

DECONTEXTUALISATION DU SAVOIR DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES A DE JEUNES ÉLÈVES

Résumé

Cette communication se propose de montrer comment, dans l'activité d'enseignement, s'opère une décontextualisation du savoir mathématique. Ce savoir est en effet sorti de son champ de production pour être mis à la portée d'un public.

Dans une première partie Anne-Nelly Perret-Clermont analyse d'un point de vue psycho-sociologique les différents lieux où cette décontextualisation est à l'oeuvre et les mécanismes qui la régissent, en utilisant les concepts propres à la problématique des représentations sociales.

Dans une deuxième partie, Jean Brun et François Conne illustrent comment l'élève fonctionne cognitivement à l'aide et face à ces objets décontextualisés en recourant à des exemples d'observations effectuées à l'école primaire. Ils examinent comment l'activité cognitive des élèves interfère avec de tels objets didactiques dont on fait l'hypothèse qu'ils ont des analogies de fonctionnement avec les représentations sociales.

I. APPROCHE PSYCHO-SOCIOLOGIQUE D'UN PROCESSUS DE CONNAISSANCE ET D'ENSEIGNEMENT

1. Choix de l'objet

La transmission des savoirs occupe une place centrale dans le champ éducatif: l'instruction dispensée est sans doute la justification première que l'école se donne. Les déclarations d'intentions pédagogiques semblent généralement centrées sur le souci de promouvoir le développement intellectuel des élèves.

Un regard attentif porté sur les pratiques pédagogiques, les programmes scolaires et les exigences des examens révèle que la compréhension qui est attendue de l'élève porte sur des domaines de savoirs relativement bien spécifiés, à première vue du moins. Les mathématiques en sont un.

Pour plusieurs raisons, les mathématiques nous semblent être particulièrement exemplaires pour l'analyse des représentations sociales à l'oeuvre dans le champ scolaire: d'une part il leur est reconnu une place importante à tous les niveaux de la scolarité, tant du point de vue du temps qui leur est consacré que de leur rôle dans les processus de sélection scolaire. D'autre part les mathématiques semblent être considérées par les partenaires scolaires comme une branche de connaissance fondamentale revêtant les traits les plus nobles: l'"objectivité", la "justesse", la "rigueur", l'"univocité", la "déduction", voire ... la "vérité" et la "beauté"! On a parfois l'impression que l'école aime présenter le savoir mathématique comme étant la pensée par excellence, et comme reflétant dans le miroir des autres disciplines l'image modèle de la science. Qui n'a entendu une de ces nombreuses remarques significatives de la part d'élèves (forts en maths!) ou de la part d'enseignants (en proie à la correction d'examens...): "ce qu'il y a de bien en maths, vois-tu, c'est qu'ou bien c'est juste ou bien c'est faux. Là au moins c'est objectif!"

En fait si certains courants de la pensée mathématique adhèrent effectivement à une vision idéaliste des savoirs de cette discipline, d'autres par contre font remarquer que l'activité du mathématicien fait appel également à des pratiques incomplètement codifiées et qui ne sont donc elles régies que par l'usage (Bourbaki, E.I.7); ces mêmes auteurs affirment même que lorsque le mathématicien cherche à s'assurer de la parfaite correction ou "rigueur" de sa démonstration il "se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience¹⁾ et son flair¹⁾ de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible)". (Bourbaki, E.I.8). L'élève perçoit-il ainsi les mathématiques ? N'est-il pas coincé entre sa pratique (inductive, tâtonnante) et une image idéaliste des mathématiques que lui présente l'école en les lui décrivant comme uniquement déductives ?

2. Décontextualisation du savoir, situation didactique et activité cognitive

Notre propos ici n'est pas de définir les mathématiques - ni même l'activité mathématisante - per se. Notre intention est plutôt de risquer l'hypothèse que, quelle que soit la nature des savoirs produits par les mathématiciens, lorsque ces savoirs deviennent objets d'enseignement ils sont par là-même sortis de leur contexte et transformés. En examinant l'activité didactique à l'école primaire et les productions des élèves dans ce cadre, nous tâcherons d'illustrer comment l'enseignement des mathématiques opère nécessairement une décontextualisation du savoir des mathématiciens. Nous tâcherons, par des exemples recueillis auprès de jeunes enfants, de montrer comment ces objets décontextualisés gardent un certain nombre de propriétés de fonctionnement qui peuvent sembler "autonomes" car non maîtrisées par l'élève.

1) souligné par nous

Nous nous centrerons d'abord sur l'activité de l'enseignant, ou de l'auteur de manuel scolaire. Nous examinerons comment d'une part le fait de devoir s'adresser à des élèves considérés par définition comme relativement ignorants de l'objet qui doit leur être enseigné, et d'autre part les contingences de situation, de matériel, de temps, etc... l'obligent simultanément à extraire un certain nombre de savoirs de leurs contextes mathématiques d'origine et à les replacer dans de nouveaux contextes (construction d'exemples, d'applications; création de situations pédagogiques). En nous référant aux travaux de Chevallard (1980) et de Conne (1981) sur la transposition didactique, nous tenterons d'illustrer comment on peut observer chez l'auteur de manuel ou le maître des processus de dé-contextualisation puis de re-contextualisation des objets de savoir qui, ce faisant, se transforment. En recourant au modèle de la représentation sociale tel que l'a élaboré Moscovici, nous tenterons l'hypothèse d'une certaine analogie de nature entre les processus qui sous-tendent la transposition didactique d'une part et les représentations sociales d'autre part.

Nous nous centrerons ensuite sur l'élève en nous posant les mêmes questions: que fait l'élève face aux savoirs détenus et présentés par l'adulte à son intention ? Bien sûr qu'il ne se contente pas de les mémoriser simplement mais qu'il réfléchit lui aussi, à sa manière, ces savoirs.

On l'invite à les apprendre dans des contextes didactiques spécifiques (questions du maître, exercices ad hoc, examens, etc...) et à propos d'exemples ou de cas de figures plus ou moins particuliers. Nous faisons l'hypothèse que l'élève lui aussi, par son activité cognitive d'appropriation des objets de savoirs qui lui sont présentés, opère d'abord une dé-contextualisation. En effet il se centre sur certains éléments ou caractéristiques de ces objets qu'il fait fonctionner de façon "autonome". Il oublie en quoi certains objets sont des

modalités de représentation ou de formalisation de relations ou d'opérations et se laisse en quelque sorte entraîner par leur logique propre indépendamment des signifiés auxquels ils renvoient. Mais l'élève est aussi obligé de les "re-contextualiser", c'est-à-dire de les faire fonctionner dans des situations bien précises. Ces nouveaux contextes peuvent être de natures différentes: problème d'examen qu'il faut résoudre en faisant la preuve au maître que l'on a "appris" ces savoirs par exemple; ou appropriation réelle de l'objet pour travailler sur son état de connaissance. Là aussi on pourra voir que l'activité cognitive n'est pas indépendante des conditions sociales qui l'engendrent, et que les processus qui sous-tendent l'émergence de représentations sociales ont une certaine ressemblance avec les processus socio-cognitifs qui président aux apprentissages mathématiques chez l'élève.

