1994, 105) : « La relation entre l'énonciation que *p* et le monde, assertée par l'énonciation que *p* est vraie, est une relation *purement conventionnelle* (relation "établie par la pensée") ».

etc. Dire que « la France est hexagonale » peut satisfaire le maître d'école, non le géographe³⁰. Les faits, en tant que corrélats d'énonciations vraies, sont ainsi *construits* dans et par le discours.

Ayant établi que la vérité était relative non seulement à la langue, mais aussi et surtout à son usage discursif, nous avons progressé dans l'examen de sa dimension foncièrement véridictionnelle. Mais cela ne saurait suffire. Pour stimulante qu'elle soit, l'analyse austinienne souffre, là comme ailleurs, de son défaut congénital : le *monologisme*. La question de la vérité n'est traitée que du point de vue des actes véridictionnels du seul locuteur et le discours relève de la seule utilisation de la langue par le locuteur. Ainsi l'analyse demeure-t-elle abstraite dans la mesure où l'établissement effectif de la vérité relève d'un jeu dialogique engageant au moins deux interlocuteurs. Il reste donc à revenir sur cette dimension dialogique de la véridicité.

5. Le jeu dialogique de la véridicité

La vérité s'exprime par des actes véridictionnels d'assertion ou de dénégation, mais se joue et s'établit par des procédures dialogiques de référence et de décision.

Dès 1979, dans ses *Dialogiques*, Francis Jacques avait montré que les questions du sens et de la référence³¹ se négociaient dans *l'espace logique de l'interlocution* :

Le moment référentiel d'un dialogue est tout entier orienté vers la réponse qui doit faire accéder un individu, un lieu, un moment, à

30 Cf. « Performatif/Constatif » (1962, 280) où Austin parle de généraux et non du maître d'école !

31 Nous avons examiné la question de l'établissement dialogique de la référence dans notre article « La confrontation des croyances, la référence au monde : de l'analyse logique à l'approche dialogique », Vernant (1984, 141-154).

l'expression linguistique : une chose qui ne sera plus seulement celle du locuteur ou de l'allocutaire, mais une chose qui leur sera commune. Telle est l'opération propre du dialogue qu'une chose est élevée à la qualité de référent cependant qu'elle est identifiée comme celle dont nous parlons ensemble, à titre de co-référent. (Jacques 1979, 157-158)

Techniquement, il importe d'assigner aux actes de discours leur *fonction dialogique* et leur statut d'*interactes* négociés au cours du dialogue par les deux *inter*-locuteurs. Ainsi une même énonciation peut-elle se voir assigner une fonction assertive ou directive selon le cotexte dialogique. « Il fait chaud » peut avoir fonction d'assertif proposant un simple constat, mais aussi, et souvent, acquérir dans un contexte donné une fonction directive d'ordre indirect adressé à l'interlocuteur qui, près de la fenêtre, peut remédier à la situation. Selon le contexte, on peut aussi hésiter entre un assertif et une question, *etc.* Dès lors, l'engagement véridictionnel est proposé par le locuteur à un interlocuteur qui l'entérine ou non.

Reste que l'enquête véridictionnelle requiert méthode et stratégie. La question devient alors celle non plus des interactes, mais de leur enchaînement. On se situe dès lors au niveau supérieur du *jeu dialogique* lui-même. On conçoit aisément que ce jeu s'ouvre par une *question initiale* suscitant une ou plusieurs suppositions ou hypothèses et se déroule en enchaînant assertions et/ou dénégations. La recherche et l'établissement de la vérité prennent alors la forme d'un jeu de langage particulier dont nous avons tenté d'établir les règles dialogiques³². Ce faisant, nous nous sommes inspirés de l'intuition initiale qu'ont eue Paul Lorenzen et Kuno Lorenz en « dialogisant » les procé-

32 Nous avons proposé une première formalisation de ces jeux dialogiques véridictionnels dans notre article : « Pour une Logique Dialogique de la Véridicité », (2004, 87-111).

dures de preuve de la logique formelle³³. Concevant désormais la démonstration logique en termes procéduraux et dialogiques, ils ont défini la validité logique comme *vérité établie par un dialogue formel* [*Dialogische Wahrheit*]. Prenons pour seul exemple la preuve dialogique du « principe » de non-contradiction :

	<i>O</i>		<i>P</i>
1.			$\sim (p : \sim p)$
2.	$(p : \sim p)$		
3.			?1
4.	p		
5.			?2
6.	$\sim p$		
7.			p [4]

Cet antique « principe » se démontre par l'absurde en assurant son attaque par l'Opposant et sa défense par le Proposant. En 2, l'Opposant, refusant la négation, doit assumer la conjonction des deux littéraux p et $\sim p$. En 3, le Proposant s'oppose à la conjonction en mettant en cause le premier conjoint (?1). Ceci contraint l'opposant à assumer p , ce premier conjoint. En 5, le proposant réitère l'attaque de la conjonction par celle du second conjoint (?2). En 6, l'Opposant doit alors assumer $\sim p$. Dès lors, en 7 le proposant n'a pas de peine à reprendre l'assertion p faite précédemment en 4 par l'Opposant et donc à gagner le jeu dialogique puisque l'Opposant ne peut plus rien faire. Ce « Principe » est valide – et constitue donc en fait un théorème – parce qu'il fait l'objet d'une *stratégie gagnante* du Proposant³⁴.

