

1170

POLYGONES DE NEWTON
DE POLYNOMES CLASSIQUES

THESE

présentée à la faculté des sciences, pour obtenir
le grade de docteur ès sciences, par

Christian Vonlanthen

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

Institut de Mathématiques

Chantemerle 20

2007 NEUCHATEL (Suisse)

POLYGONES DE NEWTON
DE POLYNOMES CLASSIQUES

THESE

présentée à la faculté des sciences, pour obtenir
le grade de docteur ès sciences, par

Christian Vonlanthen

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
2007 NEUCHATEL (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Polygones de Newton de polynômes classiques

.....

.....

.....

.....

de M. Christian Vonlanthen

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel
sur le rapport des membres du jury,

MM. les professeurs A. Robert, U. Suter

et G. Cristol (Paris VI)

.....

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 15 avril 1993

Le doyen :



A. Robert

A Marisa

La vérité vaut bien qu'on passe quelques années sans
la trouver.

Jules Renard

Avant-propos

Il m'aura fallu 50 litres de café, 40 blocs de papier, 30 cartouches d'encre, 20 crayons, 10 gommes ainsi qu'un nombre incalculable d'heures de travail et de sommeil pour voir la naissance de la présente thèse, après environ 5 ans de gestation.

Comme dans tous les contes, cet heureux événement résulte d'une magnifique histoire d'amour.

Tout a commencé lorsque j'ai contracté le virus dit: "*Passion des mathématiques*". Un coup de foudre incontrôlable et irrésistible m'a immédiatement fait comprendre que l'on serait, désormais, inséparable. C'est pourquoi, à la suite de ma licence, ne pouvant envisager de rompre abruptement avec ma nouvelle passion, je me suis approché de Monsieur le Professeur Alain Robert qui allait, par sa grande générosité, son entière disponibilité et sa précieuse expérience, devenir mon maître à penser et mon guide indispensable pour parcourir le tortueux chemin parsemé d'embûches que j'avais choisi d'emprunter.

C'est durant son cours d'analyse ultramétrique que j'ai découvert l'univers passionnant de l'analyse p -adique et amorcée la conception du présent travail, en optant d'étudier une partie de cette matière, en l'occurrence

**LES POLYGONES DE NEWTON
DE FAMILLES CLASSIQUES DE POLYNOMES.**

Plus précisément, mon étude s'est portée sur 3 familles particulières, à savoir

- Les polynômes de Laguerre $(\Lambda_n(x))_{n \geq 0}$.

On montre dans le chapitre I que le polygone $PN(\Lambda_n(x); p)$, pour p impair, ne dépend que des décimales non nulles intervenant dans la décomposition de n en base p , et qu'il s'obtient par juxtaposition des polygones $PN(\Lambda_{n_i, p^{j_i}}(x); p)$ où $n = \sum_{j \geq 0} n_i p^j$, $0 < n_i, < p$.

- Les polynômes d'Hermite $(H_n(x))_{n \geq 0}$.

Dans le chapitre II, on présente la construction du polygone $PN(H_n(x); p)$ (pour n quelconque et $p > 3$), basée sur une décomposition "exotique" de l'entier n ($n = ep^s + q + 2m$). Le cheminement de cette construction apparaît mieux dans le diagramme de la page iv.

- Les polynômes de Legendre $(P_n(x))_{n \geq 0}$.

Dans un premier temps, il convient de faire référence à l'article [10] de J. Wahab qui règle le cas particulier de la construction de $PN(P_n(1 + 2t); 2)$.

Dans un deuxième temps, pour p impair, on construit tous les polygones $PN(P_n(x); p)$ ne laissant apparaître que des droites critiques de pentes négatives. Nous verrons alors qu'il s'agit des polygones de Newton associés aux polynômes de Legendre dont l'indice est de la forme $n = p^s + q$, où $q = \sum_{i=1}^{2r} p^{\alpha_i}$ et $(\alpha_i)_{i=1}^{2r}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs.

Finalement, on traite le cas général, c'est-à-dire la présentation de $PN(P_n(1 + 2t); p)$ pour p impair.

Naturellement, ils ne sont constitués que de droites critiques ayant des pentes positives.

Le diagramme de la page v expose le cheminement permettant d'obtenir le polygone $PN(P_n(x); p)$ où n est quelconque et p premier impair.

Je tiens ici à remercier toutes les personnes qui, par leur participation et leurs encouragements, ont permis à ce travail de voir le jour.

En premier lieu, j'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur le Professeur Alain Robert pour son dévouement sans limite, sa précieuse expérience, ainsi que pour avoir si bien su me communiquer sa passion des mathématiques.

D'autre part, j'associe à la réussite de ce travail mon collègue Maxime Zuber qui fut tour à tour mon confident, mon conseiller scientifique, mon psychologue et surtout un ami sur lequel j'ai pu à tout moment compter.

Je remercie également les membres du jury, Messieurs les Professeurs Ueli Suter (Université de Neuchâtel) et Gilles Christol (Université de Paris VI), pour leur lecture attentive du manuscrit et l'intérêt qu'ils m'ont témoigné.