Nous pourrions à ce stade de notre étude nous demander si les objets du savoir mathématique présentés à l'élève après avoir subi successivement plusieurs transpositions d'un contexte dans un autre n'auront pas perdu ainsi leur essence d'"êtres mathématiques" pour devenir des êtres "dénaturés" qui n'auraient plus guère à voir avec leurs origines. Notons cependant que pour pouvoir répondre à cette question proprement épistémologique il aurait sans doute fallu déjà s'entendre sur la nature du savoir et de l'activité des mathématiciens eux-mêmes. Ce n'est pas le centre de notre propos ici. Indépendamment de ce que seraient les "vraies mathématiques" nous cherchons à explorer ce que l'élève fait de celles qui lui sont proposées dans des situations didactiques: les comprend-il? Comment les reproduit-il? Sont-elles des soutiens pour son propre développement cognitif? L'incitent-elles à une activité mathématisante personnelle? Nous nous interrogerons sur le statut des productions d'élèves dans un contexte didactique: s'agit-il de réponses de complaisance (qui sont parfois tout de même "intelligentes") à des situations pédagogiques ayant leurs exigences sociales? Ou s'agit-il

de savoirs qui fonctionnent avec une certaine autonomie ?
 Et lorsque tel est le cas: quel est le champ de cette autonomie ?
 Dans quels contextes se manifeste-t-elle de façon opératoire ?

3. La situation didactique et la transmission sociale d'un savoir

Nous faisons donc l'hypothèse qu'à chaque étape de la transmission sociale d'un savoir mathématique il s'opère un processus de sélection et de réorganisation de l'information qui, à l'occasion d'une transposition hors du contexte initial modifie la signification-même de l'objet qu'il était question de transmettre. L'hypothèse peut sembler trop hardie. Il est évident que dans certaines conditions de communication (qu'il serait d'ailleurs très intéressant de bien préciser du point de vue psycho-sociologique) cette déformation ne se produit pas. Car cela signifierait que toute science est impossible voire qu'une compréhension partagée l'est aussi. Et les échanges entre mathématiciens ne seraient alors que dialogues de sourds (ce qui n'est pas vrai même si ... cela se produit parfois!). Notre analyse vise surtout cette situation particulière qu'est la transmission d'un savoir par un savant (ou "sachant") à un "ignorant" (ou "non-instruit") et plus particulièrement encore les situations les plus fréquentes dans le champ éducatif: celles dans lesquelles ce processus de communication ne relève pas d'un face à face qui, par le dialogue, permet à l'un des partenaires de modeler ses réactions immédiates à celles de l'autre. Il s'agit ici principalement d'examiner ces nombreuses situations pédagogiques (y compris d'ailleurs certains dialogues maître-élève) qui, parce qu'elles sont institutionnalisées et finalisées sont largement sur-déterminées par leurs conditions sociales (effectif des élèves, statuts, âges, compétences reconnues, rôles) et par des normes préétablies qui fixent, ne serait-ce que par l'usage, les formes que doit prendre la communication et les implicites sur lesquels elle repose.

Tableau 1

Quatre types de situations, quatre types
d'activités en rapport avec les mathématiques

le Savoir Mathématique des mathématiciens	A <u>les chercheurs</u> en mathématiques	<ul style="list-style-type: none"> - travaillent sur leur état de connaissance - résolvent des problèmes internes à la discipline (et externes à la discipline dans le cas des mathématiques appliquées) - créent des <u>objets de savoir</u>
le savoir mathématique des programmes	B <u>les auteurs</u> de programmes ou de manuels d'école primaire	<ul style="list-style-type: none"> - transposent des objets de connaissance en <u>objets à enseigner</u>
les mathématiques enseignées	C <u>l'enseignant</u> d'école primaire avec l'aide des manuels	<ul style="list-style-type: none"> - adapte les objets à enseigner en les transposant en <u>objets d'enseignement</u>
les mathématiques appprises ou appropriées	D <u>l'élève</u>	<ul style="list-style-type: none"> - doit utiliser ce qu'il a appris et montrer qu'il le fait - donne des réponses qui doivent être "correctes", adaptées aux exigences - doit chercher à comprendre et le prouver

Ainsi l'activité d'enseignement dans son souci d'extraire des notions essentielles, et parfois de les simplifier afin de les mettre à la portée du "non-instruit" qui doit y être initié, crée des objets d'enseignement. Certains, comme les "arbres" ou les "machines" sont des objets construits ad hoc pour les besoins didactiques. D'autres, par contre, comme les diagrammes dits de Venn, ont été empruntés aux mathématiciens mais sont utilisés différemment (nous y reviendrons plus loin).

4. Les différents lieux de l'élaboration et de la présentation des savoirs mathématiques

Pour examiner les processus sociaux et cognitifs en jeu lors de l'élaboration de ces savoirs nous allons considérer ici, à titre heuristique, quatre grands types de situations:

- A. Les situations d'élaboration de connaissances mathématiques par les mathématiciens eux-mêmes.
- B. Les situations d'élaboration de manuels et de programmes scolaires.
- C. Les situations dans lesquelles l'enseignant prépare et fait son enseignement.
- D. Les situations didactiques que vit l'élève.

Nous ferons correspondre à ces 4 types de situations 4 types de savoirs mathématiques dont nous faisons l'hypothèse qu'ils répondent, du point de vue psycho-social, à des fonctions partiellement différentes (Tableau 1). Cela ne présume pas nécessairement que ces quatre types de savoirs se distingueraient du point de vue mathématique et ne dit rien des relations qu'ils entretiennent. Nous examinerons cette question ultérieurement en observant comment ces savoirs fonctionnent chez le sujet du point de vue cognitif. Mais avant de relater ces observations nous allons décrire ces quatre types de situations, leurs acteurs, et leurs contingences sociales et cognitives à l'aide du tableau 2 dont les têtes

Tableau 2. (suite) Conditions d'émergence des 4 systèmes de "savoirs mathématiques" analysés