33 Pour une présentation pédagogique de la logique de Lorenzen-Lorenz, cf. G. Heinzmann, « La logique dialogique » (1992). À noter que la conception dialogique de Lorenz s'ancre en une philosophie pragmatiste d'inspiration peircienne et wittgensteinienne, cf. K. Lorenz, (1990).

34 Autrement dit, le Proposant gagne quelle que soit la stratégie choisie, cf. notre article (2004, 87-111).

On dispose désormais à la fois d'une définition et d'un critère de la vérité logique manifestant clairement que la *validité* est relative non seulement à une langue et un discours, mais surtout à une procédure dialogique de nature intersubjective.

Ce que nous venons de dire s'applique à la vérité formelle de nature logique qui ne requiert que des « jeux d'intérieur », c'est-à-dire des jeux autonomes, *indépendants de toute extériorité extra-langagière*. De ce point de vue, le jeu dialogique ne diffère pas de la partie d'échecs et la dimension langagière, discursive, et dialogique de l'établissement de la vérité formelle ne fait pas difficulté³⁵. La question lancinante demeure celle de la vérité dite « matérielle » qui requiert un rapport aux « faits » supposés extra-langagiers. Dans les années 70, Jaakko Hintikka avait proposé des « jeux d'extérieur » de recherche de la vérité conçus comme des dialogues entre le Moi et la Nature³⁶. Il nous est apparu que cette Nature ne pouvait intervenir comme partenaire du dialogue, mais comme *tiers* sanctionnant les propositions des joueurs. Cet amendement nous a permis d'élaborer une *Logique Dialogique Véridictionnelle* conçue comme un jeu capable de rendre compte aussi bien des démonstrations logiques que des enquêtes empiriques, aussi bien des dialogues formels que des discussions prosaïques³⁷. Intervient donc un *tiers* dans le dialogue qui assure la référence au « monde » indispensable pour sanctionner le travail discursif de déduction. C'est de cette relation à une extériorité extra-langagière qu'il convient *in fine* de rendre compte autrement qu'en termes correspondantistes. Pour ce faire, s'impose une analyse praxéologique.

35 On est dans le champ de la « vérité-cohérence ».

36 Cf. Hintikka (1968).

37. Pour une présentation récente de notre *Logique Dialogique de la Véridicité*, cf. Vernant (2008, chap. IX).

6. Dimension praxéologique de la véridicité

L'antique interprétation correspondantiste posait une bonne question en s'interrogeant sur la relation du discours au « fait », mais elle n'apportait pas la bonne réponse en thématissant cette relation en termes de correspondance, et, corrélativement, en considérant les « faits » comme des données directement accessibles dans une perspective naïvement réaliste.

6.1. La pluralité des mondes

La première illusion de l'interprétation traditionnelle consiste à prétendre apporter une réponse simple et *unique* à la question de la vérité. Qui pourra croire que les procédures de vérification sont les mêmes pour le physicien, le chimiste, le biologiste, l'économiste, le politicien, le juriste, le médecin, le plombier, la cuisinière, *etc.* ? Les modalités de recherche et d'établissement de la vérité constituent des procédures dialogiques et intersubjectives qui dépendent des champs considérés et des types de problèmes rencontrés. Il importe donc de tenir compte de la spécificité des *registres de véridicité*. Dès lors, le réalisme naïf selon lequel il ne saurait exister qu'un seul et unique monde, le même pour tous, relève d'une généralisation indue. Selon le régime de véridicité en jeu, les problèmes ne sont pas les mêmes, ni les stratégies utilisées, ni *les mondes* construits en commun.

Comme le proposait Austin, la vérité est multiple en ce qu'elle requiert un critère portant sur des énonciations « historiquement » caractérisées par les interlocuteurs en cause, le contexte, la situation, le problème, *etc.* Suivant Goodman, on peut dire que chaque type de discursivité possède son propre

critère de *correction*, les diverses formes de véridicité n'en étant que des modalités particulières³⁸.

Ce pluralisme s'étend naturellement au statut du « réel ». Il n'y a pas un monde en soi, mais des *versions de mondes*. Chaque configuration discursive et actionnelle construit sa version de monde. Le monde du scientifique n'est pas celui du métaphysicien, du religieux, du politique, *etc.*

Ce n'est pas la peine de se lamenter, le monde n'existe bel et bien plus, et avec lui les stéréotypes ridicules de l'absolutisme, ces idées absurdes qui font de la science un effort pour découvrir l'unique réalité prête à consommer (malheureusement on ne l'a jamais découverte) et de la vérité l'accord avec cette réalité inaccessible. Ont disparu elles aussi les notions de donné pur, de nécessité inconditionnelle, d'unique perspective correcte, d'unique système possible de catégories.

Où vivons-nous si le monde n'existe pas ? On pourrait répondre « dans un monde », ou mieux « dans plusieurs mondes ». De même qu'on peut nier l'existence du nombre entre 2 et 7 sans nier qu'il y ait des nombres entre 2 et 7, on peut nier l'existence du monde sans nier qu'il y ait des mondes. Vouloir décrire le monde est aussi sans espoir que de vouloir trouver le nombre entre 2 et 7. (Goodman & Elgin 1990, 51)

Pour autant, ceci ne signifie pas qu'il n'y ait rien en dehors des mots. Ce serait retomber dans une position idéaliste, tel l'immatérialisme de Berkeley. La connaissance n'est pas contemplation pure, exercice exclusivement intellectuel, mais *activité* fondamentalement intéressée, *pratique* interactionnelle et transactionnelle. Interactionnelle, elle s'avère procédures intersubjectives et dialogiques de constructions symboliques et rationnelles. Transactionnelle, elle se déploie en un constant échange actionnel avec le monde que les agents co-construisent.

