Publié sous *Interactions didactiques, 1,* 1-33, 1982
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail.

DECONTEXTUALISATION ET RECONTEXTUALISATION DU SAVOIR DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A DE JEUNES ELEVES

Anne-Nelly PERRET-CLERMONT, Jean BRUN, François CONNE, Maria-Luisa SCHUBAUER-LEONI

INTERACTIONS DIDACTIQUES, NO I, JUILLET I982

Contribution présentée au Colloque international du Laboratoire européen de psychologie sociale: "Représentations sociales et champ éducatif". Aix-en-Provence, 30 novembre au 3 décembre 1981.

Didactiques des mathématiques
Psychologie sociale de l'éducation
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'Université de Genève
1211 Genève 4 (Suisse)

Séminaire de psychologie
Faculté des Lettres

Université de Neuchâtel
8, rue de la Maladière

2000 Neuchâtel (Suisse)

Résumé

Cette communication se propose de montrer comment, dans l'activité d'enseignement, s'opère d'abord une décontextualisation du savoir mathématique. Ce savoir est en effet sorti de son champ de production, transformé et recontextualisé pour être mis à la portée d'un public qui à son tour procède à une dé-re-contextualisation.

Dans une première partie, Anne-Nelly Perret-Clermont et Maria-Luisa Schubauer-Leoni s'interrogent sur les rapports existants entre la représentation sociale générale des Mathématiques chez les élèves et leurs activités d'apprentissage de celles-ci. Elles examinent également à un autre niveau, et en utilisant les concepts propres à la problématique des représentations sociales, quelles transformations subit l'objet mathématique lors de ce processus de dé-re-contextualisation. Ce qui les amène à se questionner sur le statut d'une connaissance mathématique chez l'enfant: la dimension opératoire par laquelle tout concept mathématique se définit serait-elle doublée d'une autre dimension à caractère plus représentationel ? Quelles sont les relations entre l'une et l'autre ?

Dans une deuxième partie, François Conne, puis Jean Brun, illustrent comment l'élève fonctionne cognitivement à l'aide et face à ces objets décontextualisés en recourant à des exemples d'observations effectués à l'école primaire. Ils examinent comment l'activité cognitive des élèves interfère avec de tels objets didactiques dont on fait l'hypothèse qu'ils ont des analogies de fonctionnement avec les représentations sociales.

I. APPROCHE PSYCHO-SOCIOLOGIQUE D'UN PROCESSUS DE CONNAISSANCE ET D'ENSEIGNEMENT

1. Choix de l'objet

La transmission des savoirs occupe une place centrale dans le champ éducatif: l'instruction dispensée est sans doute la justification première que l'école se donne. Les déclarations d'intentions pédagogiques semblent généralement centrées sur le souci de promouvoir le développement intellectuel des élèves.

Un regard attentif porté sur les pratiques pédagogiques, les programmes scolaires et les exigences des examens révèlent que la compréhension qui est attendue de l'élève porte sur des domaines de savoirs relativement bien spécifiés, à première vue du moins. Les mathématiques en sont un.

Pour plusieurs raisons, les mathématiques nous semblent être particulièrement exemplaires pour l'analyse des représentations sociales à l'oeuvre dans le champ scolaire: d'une part il leur est reconnu une place importante à tous les niveaux de la scolarité tant du point de vue du temps qui leur consacré que de leur rôle dans les processus de sélection scolaire. D'autre part, les mathématiques semblent être considérées par les partenaires scolaires comme une branche de connaissance fondamentale revêtant les traits les plus nobles: l'"objectivité", la "justesse", la"rigueur", l'"univocité", la "déduction", voire... la "vérité" et la "beauté"! On a parfois l'impression que l'école aime présenter le savoir mathématique comme étant la pensée par excellence, et comme reflétant dans le miroir des autres disciplines l'image modèle de la science. Qui n'a entendu une de ces nombreuses remarques significatives de la part d'élèves (forts en maths!) ou de la part d'enseignants (en proie à la correction d'examens...): "ce qu'il y a de bien en maths, vois-tu, c'est qu'ou bien c'est juste ou bien c'est faux. Là au moins c'est objectif !".

En fait, si certains courants de la pensée mathématique adhèrent effectivement à une vision idéaliste des savoirs de cette discipline, d'autres par contre font remarquer que l'activité du mathématicien fait appel également à des pratiques incomplètement codifiées et qui ne sont donc elles régies que par l'usage (Bourbaki,E.I.7V,1970); ces mêmes auteurs affirment même que lorsque le mathématicien cherche à s'assurer de la parfaite correction ou "rigueur" de sa démonstration il "se contente en général d'amener l'exposé à un point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible)" (Bourbaki, E.I.8.,1980). L'élève perçoit-il ainsi les mathématiques? N'est-il pas coincé entre sa pratique (inductive, tâtonnante) et une image idéaliste des mathématiques que lui présente l'école en les lui décrivant comme uniquement déductives ?

Par le jeu des programmes scolaires et de l'institutionnalisation des apprentissages, l'élève est obligatoirement confronté à un type de savoir mathématique dès le début de la scolarité. Les liens qu'il entretient avec cette branche scolaire déterminent son attitude globale face aux mathématiques; attitude qui lui fera dire assez vite: "j'aime" ou "j'aime pas" les Maths. Il s'agit ici d'un premier niveau d'étude de la représentation sociale de cet objet de savoir chez l'élève. Toute activité mathématique à l'école s'insère dans ce premier degré d'appréciation ou de "refus", de la part de celui qui est obligé d'"en faire" de toute façon. Dans ce cadre institutionnel et relationnel contraignant, comment l'élève va-t-il élaborer, voire s'approprier un savoir mathématique ?

La représentation sociale que l'enfant a de la matière intervient-elle dans les situations spécifiques d'apprentissage de telle ou telle notion mathématique ? Quel est le lien entre l'activité cognitive d'un élève confronté à un problème mathématique et cette forme de connaissance de l'objet qui a été désignée "représentation sociale" à la suite de Moscovici ? Quelle est la spécificité de ces deux formes de connaissances[1] ? Présentent-elles des analogies de fonctionnement ? Et encore, s'il y a co-existence chez l'élève de ces deux modalités de connaissance particulières, dans quelle mesure se déterminent-elles mutuellement ?

Si la représentation sociale (...)"est l'un des instruments grâce auquel l'individu, ou le groupe, appréhende son environnement,(...) et si "la représentation joue un rôle dans la formation des communications et des conduites sociales"[2], nous nous demandons alors quel rôle joue la représentation sociale des mathématiques dans les situations scolaires où l'enfant est sensé s'approprier des concepts mathématiques.

Nous venons d'esquisser ici une première série de questions qui nous permettent de situer le cadre général de notre réflexion actuelle. Nous sommes loin de pouvoir donner une réponse à l'ensemble de ces questions.

Pour avancer dans cette étude, il nous semble nécessaire notamment de reconsidérer l'objet particulier de savoir mathématique auquel l'élève est confronté et avant lui d'autres acteurs sociaux tels

---

1) Etant entendue l'hypothèse selon laquelle elles ne seraient pas réductibles l'une à l'autre: le concept mathématique se définit en termes opératoires (Vergnaud 1980); la représentation sociale ne l'est pas, elle renvoie peut-être à des processus plus figuraux.. C'est une question ouverte qu'il faudra encore explorer.

2) Herzlich (1972, page 307)

que l'enseignant, l'auteur de manuels scolaires et le chercheur en mathématiques. Nous allons donc nous tourner maintenant vers un autre palier d'analyse des représentations sociales en mathématiques: non plus l'image des Mathématiques (comme discipline) mais celle des objets particuliers de savoir mathématique.

2. DECONTEXTUALISATION ET RECONTEXTUALISATION DU SAVOIR

Les travaux de Chevallard (1980b) ont développé une étude épistémologique en didactique des mathématiques que l'auteur appelle "transposition didactique"[1]. En nous référant à ces travaux et à ceux de Conne (1981) nous allons tenter de décrire le processus en recourant au modèle de la représentation sociale élaboré par Moscovici.

Pour aborder ce deuxième niveau d'étude des représentations sociales tout en tenant compte de la spécificité de l'objet de savoir à chaque étape de sa "transposition", nous nous centrerons sur les caractéristiques de l'activité déployée par les agents que nous avons considérés comme 4 acteurs importants de cette "dé-recontextualisation" du savoir, en fonction du lieu où elle est produite.