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal, porteur du "savoir" analysé	Statut par rapport au Savoir mathématique. Compétences reconnues	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut, rôles, etc)	Centres de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
l'acteur de programme ou l'acteur du manuel	<ul style="list-style-type: none"> • "sachant" et parfois savant • s'il est chercheur en mathématiques -compétences reconnues sur le plan math. par ses confrères -rapport direct au savoir -risque de voir ses enseignements sur le plan de la compréhension des demandes et contraintes pédagogiques • s'il est mathématicien et enseignant (mais non engagé dans la recherche): -son savoir sera reconnu par les mathématiciens mais ses compétences n'auront plus l'occasion de se démontrer en prise directe sur la réalité -compétences pédagogiques reconnues par les enseignants -compréhension des demandes psychologiques et sociales intuitives (éventuellement contestées par les psychologues et sociologues) • s'il est enseignant non mathématicien: outre les caractéristiques mentionnées ci-dessus, son rapport au savoir mathématique est déjà médiatisé par une transposition 	<ul style="list-style-type: none"> • les co-auteurs ou autres auteurs des programmes et manuels des disciplines autres que les math. • les mathématiciens se voir contestés par les enseignants (et leur âge, degré et filières scolaires) • les parents • les autorités scolaires et politiques • l'opinion publique • les responsables des écoles suivantes (professionnelles, gymnasiales, supérieures) • les employeurs futurs • les groupes idéologiques d'appartenance 	<ul style="list-style-type: none"> • pour le mathématicien il s'agit d'assumer un contrat relatif à une demande qui n'est pas uniquement à la discipline scientifique • peut dépendre d'une administration ou d'une maison d'édition, d'un contrat, d'un groupe d'études, etc... • rôle: produire une présentation de savoirs mathématiques et attendus d'un groupe d'élèves d'un âge et degré scolaire donné. Fournir le moyen de cet apprentissage 	<ul style="list-style-type: none"> • sont fonction d'une image propre et d'une perception de l'image que les groupes de référence ont: <ul style="list-style-type: none"> - de ce qui constituerait les notions de base - de leur articulation - des possibilités et difficultés d'apprentissage de l'enfant - des capacités de l'enseignant 	<ul style="list-style-type: none"> • sur les mathématiques: <ul style="list-style-type: none"> - plus ou moins approfondies selon l'insertion professionnelle • sur les élèves et les enseignants: <ul style="list-style-type: none"> - généralement intuitive et fondée sur l'expérience propre (souvent passée) et parfois sur une formation psychologique • sur les termes et le sens de la demande sociale: <ul style="list-style-type: none"> - généralement intuitive 	<ul style="list-style-type: none"> • demandes sociales de mise à jour. Modes. • demandes plus ou moins élaborées en rapport avec: <ul style="list-style-type: none"> - la compétition scientifique et technique internationale (effet du "Sputnik" par exemple) - la demande de "formation scientifique" de la population - les attentes des enseignants - les réactions des parents • termes du contrat de production (délais, moyens, forme, ampleur, etc) • normes de "rigueur", de "clarté", d'"élégance", etc... 	<ul style="list-style-type: none"> • définit les éléments essentiels (parmi les notions, formulations, modes de représentation, etc...) • simplifie le savoir pour l'adapter à un public • produit une schématisation en articulant les éléments retenus • et parfois justifie ses choix, met en valeur leur rigueur, démontre la logique de la schématisation conçue 	<ul style="list-style-type: none"> • produit une schématisation du savoir qui se veut transmissible • produit une modalité de présentation des connaissances mathématiques - il s'agit d'un système de présentation d'objets d'enseignement ("savoirs mathématiques") ayant sa logique interne. Ce système de présentation est peut-être aussi la représentation sociale du savoir mathématique que se fait l'auteur 	<ul style="list-style-type: none"> • "vulgarisation" de connaissances hors de la "cité scientifique" • définition empirique (par les situations proposées et les exemples donnés) des productions qui seront attendues du maître et de l'élève et du domaine de leur application 	<ul style="list-style-type: none"> • système de présentation d'objets d'enseignement ("savoirs mathématiques") objectivé dans des textes écrits: programmes, livres du maître, et de l'élève, fichiers, exercices, questions d'examens, etc... 	

Tableau 2. (suite). Conditions d'émergence

des 4 systèmes de "savoirs mathématiques" analysés

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal, (porteur du "savoir" analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues,	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut, rôle, etc)	Centres de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
C	l'enseignant	<ul style="list-style-type: none"> "instruit" son rapport au savoir mathématique n'est pas ce qui le définit dans son rôle et statut s'il est mathématicien et enseignant (voir ci-dessus) s'il est enseignant non-mathématicien (voir ci-dessus) son rapport au savoir mathématique est déterminé sans doute aussi par son expérience scolaire de 	<ul style="list-style-type: none"> identité d'enseignant et non pas d'expert en math. Références aux enseignants antérieurs, "parallèles" et futurs aux élèves aux parents en général aucune inscription professionnelle de le milieu des mathématiciens 	<ul style="list-style-type: none"> représentant face à l'élève de l'autorité scolaire, de la société, du "maître" fonction gardienne, éducative et sélective contrat d'enseignement doit faire repro- (acquiescer) de l'opinion des problèmes de "discipline" le groupe-classe (plutôt que l'individu-élève) les élèves qui sont "censés comprendre" selon les normes d'évaluation qui prévalent dans un système hiérarchique qui l'inspecte et lui impose certains choix 	<ul style="list-style-type: none"> notions de base" du programme les difficultés reconnues les exigences des examens et/ou des enseignants ultérieurs sa propre image de marque aux yeux des parents, des supérieurs hiérarchiques, de l'opinion des problèmes de "discipline" le groupe-classe (plutôt que l'individu-élève) les élèves qui sont "censés comprendre" (le 1/3 supérieur de la classe) 	<ul style="list-style-type: none"> sur les mathématiques: <ul style="list-style-type: none"> -partielle -transposée -acquise dans sa propre scolarité ou au cours de sa formation professionnelle ou de recyclage ou comme "autodidacte" sur les attentes de la demande sociale: <ul style="list-style-type: none"> -généralement in- -médiatisée souvent (par les supérieurs hiérarchiques, les médias, etc...) à travers l'expérience propre de la réaction de certains parents sur les élèves et leur psychologie: <ul style="list-style-type: none"> -au travers de sa propre vie d'élève -intuitive, fondée sur une expérience et directe auprès des enfants et parfois sur une formation psychologique (formation professionnelle, recyclage, médias) 	<ul style="list-style-type: none"> "leçons à donner chaque jour exercices et épreuves à proposer questions d'élèves et leurs autres réactions (incompréhension, ou à l'inverse "trop grande facilité", intérêts et motivation, comportement, etc) nécessité de démontrer son autorité (auprès des élèves, des parents, de l'inspecteur, etc). cf. termes du contrat d'enseignement perception ou représentation du niveau de compréhension des élèves perception ou représentation des attentes du programme, des supérieurs hiérarchiques, des élèves, etc. normes d'"objectivité", de "clarté", de "rigueur", d'"évaluation", de sanction, etc... 	<ul style="list-style-type: none"> communique à des "non instruits" adapte la présentation des objets d'enseignement en fonction de la nécessité d'avoir un certain nombre d'élèves qui "compréhendent" selon les normes d'évaluation qui prévalent cherche à faire reproduire par les élèves ces "savoirs mathématiques" est généralement plus souvent préoccupé et en recherche au sujet des modalités de présentation de ces savoirs mathématiques que au sujet de ces savoirs eux-mêmes 	<ul style="list-style-type: none"> produit une schématisation du savoir mathématique qui doit être compréhensible ou en tout cas reproductible par l'élève produit une (ou des) systèmes de présentation des "connaissances mathématiques" qu'a (ont) leur logique interne. Ces modalités de présentation renvoient sans doute au système de représentation sociale du savoir mathématique de l'enseignant 	<ul style="list-style-type: none"> vulgarisation de connaissances discours institutionnalisés destinés au groupe-classe parfois dialogue avec l'élève explicitent (plus ou moins) les conduites attendues de lui définition empirique des productions attendues des élèves, évaluation et sanction de ces productions 	<ul style="list-style-type: none"> le système de présentation des "savoirs mathématiques" de l'enseignant n'est objectif que pour l'élève dans la vie "privée" de la classe. (Il est inféré par les parents, les supérieurs hiérarchiques, les collègues, sur la base d'informations partielles: visites, bulletins scolaires, notation des travaux d'élèves, déclarations de l'enseignant, comportement des élèves, réussite scolaire des élèves, etc...)