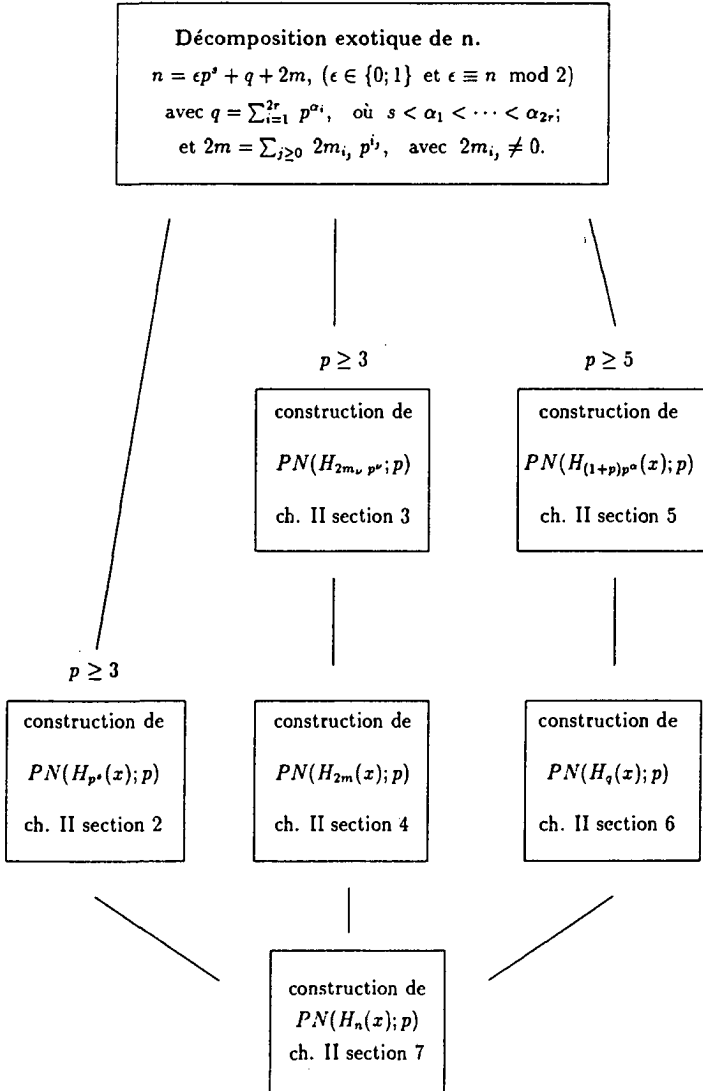
Finalement, *the last but not the least*, je dédie cette thèse à Marisa, mon épouse, qui, grâce à son indulgence et son abnégation, a permis l'aboutissement de ce travail.

Qu'elle trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

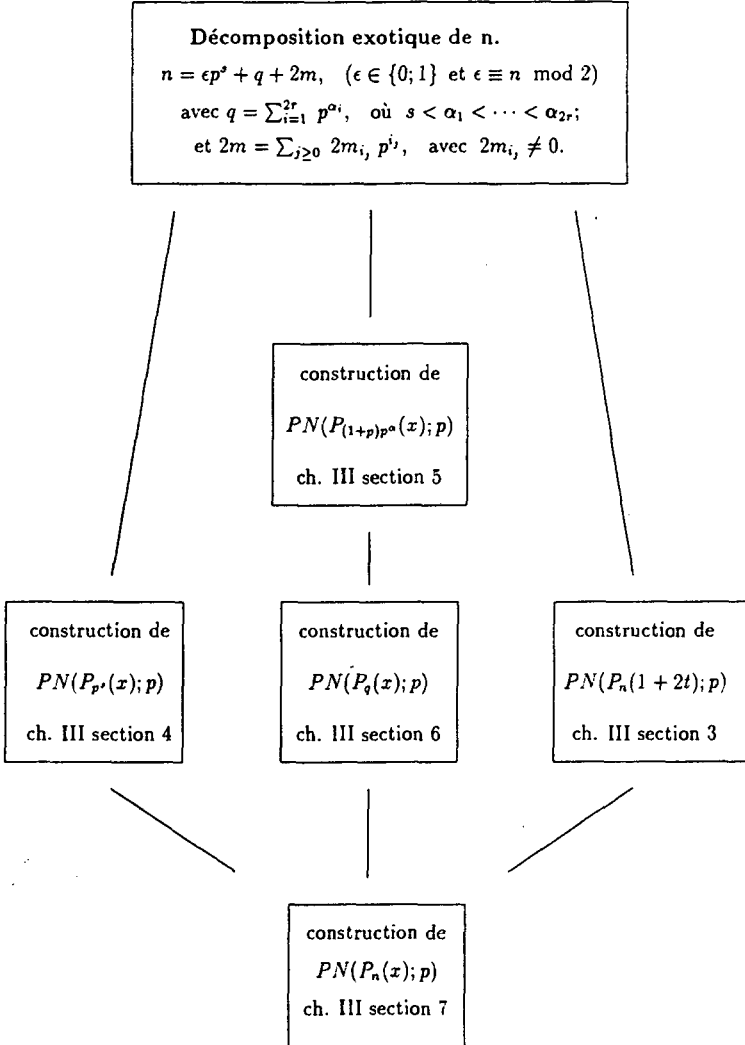
Le Locle, le 1^{er} décembre 1992.

Christian Vonlanthen

Voyage à travers le chapitre II pour obtenir le polygone de Newton associé au polynôme d'Hermite $H_n(x)$, n quelconque.



Voyage à travers le chapitre III pour obtenir le polygone de Newton associé au polynôme de Legendre $P_n(x)$, n quelconque.



INTRODUCTION

Soit p un nombre premier, \mathbf{Z}_p dénotera l'anneau des entiers p -adiques, \mathbf{Q}_p son corps de fractions et \mathbf{C}_p le complété de la clôture algébrique de \mathbf{Q}_p . La valeur absolue p -adique est normalisée par $|p| = 1/p$.

Avant d'entrer véritablement dans le coeur du sujet, nous formulons quelques rappels concernant la théorie des polygones de Newton et ses applications.

Définitions

Soit $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{C}_p .
Considérons les points $P_i = (i; \text{ord}_p a_i)$, $0 \leq i \leq m$, dans le plan cartésien muni d'un point à l'infini. Le bord de l'enveloppe convexe supérieure de ces points définira la *polygone de Newton de f* , noté $PN(f, p)$. Les segments le composant, ainsi que leurs pentes, sont respectivement appelés *segments critiques* et *pentcs critiques*.
On définit encore le *rayon critique r* associé à la pente critique Δ par la formule

$$r = \text{rayon critique} = p \text{ pente critique} = p^\Delta.$$

Exemples

Exemple 1. - Si la suite $(f_{p^n}(x) = a_1^{p^n} x + \dots + a_n^{p^n} x^{p^n})_{n \geq 0} \subset \mathbf{Z}_p[x]$ remplit les conditions suivantes

1. f_{p^n} est un polynôme de degré p^n ;
2. $\text{ord}_p a_1^{p^n} = n$ et $\text{ord}_p a_n^{p^n} = 0$;
3. $f_{p^n}(x) \equiv f_{p^{n-1}}(x^p) \pmod{p^n \mathbf{Z}_p[x]}$,

alors on montre [12] que la figure ci-dessous représente le polygone de Newton de $f_{p^n}(x)$, noté $PN(f_{p^n}, p)$.