38 On se rappellera que déjà Cassirer avait thématisé la multiplicité des formes symboliques : mythes, religions, arts, sciences, *etc.* (1972).

Biologiquement, cette transaction produit les systèmes d'adaptation de l'organisme humain à son environnement [*Umwelt*]. Scientifiquement, les transactions sont méthodologiquement et technologiquement réglées par l'expérimentation, d'ailleurs soumise aux intérêts culturels, économiques, sociopolitiques du moment. Nous ne pouvons appréhender nos mondes qu'à travers des constructions symboliques ou sub-symboliques, que ce soient les stratégies perceptives que l'Homme a élaborées au cours de son évolution, ou ses théories scientifiques les plus sophistiquées. Toutes nos versions de mondes ne sont que les modalités plurielles, provisoires, et contingentes par lesquelles nous opérons nos inter- et transactions dans les mondes que nous partageons.

6.2. Mondes & formes de vie

Les interlocuteurs engagés dans un dialogue construisent progressivement ensemble une « image du monde » qu'ils partagent plus ou moins momentanément. Bien entendu, cette « image », qui résulte des interactions langagières, possède une dimension discursive et donc représentationnelle. Les interlocuteurs discutent les objectifs, la situation, les méthodes, et s'entendent sur les solutions à mettre en œuvre. Mais elle possède une dimension fondamentalement *transactionnelle* et pas simplement *interactionnelle*³⁹. Cette image du monde constitue l'*arrière-plan* qui fournit aux agents l'ensemble des contraintes et des latitudes d'action :

Mais cette image du monde, je ne l'ai pas parce que je me suis convaincu de sa rectitude ; ni non plus parce que je suis convaincu de sa rectitude. Non, elle est l'arrière-plan dont j'ai hérité sur le fond duquel je distingue le vrai et le faux. (Wittgenstein, 1976, § 94, 49)

39 Nous avons proposé une définition du dialogue en terme d'interaction langagière à finalité transactionnelle, à la fois intersubjective (reconnaissance mutuelle des interlocuteurs) et intramondaine (co-action des agents sur le monde qu'ils partagent), cf. Vernant (1997).

On ne saurait donc négliger ce *socle transactionnel*. Outre le réalisme naïf, l'interprétation traditionnelle s'empêtre dans un représentationnalisme unilatéral alors que l'enjeu véridictionnel est actionnel :

Or fonder le témoignage de ces preuves, le justifier, cela connaît un terme : mais le terme, ce n'est pas que certaines énonciations nous apparaissent à l'évidence comme vraies immédiatement. Donc, ce n'est pas, de notre part, une sorte de voir ; le terme, c'est notre action que se trouve à la base du jeu de langage. (*Ibidem*, § 204, 67-68, trad. modifiée)

Les mondes que les interlocuteurs co-construisent s'inscrivent dans des formes de vie historiquement déterminées qui institutionnalisent les rapports des interlocuteurs entre eux et avec leurs mondes. De ces formes de vie dépendent les intentions et les modalités d'action des agents, c'est-à-dire la finalité de leurs transactions, mais aussi le *sens* profond de leurs interactions. Ce sens, loin d'être épuisé par la signification sémantique qui gît dans le lexique, ni même par la force illocutoire de l'acte de discours, relève des *latitudes d'action* qu'offre l'image du monde en jeu.

6.2.1. *L'univers du quotidien*

Considérons l'univers de notre vie quotidienne. Les conversations les plus banales tissent l'image de notre univers le plus prosaïque. Dans cet univers, sont distingués des « objets » : tables, chaises, tasses, *etc.* Ces objets constituent les références de notre vocabulaire usuel. On dira alors que l'objet chaise est la référence du nom chaise. Et l'on définira discursivement le concept de chaise comme un « Siège à dossier, sans bras »⁴⁰. L'on distingue la chaise du fauteuil, du tabouret, *etc.* Mais, ce

40 C'est la définition du *Dictionnaire de l'Académie Française*. Rappelons qu'une définition de dictionnaire est une *déclaration* qui a pour fonction de fixer, institutionnaliser, la signification *sémantique* d'un mot.

faisant, on reste au seul niveau du discours et des représentations qu'il suscite. Or, pas plus que le concept de chien ne mord, celui de chaise ne permet de s'asseoir. *Hic est saltus* : il importe de prendre en compte le niveau intramondain qui seul assigne un *sens* pragmatique, c'est-à-dire une fonction pratique, aux objets qui conditionnent notre activité quotidienne. Une chaise est un objet dont la fonction principale est de fournir une assise permettant de se reposer. Le sens du mot chaise ne réside pas seulement dans le concept de chaise, mais d'abord et surtout dans le *faisceau des latitudes d'action* que l'objet en question autorise : s'asseoir, monter dessus, éventuellement même la lancer, caler une porte, *etc.* On distingue alors la chaise longue de la chaise de jardin, de bureau, de cuisine, de salon, *etc.* Et ces latitudes d'action s'inscrivent dans une forme de vie historiquement déterminée : on n'est plus à l'époque de la chaise de torture, de la chaise de poste, de la chaise à porteur, de la chaise-percée, *etc.* L'*objectité* se révèle ainsi moins conceptuelle qu'actionnelle :

Pour parvenir à une parfaite clarté dans notre conception d'un objet, il nous suffit donc de considérer quels effets concevables d'ordre pratique l'objet peut impliquer – à quelles sensations il nous faut nous préparer, et à quelles réactions nous devons nous attendre. Notre conception de ces effets, qu'ils soient à court ou à long terme, représente pour nous le tout de notre conception de l'objet, pour autant que cette conception possède une signification positive⁴¹.