Tableau 2. (suite). Conditions d'émergence des 4 systèmes de "savoirs mathématiques" analysés.

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal, (porteur du "savoir" analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues,	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institution- nelles (statut, rôle, etc)	Centres de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
l'élève	Non-instruit	<ul style="list-style-type: none"> certaines compétences reconnues comme "acquises" par la scolarité antérieure certaines aptitudes (dues aux "dons" ou à l'âge (stade de maturité)) 	<ul style="list-style-type: none"> le maître les camarades de classe les camarades des classes parallèles et des classes de degré supérieur les parents les frères et sœurs les maîtres des années précédentes 	<ul style="list-style-type: none"> statut d'enfant dépendant du maître (et des parents) pour l'horaire et le contenu d'une grande partie de son activité pour l'approbation de son travail pour sa carrière scolaire seul (même si collectivement) face au maître (ou aux parents) travaille le plus souvent seul, parfois en groupe doit "apprendre" 	<ul style="list-style-type: none"> les notions "importantes" ce qu'il faut savoir faire ou dire 	<ul style="list-style-type: none"> le maître les enseignants des années passées le programme, le (les) manuel(s) les parents les camarades les frères et sœurs 	<ul style="list-style-type: none"> rythme du programme, de la leçon, du questionnement, etc... face à face avec un adulte ou situation d'examen exigeant dans l'immédiat une production "correcte" 	<ul style="list-style-type: none"> cherche à comprendre le "discours mathématique" du maître et doit le prouver doit produire (ou très souvent il s'agit plutôt de devoir reproduire) des "savoirs mathématiques" "justes", "adaptés aux exigences" de la tâche telle qu'elle est définie par l'enseignant (ou par l'examen) utilise ce qu'il a appris et doit montrer qu'il le fait cherche à gagner l'approbation du maître (et des parents) cherche à satisfaire les exigences de celui qui est "instruit" 	<ul style="list-style-type: none"> un système de reproduction de "savoirs mathématiques" ayant sa logique interne. Il renvoie à un système de représentation sociale du savoir mathématique propre à l'élève (ou aux élèves de ce degré scolaire voire de cette classe) 	<ul style="list-style-type: none"> course d'obstacles (scolaires) à réussir 	<ul style="list-style-type: none"> Ne peut qu'être inféré par : les productions institutionnalisées de l'élève (exercice, examens, interventions en classe, etc...). Une attention particulière peut être portée aux "fautes" faites par l'élève comme symptômes de ces systèmes de savoirs par entretien clinique avec l'enfant par expérimentation sur l'élève

de colonnes représentent notamment les processus qui président à l'émergence de systèmes de représentations sociales selon Moscovici et Herzlich (1973). Ce tableau devrait nous permettre de dessiner des plans de recherches (qui restent à faire) visant à étudier la signification psycho-sociologique de ces types de savoirs. Nous pensons qu'une meilleure compréhension des significations sociales de ces connaissances et représentations serait susceptible d'éclaircir notamment certaines des nombreuses difficultés que rencontre l'élève dans leur apprentissage. Sur un plan plus épistémologique et psychologique, le débat devrait chercher à clarifier la différence qui existe entre une représentation sociale et ses objets d'une part, et les savoirs mathématiques et leurs objets d'autre part.

II. APPROCHE DIDACTIQUE

L'usage du terme didactique peut prêter à confusion du fait des connotations que la tradition pédagogique lui attribue et du fait des efforts actuels des chercheurs pour situer leur démarche de recherche en didactique (voir en particulier G. Brousseau, 1978) dans le découpage des champs théoriques en sciences de l'éducation. Il mérite donc d'être précisé. Il nous suffit, pour parler de situation didactique au sens large, de nous trouver dans un contexte où il y a intention d'enseigner quelque chose à quelqu'un. Au sens restreint la situation didactique sera définie par l'échange organisé, localement, entre le maître, les élèves, et un contenu précis de savoir. Dans ces situations le chercheur observe, provoque, des faits didactiques qu'il soumet à des analyses didactiques. Celles-ci se caractérisent par leurs méthodes (souvent tirées de la psychologie) mais aussi par leur fonction. Cette fonction est définie par le projet, de nature sociale, d'enseigner quelque chose à quelqu'un. Ainsi le rapport observateur / phénomène observé ne peut donc être le même qu'en psychologie.

L'analyse didactique est alors celle qui prend en compte les relations entre :

- la spécificité des contenus de savoir (qui ont subi un traitement didactique; ils ont été apprêtés, et ces opérations de transformation sont un des objets de l'analyse didactique),
- les variables de la situation didactique (au sens restreint): en particulier les variables d'échange entre les sujets, et les sujets et le milieu organisé pour l'enseignement,
- l'activité cognitive du sujet didactique, et non plus seulement du sujet psychologique, au sens où le projet porté sur lui, et les conditions qui le réalisent constituent cette activité en même temps qu'il en a l'initiative.

Dans cette deuxième partie nous nous mettrons donc en situation didactique pour essayer d'illustrer au niveau de l'élève certains des mécanismes décrits précédemment. Plus précisément notre propos consistera à montrer, par des exemples, le statut cognitif et psycho-social de productions d'élèves lorsqu'ils font un exercice de mathématiques ou résolvent un problème. Dans ces deux cas nous interrogerons ce qu'on a l'habitude d'appeler leurs "connaissances": d'abord en essayant de comprendre comment les objets à enseigner construits pour les besoins de la didactique, orientent l'activité cognitive de l'élève; ensuite en montrant comment l'activité de résolution de problèmes est confrontée à des objets didactiques qui interviennent à titre de supports et d'obstacles à la fois.

1. L'orientation de l'activité de l'élève par les objets didactiques

Il nous faut tout d'abord préciser à travers l'exemple des ensembles en mathématiques comment s'opère la "création didactique d'objets" qui caractérise la "transposition didactique" dont Y. Chevallard (1980b) a développé le processus, afin de saisir en quoi l'objet d'enseignement est différent de l'objet de savoir auquel il répond.