Nous tenterons ainsi d'illustrer comment il est possible d'observer chez l'auteur de manuels scolaires, ou chez le maître, des processus de décontextualisation puis de recontextualisation des objets de savoir qui, ce faisant se transforment.

---

1) "(...) La transposition didactique sensu lato représentée par le schéma:

[$\sim \rightarrow$ objet de savoir $\rightarrow$ objet à enseigner $\rightarrow$ objet d'enseignement]

dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit".

(fiche 1, pages 1 et 2).

Nous examinerons comment le fait de devoir s'adresser à des élèves considérés par définition comme relativement ignorants de l'objet qui doit leur être enseigné d'une part, et d'autre part comment les contingences de situation, de matériel, de temps et de formation obligent l'enseignant simultanément à extraire un certain nombre d'éléments de leurs contextes mathématiques d'origine et à les replacer dans de nouveaux contextes (construction d'exemples, d'applications; création de situations pédagogiques)[1].

Du côté de l'élève nous nous posons les mêmes questions : que fait l'élève face aux savoirs détenus et présentés par l'adulte à son intention ? Bien sûr qu'il ne se contente pas de les mémoriser simplement mais qu'il réfléchit lui aussi, à sa manière, ces savoirs.

Il est invité à les apprendre dans des contextes didactiques spécifiques (questions du maître, exercices ad hoc, examens, etc) et à propos d'exemples ou de cas de figures plus ou moins particuliers.

Les mêmes matériaux didactiques ou les mêmes exercices mathématiques servent parfois, tour à tour, à des activités socialement différentes. Dans les unes, dites de "découverte" l'individu doit en quelque sorte accepter son "ignorance" pour ensuite la dépasser grâce à des apprentissages ou à des inventions nouvelles qui sont encouragées. Dans les autres, au contraire (épreuves d'évaluation, tests, examens en vue d'une note) l'individu se doit de démontrer non plus son ignorance mais son savoir et son assurance. Erreurs et tâtonnements y sont interdits. Comment l'élève va-t-il réagir à ce double marquage social - contradictoire - auquel sont soumis ses objets d'étude ?

---

1) Ce "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement (...) l'enseignant ne le perçoit pas spontanément: ou du moins il ne lui accorde pas d'attentions "spéciales".
(Chevallard (1980b) fiche I page 1, et fiche III page 1).

Nous faisons l'hypothèse que l'élève lui aussi, dans l'activité cognitive qu'il développe pour s'approprier les objets de savoir qui lui sont présentés, opère une nouvelle décontextualisation et recontextualisation de ces objets.

Puisque (...)"la représentation sociale est, pour chaque groupe, appropriation du monde extérieur, recherche d'un sens dans lequel pourra s'inscrire son action" (Herzlich 1972, page 309), nous devons pouvoir trouver des exemples montrant que l'activité cognitive de l'élève n'est pas indépendante des conditions sociales qui l'engendrent et des représentations sociales que l'enfant s'en fait.

En effet, Conne (1981) en relatant des faits observés dans une classe de lère et 2ème primaire vaudoise (6-8 ans) nous dit de ces élèves: "Ils paraissent familiarisés avec les problèmes d'arithmétique (dès la première année) alors qu'ils n'en avaient jamais fait auparavant en classe. Donc il existe quelque part un lieu, hors école, où l'élève fait des mathématiques. C'est l'ampleur de cet ailleurs qui m'a surpris"(page 465).

Cet "ailleurs" montre bien que l'univers mathématique des élèves n'est pas réductible à ce que l'enseignant leur propose (tant au niveau des contenus que des savoir-faire) et qu'une filiation directe entre "contenus d'enseignement" et "contenus mathématiques appropriés par l'élève" amènerait à une description bien simpliste des processus en jeu dans la situation didactique. L'étude des représentations sociales de l'objet "Maths" devrait permettre de comprendre la nature de l'ampleur de cet "ailleurs" et de la voir varier peut-être en fonction des groupes d'appartenance de l'élève[1)]; et de mieux saisir ainsi ce qui se passe dans ces apprentissages dits scolaires.

---

1) Conne (1981) précise qu'il s'agit "surtout des meilleurs (qui) savent beaucoup de choses avant même qu'on en ait parlé en classe" (page 465).

Nous pourrions à ce stade de notre étude nous demander si les objets du savoir mathématique présentés à l'élève après avoir subi successivement plusieurs transpositions d'un contexte dans un autre n'auront pas perdu ainsi leur essence "d'êtres mathématiques" pour devenir des êtres "dénaturés" qui n'auraient plus guère à voir avec leurs origines. Notons cependant que pour pouvoir répondre à cette question proprement épistémologique il aurait sans doute fallu déjà s'entendre sur la nature du savoir et de l'activité des mathématiciens eux-mêmes.

Faute de pouvoir trancher cette question nous pouvons cependant, comme le propose Chevallard (1980): "prendre acte de la spécificité du projet de construction didactique des savoirs, de son hétérogénéité à priori avec les pratiques "savantes" des savoirs, de son irréductibilité immédiate aux genèses socio-historiques correspondantes. (...) Dans cette hypothèse, l'étude de la transposition didactique suppose l'analyse des conditions et des cadres dans lesquelles elle s'opère". Nous cherchons alors à observer ce que l'élève fait des mathématiques qui lui sont proposées dans des situations didactiques: les comprend-il? Comment les reproduit-il ? Sont-elles des soutiens dans son propre développement cognitif ? L'incitent- elles à une activité mathématisante personnelle ? Nous nous interrogerons ensuite sur le statut des productions d'élèves dans un contexte didactique: s'agit-il de réponses de complaisance (qui sont cependant susceptibles d'être également "intelligentes") à des situations pédagogiques ayant leurs exigences sociales ? Ou s'agit-il de savoirs qui fonctionnent avec une certaine autonomie ? Et lorsque tel est le cas: quel est le champ de cette autonomie et dans quels contextes se manifeste-t-elle de façon opératoire ?

3. LA SITUATION DIDACTIQUE ET LA TRANSMISSION SOCIALE D'UN SAVOIR

Nous faisons donc l'hypothèse qu'à chaque étape de la transmission sociale d'un savoir mathématique il s'opère un processus de sélection et de réorganisation de l'information qui, à l'occasion d'une transposition hors du contexte initial modifie la signification-même de l'objet qu'il était question de transmettre. L'hypothèse peut sembler trop hardie. Il est évident que dans certaines conditions de communication (qu'il serait d'ailleurs très intéressant de bien préciser du point de vue psycho-sociologique) cette déformation ne se produit pas. Car cela signifierait que toute science est impossible voire qu'une compréhension partagée l'est aussi. Et les échanges entre mathématiciens ne seraient alors que dialogues de sourds (ce qui n'est pas vrai même si ... cela se produit parfois !).

Roqueplo (1974) se pose des questions similaires à propos de la vulgarisation scientifique et des possibilités de communication d'un savoir objectif.

Notre analyse vise surtout cette situation particulière qu'est la transmission d'un savoir par un savant (ou "sachant") à un "ignorant" (ou "non-instruit") et plus particulièrement encore les situations les plus fréquentes dans le champ éducatif: celles dans lesquelles ce processus de communication est dirigé vers une collectivité et ne relève pas d'un face à face qui, par le dialogue, permet à l'un des partenaires de modeler ses réactions immédiates à celles de l'autre. Il s'agit ici principalement d'examiner ces nombreuses situations pédagogiques (y compris d'ailleurs certains dialogues maître-élève) qui, parce qu'elles sont institutionnalisées et finalisées sont largement surdéterminées par leurs conditions sociales (effectif des élèves, statuts, âges, compétences reconnues, rôles) et par des normes préétablies qui fixent, ne serait-ce que par l'usage, les formes que doit prendre la communication et les implicites sur lesquels elle repose.