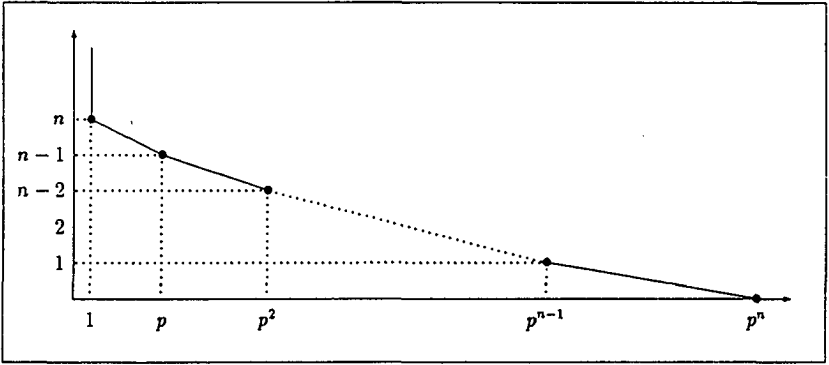


fig. 1

On en déduit que

1. { pentes critiques de $f_{p^n}(x)$ } = $\{ \Delta_0 = -\infty, \Delta_j = -\frac{1}{(p-1)p^{j-1}}, 1 \leq j \leq n \}$;
2. { rayons critiques de $f_{p^n}(x)$ } = $\{ r_0 = 0, r_j = p^{-\frac{1}{(p-1)p^{j-1}}}, 1 \leq j \leq n \}$.

Exemple 2. - Si $f(x) = 3 + \frac{1}{3}x^2 + 3x^3 + x^4 \in \mathbb{Q}_3[x]$,

alors la figure ci-dessous représente le polygone de Newton de $f(x)$ dans $\mathbb{Q}_3[x]$.

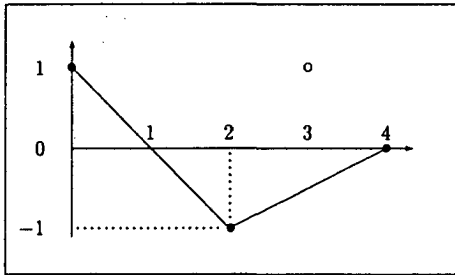


fig. 2

Celui-ci possède deux pentes critiques $\Delta_1 = -1$ et $\Delta_2 = 1/2$.

Exemple 3. - Soient $PN(f, p)$ et $PN(f, q)$ les polygones de Newton de f associés, respectivement, aux nombres premiers p et q .

En général, pour p et q distincts, $PN(f, p)$ et $PN(f, q)$ sont différents.

Par exemple, $f(x) = p + pqx + q/p x^2 + p/q x^3$ fournit les polygones de Newton $PN(f, p)$ (fig. 3) et $PN(f, q)$ (fig. 4).

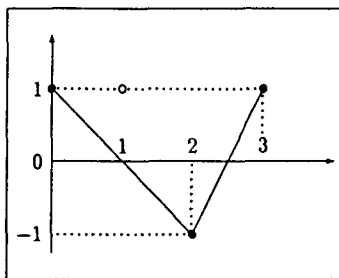


fig. 3

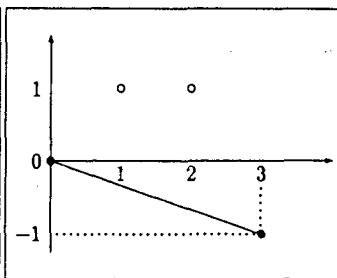


fig. 4

Cependant, il se peut que deux polynômes f et g distincts donnent lieu au même polygone de Newton.

Par exemple, la figure 5 représente, à la fois, le polygone de Newton de

$$f(x) = px + x^3 + px^4 + x^5 + p^2 x^6$$

et celui de

$$g(x) = px + px^2 + x^3 + x^5 + p^2 x^6.$$

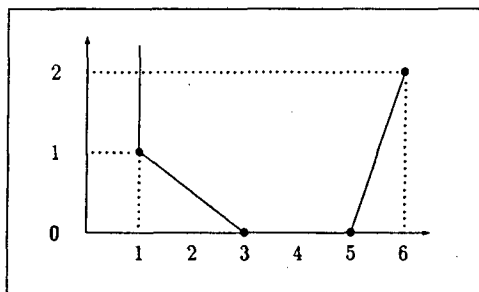


fig. 5

Zéros d'un polynôme

Pour tout ce qui concerne la théorie générale des séries formelles à coefficients dans \mathbb{C}_p , (polygones de Newton, zéros, etc...) on se référera aux ouvrages [2][3][5][7][8] d'usage et plus particulièrement au cours de III-ème cycle de A. Robert [7].

Quant à nous, nous nous limiterons au cas particulier où f est un polynôme à coefficients entiers p -adiques.

Ainsi, considérons

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbb{Z}_p[x]$$

et, pour $r > 0$, définissons

$$M_r(f) := \max_{0 \leq i \leq m} |a_i| r^i \in \mathbb{R}_+.$$

On dira que $r > 0$ est un *rayon régulier de f* s'il existe un unique j , $0 \leq j \leq m$ vérifiant

$$M_r(f) = |a_j| r^j > \max_{i \neq j} |a_i| r^i.$$

Pour un tel rayon $r > 0$, la propriété ultramétrique

$$|a + b| \begin{cases} \leq \max(|a|; |b|) & \text{si } |a| = |b|; \\ = \max(|a|; |b|) & \text{si } |a| \neq |b|, \end{cases}$$

entraîne

$$|f(x)| = M_r(f), \quad \forall |x| = r; (x \in \mathbb{C}_p).$$

Il s'ensuit, en particulier, que tous les zéros de f ont un module $r > 0$ satisfaisant

$$M_r(f) = |a_n| r^n = |a_N| r^N \text{ pour au moins deux indices } n \text{ et } N \text{ distincts.}$$

Proposition 1. Pour $r > 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes

- i) $M_r(f) = |a_n| r^n = |a_N| r^N$, pour au moins deux indices n et N distincts;
- ii) r est un rayon critique.