Dès l'origine du mouvement de réforme de l'enseignement des mathématiques, on fait référence à la notion d'ensemble. L'intérêt premier de la théorie des ensembles est qu'elle dit à quelles conditions on peut considérer et traiter une collection d'éléments comme une entité à part entière, même si, pratiquement, on ne saurait en énumérer les éléments (voire les différencier clairement); de même, les opérations ensemblistes permettent de définir des familles d'ensembles de façon précise (grâce à la simplicité de leurs propriétés). En mathématiques la théorie des ensembles a pris une place centrale; et, dans les efforts de construction rigoureuse du corpus mathématique, les ensembles ont permis d'exprimer différentes notions de base dans un vocabulaire unifié.

a) Objet de savoir

Ce n'est pas un hasard si le souci d'enseigner les ensembles est apparu. On postulait alors que le travail de cette notion fournirait un bon raccourci aux générations futures et les ferait accéder plus rapidement aux mathématiques. Ce n'est évidemment pas la théorie des ensembles que l'on visait mais le "vocabulaire unifié" que j'ai évoqué ci-dessus.

b) Objet à enseigner

Pour enseigner les ensembles les pédagogues ont emprunté les diagrammes logiques d'Euler-Venn. A l'origine, ces diagrammes sont censés représenter les relations entre classes logiques (inclusion, exclusion, non-exclusion totale etc.), et on les utilisait comme instrument pour le calcul propositionnel (déjà dans un souci didactique). Les diagrammes représentent bien des images de classes logiques (les cercles ou les ellipses); cependant, l'utilisateur est censé savoir ce qu'est une classe, comment elle est constituée, et c'est seulement pour rendre compte des relations que les classes entretiennent entre elles qu'on les dessine. De ce point de vue, peu importe leur contenu (qui n'est pas représenté). A noter que ni pour Euler ni pour Venn il n'était question d'ensembles (du temps d'Euler on ne parlait pas encore d'en-

sembles).

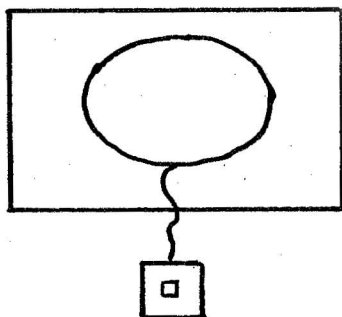
Par contre dans le projet pédagogique actuel, il importe avant tout que l'élève puisse concevoir les classes logiques et en arrive à détacher son raisonnement des objets pour prendre en considération la compréhension des concepts. Les diagrammes d'Euler-Venn sont alors utilisés pour représenter des ensembles. On va commencer par faire des ensembles: on va demander à l'élève de remplir les diagrammes avec des objets, ou encore de tracer la limite des ensembles d'objets constitués. L'image de l'ensemble est alors explicitée, réalisée; une fois que l'élève aura bien compris cette activité préliminaire, à force d'habitude, on pourra se dégager des objets: le remplissage sera suspendu, et on ne considérera que les différentes parties du diagramme. L'élève pourrait ainsi accéder à l'interprétation classique des diagrammes.

Il y a donc là un parti pris (fort compréhensible de la part des pédagogues) de procéder par le commencement, c'est-à-dire faire en sorte que l'élève comprenne les classes logiques comme entités en se basant sur leur image, puis, par le traitement de l'image (qui devient un condensé), dégage les relations que les classes peuvent entretenir entre elles. Cependant cette activité préliminaire de remplissage est purement didactique (d'une didactique pour jeunes enfants) et se voit associée au schéma proposé par Euler-Venn.

Le diagramme d'Euler-Venn est ainsi devenu un objet didactique et c'est "tout naturellement" qu'on va essayer d'en induire la genèse chez l'élève au moyen d'exercices appropriés.

c) Comment les objets didactiques orientent l'activité cognitive dans le cas d'exercices mathématiques. (Enseignement à des enfants de 7-8 ans en Suisse romande).

Nous allons parler plus précisément du type d'exercice suivant:

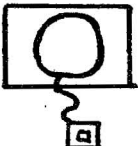


Un diagramme de Venn est donné, vide. Le cadre représente l'ensemble référentiel.

Le rond délimite un ensemble particulier.

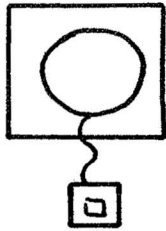
L'étiquette (Σ) désigne l'attribut attaché à l'ensemble (ici l'ensemble des formes carrées, le référentiel étant celui des objets de formes différentes).

On demande à l'élève de remplir le diagramme avec des figures à placer correctement selon les indications données par l'étiquette. Le résultat qu'on veut obtenir est un diagramme complet, comme celui qu'on aurait obtenu si on avait voulu représenter des ensembles. Dans l'exemple, le diagramme correctement rempli donne l'image de l'ensemble des carrés plongé dans un univers de formes ou encore un univers de figures constitué de l'ensemble des figures carrées et de son complémentaire (l'ensemble des figures non carrées).

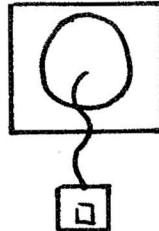
Cette didactique fait donc le pari qu'il y a cohérence entre l'activité demandée à l'élève et la signification (l'interprétation) du schéma obtenu. Ceci peut paraître vrai dans le cas où on demande à l'élève (par exemple) de remplir le diagramme  et où on insiste bien pour qu'il place des figures dans les deux zones (plages) ainsi délimitées.

Il y a là une interprétation forte de la signification de l'activité. Cependant rien n'indique que dans tous les cas la réponse ait le statut d'ensemble.

1^o Ainsi par exemple on voit souvent des élèves prolonger l'attache de l'étiquette jusqu'à l'intérieur de l'ensemble:



corrigé en

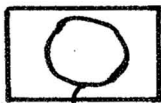


ce qui porte à penser

que l'étiquette a pris le statut d'indiquer l'endroit où placer les carrés et non pas celui de représenter l'attribut qui définit l'ensemble. L'activité consiste alors à mettre des figures ensemble au même endroit et non pas à constituer l'ensemble.

2^o De plus, la logique de l'activité n'est peut-être pas la même que celle qu'on veut mettre en oeuvre. Par exemple, dans le cas du remplissage de élèves mettre à l'intérieur "non vert" des figures de leurs (vert, rouge, bleu, jaune, non vert étoile etc.) alors qu'il aurait fallu ne mettre que des figures vertes. Les élèves qui ont répondu ainsi interprétaient l'étiquette "non vert" comme une interdiction: "ne pas faire vert". La négation de cette interdiction correspondant à sa levée, tout est permis à l'extérieur de la zone "non vert". Ainsi la logique sous-jacente était: "non non vert = tout (est permis)" alors que la logique qu'on aimerait enseigner veut: "non non vert = vert"!

3^o Ceci peut aboutir à des réactions totalement inattendues de la part des élèves. Ainsi la maîtresse d'une classe faisait un exercice routinier avec ses élèves bien familiarisés avec les diagrammes de Venn. L'exercice proposait le diagramme:

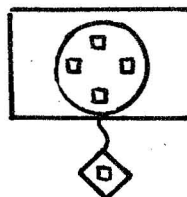


avec la consigne suivante: "dans ce diagramme ne mets que des formes pas carrées".

Le but de l'exercice était de faire placer à l'élève l'ensemble des "non carrés" dans le diagramme. Ces élèves savaient ce qu'était une forme non carrée, et si on leur avait simplement demandé de remplir le diagramme (complètement) il n'y aurait pas eu de problèmes.