Supposez qu'au fin fond de la cuisine pende à un clou un vieux chinois. La cuisinière y verra le moyen de décorer ses gâteaux, alors que sa petite fille imaginera là une étrange et

41 William James (1906, 46). Cf. aussi G. H. Mead (1963, 104) : « La signification d'une chaise est de s'asseoir dessus, la signification du marteau est de planter un clou » et (189) : « Notre expérience est dans l'objet autant qu'en nous » ; et Wittgenstein (1976, § 476) : « L'enfant n'apprend pas qu'il y a des livres, qu'il y a des sièges, *etc.*, mais il apprend à aller chercher des livres, à s'asseoir sur un siège, *etc.* ».

triste marionnette ! La question préjudicielle de l'objectité se joue à ce niveau actionnel. Cette objectité constitue la voie de l'objectivation du sens – non de la signification – des mots et des latitudes d'action. De même que la simple perception résulte d'un couplage dynamique entre action et sensation, la catégorisation des objets résulte des *activités*, socialement sanctionnées, de co-adaptation de l'organisme humain à son environnement :

L'objet apparaît au sujet de la perception comme ce qui fournit l'occasion d'un certain type d'interactions ; et le sujet de la perception utilise les objets, avec son corps et son esprit, selon les modalités qui sont ainsi rendues possibles. La forme et la fonction, normalement étudiées comme propriétés opposées, sont des aspects d'un même processus, et les organismes sont fortement sensibles à leur coordination. Les activités accomplies par l'acteur/sujet de la perception au moyen des objets du niveau élémentaire sont partie intégrante des formes de vie culturelles, consensuellement validées, de la communauté dans laquelle les humains et l'objet se situent – ce sont les activités du niveau élémentaire. (Varela, Thompson, Rosh 1993, chap. 8, 241)

En dessinant des latitudes d'action, la catégorisation objective contribue à orienter les intentions des agents qui émergent de la situation :

L'intention est inhérente à la situation, aux coutumes et aux institutions humaines. (Wittgenstein 1989, § 337, 233)

C'est le socle actionnel, historiquement et socialement déterminé, qui fournit un cadre aux intentions comme un sens au discours. Hors de son contexte actionnel, l'énonciation « Je vais couper le gazon » s'avère *praxéologiquement ambiguë*. Elle peut aussi bien signifier le fait pour le retraité dans son pavillon de banlieue de passer la tondeuse pour *tailler* la pelouse que l'action, fort différente, pour l'ouvrier dans un champ de production industrielle de gazon pour stades et espaces verts ur-

bains de *découper* des plaques ou des bandes d'herbe à replanter.

Cernant les intentions et déterminant le sens, ce même socle actionnel fournit les *certitudes* premières qui s'incarnent en des tropismes, habitudes, attentes et savoir-faire tacites. Ce n'est que lorsque ces savoir-faire s'avèrent inefficaces, ces attentes déçues que surgit – alors seulement – le doute et se pose la question de la vérité.

6.3. Les registres de véridicité

Chaque type de jeu de langage s'inscrit dans une forme de vie particulière qui lui donne sens et finalité. De même, les jeux dialogiques véridictionnels se déploient dans un cadre actionnel particulier. Nous ne saurions ici examiner tous ces jeux, ni même en étudier précisément certains. Il nous suffit d'en évoquer un pour marquer, à titre d'exemple, sa dimension constructive opposée tant au réalisme naïf qu'au représentationalisme.

6.3.1 *Registre scientifique*

Considérons le registre des sciences physiques pour rappeler les grandes lignes de la définition de l'objectivité scientifique. Dans ce registre, la critique de l'empirisme et du réalisme naïf est au moins aussi vieille que la barbe de Bachelard.

L'établissement de la vérité scientifique résulte d'un effort intersubjectif, mieux collectif, de l'« union des travailleurs de la preuve » associant les membres de la « société théoricienne » et ceux de la « société technique »⁴². Ce travail, à la fois théorique et pratique, déductif et expérimental, produit un monde nouveau, une *phénoménotechnique*⁴³ permettant de construire progressivement et effectivement la réalité scientifique :

42 Cf. 1965, 9. Peirce parlait à propos de l'enquête scientifique de « socialisme logique ».

43 Qui va de l'ampoule électrique à la « chambre à bulles ».

La science suscite un monde, non plus par une impulsion magique, immanente à la réalité, mais bien par une impulsion rationnelle, immanente à l'esprit. Après avoir formé, dans les premiers efforts de l'esprit scientifique, une raison à l'image du monde, l'activité spirituelle de la science moderne s'attache à construire un monde à l'image de la raison⁴⁴. (Bachelard 1934, 17)

On notera d'ailleurs que cette activité scientifique de création de monde prend des formes dialogiques. En effet, elle s'ouvre sur une question suscitant un problème :

Avant tout, il faut savoir poser des problèmes et quoi qu'on dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce *sens du problème* qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit⁴⁵. (Bachelard 1967, chap. 1, 14)

Et la question se déploie en un « dialogue » entre raison et expérience :

Quel que soit le point de départ de l'activité scientifique, cette activité ne peut pleinement convaincre qu'en quittant le domaine de base : *si elle expérimente, il faut raisonner ; si elle raisonne, il faut expérimenter*⁴⁶. (Bachelard 1934, 7)

44 Voir aussi Peirce, (1958, vol. 5, § 407) : « L'opinion sur laquelle sont destinée à s'accorder finalement tous ceux qui cherchent (la communauté des savants) est ce que nous entendons par vérité et l'objet représenté dans cette opinion est le réel. C'est bien ainsi que j'expliquerais la réalité ».