L'application de cette proposition montre que $r = p^\Delta$ est critique s'il vérifie

$$\begin{aligned} |a_n| \cdot r^n &= |a_N| \cdot r^N \\ |a_n| \cdot r^n &\geq |a_{n+k}| \cdot r^{n+k}, \\ 0 < k < N - n. \end{aligned}$$

Autrement dit, si

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p a_n + n \cdot \Delta &= -\text{ord}_p a_N + N \cdot \Delta \\ -\text{ord}_p a_n + n \cdot \Delta &\geq -\text{ord}_p a_{n+k} + (n+k) \cdot \Delta, \\ 0 < k < N - n. \end{aligned}$$

Remarque. Graphiquement, ceci signifie simplement que tout point $P_{n+k} = (n+k; \text{ord}_p a_{n+k})$, ($0 < k < N - n$), se situe au-dessus du segment reliant P_n à P_N .

Preuve. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ résultant de ce qui précède, nous ne démontrerons que $ii) \Rightarrow i)$.

Si d est un segment critique ayant pour extrémités les points $P_n = (n; \text{ord}_p a_n)$ et $P_N = (N; \text{ord}_p a_N)$, ($n < N$), alors

$$\Delta_d = \frac{\text{ord}_p a_N - \text{ord}_p a_n}{N - n}$$

est la pente critique de d et on obtient

$$\begin{aligned} |a_n| r^n &= p^{-\text{ord}_p a_n} p^{n \cdot \Delta_d} \\ &= p^{-\text{ord}_p a_n + \frac{n \cdot (N - n)}{N - n} (\text{ord}_p a_N - \text{ord}_p a_n)} \\ &= p^{-\text{ord}_p a_N} \cdot p^{N \cdot \Delta_d} \\ &= |a_N| r^N. \end{aligned}$$

Finalement on montre [2], [3], [5], [7], [8] qu'il y a exactement $N - n$ zéros de f (comptés avec leur multiplicité) sur la sphère critique $B_{=r}(0)$. ■

Quelques résultats sur les coefficients binomiaux

Pour $n = \sum_{i=0}^m n_i p^i$, $0 \leq n_i < p$, on montre [3], [7] que

$$\text{ord}_p n! = \frac{n - S_p(n)}{p-1}, \quad \text{où } S_p(n) = \sum_{0 \leq i \leq m} n_i$$

Théorème 1. Soient deux entiers $0 \leq k \leq m$ et posons $\gamma = \text{ord}_p \binom{m}{k}$; alors

$$S_p(m-k) - S_p(m) + S_p(k) = \gamma(p-1).$$

Démonstration. En vertu de ce qui précède, il suit que

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \binom{m}{k} &= \text{ord}_p \frac{m!}{k!(m-k)!} \\ &= \text{ord}_p m! - \text{ord}_p k! - \text{ord}_p (m-k)! \\ &= \frac{m - S_p(m)}{p-1} - \frac{k - S_p(k)}{p-1} - \frac{(m-k) - S_p(m-k)}{p-1}. \end{aligned}$$

En multipliant la dernière égalité par $p-1$, on obtient le résultat. ■

Corollaire 1. $S_p(2k) = 2S_p(k) - \mu(p-1)$, avec $\mu = \text{ord}_p \binom{2k}{k}$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent au cas $m = 2k$, pour obtenir

$$S_p(k) = S_p(2k) - S_p(k) + \mu(p-1). \quad \blacksquare$$

Théorème 2. Si $0 \leq k \leq m$ sont deux entiers vérifiant

$$m = \sum_{i \geq 0} m_i p^i, \quad \text{avec } 0 \leq m_i \leq \frac{p-1}{2};$$

$$k = \sum_{i \geq 0} k_i p^i, \quad \text{avec } 0 \leq k_i < p,$$

alors on a

$$\frac{\binom{m}{k}}{\binom{2k}{k}} \in \mathbb{Z}_p.$$

Démonstration. Tout d'abord, rappelons que

1. $\binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} \binom{a-c}{b-c}$ pour $b \geq c$ entiers et a quelconque;

$$2. (-4)^m \binom{-1/2}{m} = \binom{2m}{m};$$

$$3. \binom{x}{n} \in \mathbf{Z}_p \text{ si } x \in \mathbf{Z}_p \text{ (} n \in \mathbf{N} \text{)}.$$

Alors, d'après 1., on a

$$\binom{-1/2}{m} \binom{m}{k} = \binom{-1/2}{k} \binom{-1/2-k}{m-k};$$

puis, d'après 2.

$$\binom{2m}{m} \binom{m}{k} = (-4)^{m-k} \binom{2k}{k} \binom{-1/2-k}{m-k}.$$

Dire que dans le développement de m en base p , $m = \sum_{i \geq 0} m_i p^i$ les chiffres m_i satisfont $0 \leq m_i \leq \frac{p-1}{2}$ revient à dire que le développement de $2m$ en base p est exactement $2m = \sum_{i \geq 0} 2m_i p^i$ d'où

$$S_p(2m) = 2S_p(m)$$

qui équivaut à $\text{ord}_p \binom{2m}{m} = 0$ ou encore à $\binom{2m}{m} \in \mathbf{Z}_p^*$.
Avec l'hypothèse, on obtient

$$\binom{m}{k} = (-4)^{m-k} \binom{2m}{m}^{-1} \binom{-1/2-k}{m-k} \binom{2k}{k} \in \binom{2k}{k} \mathbf{Z}_p.$$

C'est la propriété de divisibilité souhaitée

$$\binom{m}{k} / \binom{2k}{k} \in \mathbf{Z}_p.$$

Corollaire 2. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2, on a*

$$S_p(m-k) - S_p(m) + S_p(2k) \geq S_p(k) \geq 0.$$

Preuve. En utilisant le fait que $S_p(k) \geq 0$ et le théorème 2, on obtient

$$S_p(m-k) - S_p(m) + S_p(2k) \geq S_p(k) \geq 0.$$

Décomposition "exotique" d'un entier $n \in \mathbf{N}$

Soit un nombre premier $p \geq 3$. On dénote par M_p l'ensemble des entiers $m \in \mathbf{N}$ qui ont, en base p , un développement de la forme

$$m = \sum_{i \geq 0} m_i p^i, \quad \text{où } 0 \leq m_i \leq \frac{p-1}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} m \in M_p &\iff 2m = \sum_{i \geq 0} 2m_i p^i, \quad 0 \leq 2m_i \leq p-1 \\ &\iff \binom{2m}{m} \in \mathbf{Z}_p^*. \end{aligned}$$