4. LES DIFFERENTS LIEUX DE L'ELABORATION DE SAVOIRS MATHEMATIQUES

Le tableau 1 (page 11) fait état, à titre heuristique, de quatre grands types de situations:

A. Les situations d'élaboration de connaissances mathématiques par les mathématiciens eux-mêmes.

B. Les situations d'élaboration de manuels et de programmes scolaires.

C. Les situations dans lesquelles l'enseignant prépare et fait son enseignement.

D. Les situations didactiques que vit l'élève.

En vue d'examiner les processus sociaux et cognitifs en jeu lors de l'élaboration de ces savoirs, nous allons prendre en compte, de façon distincte pour chaque acteur, les processus qui président à l'émergence de systèmes de représentations sociales selon Moscovici et Herzlich (1972). Le tableau 2 (pages 12, 13, 14 et 15) devrait nous permettre de dessiner des plans de recherches visant à étudier la signification psycho-sociologique de ces types de savoirs.

Il s'agira d'une part de chercher à connaître les mécanismes propres à l'élaboration de chaque savoir spécifique à l'agent décrit, en fonction notamment des conditions sociales et relationnelles dans lesquelles la construction s'effectue; d'autre part, étant donné les rapports que ces acteurs entretiennent - ne serait-ce que du point de vue institutionnel - il serait intéressant d'étudier comment les représentations sociales de l'objet de savoir (et de ses possibilités d'accès) que les uns se sont forgés, participent à la constitution de nouvelles représentations sociales chez les autres. Y aurait-il alors "transposition" au niveau même des représentations sociales d'un savoir scientifique ?

TABLEAU 1: LES TRANSFORMATIONS DE L'OBJET DE SAVOIR, LES AGENTS DE LA TRANSFORMATION ET LES CARACTERISTIQUES DE LEUR ACTIVITE

L'OBJET	Savoir Mathématique objectif	→ l'objet change de nature	Mathématiques en tant que "savoir à enseigner"	→ l'objet change de nature	Mathématiques en tant qu'"objet d'enseignement"	→ l'objet change de nature	Mathématiques en tant qu'objet à apprendre ou à s'approprier
L'ACTEUR PRINCIPAL ET LE LIEU D'EXERCICE DE SA FONCTION	Le chercheur en mathématique appartenant à une communauté scientifique	-par décontextualisation -par le tri de la schématisation figurative -par la naturalisation opérée	L'auteur de programmes ou de manuels d'école primaire	-par décontextualisation -par le tri de la schématisation figurative -par la naturalisation opérée	L'enseignant d'école primaire	-par décontextualisation -par le tri de la schématisation figurative -par la naturalisation opérée	L'élève d'école primaire
CARACTERISTIQUES ET FONCTION DE SON ACTIVITE PAR RAPPORT A L'OBJET	-crée des objets de savoir -"détient le monopole de la controverse du vrai" (Roqueplo 1974) -élabore le protocole de vérification de son discours (Roqueplo, 1974) -utilise un langage qui lui est propre		-opère une 1ère sélection dans le domaine du savoir objectif en décontextualisant des éléments -effectue une nouvelle élaboration scientifique caractérisée par son aspect "concret", "réel", accessible au public envisagé (cette élaboration est régie par un schéma figuratif constituant le noyau représentatif de l'objet et de sa fonction)		-opère à son tour une sélection en adaptant, en apprêtant, les objets à enseigner en objets didactiques -élabore une schématisation et naturalisation des concepts selon sa représentation du savoir objectif (filtré notamment par les manuels et sa formation scientifique et didactique), en fonction de sa pratique et du contrôle social et institutionnel auquel il est soumis		-refait le cheminement décontextualisation-schématisation-naturalisation (l'étude des apprentissages scolaires n'est d'ailleurs pas souvent attentive à ce processus!) -restitue ainsi dans son contexte expérientiel cet objet de savoir qu'il doit apprendre et lui donne un sens (pour sa vie d'enfant et d'élève) -le concept devient "entité" dans la réalité de chaque élève -par contrat didactique il doit faire la preuve d'avoir "appris" en donnant des réponses "correctes"(formes spécifique de recontextualisation !)

TABLEAU 2: CONDITIONS D'EMERGENCE DES 4 SYSTEMES DE "SAVOIRS MATHEMATIQUES" ANALYSES

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal, (porteur du "savoir" analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues.	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut, rôle, etc)	Centres de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoir" mathématiques par d'autres que l'acteur principal
A	le chercheur en mathématiques	-savant -compétence reconnue et sanctionnée quasi-unanimement par les spécialistes de la même discipline -rapport direct au savoir. L'objet du savoir est "son"objet	-les confrères mathématiciens présents et passés (avec leurs écoles, leurs courants de pensée, etc)	-statut de chercheur en mathématiques -travail en relation avec d'autres mathématiciens -institutions scientifiques -la "cité scientifique" au sens large présente ses normes -rôle:faire progresser la connaissance	-dépendent de l'état du débat dans la branche -de l'état de connaissance personnel (d'opportunités de travail	-maximale -via les canaux de la communication scientifique (livres, conférences, articles, etc -en direct des confrères par des échanges (en dialogue ou en petits groupes) -la prise d'information est considérée comme nécessitant du temps. Elle fait partie de la définition du temps de travail du mathématicien -information directe sur sa propre activité	-celles préconisées et justifiées de façon interne par la discipline -publications -communications compétition -justification de crédits -justification sociale par la réponse à des demandes de produire des "savoirs appliqués"	-travaille sur son état de connaissance -résout des problèmes internes et externes à sa discipline et doit faire approuver ses solutions par ses confrères	-produit les Mathématiques, les connaissances mathématiques	-connaissances qui sont la norme de référence pour définir la finalité et évaluer les produits de l'enseignement des mathématiques	-le savoir mathématique est accessible à travers les ouvrages et les revues spécialisées, les communications à des congrès, lors de conférences,ou de cours(Universités, grandes écoles, etc). NB:Il n'est accessible que lorsqu'il est rendu public par son auteur qui semble en prendre l'initiative lorsqu'il est susceptible d'être reconnu valide par les confrères.
	NB:le cas de la recherche en mathématiques appliquées est écarté ici puisque l'école primaire dans ses objectifs actuels ne déclare pas l'intention d'enseigner des mathématiques appliquées. Les objectifs des réformes récentes se dirigent bien plutôt dans le sens opposé.										

TABLEAU 2. (suite) CONDITIONS D'EMERGENCE DES 4 SYSTEMES DE "SAVOIRS MATHEMATIQUES" ANALYSES

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal (porteur du "savoir"analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut, rôle, etc)	Centre de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
B	l'auteur de programme ou l'auteur du manuel	-"sachant" et parfois savant -s'il est chercheur en mathématiques -compétences reconnues sur le plan math. par ses confrères -rapport direct au savoir -risque de se voir contesté par les enseignants sur le plan de la compréhension des demandes et contraintes pédagogiques -s'il est mathématicien et enseignant (mais non engagé dans la recherche): son savoir sera reconnu par les mathématiciens mais ses compétences n'auront plus l'occasion de se démontrer en prise directe sur la réalité	-les co-auteurs ou autres auteurs -les auteurs des programmes et manuels des disciplines autres que les maths. -les mathématiciens -les enseignants -les élèves (et leur âge, degré et filière scolaires) -les parents -les autorités scolaires et politiques -l'opinion publique -les responsables des écoles suivantes: (professionnelles, gymnasiales, supérieures) -les employeurs futurs	-pour le mathématicien il s'agit d'assumer un contrat relatif à une demande qui n'est pas uniquement interne à la discipline scientifique -peut dépendre d'une administration ou d'une maison d'édition, d'un groupe d'études, etc... -rôle: produire une présentation de savoirs mathématiques et attendus d'un groupe d'élèves d'un âge et degré scolaire donnés. Fournir le moyen de cet apprentissage	-sont fonction d'une image propre et d'une perception de l'image que les groupes de référence ont : -de ce qui constituerait les notions de base -de leur articulation -des possibilités et difficultés d'apprentissage de l'enfant -des capacités de l'enseignant	-sur les mathématiques: -plus ou moins approfondies selon l'insertion professionnelle -sur les élèves et les enseignants : -généralement intuitive et fondée sur l'expérience propre (souvent passée)et parfois sur une formation psychologique -sur les termes et le sens de la demande sociale: -généralement intuitive	-demande sociale de mise à jour. Modes. -demandes plus ou moins élaborées en rapport avec : -la compétition scientifique et technique internationale (effet du "Sputnik" par exemple) -la demande de "formation scientifique" de la population -les attentes des enseignants -les réactions des parents -termes du contrat de production (délais,moyens forme,ampleur, etc) -normes de "rigueur", de "clarté", d'"élégance", etc...	-définit les éléments essentiels (parmi les notions, formulations modes de représentation etc...) -simplifie le savoir pour l'adapter à un public -produit une schématisation en articulant les éléments retenus -et parfois justifie ses choix, met en valeur leur rigueur, démontre la logique de la schématisation conçue	-produit une schématisation du savoir qui se veut transmissible -produit une modalité de présentation des connaissances mathématiques -il s'agit d'un système de présentations d'objets d'enseignement ("savoirs mathématiques") ayant sa logique interne. Ce système de présentation sociale du savoir mathématique que se fait l'auteur	-"vulgarisation" de connaissances hors de la "cité scientifique" -définition empirique (par les situations proposées et les exemples donnés) des productions qui seront attendues du maître et de l'élève et du domaine de leur application	-système de présentation d'objets d'enseignement ("savoirs mathématiques") objectivés dans des textes écrits: programmes, livres du maître, et de l'élève, fichiers, exercices, questions d'examens, etc...