45 Pour une approche récente qui considère qu'« au delà de la vérité », les sciences visent la « résolution de problèmes », cf Laudan (1977).

46 On pourra trouver une analyse plus précise des procédures dialogiques des sciences contemporaines, en particulier des *controverses métathéoriques*, chez F. Jacques (1985), chap. XI.

On ne saurait donc confondre expérience première et expérimentation scientifique, réel fantasmé et réalité déduite et construite⁴⁷. La vérité scientifique est bien le résultat d'un double effort : *interactionnel* pour élaborer les hypothèses et établir déductivement les lois, *transactionnel* pour construire expérimentalement les faits.

Au terme, l'établissement conjoint de la vérité résulte non d'une correspondance simpliste conçue comme reproduction mimétique par des mots d'un fait relevant d'un monde unique et donné, mais d'un processus complexe, propre à chaque registre de véridicité, qui croise interactions discursives élaborant une description d'un état de choses et transactions intersubjectives et intramondaines résultant de pratiques effectives.

In fine, le fait [*factum*] n'est que l'accomplissement d'un faire [*facere*], et c'est l'*action* qui suture les relations du discours *et* de la vérité.

Ainsi, la définition proprement philosophique de la vérité ne saurait se limiter à une approche logique relevant de la sémantique formelle, ni même de la pragmatique des actes véridictionnels. Elle requiert une logique dialogique des jeux véridictionnels, logique, qui, pour enfin résoudre l'antique question de la « correspondance », s'appuie sur un complément praxéologique qui assure l'ancrage actionnel du jeu dialogique et fournit les critères d'établissement de la vérité selon le registre de véridicité en jeu.

47 Bien entendu, une analyse précise ne saurait se satisfaire de ce niveau de généralité, les procédures véridictionnelles de la physique ne sont pas celles de la chimie, de la biologie moléculaire, etc. Il existe des rationalités régionales : « Les concepts et les méthodes, tout est fonction du domaine d'expérience », Bachelard (1934, chap. IV, 139).

Références bibliographiques

- ARISTOTE (1967). *Topiques*. Paris : Belles Lettres [trad. par J. Brunschwig].
- AUSTIN John (1994). La vérité. In : *Écrits philosophiques*. Paris : Seuil, 92-112.
- AUSTIN John (1962). Performatif/constatif. In : *La philosophie analytique*, Colloque de Royaumont. Paris : Minuit, 271-304.
- BACHELARD Gaston (1934). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris : PUF.
- BACHELARD Gaston (1967). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.
- BACHELARD Gaston (1965). *L'activité rationaliste dans la physique contemporaine*. Paris : PUF.
- BERKELEY George (1991). *Principes de la connaissance humaine*. Paris : Garnier-Flammarion [trad. fr. Dominique Berlioz (1710)].
- BOUVERESSE Jacques (1976). *Le mythe de l'intériorité*. Paris : Éd. de Minuit.
- CAGNAT Cédric (2004). *La construction collective de la réalité*. Paris : L'Harmattan.
- CASSIRER Ernst (1972). *La philosophie des formes symboliques*. 1. *Le langage*. Paris : Minuit [trad. fr. par O. Hansen-Love & J. Lacoste de *Philosophie der symbolischen Formen*. Yale University Press, 1953].
- FREGE Gottlob (1971). Recherches logiques (I La pensée, II La négation). In : *Écrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil, 170-213 [trad. fr. par C. Imbert de *Logische Untersuchungen, (I Der Gedanke, II Die Verneinung)*. Kleine Vandenhoeck, Reine].

- GOODMAN Nelson & ELGIN Catherine (1990). *Esthétique et connaissance*. Paris : Éd. de l'Éclat [Recueil de cinq articles traduits par R. Pouivet].
- HEINZMANN Gerhard (1992). La logique dialogique. In : *Du Dialogue*, n° 14 des Recherche sur la philosophie et le langage. Paris : Vrin, 249-261.
- HINTIKKA Jaakko (1968). Language-Games for Quantifiers. In : N. Rescher (ed.), *Studies in Logical Theory*. Oxford : Blackwell [American Philosophical Quarterly, monography, 2].
- JACQUES Francis (1979). *Dialogiques, Recherches logiques sur le dialogue*. Paris : PUF.
- JACQUES Francis (1985). *L'espace logique de l'interlocution*. Paris : PUF.
- JAMES William (1906). *Pragmatism : a New Name for Some Old Ways of Thinking, Popular Lectures on Philosophy*. Longmans : Green & Co.
- LAUDAN Larry (1977). *La Dynamique de la science*. Bruxelles : Mardaga.
- LORENZ Kuno (1990). Un jeu de langage pour la logique. In : *Actes du Colloque Wittgenstein*. Paris : TER, 83-99.
- MARTIN Roger (1964). *Logique contemporaine et formalisation*. Paris : PUF.
- MEAD George (1963). *L'Esprit, le Soi et la Société*. Paris : PUF [trad. fr J. Cazeneuve, E. Karlin & G. Thibault, de *Mind, Self and Society from the Standpoint of a Social Behaviorist*. Chicago : Univ. Chicago Press, 1934].
- MULLER Robert (1988). *Introduction à la pensée des Mégariques*. Paris : Vrin.
- PEIRCE Charles Sanders. (1958) *Collected Papers*. C. Hartshorne & P. Weiss (eds). Cambridge, Mass. : Harvard U.P. [rééd. 1960].
- POPPER Karl (1985). *Conjectures et Réfutation*. Paris : Payot.