Si n est arbitraire, on écrit sa décomposition en base p

$$n = \sum_{i=0}^k n_i p^i \quad 0 \leq n_i < p$$

et on définit

$$2m_i = \begin{cases} n_i & \text{si } n_i \text{ est pair} \\ n_i - 1 & \text{si } n_i \text{ est impair;} \end{cases}$$

de sorte que l'entier n s'écrit de manière unique

$$n = 2m + \sum_{i \in I} p^i \quad \text{où } m \in M_p.$$

On groupera alors les éléments de I par paires en commençant par les plus grands. Lorsque n est impair, $\text{Card } I$ est également impair et on notera s le plus petit élément de I . Ainsi, on obtient une décomposition

$$\sum_{i \in I} p^i = (p^{\alpha_{2r}} + p^{\alpha_{2r-1}}) + \dots + (p^{\alpha_2} + p^{\alpha_1}) + \epsilon p^s$$

avec $\epsilon \in \{0; 1\}$ et $\epsilon \equiv n \pmod{2}$.

On pourra noter

$$q = q_r + \dots + q_1, \quad q_j = p^{\alpha_{2j}} + p^{\alpha_{2j-1}}.$$

Au total, on a obtenu

$$n = 2m + (q_r + \cdots + q_1) + \epsilon p^s$$

avec

- $m \in M_p$,
- $q_j = p^{\alpha_{2j}} + p^{\alpha_{2j}-1}$, $s < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{2r}$.
- $\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

TABLE DES MATIÈRES

1	POLYNOMES DE LAGUERRE	13
1.1	Définitions et propriétés	13
1.2	Polygone de Newton de $\Lambda_{m,\nu p^\nu}(x)$	14
1.3	Polygone de Newton de $\Lambda_m(x)$	17
2	POLYNOMES D'HERMITE	25
2.1	Définition et propriétés	25
2.2	Polygone de Newton de $H_{p^s}(x)$	26
2.3	Polygone de Newton de $H_{2m,\nu p^\nu}(x)$	30
2.4	Polygone de Newton de $H_{2m}(x)$	32
2.5	Polygone de Newton de $H_{p^s+p^t}(x)$, $s < t$	37
2.6	Polygone de Newton de $H_q(x)$	45
2.7	Polygone de Newton de $H_n(x)$	48
3	POLYNOMES DE LEGENDRE	51
3.1	Définition et propriétés	51
3.2	Polygone de Newton de $P_n(1+2t)$ pour $p=2$	52
3.3	Polygone de Newton de $P_n(1+2t)$, $p \geq 3$	54
3.4	Polygone de Newton de $P_{p^s}(x)$	68
3.5	Polygone de Newton de $P_{p^s+p^t}(x)$, $s < t$	72
3.6	Polygone de Newton de $P_q(x)$	79
3.7	Polygone de Newton de $P_n(x)$	83

Chapitre 1

POLYNOMES DE LAGUERRE

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 Les polynômes de Laguerre ¹ $(L_n(x))_{n \geq 0}$ sont définis par la formule de récurrence

$$\begin{aligned} nL_n(x) &= (2n-1-x) \cdot L_{n-1}(x) - (n-1) \cdot L_{n-2}(x), \quad n \geq 2; \\ L_0(x) &= 1, \quad L_1(x) = 1-x. \end{aligned}$$

Malheureusement, la famille $(L_n(x))_{n \geq 0}$ ainsi définie n'entre pas dans le cadre mis en place dans l'introduction. En effet, le polynôme $L_n(x) \in \frac{1}{n!} \mathbf{Z}[x]$ n'est en général pas à coefficients entiers p -adiques. C'est pourquoi nous considérerons plutôt la suite

$$(\Lambda_n(x) = n! L_n(x))_{n \geq 0} \subset \mathbf{Z}[x].$$

Celle-ci vérifie les propriétés suivantes [6].

1. $\Lambda_n(x) \in \mathbf{Z}[x] \subset \mathbf{Z}_p[x]$ ($n \geq 0$);
2. $\Lambda_n(x) = (2n-1-x)\Lambda_{n-1}(x) - (n-1)^2\Lambda_{n-2}(x)$, ($n \geq 2$);
3. $\Lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(n!)^2}{(i!)^2 (n-i)!} \cdot x^i$
 $= \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda_i^n \cdot x^i$, ($n \geq 0$).

Par abus de langage, les polynômes $\Lambda_n(x)$ seront encore appelés polynômes de Laguerre. (Cette autre définition est courante).

¹Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886).

Remarque. De la propriété 3, il suit que

$$\begin{aligned} (p-1) \operatorname{ord}_p \lambda_k^n &= (p-1) \operatorname{ord}_p \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} \\ &= n - k + 2S_p(k) + S_p(n-k) - 2S_p(n) \end{aligned}$$

1.2 Polygone de Newton de $\Lambda_{m_\nu p^\nu}(x)$

Proposition 1.2.1 Si $p \geq 3$ et $0 < m_\nu < p$, alors

tous les zéros du polynôme $\Lambda_{m_\nu p^\nu}(x)$ ont pour module p -adique

$$r_\nu = p^{\Delta_\nu}, \text{ où } \Delta_\nu = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^\nu(p-1)}.$$

La proposition 1.2.1 exprime le fait que le polygone de Newton de $\Lambda_{m_\nu p^\nu}(x)$ n'est constitué que d'un seul segment critique, dont les points $(0; \operatorname{ord}_p \lambda_0^{m_\nu p^\nu}) = (0; \operatorname{ord}_p (m_\nu p^\nu)!) = (0; m_\nu \frac{p^\nu-1}{p-1})$ et $(m_\nu p^\nu; \operatorname{ord}_p \lambda_{m_\nu p^\nu}^{m_\nu p^\nu}) = (m_\nu p^\nu; 0)$ sont les extrémités, (fig. 1.2.1).