	compétences pédagogiques reconnues par les enseignants -compréhension des demandes psychologiques et sociales intuitives (éventuellement contestées par les psychologues et sociologues) ° -s'il est enseignant non mathématicien: outre les caractéristiques mentionnées ci-dessus, son rapport au savoir mathématique est déjà médiatisé par une transposition	-les groupes idéologiques d'appartenance						

TABLEAU 2. (suite) CONDITIONS D'EMERGENCE DES 4 SYSTEMES DE "SAVOIR MATHEMATIQUES" ANALYSES

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal (porteur du "savoir"analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut,rôle,etc)	Centre de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
C	l'enseignant	-"instruit" -son rapport au savoir mathématique n'est pas ce qui le définit dans son rôle et statut -s'il est mathématicien et enseignant: voir ci-dessus. -son rapport au savoir mathématique est déterminé sans doute aussi par son expérience scolaire de l'apprentissage en mathématiques. Il est reconnu du point de vue scolaire	-identité d'enseignant et non pas d'expert en math. Référence aux enseignants antérieurs, "parallèles" et futurs -aux élèves -aux parents -en général aucune insertion professionnelle dans le milieu des mathématiciens	-représentant face à l'élève de l'autorité scolaire de la société du savoir. Le "maître" -fonction gardienne, éducative et sélective -contrat d'enseignement -doit faire reproduire (acquérir) par un nombre suffisant d'élèves les "savoirs" désignés ou perçus comme essentiels. Doit susciter une "compréhension" selon les normes d'évaluation qui prévalent -situé dans un système hiérarchique qui l'inspecte et lui impose certains choix	-notions de base du programme -les difficultés reconnues -les exigences des examens et/ou des enseignants ultérieurs -sa propre image de marque aux yeux des parents, des supérieurs hiérarchiques, de l'opinion -les problèmes de"discipline" -le groupe-classe (plutôt que l'individu-élève) -les élèves qui sont "censés comprendre" (le 1/3 supérieur de la classe)	-sur les mathématiques: partielle transposée acquise dans sa propre scolarité ou au cours de sa formation professionnelle ou de recyclage ou comme "autodidacte" -sur les attentes de la demande sociale: généralement intuitive médiatisée souvent (par les supérieurs hiérarchiques, les medias, etc...) à travers l'expérience propre de la réaction de certains parents -sur les élèves et leur psychologie: -au travers de sa propre vie d'élève -intuitive, fondée sur une expérience directe auprès des enfants et parfois sur une formation psychologique (formation professionnelle, recyclage, medias)	-leçons à donner chaque jour,exercices et -épreuves à proposer -questions d'élèves et leurs autres réactions (incompréhension, ou à l'inverse "trop grande facilité", intérêts et motivation, comportement,etc) -nécessité de démontrer son autorité (auprès des élèves, des parents, de l'inspecteur, etc). cf. termes du contrat d'enseignement -perception ou représentation du niveau de compréhension des élèves -perception ou représentation des attentes du programme des supérieurs hiérarchiques, des élèves,etc -normes d'"objectivité", de "clarté",de "rigueur", d'"évaluation" de "sanction", etc...	-communique à des "non instruits" -adapte la présentation des objets d'enseignement en fonction de la nécessité d'avoir un certain nombre d'élèves qui "comprennent" selon les normes d'évaluation qui prévalent -cherche à faire reproduire par les élèves ces "savoirs mathématiques" -est généralement plus souvent préoccupé et en recherche au sujet des modalités de présentation de ces savoirs mathématiques que au sujet de ces savoirs eux-mêmes	-produit une schématisation du savoir mathématique qui doit être compréhensible ou en tout cas reproductible par l'élève -produit une (ou des) systèmes de présentation des "connaissances mathématiques" qu'a (ont) leur logique interne. Ces modalités de présentation renvoient sans doute au système de représentation sociale du savoir mathématique de l'enseignant	-vulgarisation de connaissances -discours institutionnalisé destiné au groupe-classe -parfois dialogue avec l'élève explicitant (plus ou moins) les conduites attendues de lui -définition empirique des productions attendues des élèves, évaluation et sanction de ces productions	-le système de présentation des "savoirs mathématiques" de l'enseignant n'est objectivé que pour l'élève dans la vie "privée" de la classe. (Il est inféré par les parents, les supérieurs hiérarchiques, les collègues, sur la base d'informations partielles: visites, bulletins scolaires, anotation des travaux d'élèves, déclarations de l'enseignant, comportement des élèves, réussite scolaire des élèves, etc...)

TABLEAU 2. (suite) CONDITIONS D'EMERGENCE DES 4 SYSTEMES DE "SAVOIR MATHEMATIQUES" ANALYSES

Type de situation Plan d'analyse	Acteur principal (porteur du "savoir"analysé)	Statut par rapport au savoir mathématique. Compétences reconnues	Groupes sociaux de référence de l'acteur principal	Normes et conditions institutionnelles (statut, rôle, etc)	Centre de focalisation de l'acteur principal	Sources d'information de l'acteur principal	Sources de pression à l'inférence pour l'acteur	Activité cognitive de l'acteur	Statut des productions de l'acteur principal	Signification sociale de ces productions	Accessibilité des productions de ces systèmes de "savoirs mathématiques" par d'autres que l'acteur principal
D	l'élève	-"non-instruit" -certaines compétences reconnues comme "acquises" par la scolarité antérieure -certaines aptitudes (dues aux "dons" ou à l'âge (stade de maturité)	-le maître -les camarades de classe -les camarades des classes parallèles et des classes de degré supérieur -les parents -les frères et soeurs -les maîtres des années précédentes	-statut d'enfant -dépendant du maître (et des parents -pour l'horaire et le contenu d'une grande partie de son activité -pour l'approbation de son travail -pour sa carrière scolaire -seul (même si collectivement) face au maître (ou aux parents) -travaille le plus souvent seul, parfois en groupe -doit "apprendre"	-les notions "importantes" -ce qu'il faut savoir faire ou dire	-le maître -les enseignants des années passées -le programme, le (les) manuel(s) -les parents -les camarades -les frères et soeurs	-rythme du programme, de la leçon, du questionnement etc... -face à face avec un adulte ou situation d'examen exigeant dans l'immédiat une production "correcte"	-cherche à comprendre le"discours mathématique" du maître et doit le prouver -doit produire (ou très souvent il s'agit plutôt de devoir reproduire) des "savoirs mathématiques" "justes","adaptés aux exigences"de la tâche telle qu'elle est définie par l'enseignant (ou par l'examen) -utilise ce qu'il a appris et doit montrer qu'il le fait -cherche à gagner l'approbation du maître (et des parents) -cherche à satisfaire les exigences de celui qui est "instruit"	-un système de reproduction de "savoirs mathématiques" ayant sa logique interne. Il renvoie à un système de représentation sociale du savoir mathématique propre à l'élève (ou aux élèves de ce degré scolaire voire de cette classe)	-course d'obstacles (scolaires) à réussir	Ne peut qu'être inféré par: -les productions institutionalisées de l'élève (exercices, examens, interventions en classe, etc...). Une attention particulière peut être portée aux "fautes" faites par l'élève comme symptômes de ces systèmes de savoirs. -par entretien clinique avec l'enfant -par expérimentation sur l'élève

Nous pensons qu'une meilleure compréhension des significations sociales de ces connaissances et représentations serait susceptible d'éclaircir notamment certaines des nombreuses difficultés que rencontre l'élève dans leur apprentissage. Sur le plan plus épistémologique, le débat devrait chercher à clarifier la différence qui existe entre une représentation sociale et ses objets d'une part, et les savoirs mathématiques et leurs objets d'autre part.