- RUSSELL Bertrand (1926). *L'analyse de l'esprit*. Paris : Payot [trad. fr par M. Lefebvre de *The Analysis of Mind*. London : Allen & Unwin, 1921].
- TARSKI Alfred (1972-1974). *Logique, sémantique, méta-mathématique* 1923-1944. (sous la dir. G.-G. Granger). Paris : A. Colin (2 vols).
- In : vol. 1. Le concept de vérité dans les langages formalisés, 158-269 [trad. fr. G. Kalinowski (1933)].
- In : vol. 2. La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique, 267-305 [trad. fr. de *The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics*. In : *Philosophy and Phenomenological Research*, n° 4, 1944].
- VANDERVEKEN Daniel (1988). *Les Actes de discours*, Bruxelles : Mardaga.
- VARELA Francisco, THOMPSON E., ROSCH E. (1993). *L'Inscription corporelle de l'esprit, Sciences cognitives et expérience humaine*. Paris : Seuil.
- VERNANT Denis (1984). La confrontation des croyances, la référence au monde : de l'analyse logique à l'approche dialogique. In : *Dialogue, dialectique en philosophie et en droit*, Archives de philosophie du Droit, T. 219, Sirey, 141-154.
- VERNANT Denis (1986). *Introduction à la philosophie de la logique*. Bruxelles : Mardaga.
- VERNANT Denis (1997). *Du discours à l'action. Études pragmatiques*. Paris : PUF.
- VERNANT Denis (2001). *Introduction à la logique standard*, Paris : Flammarion.
- VERNANT Denis (2004). Pour une logique dialogique de la véridicité. In : *Cahiers de linguistique française* n° 26 : « Les modèles du discours face au concept d'action ». Genève : L. Filliettaz éd., 87-111.

- VERNANT Denis (2005). Trois remarques sur le langage et la morale, ou l'apport de la pragmatique à la métaéthique. In : J.-Y. Goffi (sous la dir.), *Hare et la philosophie morale : actes du Colloque organisé par le Centre de recherche « Philosophie, langage & cognition »*. Paris : Vrin, 159-176.
- VERNANT Denis (2006). La genèse logique du concept de dénégation de Frege à Slupecki. In : R. Pouivet & M. Rebuschi (sous la dir.), *La Philosophie en Pologne, 1918-1939*. Paris : Vrin, 151-178.
- VERNANT Denis (2008). *Discours et vérité, Analyses pragmatiques, dialogiques et praxéologiques de la véridicité*. Paris : Vrin.
- WITTGENSTEIN Ludwig (1989). *Investigations philosophiques*. Paris : Gallimard [trad. fr. par Pierre Klossowski de *Philosophische Untersuchungen*, Oxford: Blackwell, 1953].
- WITTGENSTEIN Ludwig (1976). *De la Certitude*. Paris : Gallimard [trad. fr. par J. Fauve de *Über Gewissheit*, Oxford : Blackwell 1969].

LISTE DES AUTEURS

Hourya BENIS SINACEUR, Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques (IHPST), Université de Paris 1, CNRS-PARIS 1-ENS (sinaceur@canoe.ens.fr)

Jacqueline BONIFACE, Département de philosophie Université Nice Sophia Antipolis (jacqueline.boniface@wanadoo.fr)

Denis BONNAY, Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques (IHPST), Université de Paris 1 et Département d'Etudes Cognitives, Ecole Normale Supérieure, Paris (Denis.Bonnay@univ-paris1.fr)

Jean-Pierre DESCLÉS, Laboratoire Langages, Logiques, Informatiques, Cognitions (LaLIC), Université Paris Sorbonne (jean-pierre.descles@paris4.sorbonne.fr)

Pierre JORAY, UFR de Philosophie, Université de Rennes 1 (pierre.joray@univ-rennes1.fr)

François LEPAGE, Département de philosophie, Université de Montréal (Francois.Lepage@umontreal.ca)

Denis MIÉVILLE, Chaire de logique/Centre de Recherches Sémiologiques (CdRS), Université de Neuchâtel (denis.mieville@unine.ch)

Denis VERNANT, Département de philosophie, Université Pierre Mandès France, Grenoble (Denis.Vernant@upmf-grenoble.fr)