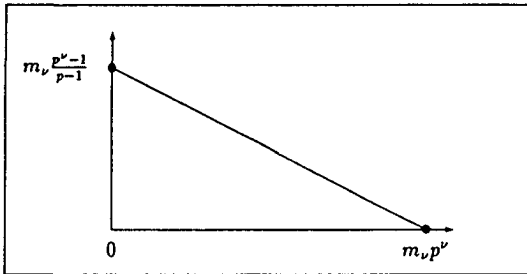


fig. 1.2.1

Avant de démontrer la proposition 1.2.1, testons-la sur quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 5$, $\nu = 1$, $m_\nu = 2$ de sorte que $m_\nu p^\nu = 10$.

A partir de la table suivante

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\operatorname{ord}_5 \lambda_i^{10}$	2	3	3	3	3	1	2	2	2	2	0

on construit le polygone de Newton de $\Lambda_{10}(x)$, (fig. 1.2.2).

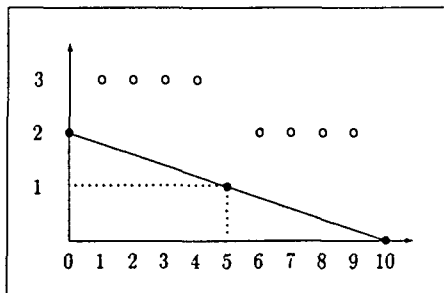


fig. 1.2.2

Conformément à la proposition 1.2.1, celui-ci est réduit à un segment oblique de pente

$$\Delta_1 = -2/10 \stackrel{\pm}{=} -1/4 + 1/20 = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p(p-1)}.$$

Exemple 2. - Prenons $p = 5$, $\nu = 1$, $m_\nu = 3$, et donc $m_\nu p^\nu = 15$.

La table suivante

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ord_5 \lambda_i^{15}$	3	4	4	4	4	2	3	3	3	3	1	2	2	2	2	0

nous permet la construction de $PN(\Lambda_{15}(x), 5)$, (fig. 1.2.3).

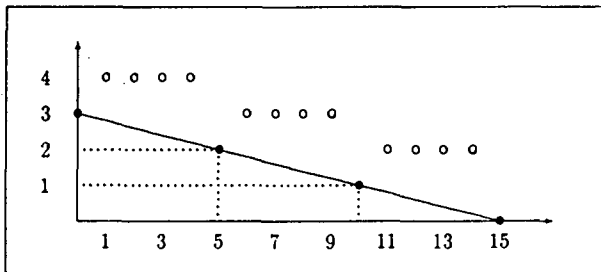


fig. 1.2.3

La même pente critique Δ_1 obtenue, confirme également la proposition 1.2.1.

Exemple 3. - Prenons $p = 3$, $\nu = 2$, $m_\nu = 1$, si bien que $m_\nu p^\nu = 9$. Ce cas donne lieu à la table suivante

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ord_3 \lambda_i^9$	4	6	6	4	5	5	3	4	4	0

On en déduit un polygone de Newton, (fig. 1.2.4)

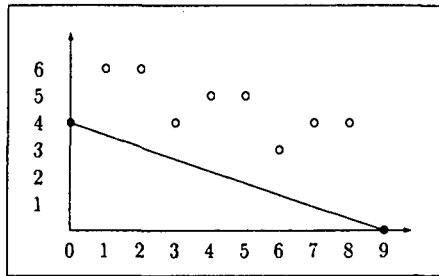


fig.1.2.4

dont l'unique segment possède, comme prévu, une pente Δ_2 égale à

$$\Delta_2 = -4/9 \stackrel{!}{=} -1/2 + 1/18 = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Présentons maintenant une preuve de la proposition 1.2.1.

Preuve. - En utilisant la proposition 1. de l'introduction et grâce au fait que $\text{ord}_p \lambda_{m_\nu p^\nu}^{m_\nu p^\nu} = 0$, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p \lambda_0^{m_\nu p^\nu} &\stackrel{!}{=} m_\nu p^\nu \cdot \Delta_\nu \\ -\text{ord}_p \lambda_0^{m_\nu p^\nu} &\stackrel{2}{\geq} -\text{ord}_p \lambda_j^{m_\nu p^\nu} + j \cdot \Delta_\nu \\ &0 < j < m_\nu p^\nu. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, la suite d'égalités

$$\begin{aligned} -(p-1) \text{ord}_p \lambda_0^{m_\nu p^\nu} &= -(p-1) \text{ord}_p \{(m_\nu p^\nu)!\} \\ &= -m_\nu (p^\nu - 1) \\ &= (p-1) m_\nu p^\nu \cdot \Delta_\nu \end{aligned}$$

établit l'assertion 1.

Dans un second temps, pour $0 < j < m_\nu p^\nu$, on calcule

$$\begin{aligned} & - (p-1) \operatorname{ord}_p \lambda_0^{m_\nu p^\nu} + (p-1) \operatorname{ord}_p \lambda_j^{m_\nu p^\nu} - (p-1)j \cdot \Delta_\nu = \\ & = \{-m_\nu p^\nu + m_\nu\} + \\ & \quad + \{m_\nu p^\nu - j - 2S_p(m_\nu p^\nu) + 2S_p(j) + S_p(m_\nu p^\nu - j)\} + \\ & \quad + \{j - j/p^\nu\} \\ & = S_p(m_\nu p^\nu - j) + 2S_p(j) - m_\nu - j/p^\nu. \end{aligned}$$

Mais alors

- ou bien $j = j_\nu p^\nu < m_\nu p^\nu$, auquel cas $S_p(m_\nu p^\nu - j) = m_\nu - S_p(j)$, et ainsi le second membre de l'égalité précédente s'annule;

- ou bien $j = \sum_{0 \leq i \leq \nu} j_i p^i$, avec $j_i \neq 0$ pour au moins un indice $i < \nu$, de sorte que $S_p(m_\nu p^\nu - j) > m_\nu - S_p(j)$, ce qui démontre également la positivité du second membre de l'égalité précédente. ■

1.3 Polygone de Newton de $\Lambda_m(x)$

Proposition 1.3.1 Pour $p \geq 3$ et $m = \sum_{0 \leq j \leq n} m_j p^j$, (avec $0 < m_j < p$),

le polynôme de Laguerre $\Lambda_m(x)$ possède exactement $m_j p^j$ zéros ($0 \leq j \leq n$) de module p -adique

$$\begin{aligned} r_i &= p^{\Delta_i}, \quad \text{où } \Delta_i = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^{i_j}(p-1)} \\ &= -\frac{1}{p^{i_j}} \cdot \frac{p^{i_j} - 1}{p-1} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \dots - \frac{1}{p^{i_j}}. \end{aligned}$$

Cette proposition se déduit de la représentation graphique du polygone de Newton $PN(\Lambda_m(x), p)$, (fig. 1.3.1).