II. APPROCHE DIDACTIQUE

L'usage du terme didactique peut prêter à confusion du fait des connotations que la tradition pédagogique lui attribue. Les efforts actuels des chercheurs pour situer leur démarche de recherche en didactique dans le découpage des champs théoriques en sciences de l'éducation permettent de le préciser (voir en particulier G. Brousseau,1978, dont s'inspire cette analyse).

Il mérite donc d'être précisé. Il nous suffit, pour parler de situation didactique au sens large, de nous trouver dans un contexte où il y a intention d'enseigner quelque chose à quelqu'un. Au sens restreint la situation didactique sera définie par l'échange organisé, localement, entre le maître, les élèves, et un contenu précis d'enseignement. Dans ces situations le chercheur observe, provoque, des faits didactiques qu'il soumet à des analyses didactiques. Celles-ci se caractérisent par leurs méthodes (souvent tirées de la psychologie) mais aussi par leur fonction. Cette fonction est définie par le projet, de nature sociale, d'enseigner quelque chose à quelqu'un. Ainsi le rapport observateur / phénomène observé ne peut être le même qu'en psychologie.

L'analyse didactique est alors celle qui prend en compte les relations entre :

- la spécificité des contenus de savoir, qui ont été décontextualisés. Ces opérations de décontextualisation sont un de objets de l'analyse didactique (voir Chevallard 1980).

- les variables de la situation didactique (au sens restreint) : en particulier les variables d'échanges entre les sujets, d'une part, et les sujets et le milieu organisé pour l'enseignement, d'autre part.

- l'activité cognitive du sujet didactique, et non plus seulement du sujet psychologique, au sens où le projet porté sur lui, et les conditions qui le réalisent, constituent également cette activité.

Dans cette deuxième partie nous nous mettrons donc en situation didactique pour essayer d'illustrer au niveau de l'élève certains des mécanismes décrits précédemment. Plus précisément notre propos consistera à montrer, par des exemples, le statut cognitif et psycho-social de productions d'élèves lorsqu'ils font un exercice de mathématiques ou résolvent un problème. Dans ces deux cas nous interrogerons ce qu'on a l'habitude d'appeler leurs "connaissances": d'abord en essayant de comprendre comment les "objets d'enseignement" construits pour les besoins de la didactique, orientent l'activité (1) p.17 cognitive de l'élève; ensuite en montrant comment l'activité de résolution de problèmes est confrontée à des objets didactiques qui interviennent à titre de supports et d'obstacles à la fois. (2) p.24

1) L'orientation de l'activité de l'élève par les objets didactiques

Il nous faut tout d'abord préciser à travers l'exemple des ensembles en mathématiques comment s'opère la "création didactique d'objets" qui caractérise la "transposition didactique" dont Y. Chevallard (1980b) a développé le processus, afin de saisir en quoi "l'objet d'enseignement" est différent de "l'objet de savoir" auquel il répond.

Dès l'origine du mouvement de réforme de l'enseignement des mathématiques, on fait référence à la notion d'ensemble. L'intérêt premier de la théorie des ensembles est qu'elle dit à quelles conditions on peut considérer et traiter une collection d'éléments comme une entité à part entière, même si, pratiquement, on ne saurait en énumérer les éléments (voire les différencier clairement); de même, les opérations ensemblistes permettent de définir des familles d'ensembles de façon précise (grâce à la simplicité de leurs propriétés). En mathématiques la théorie des ensembles a pris une place centrale; et, dans les efforts de construction rigoureuse du corpus mathématique, les ensembles ont permis d'exprimer différentes notions de base dans un vocabulaire unifié.

a) Objet de savoir

Ce n'est pas un hasard si le souci d'enseigner les ensembles est apparu. On postulait alors que le travail de cette notion fournirait un bon raccourci aux générations futures et les ferait accéder plus rapidement aux mathématiques. Ce n'est évidemment pas la théorie des ensembles que l'on visait mais le "vocabulaire unifié" que j'ai évoqué ci-dessus.

b) Objet à enseigner

Pour enseigner les ensembles les pédagogues ont emprunté les diagrammes logiques d'Euler-Venn. A l'origine, ces diagrammes sont censés représenter les relations entre classes logiques (inclusion, exclusion, non-exclusion totale, etc.), et on les utilisait comme instrument pour le calcul propositionnel (déjà dans un souci didactique). Les diagrammes représentent bien des images de classes logiques (les cercles ou les ellipses); cependant, l'utilisateur est censé savoir ce qu'est une classe, comment elle est constituée, et c'est seulement pour rendre compte des relations que les classes entretiennent entre elles qu'on les dessine. De ce point de vue, peu importe leur contenu (qui n'est pas représenté). A noter que ni pour Euler ni pour Venn il n'était question d'ensembles (du temps d'Euler on ne parlait pas encore d'ensembles).

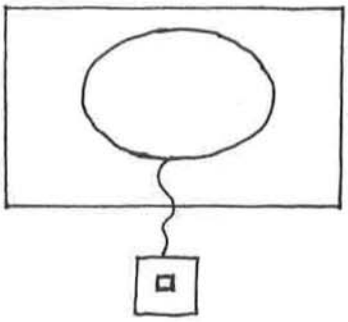
Par contre dans le projet pédagogique actuel, il importe avant tout que l'élève puisse concevoir les classes logiques et en arrive à détacher son raisonnement des objets pour prendre en considération la compréhension des concepts. Les diagrammes d'Euler-Venn sont alors utilisés pour représenter des ensembles. On va commencer par faire des ensembles : on va demander à l'élève de remplir les diagrammes avec des objets, ou encore de tracer la limite des ensembles d'objets constitués. L'image de l'ensemble est alors explicitée, réalisée; une fois que l'élève aura bien compris cette activité préliminaire, à force d'habitude, on pourra se dégager des objets: le remplissage sera suspendu, et on ne considérera que les différentes parties du diagramme. L'élève pourrait ainsi accéder à l'interprétation classique des diagrammes.

Il y a donc là un parti pris (fort compréhensible de la part des pédagogues) de procéder par le commencement, c'est-à-dire faire en sorte que l'élève comprenne les classes logiques comme entités en se basant sur leur image, puis, par le traitement de l'image (qui devient un condensé), dégage les relations que les classes peuvent entretenir entre elles. Cependant cette activité préliminaire de remplissage est purement didactique (d'une didactique pour jeunes enfants) et se voit associée au schéma proposé par Euler-Venn.

Le diagramme d'Euler-Venn est ainsi devenu un objet didactique et c'est "tout naturellement" qu'on va essayer d'en induire la genèse chez l'élève au moyen d'exercices appropriés.

c) Comment les objets didactiques orientent l'activité cognitive dans le cas d'exercices mathématiques. (Enseignement à des enfants de 7-8 ans en Suisse romande).

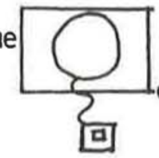
Nous allons parler plus précisément du type d'exercice suivant :



Un diagramme de Venn est donné, vide. Le cadre représente l'ensemble référentiel. Le rond délimite un ensemble particulier. L'étiquette ( ) désigne l'attribut attaché à l'ensemble (ici l'ensemble des formes carrées, le référentiel étant celui des objets de formes différentes).

On demande à l'élève de remplir le diagramme avec des figures à placer correctement selon les indications données par l'étiquette. Le résultat qu'on veut obtenir est un diagramme complet, comme celui qu'on aurait obtenu si on avait voulu représenter des ensembles. Dans l'exemple, le diagramme correctement rempli donne l'image de l'ensemble des carrés plongé dans un univers de formes, ou encore un univers de figures constitué de l'ensemble des figures carrées et de son complémentaire (l'ensemble des figures non carrées).

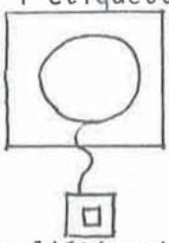
Cette didactique fait donc le pari qu'il y a cohérence entre l'activité demandée à l'élève et la signification (l'interprétation) du schéma obtenu. Ceci peut paraître vrai dans le cas où on demande à l'élève (par exemple) de remplir le diagramme



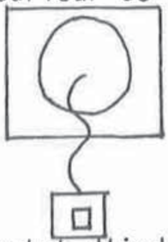
et où on insiste bien pour qu'il place des figures dans les deux zones (plages) ainsi délimitées.