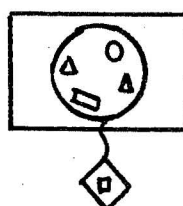
La première réaction des élèves fut de déclarer l'exercice impossible. Sommés d'essayer quand même de faire l'exercice, ils fournirent pour la plupart deux types de réponses.

a) Soit ils proposaient étonnée, leur rappelait la avait pourtant dit de ne formes pas carrées". Cet signe était incompréhensible



et la maîtresse, consigne: "on dessiner que des oubli de la con- pour elle.

b) Soit ils proposaient plus mystérieux. La maîtresse indi l'étiquette: "que dit l'étiquet- pourquoi tu as mis un triangle



ce qui est encore indiquait alors te ? (carré) alors dans l'ensemble ?"

Cette transgression de l'étiquette était encore plus inattendue de la part d'élèves pourtant familiarisés avec ce symbole.

Il y avait donc pour les élèves une contradiction dans ce qu'on leur demandait: d'une part le schéma les induisait à produire des carrés dans l'ensemble des carrés, d'autre part la consigne leur disait de ne mettre que des non carrés. Leur solution a alors consisté à gommer l'un des termes de la contradiction (soit la consigne, soit l'étiquette). Il faut noter l'importance primordiale de l'image de l'ensemble, car la contradiction ne sera levée de façon satisfaisante qu'à condition que l'ensemble ne soit plus seulement considéré comme l'endroit où placer les figures. Mais la tâche proposée n'est pas à même de susciter cette décentration de la part de l'élève.

En conclusion il faut noter deux choses:

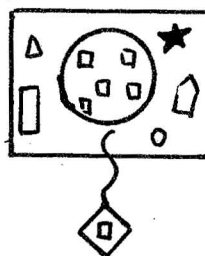
a) Chaque fois, la maîtresse renvoyait l'élève à la lecture de son résultat: il n'était pas correct de faire des carrés du fait de la consigne; ou bien, il ne fallait pas mettre des figures pas carrées dans l'ensemble des carrés. Cependant les erreurs des élèves lui paraissaient totalement incom-

préhensibles car pour elle, la liaison entre la consigne et l'interprétation ensembliste du diagramme allait de soi, du fait même de la tâche proposée.

b) On voit combien l'utilisation du diagramme de Venn comme image de l'ensemble peut jouer le rôle d'obstacle à son propos. La contradiction apparaît dans le fait que la tâche proposée oriente l'élève sur la constitution de l'ensemble (qu'il positivise en le localisant), et que la considération du complémentaire demande au contraire à l'élève de se décentrer de l'ensemble pour considérer globalement l'ensemble, le complémentaire et le référentiel. Cette difficulté n'est pas fortuite, et c'est là une des principales difficultés de la logique. L'illusion était de croire que le schéma pouvait à lui seul lever cette difficulté. Il s'agit tout au contraire d'examiner la façon dont celle-ci se pose à travers le schéma, et c'est de cette analyse (à la fois mathématique et psychologique) qu'on pourra déduire le statut de cet objet didactique.

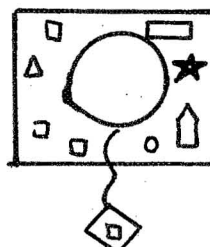
Après une première discussion, les élèves retournaient à leur place et essayaient de trouver la réponse correcte. En général ils n'y sont pas arrivés du premier coup, il y a eu une réponse intermédiaire de deux types:

a) soit l'élève proposait



c'est-à-dire la classification complète

b) soit l'élève proposait



c'est-à-dire la donnée du référentiel des figures, en évitant l'endroit désigné par l'étiquette.

Dans les deux cas, la correction aura consisté à gommer les carrés qui sont dans le schéma. On aboutit ainsi (enfin) à la réponse attendue. Cependant, ce n'est qu'indirectement (et comment!) que l'on a obtenu l'ensemble des non-carrés et l'objectif même de l'exercice a été trahi.

2. L'activité cognitive et les objets didactiques dans la résolution de problèmes mathématiques

Nous nous proposons ici de montrer comment l'activité cognitive des élèves interfère avec des représentations qu'ils se sont construites à propos d'objets didactiques tels que les diagrammes en arbre, si prisés dans les manuels de mathématiques modernes. Autrement dit, mis en face d'une situation-problème l'élève peut certes rencontrer des obstacles cognitifs qui relèvent de la difficulté conceptuelle même du problème. C'est ainsi qu'on explique la plupart du temps le niveau de ses productions. Mais il peut aussi être confronté à des obstacles de l'ordre de la représentation des objets didactiques à utiliser parce que l'école lui a appris l'usage de ces objets comme pertinent pour résoudre une classe de situations.

Une mise au point est sans doute d'emblée nécessaire pour éviter une interprétation trop "pédagogue" du terme "obstacle". Il ne s'agit pas pour nous de signifier par là de simples freins à la connaissance qu'il suffirait d'éliminer pour que l'élève apprenne correctement les concepts, et d'adopter une position où cultiver le sujet "naturel", ou épistémique selon le cas, serait le principe à substituer à une didactique. Nous donnons au terme obstacle un sens actif, c'est-à-dire qu'il représente les éléments auxquels l'activité du sujet est confrontée dans les conditions didactiques qui lui sont faites. Ces conditions déterminent les modalités de l'appropriation des connaissances par les élèves.

Dans un ensemble d'interventions didactiques, nous cherchons à préciser la nature et le fonctionnement de ces obstacles dans l'apprentissage des mathématiques à l'école. La méthode consiste à observer de petits groupes d'élèves en situation de résolution de problèmes. L'éventail de ces situations est assez large: il peut s'agir de remplissage de fiches d'exercices, de problèmes mathématiques au sens courant du terme, ou de "situations mathématiques". Dans ce dernier cas, d'où sera tiré notre exemple, on s'éloigne beaucoup des exercices classiques de manuels. En effet ces situations sont construites pour que l'élève exerce son activité de recherche et sorte des sentiers battus de l'application. Elles supposent également un temps d'activité assez long. Pour l'observateur elles offrent la possibilité de voir comment les objets didactiques sont réutilisés en dehors de leur contexte habituel, soit que l'élève les investisse du statut qui a justifié leur enseignement, soit qu'il les déforme, ou encore qu'il les délaisse.

La situation suivante a été proposée à des élèves de 6e (11-12 ans) par un enseignant *: "Voilà une boîte de dominos, que je vous montre. Ma question: comment peut-on savoir le nombre de dominos qu'il y a dans cette boîte ? Sans l'ouvrir". Telle est la consigne donnée à la classe où les élèves travaillent par petits groupes de 3 ou 4. Ils disposent de leurs cahier et crayon. Une brève analyse de la tâche nous montre qu'il s'agit de sélectionner l'information pertinente en dégagant les règles implicites: un domino est formé de deux parties, et sur chacune d'elles on trouve un chiffre allant de 0 à 6. La combinaison de ces sept chiffres deux à deux donne la solution du problème posé, en tenant compte de l'existence de dominos doublet

1	1
---	---

 et du retrait des dominos inverses (ex.:

1	2
---	---

 et

2	1
---	---

 (pour

•	•
---	---

 et

•	•
---	---

).