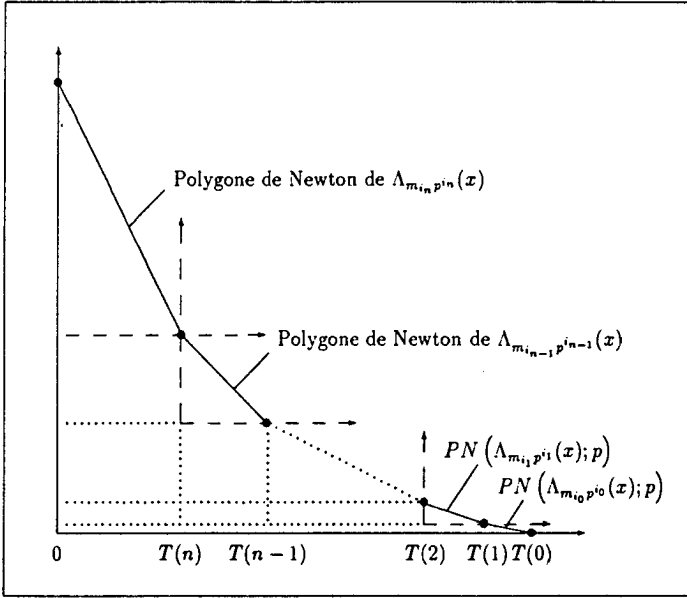


fig 1.3.1

où $T(k) = \sum_{j=k}^n m_j p^j$.

Avant de démontrer la proposition 1.3.1, testons sa validité sur quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 3$ et $m = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$.

La table suivante

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$ord_3 \lambda_i^{15}$	6	7	7	5	6	6	4	6	6	2	3	3	2	2	2	0

fournit le polygone de Newton de $\Lambda_{15}(x)$, (fig. 1.3.2).

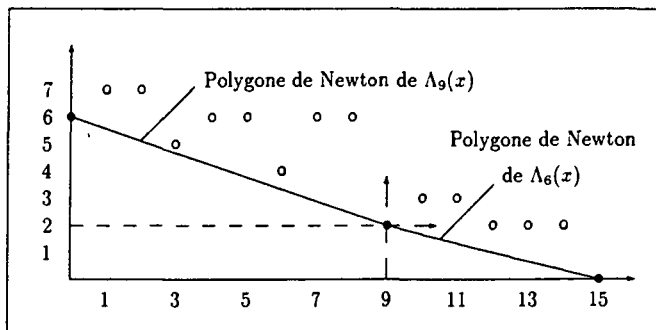


fig. 1.3.2

Celui-ci fait apparaître les polygones de Newton $PN(\Lambda_6(x), 3)$ et $PN(\Lambda_9(x), 3)$, desquels proviennent les pentes critiques

$$\Delta_1 = -1/3 \pm \frac{1}{p};$$

$$\Delta_2 = -4/9 \pm -1/3 - 1/9 = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Ceci confirme bien la proposition 1.3.1.

Exemple 2. - Prenons $p = 3$ et $m = 3 + 9 + 27 = 39$.

A partir du tableau des coefficients de $\Lambda_{39}(x)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$ord_3 \lambda_i^{39}$	18	19	19	17	19	19	17	18	18	14	15	15	13	16

i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$ord_3 \lambda_i^{39}$	16	14	15	15	11	12	13	10	12	12	10	11	11	5

i	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$ord_3 \lambda_i^{39}$	6	6	4	6	6	4	5	5	1	2	2	0

on construit le polygone de Newton $PN(\Lambda_{39}(x), 3)$, (fig. 1.3.3).

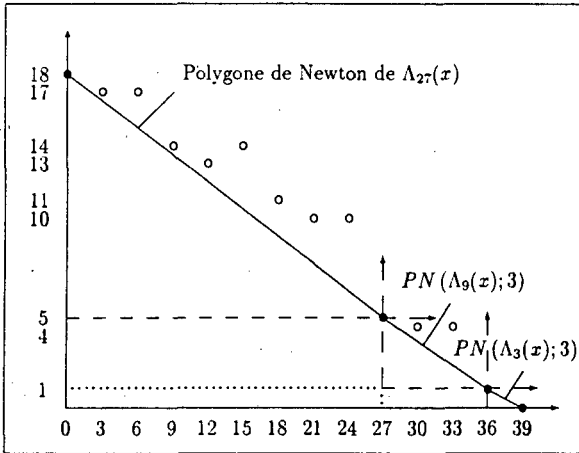


fig.1.3.3

Conformément à nos prévisions, on observe que celui-ci est constitué des polygones $PN(\Lambda_3(x), 3)$, $PN(\Lambda_9(x), 3)$ et $PN(\Lambda_{27}(x), 3)$, de pentes respectives

$$\Delta_1 = -1/3 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p};$$

$$\Delta_2 = -4/9 \stackrel{!}{=} -1/3 - 1/9 = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2};$$

$$\Delta_3 = -13/27 \stackrel{!}{=} -1/3 - 1/9 - 1/27 = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}.$$

Exemple 3. - Le cas $p = 5$ et $m = 2 + 2 \cdot 5 + 25 = 37$ est caractérisé dans la table suivante

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\text{ord}_5 \lambda_i^{37}$	8	8	8	9	9	7	7	7	8	8	6	6	6	8	8

i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\text{ord}_5 \lambda_i^{37}$	6	6	6	7	7	5	5	5	6	6	2	2

i	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$\text{ord}_5 \lambda_i^{37}$	2	3	3	1	1	1	2	2	0	0	0

En accord avec la proposition 1.3.1, le polygone de Newton de $\Lambda_{37}(x)$, (fig. 1.3.4)