Il y a là une interprétation forte de la signification de l'activité. Cependant rien n'indique que dans tous les cas la réponse ait le statut d'ensemble.

1° Ainsi par exemple on voit souvent des élèves prolonger l'attache de l'étiquette jusqu'à l'intérieur de l'ensemble :

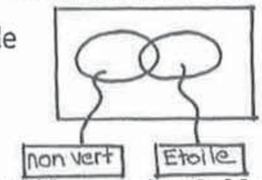


corrigé en



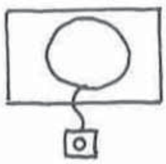
ce qui porte à penser que l'étiquette a pris le statut d'indiquer l'endroit où placer les carrés et non pas celui de représenter l'attribut qui définit l'ensemble. L'activité consiste alors à mettre des figures ensemble au même endroit et non pas à constituer l'ensemble.

2° De plus, la logique de l'activité n'est peut-être pas la même que celle qu'on veut mettre en oeuvre. Par exemple, dans le cas du remplissage de



j'ai vu plusieurs élèves mettre à l'extérieur de l'ensemble "non vert" des figures de toutes les couleurs (vert, rouge, bleu, jaune, etc.) alors qu'il aurait fallu ne mettre que des figures vertes. Les élèves qui ont répondu ainsi interprétaient l'étiquette "non vert" comme une interdiction: "ne pas faire vert". La négation de cette interdiction correspondant à sa levée, tout est permis à l'extérieur de la zone "non vert". Ainsi la logique sous- jacente était: "non non vert = tout (est permis)" alors que la logique qu'on aimerait enseigner veut: "non non vert = vert" !

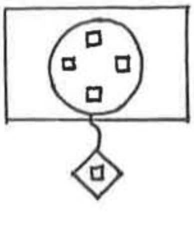
3° Ceci peut aboutir à des réactions totalement inattendues de la part des élèves. Ainsi la maîtresse d'une classe faisait un exercice routinier avec ses élèves bien familiarisés avec les diagrammes de Venn. L'exercice proposait le diagramme :

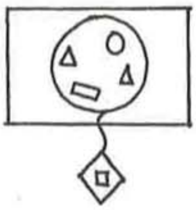


avec la consigne suivante: "dans ce diagramme ne mets que des formes pas carrées".

Le but de l'exercice était de faire placer à l'élève l'ensemble des "non carrés" dans le diagramme. Ces élèves savaient ce qu'était une forme non carrée, et si on leur avait simplement demandé de remplir le diagramme (complètement) il n'y aurait pas eu de problèmes.

La première réaction des élèves fut de déclarer l'exercice impossible. Sommés d'essayer quand même de faire l'exercice, ils fournirent pour la plupart deux types de réponses.

a) Soit ils proposaient  et la maîtresse, étonnée, leur rappelait la consigne: "on avait pourtant dit de ne dessiner que des formes pas carrées". Cet oubli de la consigne était incompréhensible pour elle.

b) Soit ils proposaient  ce qui est encore plus mystérieux. La maîtresse indiquait alors l'étiquette: "que dit l'étiquette ? (carré) alors pourquoi tu as mis un triangle dans l'ensemble?"

Cette transgression de l'étiquette était encore plus inattendue de la part d'élèves pourtant familiarisés avec ce symbole.

Il y avait donc pour les élèves une contradiction dans ce qu'on leur demandait: d'une part le schéma les induisait à produire des carrés dans l'ensemble des carrés, d'autre part la consigne leur disait de ne mettre que des non carrés. Leur solution a alors consisté à gommer l'un des termes de la contradiction (soit la consigne, soit l'étiquette). Il faut noter l'importance primordiale de l'image de l'ensemble, car la contradiction ne sera levée de façon satisfaisante qu'à condition que l'ensemble ne soit plus seulement considéré comme l'endroit où placer les figures. Mais la tâche proposée n'est pas à même de susciter cette décentration de la part de l'élève.

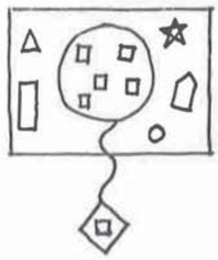
En conclusion il faut noter deux choses :

a) Chaque fois, la maîtresse renvoyait l'élève à la lecture de son résultat: il n'était pas correct de faire des carrés du fait de la consigne; ou bien, il ne fallait pas mettre des figures pas carrées dans l'ensemble des carrés. Cependant les erreurs des élèves lui paraissaient totalement incompréhensibles car, pour elle, la liaison entre la consigne et l'interprétation ensembliste du diagramme allait de soi.

b) On voit combien l'utilisation du diagramme de Venn comme image de l'ensemble peut jouer le rôle d'obstacle à son propos. La contradiction apparaît dans le fait que la tâche proposée oriente l'élève sur la constitution de l'ensemble (qu'il positivise en le localisant), et que la considération du complémentaire demande au contraire à l'élève de se décentrer de l'ensemble pour considérer globalement l'ensemble, le complémentaire et le référentiel. Cette difficulté n'est pas fortuite, et c'est là une des principales difficultés de la logique. L'illusion était de croire que le schéma pouvait à lui seul lever cette difficulté. Il s'agit tout au contraire d'examiner la façon dont celle-ci se pose à travers le schéma et c'est de cette analyse (à la fois mathématique et psychologique) qu'on pourra déduire le statut de cet objet didactique.

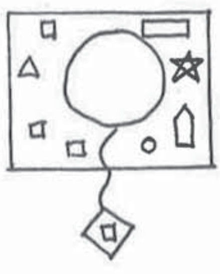
Après une première discussion, les élèves retournaient à leur place et essayaient de trouver la réponse correcte. En général ils n'y sont pas arrivés du premier coup, il y a eu une réponse intermédiaire de deux types :

a) soit l'élève proposait



c'est-à-dire la classification complète

b) soit l'élève proposait



c'est-à-dire la donnée du référentiel des figures, en évitant l'endroit désigné par l'étiquette.

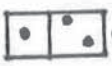
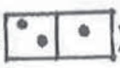
Dans les deux cas, la correction aura consisté à gommer les carrés qui sont dans le schéma. On aboutit ainsi (enfin) à la réponse attendue. Cependant, ce n'est qu'indirectement (et comment!) que l'on a obtenu l'ensemble des non-carrés et l'objectif même de l'exercice a été trahi.

2. L'activité cognitive et les objets didactiques dans la résolution de problèmes mathématiques

Nous nous proposons ici de montrer comment l'activité cognitive des élèves interfère avec des représentations qu'ils se sont construites à propos d'objets didactiques tels que les diagrammes en arbre, si prisés dans les manuels de mathématiques modernes. Autrement dit, mis en face d'une situation-problème l'élève peut certes rencontrer des obstacles cognitifs qui relèvent de la difficulté conceptuelle même du problème. C'est ainsi qu'on explique la plupart du temps le niveau de ses productions. Mais il peut aussi être confronté à des obstacles de l'ordre de la représentation des objets didactiques à utiliser parce que l'école lui a appris l'usage de ces objets comme pertinent pour résoudre une classe de situations.

Une mise au point est sans doute d'emblée nécessaire pour éviter une interprétation trop "pédagogiste" du terme "obstacle". Il ne s'agit pas pour nous de signifier par là de simples freins à la connaissance qu'il suffirait d'éliminer pour que l'élève apprenne correctement les concepts, et d'adopter une position où cultiver le sujet "naturel", ou épistémique selon le cas, serait le principe à substituer à une didactique. Nous donnons au terme obstacle un sens actif, c'est-à-dire qu'il représente les éléments auxquels l'activité du sujet est confrontée dans les conditions didactiques qui lui sont faites. Ces conditions déterminent les modalités de l'appropriation des connaissances par les élèves.