* Nos remerciements vont à M. H. Schaerer qui a eu l'initiative de cette situation mathématique.

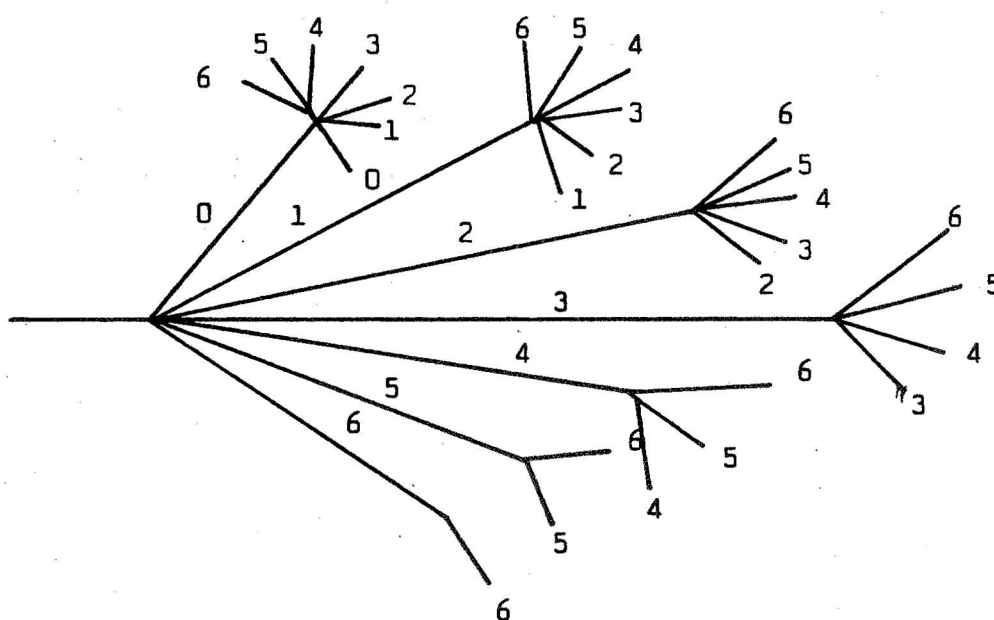
Nos anticipations avant l'observation nous laissaient prévoir, dans ce contexte didactique, trois catégories de productions:

- le dessin des dominos
- l'utilisation de deux sortes de diagrammes:

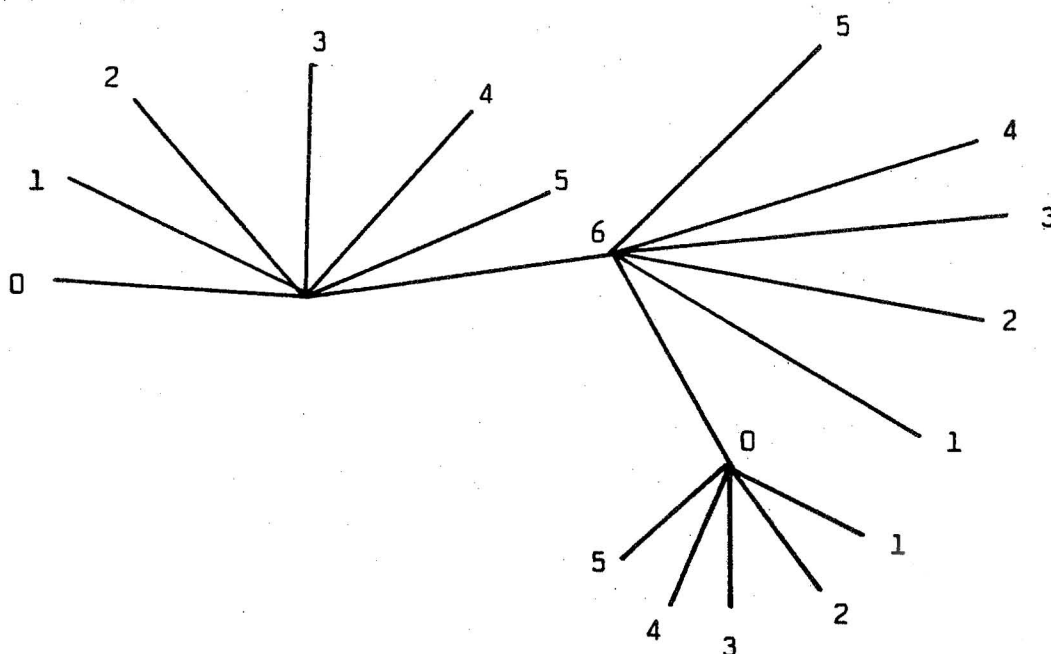
a)

	6	5	4	3	2	1	0
6	66	65	64	63	62	61	60
5	—	55	54	53	52	51	50
4	—	—	44	43	42	41	40
3	—	—	—	33	32	31	30
2	—	—	—	—	22	21	20
1	—	—	—	—	—	11	10
0	—	—	—	—	—	—	00

b)