Travaux de logique

Liste des numéros parus

1. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Septembre 1985 (épuisé).
2. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Janvier 1987 (épuisé).
3. James Gasser: La syllogistique d'Aristote à nos jours. Juin 1987.
4. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Première partie. Avril 1991 (réédition du n° 1; épuisé).
5. Denis Miéville: Introduction à la théorie des systèmes formels. Deuxième partie. Avril 1991 (réédition du n° 2; épuisé).
6. Denis Miéville: La négation, une étude logique. Mai 1991 (épuisé).
7. Denis Miéville (éd.): Kurt Gödel. Actes du colloque, Neuchâtel, 13 et 14 juin 1991. Septembre 1992.
8. James Gasser: Introduction à la logique des relations de C.S. Peirce. Novembre 1993.
9. D. Miéville, P. Joray, D. Stauffer, N. Gessler: Études logiques. Port-Royal: une logique des idées. L'avènement de la théorie sémantique de la vérité de Tarski. George Boole et l'algèbre de la logique. Décembre 1994.
10. D. Bourquin, P. Joray, N. Gessler, D. Miéville: Analyse catégorielle et logique. Octobre 1996.
11. D. Miéville (éd.): Introduction aux logiques non classiques. Octobre 1997.
12. F. Vuissoz: La conception sémantique de la vérité. Logique et philosophie chez Alfred Tarski. Décembre 1998.
13. D. Miéville, P. Joray, F. Nef, M. Bourdeau, D. Bourquin, A. Lecomte, J. Lambek, B. Godart-Wendling: Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Actes du colloque organisé à Neuchâtel, les 16 et 17 octobre 1998. Septembre 1999.
14. F. Nef, C. Hughes, P. Giaretta, A. Bottani, N. Gessler, F. Correia, P. Simons, A. Varzi: Méréologie et modalités. Aspects critiques et développements. Actes du colloque, Neuchâtel, 20-21 octobre 2000. Août 2001.
- ☒ D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. I: La protothétique. Novembre 2001.
15. A. Facchini, «Maison Hilbert»: un très joli édifice sans toit ni sol. Analyse model-théorétique d'un échec. Octobre 2003.

- ⊗ D. Miéville, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. II: L'ontologie. Novembre 2004.
- 16. N. Gessler, P. Joray, C. Degrange, Le logicisme catégoriel. Janvier 2005.
- 17. J.-Y. Béziau, A. Costa Leite, A. Facchini (eds), Aspects of Universal Logic. Décembre 2004.
- ⊗ N. Gessler, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. III: La Méréologie. Août 2005.
- ⊗ M. Peeters, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski. Fasc. IV: L'œuvre de jeunesse. Janvier 2006.
- 18. M. Joray (ed.), Contemporary Perspective on Logicism and the Foundation of Mathematics, Janvier 2007.
- ⊗ N. Gessler, Introduction à l'œuvre de S. Lesniewski, Fasc. V: Lesniewski, lecteur de Frege. Novembre 2007.
- 19. P. Joray & D. Miéville (éds), Définition. Rôles et fonctions en logiue et en mathématiques. Actes du colloque Neuchâtel, 19-20 octobre 2007. Juin 2008

Ces publications peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au prix de **Fr.s. 15.-; Fr. 20.-** dès le n° 14 (TVA comprise).

Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques

Liste des numéros parus

- *1. G. Vignaux: La nouvelle rhétorique. Revue critique et perspectives d'application. 1969-70.
- *2. G. Vignaux: L'argumentation antique: Aristote. Janvier 1970.
- *3. M.-J. Borel: Pour définir l'argumentation. 1969-70.
- *4. F. Bugniet: Remarques sur les notions d'assertion linguistiques et de proposition logique. Septembre 1970.
- *5. M.-J. Borel, G. Vignaux: L'étude de l'argumentation. Séminaire 1969-70.
- *6. G. Vignaux: L'argumentation: bibliographie sélective. Janvier 1971.
- *7. J.-B. Grize: Logique de l'argumentation et discours argumentatif. Mai 1971.
- *8. J.-L. Galay: La rhétorique du discours de philosophie systématique. Essais d'analyse. Mars 1971.
- *9. C. Morier: Charles Sanders Peirce et la sémiotique. Mars 1971.
- *10. G. Vignaux: L'argumentation et le résumé. Mars 1971.
- *11. C. Gillieron, C. Bonnet: Peut-on définir l'argumentation? Avril 1971.
- *12. J.-B. Grize: Notes sur l'ontologie et la méréologie de S. Lesniewski. Mars 1972.
- *13. M. Hirsbrunner, P. Fiala: Les limites d'une théorie saussurienne du discours et leurs effets dans la recherche sur l'argumentation. Avril 1972.
- *14. C. Gillieron, A.-M. Badonnel, J.-P. Iacazzi: Les recherches psychologiques et psycholinguistiques sur la négation et les relations d'opposition. Mai 1972.
- *15. J.-L. Galay: Esquisse pour une théorie figurale du discours. Septembre 1972.
- *16. Y. Oppel: Sémiotique littéraire, à propos de la coordination, répétition et opposition dans un texte littéraire. Mai 1973.
- *17. P. Fiala, C. Ridoux: Essai de pratique sémiotique. Juin 1973.
- *18. M. Hirsbrunner: Pour une critique de la sémiotique de Roland Barthes. Juillet 1973.
- *19. Y. Oppel: Colloque sur l'analyse du discours «Divergences et convergences». Février 1974.
- *20. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.