Dans un ensemble d'interventions didactiques, nous cherchons à préciser la nature et le fonctionnement de ces obstacles dans l'apprentissage des mathématiques à l'école. La méthode consiste à observer de petits groupes d'élèves en situation de résolution de problèmes. L'éventail de ces situations est assez large: il peut s'agir de remplissage de fiches d'exercices, de problèmes mathématiques au sens courant du terme, ou de "situations mathématiques"[1]. Dans ce dernier cas, d'où sera tiré notre exemple, on s'éloigne beaucoup des exercices classiques de manuels. En effet ces situations sont construites pour que l'élève exerce son activité de recherche et sorte des sentiers battus de l'application. Elles supposent également un temps d'activité assez long. Pour l'observateur elles offrent la possibilité de voir comment les objets didactiques sont réutilisés en dehors de leur contexte habituel, soit que l'élève les investisse du statut qui a justifié leur enseignement, soit qu'il les déforme, ou encore qu'il les délaisse.

La situation suivante a été proposée à des élèves de 6e (11-12 ans) par un enseignant[2]: "Voilà une boîte de dominos, que je vous montre. Ma question: comment peut-on savoir le nombre de dominos qu'il y a dans cette boîte ? Sans l'ouvrir". Telle est la consigne donnée à la classe où les élèves travaillent par petits groupes de 3 ou 4. Ils disposent de leurs cahier et crayon. Une brève analyse de la tâche nous montre qu'il s'agit de sélectionner l'information pertinente en dégageant les règles implicites: un domino est formé de deux parties, et sur chacune d'elles on trouve un chiffre compris entre 0 et 6. La combinaison de ces sept chiffres deux à deux donne la solution du problème posé, en tenant compte de l'existence de dominos doublet $\boxed{1 \mid 1}$ et du retrait des dominos inverses (ex.: $\boxed{1 \mid 2}$ et $\boxed{2 \mid 1}$ (pour  et ).

---

1) Nous nous référons ici à la "technique des situations" proposée par G. Charrière

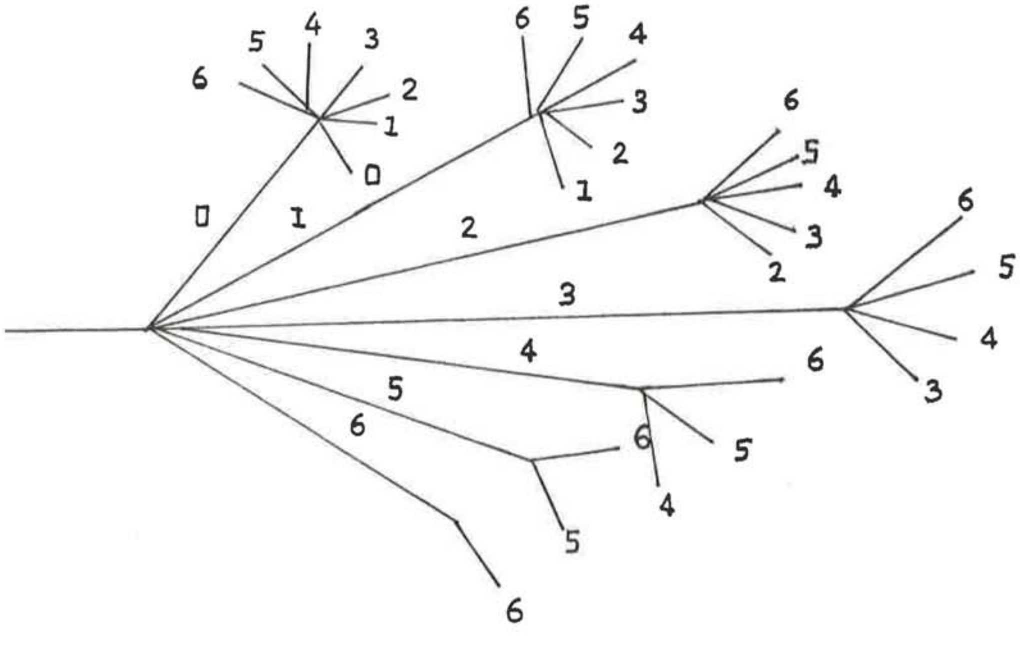
2) Nos remerciements vont à M. H. Schaerer qui a eu l'initiative de situation mathématique.

Nos anticipations avant l'observation nous laissaient prévoir, dans ce contexte didactique, trois catégories de productions :

- le dessin des dominos
- l'utilisation de deux sortes de diagrammes :

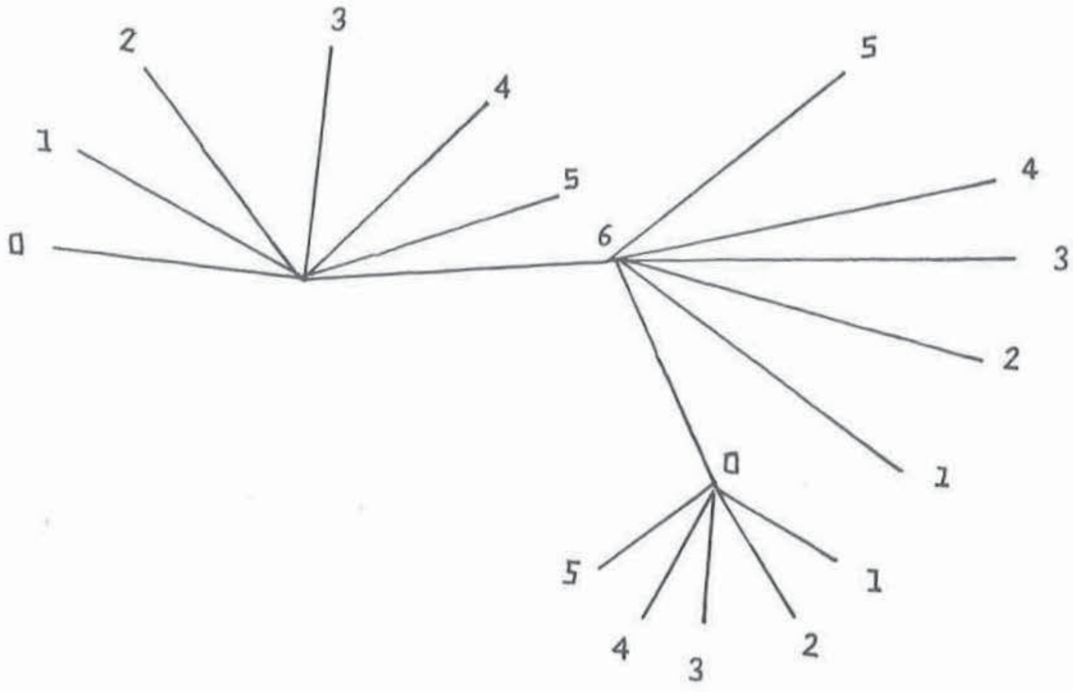
a)	6	5	4	3	2	1	0
6	66	65	64	63	62	61	60
5	—	55	54	53	52	51	50
4	—	—	44	43	42	41	40
3	—	—	—	33	32	31	30
2	—	—	—	—	22	21	20
1	—	—	—	—	—	11	10
0	—	—	—	—	—	—	00

b)