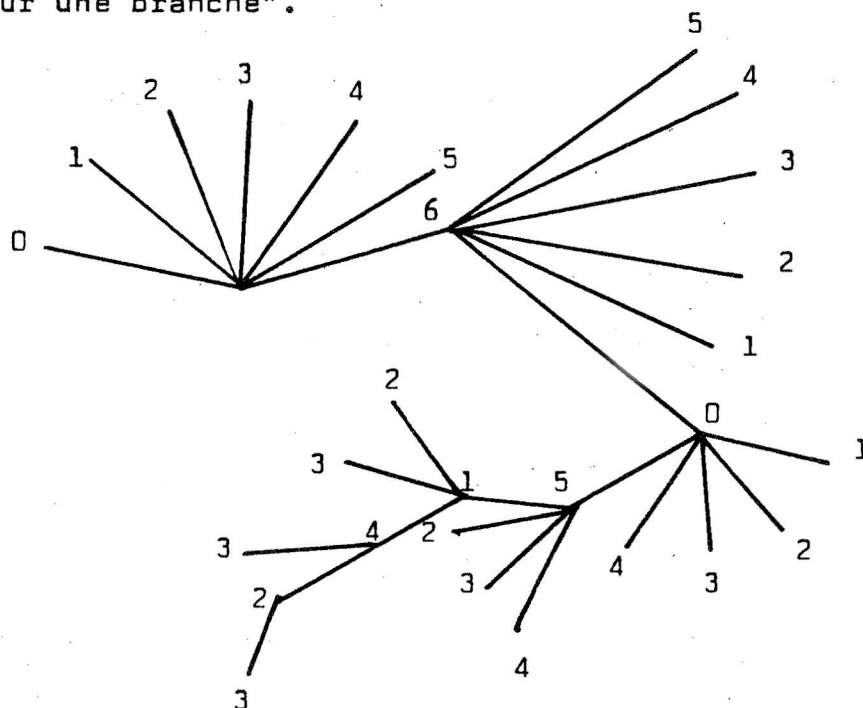


Nos observations nous ont montré l'usage que font les élèves de ces moyens de représentation, qui ont été enseignés durant toute la scolarité primaire à propos des opérations de classification, de multiplication ou de combinatoire. Souvent d'ailleurs l'enseignement de ces diagrammes se substitue aux opérations elles-mêmes. Le maître et l'élève oublient qu'il s'agit d'un langage et en quoi il est une création ad hoc. Par analogie avec la formation des représentations sociales on pourrait peut-être dire que les concepts scientifiques qui se trouvent en amont ont subi un processus d'objectivation et de naturalisation, au sens où, comme l'écrit Herzlich (1973): "ce qui était concept abstrait se transforme en entité objective". Dans le langage scolaire, on "fait" l'arbre de classement, comme on "fait" l'application linéaire. On désigne là un ensemble de pratiques qui émergent à un univers social bien défini, où l'on use de catégories provenant de la théorie mathématique, mais qui renvoient à des objets d'enseignement au statut ambigu. Retrouve-t-on cette ambiguïté dans l'activité de l'élève ? La démarche de Francesco nous paraît suffisamment significative pour tenter un début de réponse à cette question. En effet le groupe où se trouve Francesco a décidé, d'un commun accord, de "faire l'arbre, parce qu'avec l'arbre on peut faire des combinaisons", et donc, selon eux, répondre à la question: combien de dominos dans la boîte ? Le modèle qu'ils actualisent est celui de l'arbre factoriel ou multiplicatif, auquel Francesco va associer une représentation graphique bien précise, conforme à celle qu'on lui a enseignée, et qu'on peut résumer ainsi: "je dessine des branches et à chaque étage je diminue d'une branche". En effet il dessine le schéma suivant après avoir déclaré: "il y aura 7 chiffres au départ". (de 0 à 6).



Autrement dit, il fait $7 \times 6 \times 5$ etc..., ce qui n'est pas pertinent pour le problème posé, qui n'a pas cette structure factorielle. D'ailleurs, et c'est là qu'on voit l'interférence de deux représentations, Francesco le manifeste bien lorsqu'on lui demande d'expliquer comment il lit son arbre. Il répond: 6 - 5 c'est un domino. Il faut deux branches pour un domino". Deux représentations fonctionnent sur le même objet didactique: dans un cas l'élève identifie son problème (combien de dominos ?) à l'objet d'enseignement (l'arbre); cet objet est ensuite représenté en fonction d'un usage qui oublie la conceptualisation en jeu mais qui cependant permet une utilisation suffisante des informations reconnues pertinentes (lire les dominos). La tâche est devenue: construire un arbre factoriel avec 7 éléments. L'activité peut donc se poursuivre sans qu'il y ait de remise en question du modèle. D'autre part, lorsque l'élève est recentré par l'enseignant sur la tâche d'origine (trouver les dominos)

il utilise son diagramme d'une autre façon, descriptive cette fois, qui convient au problème. Cette conjonction de deux tâches va se révéler contradictoire au terme de la construction d'une partie du schéma. Francesco aboutit en effet à ceci, "pour une branche".



Lorsqu'il lit son schéma pour trouver le nombre de dominos qu'il a déjà formés, il arrive à un nombre impair de branches (7), et donc 3 dominos $\frac{1}{2}$! "C'est pas possible" dit-il. Et il recommence une autre stratégie. Il reviendra plus tard à ce schéma en arbre, sans pouvoir toutefois lever l'obstacle et adapter son schéma à la compréhension correcte qu'il a du problème: associer deux à deux les nombres entre eux. Le fonctionnement que le schéma induit chez l'élève est trop puissant.

On voit sur cet exemple, et sans prétendre à une généralisation, comment l'activité cognitive est confrontée à la représentation qu'elle s'est donnée des objets d'enseignement.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

Il nous paraît important pour conclure, de noter qu'il s'agit là de représentations organisées, qui fonctionnent à titre de composantes de l'activité cognitive et ne lui sont pas extérieures au sens où on envisagerait d'un côté une activité cognitive pure et de l'autre des freins à cette activité. Simplement ces représentations organisées n'ont pas un statut opératoire (se rapprochent-elles d'éléments décontextualisés de représentations sociales ?) car elles ne sont pas suffisamment adaptées à la situation du fait qu'elles chevauchent des objets conceptuels et des objets didactiques sans en faire l'intégration. Dans notre esprit le problème didactique n'est pas d'éliminer ces obstacles, qui, pourrait-on dire, sont inévitables, mais de permettre qu'ils fonctionnent suffisamment, sous certaines conditions de communication, pour que l'élève puisse les reconnaître et peut-être les dépasser.

Nous ne pouvons prétendre avec ces éléments définir précisément le rapport entre représentations sociales, objets didactiques et activité cognitive. Notre propos est davantage de suggérer des analogies et d'interroger le statut de ce qui s'effectue sous couvert d'enseignement et d'acquisition de connaissances mathématiques, en adoptant cette manière de poser le problème de la transposition dont parle Y. Chevallard (1980b): "là où l'enseignant voit l'identité de la fin (l'objet de savoir désigné comme à enseigner) et des moyens (l'objet d'enseignement, tel que la transposition didactique l'a fait) le didacticien introduit la question de l'adéquation: n'y a-t-il pas substitution d'objet, et laquelle ? ... on découvre alors que de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement, la distance est - souvent - immense". Nous espérons avoir illustré cette distance et avoir suggéré des pistes d'analyse de cette "substitution d'objet" et des conditions psycho-sociales qui y président. Sera-t-on amené à distinguer l'adéquation à un type de situation sociale de communication,

de l'adéquation proprement mathématique ? Par ailleurs nous tentons d'examiner dans quelles situations d'interaction sociale et de communication l'élève structure opératoirement sa pensée (Mugny, Doise, Perret-Clermont 1981) et formalise ses messages mathématiques (Schubauer-Leoni, Perret-Clermont 1980). Cette question des conditions d'élaboration et de transmission de représentations cognitives s'avère extrêmement complexe!

- BOURBAKI N.- Théorie des ensembles. Eléments de mathématiques, Hermann, Paris 1970
- BROUSSEAU G. - L'observation des activités didactiques. In: Enseignement élémentaire des mathématiques. IREM de Bordeaux, 18, 22-43, 1978.
- CHEVALLARD Y. - Mathématiques, langage, enseignement: la réforme des années soixante. Recherches, 41, 71-99, 1980a.
- CHEVALLARD Y. - Cours. 1ère Ecole d'été de didactique des mathématiques. Chamrousse, 1980b.
- CONNE F. - La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Faculté de psychologie et sciences de l'éducation. Université de Genève, 1981.
- HERZLICH C. - La représentation sociale. In: S. MOSCOVICI (ed.). Introduction à la psychologie sociale, vol. 1., Larousse 1972, p. 303-323.
- SCHUBAUER-LEONI M. et PERRET-CLERMONT A.-N. - Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. Recherches en didactique des mathématiques, 1, 3, 297-343, 1980.