- *21. (Collectif): Logique, argumentation, discours (LAD). Recherche. Septembre 1974.
- *22. A.-F. Schmid: Philosophie et sciences chez Henri Poincaré: lecture philosophique. Octobre 1974.
- *23. M.-J. Borel: Schématisation discursive et énonciation. Arguments théoriques et approche descriptive (LAD I). Octobre 1975.
- *24. A. Licitra: Les relations interpropositionnelles. Huit types d'après R. Longacre (LAD I). Octobre 1975.
- *25. (Collectif): Discours et structures sociales. Janvier 1977.
- *26. M. Ebel: Langage, histoire, action: les recherches de Jean Pierre Faye. Septembre 1975.
- *27. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes I. Juillet 1977.
- *28. M. Ebel, P. Fiala: Recherches sur les discours xénophobes II. Juillet 1977.
- *29. J.-B. Grize: Matériaux pour une logique naturelle (LAD I). Mai 1976.
- *30. D. Miéville, M.-J. Borel, A. Licitra: Discours et analogie (LAD II). Mai 1977.
- *31. J. Moeschler: Contribution linguistique à une sémiotique du cinéma. Mai 1977.
- *32. A. Lecomte: Paraphrase et thématization. Essais d'analyse logique. Décembre 1978.
- *33. (Collectif): Langue et discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
- *34. (Collectif): Langue et discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 2-4 octobre 1978. Mars 1978.
- *35. P. Baldi, J. Moeschler: Comment contrôler le discours: interaction et réfutation dans le débat Giscard-Mitterrand (1974). Juillet 1979.
- *36. (Collectif): Quelques réflexions sur l'explication. Février 1980.
- 37. M. Sanchez-Mazas: Traduction arithmétique des graphes et des relations binaires et applications logiques et informatiques. Juin 1981.
- *38. (Collectif): Le discours explicatif I. Septembre 1981.
- *39. (Collectif): Le discours explicatif II. Septembre 1981.
- 40. C. Wülser: Actes de langage explicatifs. Février 1982.
- *41. (Collectif): Logique naturelle du raisonnement. Avril 1982.
- *42. (Collectif): Linguistique et sémiologie I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.
- 43. (Collectif): Linguistique et sémiologie II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 5-6 octobre 1981. Juillet 1982.

- *44. (Collectif): Raisonnements et raisons. Avril 1983.
- 45. F. Albera: Problèmes de l'énonciation au cinéma. Février 1984.
- 46. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours I. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
- 47. (Collectif): Construction et transformations des objets du discours II. Colloque Besançon-Neuchâtel, 3-4 octobre 1983. Mars 1984.
- *48. (Collectif): Analyse de texte assistée par ordinateur. Utilisation du logiciel DEREDEC. Janvier 1985.
- *49. (Collectif): Problèmes et méthodes d'une analyse de texte articulant organisation cognitive, argumentation et représentations sociales. Juin 1985
- 50. (Collectif): Actes du colloque «Dialogisme et Polyphonie», 27/28 septembre 1985. Avril 1986.
- *51. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance I. Juillet 1986.
- *52. (Collectif): Le discours descriptif. Du texte aux objets de connaissance II. Juillet 1986.
- *53. (Collectif): La référence. Points de vue linguistique et logique. Mars 1987.
- 54. D. Apothéloz, J.-B. Grize: Langage, processus cognitif et genèse de la communication. Septembre 1987.
- *55. (Collectif): La schématisation descriptive. Types textuels, formes et fonctions discursives. Janvier 1988.
- 56. D. Miéville, R. Martin, A. Culioli, G.G. Granger, C. Gillieron, G. Seel, J. Molino, L. Frey, J.-B. Grize: La négation sous divers aspects. Actes du colloque, Neuchâtel 22-23 octobre 1987. Septembre 1988.
- *57. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt, G. Quiroz, J.-B. Grize: La négation. Contre-argumentation et contradiction. Septembre 1989.
- *58. M. Charolles: De l'art de nager et des différentes manières d'en parler. Septembre 1990.
- *59. D. Miéville, M.-J. Borel, J.-P. Desclés, J. Gasser, P.-Y. Brandt; D. Apothéloz, J. Moeschler, J. Jayez, M.F. Blès: La négation. Le rôle de la négation dans l'argumentation et le raisonnement. Actes du colloque, Neuchâtel 11-12 octobre 1990. Septembre 1991.
- 60. D. Miéville, D. Apothéloz, P.-Y. Brandt: Les organisations raisonnées. Analyse de l'articulation de séquences discursives. Juin 1992.
- 61. D. Miéville, M. Chavaz, E. Gattico: Relations formelles et non formelles. Septembre 1993.

62. D. Miéville, C. Tiercelin, G. Heinzmann, G. Deledalle, J. Gasser, N. Everaert-Desmedt, J. Réthoré, M. Balat, J.-P. Kaminker: Charles Sanders Peirce. Apports récents et perspectives en épistémologie, sémiologie, logique. Actes du colloque, Neuchâtel, 16-17 avril 1993. Avril 1994.
63. D. Miéville, J.-P. Desclés, P. Engel, J.-L. Gardies, J.-C. Gardin, J. Gasser, J.-B. Grize, F. Nef: Raisonement et calcul. Actes du colloque, Neuchâtel, 24-25 juin 1994. Septembre 1995.
64. D. Apothéloz, U. Bähler, M. Schulz (éds), Analyser le musée. Actes du colloque international organisé par l'Association Suisse de Sémiotique (ASS/SGS), Lausanne 21-22 avril 1995. Août 1996.
65. D. Miéville, J.-L. Gardies, J.-B. Grize, O. Houdé, J.-P. Bronckart: Temps, logique et langage. Actes du Symposium tenu lors du colloque international «Penser le temps», Neuchâtel, 8-10 septembre 1996. Avril 1997.
00. A. Roulet Juan: Benno Besson en mouvement. Notes sur une mise en scène de «Lapin Lapin», comédie de Coline Serreau. Numéro spécial septembre 1998.
66. C. Salavastru: Identité et altérité. Les avatars de la rhétorique contemporaine. Novembre 1998.
67. D. Miéville, P. Joray, N. Gessler, B. Godart-Wendling, A. Bottani: Essais sur le nom et la nominalisation. Novembre 2000.

Les titres précédés d'un astérisque sont épuisés.

Les publications disponibles peuvent être obtenues auprès du Centre de Recherches Sémiologiques au **Fr.s. 15.-** , dès le n° 67 **Fr.s. 20.-** (TVA comprise).