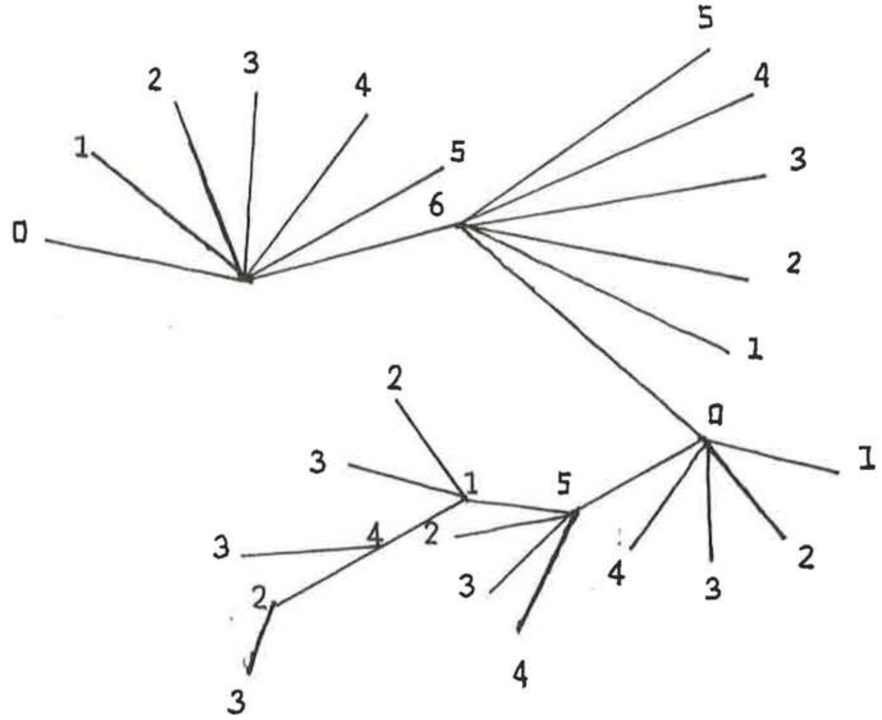
- soit 28 dominos -

Nos observations nous ont montré l'usage que font les élèves de ces moyens de représentation, qui ont été enseignés durant toute la scolarité primaire à propos des opérations de classification, de multiplication ou de combinatoire. Souvent d'ailleurs l'enseignement de ces diagrammes se substitue aux opérations elles-mêmes. Le maître et l'élève oublient qu'il s'agit d'un langage et en quoi il est une création ad hoc. Par analogie avec la formation des représentations sociales on pourrait peut-être dire que les concepts scientifiques qui se trouvent en amont ont subi un processus d'objectivation et de naturalisation, au sens où, comme l'écrit Herzlich (1973): "ce qui était concept abstrait se transforme en entité objective". Dans le langage scolaire, on "fait" l'arbre de classement, comme on "fait" l'application linéaire. On désigne là un ensemble de pratiques qui émargent à un univers social bien défini, où l'on use de catégories provenant de la théorie mathématique, mais qui renvoient à des objets d'enseignement au statut ambigu. Retrouve- t-on cette ambiguïté dans l'activité de l'élève ? La démarche de Francesco nous paraît suffisamment significative pour tenter un début de réponse à cette question. En effet le groupe où se trouve Francesco a décidé, d'un commun accord, de "faire l'arbre, parce qu'avec l'arbre on peut faire des combinaisons", et donc, selon eux, répondre à la question: combien de dominos dans la boîte ? Le modèle qu'ils actualisent est celui de l'arbre factoriel ou multiplicatif, auquel Francesco va associer une représentation graphique bien précise, conforme à celle qu'on lui a enseignée, et qu'on peut résumer ainsi: "je dessine des branches et à chaque étage je diminue d'une branche". En effet il dessine le schéma suivant après avoir déclaré: "il y aura 7 chiffres au départ". (de 0 à 6).



Autrement dit, il fait 7 x 6 x 5 etc..., ce qui n'est pas pertinent pour le problème posé, qui n'a pas cette structure factorielle. D'ailleurs, et c'est là qu'on voit l'interférence de deux représentations, Francesco le manifeste bien lorsqu'on lui demande d'expliquer comment il lit son arbre. Il répond: 6 - 5 c'est un domino. Il faut deux branches pour un domino. Deux représentations fonctionnent sur le même objet didactique: dans un cas l'élève identifie son problème (combien de dominos ?) à l'objet didactique (l'arbre); cet objet est ensuite représenté en fonction d'un usage qui oublie la conceptualisation en jeu mais qui cependant permet une utilisation suffisante des informations reconnues pertinentes (lire les dominos). La tâche est devenue: construire un arbre factoriel avec 7 éléments. L'activité peut donc se poursuivre sans qu'il y ait de remise en question du modèle. D'autre part, lorsque l'élève est recentré par l'enseignant sur la tâche d'origine (trouver les dominos), il utilise son diagramme d'une autre façon, descriptive cette fois, qui convient au problème. Cette conjonction de deux tâches va se révéler contradictoire au terme de la construction d'une partie du schéma.

Francesco aboutit en effet à ceci, "pour une branche".



Lorsqu'il lit son schéma pour trouver le nombre de dominos qu'il a déjà formés, il arrive à un nombre impair de branches (7), et donc 3 dominos ½ ! "C'est pas possible" dit-il. Et il recommence une autre stratégie. Il reviendra plus tard à ce schéma en arbre, sans pouvoir toutefois lever l'obstacle et adapter son schéma à la compréhension correcte qu'il a du problème: associer deux à deux les nombres entre eux. Le fonctionnement que le schéma induit chez l'élève est trop puissant.

On voit sur cet exemple, et sans prétendre à une généralisation, comment l'activité cognitive est confrontée à la représentation qu'elle s'est donnée des objets didactiques.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

Il nous paraît important pour conclure, de noter qu'il s'agit là de représentations organisées, qui fonctionnent à titre de composantes de l'activité cognitive et ne lui sont pas extérieures au sens où on envisagerait d'un côté une activité cognitive pure et de l'autre des freins à cette activité. Simplement ces représentations organisées n'ont pas un statut opératoire (se rapprochent-elles d'éléments décontextualisés de représentations sociales ?) car elles ne sont pas suffisamment adaptées à la situation du fait qu'elles chevauchent des objets conceptuels et des objets didactiques sans en faire l'intégration. Dans notre esprit le problème didactique n'est pas d'éliminer ces obstacles, qui, pourrait-on dire, sont inévitables, mais de permettre qu'ils fonctionnent suffisamment, sous certaines conditions de communication, pour que l'élève puisse les reconnaître et peut-être les dépasser.

Nous ne pouvons prétendre avec ces éléments définir précisément le rapport entre représentations sociales, objets didactiques et activité cognitive. Notre propos, à ce stade, est davantage de suggérer des analogies et d'interroger le statut de ce qui s'effectue sous couvert d'enseignement et d'acquisition de connaissances mathématiques, en adoptant cette manière de poser le problème de la transposition dont parle Y. Chevallard (1980b) : "là où l'enseignant voit l'identité de la fin (l'objet de savoir désigné comme à enseigner) et des moyens (l'objet d'enseignement, tel que la transposition didactique l'a fait) le didacticien introduit la question de l'adéquation : n'y a-t-il pas substitution d'objet, et laquelle ? ... on découvre alors que de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement, la distance est - souvent - "immense". Nous espérons avoir illustré cette distance et avoir suggéré des pistes d'analyse de cette "substitution d'objet" et des conditions psycho-sociales qui y président.

D'une part, nous nous prososons donc d'étudier expérimentalement où et comment interviennent les R.S. de l'objet de savoir mathématique auquel l'élève est confronté; d'autre part et parallèlement, nous tentons d'examiner dans quelles situations d'interaction sociale et de communication l'élève structure opératoirement sa pensée (Perret-Clermont 1979, Doise et Mugny 1981) et formalise ses messages mathématiques (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980, Brun et Schubauer-Leoni 1981). Cette question des conditions d'élaboration et de transmission des savoirs, des représentations sociales et des relations qu'elles entretiennent entre elles,s'avère particulièrement complexe !

BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI N. - Théorie des ensembles. Eléments de mathématiques, Hermann, Paris 1980.

BROUSSEAU G. - L'observation des activités didactiques. In: Enseignement élémentaire des mathématiques. IREM de Bordeaux, 18, 22-43, 1978.

BRUN J., SCHUBAUER-LEONI M.L. - Recherches sur l'activité de codage d'opérations additives en situation d'interaction sociale et de communication. Cahiers IMAG, Grenoble, 1980.

CHEVALLARD Y. - Mathématiques, langage, enseignement: la réforme des années soixante. Recherches, 41, 71-99, 1980a.

CHEVALLARD Y. - Cours. lère Ecole d'été de didactique des mathématiques. Chamrousse, 1980b.

CONNE F. - La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Faculté de psychologie et sciences de l'éducation. Université de Genève, 1981.

DOISE W., MUGNY G. - Le développement social de l'intelligence. Inter Editions, Paris, 1981.

HERZLICH C. - La représentation sociale. In: S. MOSCOVICI (ed.). Introduction à la psychologie sociale, vol. 1., Larousse 1972, p. 303-323.

MOSCOVICI S. - La psychanalyse, son image et son public. Paris, PUF, 1961.

PERRET-CLERMONT A.-N. - La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale. P. Lang, Berne, 1979, 1981.

ROQUEPLO Ph. - Le partage du savoir. Editions du Seuil, Paris, 1974.

SCHUBAUER-LEONI M.-L. et PERRET-CLERMONT A.-N. - Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. Recherches en didactiques des mathématiques, 1, 3, 297-343, 1980.

VERGNAUD G. - L'enfant, la mathématique et la réalité. P. Lang, Berne, 1980.