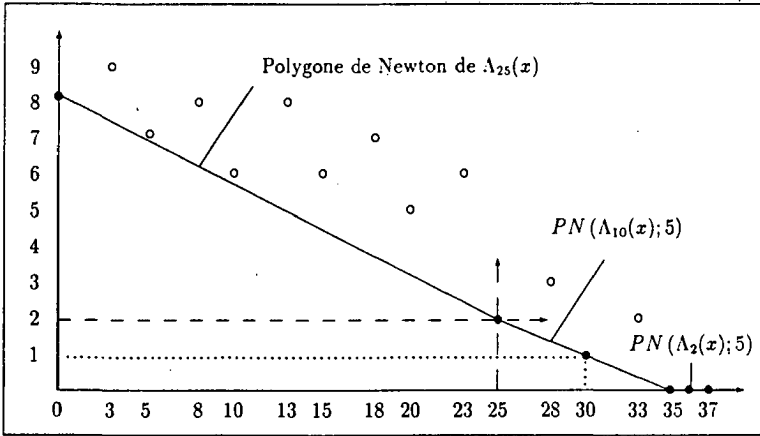


fig.1.3.4

possède les 3 pentes critiques

$$\Delta_0 = 0 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-1} \text{ de } PN(\Lambda_2(x); 5);$$

$$\Delta_1 = -2/10 \stackrel{!}{=} -1/5 = -\frac{1}{p} \text{ de } PN(\Lambda_{10}(x); 5) \text{ et}$$

$$\Delta_2 = -6/25 \stackrel{!}{=} -1/5 - 1/25 = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \text{ de } PN(\Lambda_{25}(x); 5).$$

Démonstration de la proposition 1.3.1. - Grâce à la proposition 1. de l'introduction, il s'agit de vérifier que

$$r_{i_t} = p^{\Delta_{i_t}}, \text{ où } \Delta_{i_t} = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^{i_t}(p-1)},$$

satisfait aux deux conditions

$$\begin{aligned} - \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j>t}^m m_j, p^j} &\stackrel{1.}{=} - \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j \geq t}^m m_j, p^j} + \Delta_{i_t} \cdot m_{i_t} p^{i_t} \\ - \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j>t}^m m_j, p^j} &\stackrel{2.}{\geq} - \text{ord}_p \lambda_{k + \sum_{j>t}^m m_j, p^j} + \Delta_{i_t} \cdot k, \\ &0 < k < m_{i_t} p^{i_t}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, démontrons l'égalité

$$\boxed{\text{ord}_p \lambda_{\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m \stackrel{!}{=} \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j \geq \ell} m_i, p^j}^m - \Delta_{i_\ell} \cdot m_{i_\ell} p^{i_\ell}}$$

Preuve. - Rappelons que

$$(p-1) \text{ord}_p \lambda_s^m = m - s - 2S_p(m) + 2S_p(s) + S_p(m-s)$$

et calculons

$$\begin{aligned} (p-1) \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m &= m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j - 2S_p(m) + 2S_p\left(\sum_{j>\ell} m_i, p^j\right) \\ &\quad + S_p\left(m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j\right) \\ &= m - \sum_{j \geq \ell} m_i, p^j + m_{i_\ell} p^{i_\ell} - 2S_p(m) + \\ &\quad + 2S_p\left(\sum_{j \geq \ell} m_i, p^j - m_{i_\ell} p^{i_\ell}\right) + \\ &\quad + S_p\left(m - \sum_{j \geq \ell} m_i, p^j + m_{i_\ell} p^{i_\ell}\right) \\ &= m - \sum_{j \geq \ell} m_i, p^j - 2S_p(m) + 2S_p\left(\sum_{j \geq \ell} m_i, p^j\right) + \\ &\quad + S_p\left(m - \sum_{j \geq \ell} m_i, p^j\right) + m_{i_\ell} p^{i_\ell} - m_{i_\ell}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien

$$(p-1) \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m = (p-1) \text{ord}_p \lambda_{\sum_{j \geq \ell} m_i, p^j}^m - (p-1)m_{i_\ell} p^{i_\ell} \cdot \Delta_{i_\ell}.$$

Démontrons maintenant l'inégalité

$$\boxed{-\operatorname{ord}_p \lambda_{\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m \stackrel{2}{\geq} -\operatorname{ord}_p \lambda_{k+\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m + k \cdot \Delta_{i_\ell}} \\ 0 < k < m_i p^{i_\ell}.$$

Preuve. - Pour $0 < k < m_i p^{i_\ell}$, nous constatons que

$$S_p(k + \sum_{j>\ell} m_i, p^j) = S_p(k) + S_p(\sum_{j>\ell} m_i, p^j).$$

Dès lors, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} & -(p-1) \operatorname{ord}_p \lambda_{\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m + (p-1) \operatorname{ord}_p \lambda_{k+\sum_{j>\ell} m_i, p^j}^m - (p-1) \cdot k \cdot \Delta_{i_\ell} = \\ & = \left\{ -m + \sum_{j>\ell} m_i, p^j + 2S_p(m) - 2S_p(\sum_{j>\ell} m_i, p^j) - S_p(m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j) \right\} + \\ & \quad + \left\{ m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j - k - 2S_p(m) + 2S_p(k + \sum_{j>\ell} m_i, p^j) + \right. \\ & \quad \left. + S_p(m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j - k) \right\} + \\ & \quad + \left\{ k - k/p^{i_\ell} \right\} \\ & = -S_p(m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j) + 2S_p(k) + S_p(m - \sum_{j>\ell} m_i, p^j - k) - k/p^{i_\ell} \\ & \geq S_p(k) - k/p^{i_\ell} \quad \text{car } S_p(a-b) \geq S_p(a) - S_p(b) \\ & \geq 0 \text{ avec égalité si } k = \mu p^{i_\ell}, 0 \leq \mu < p. \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

POLYNOMES D'HERMITE

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 La suite des polynômes d'Hermite ¹ $(H_n(x))_{n \geq 0}$ est définie par la formule de récurrence

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2x \cdot H_n(x) + 2n \cdot H_{n-1}(x) &= 0, \quad n \geq 1, \\ H_0(x) &= 1, H_1(x) = 2x. \end{aligned}$$

De cette définition il suit que

1. $H_n(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$ pour tout nombre premier p .

En outre, on dispose [6] de la formule explicite

$$\begin{aligned} 2. H_n(x) &= n! \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^i \frac{2^{n-i}}{i!(n-2i)!} \cdot x^{n-2i} \\ &= n! \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv n(2)}}^n (-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{2^{\frac{n+k}{2}}}{k! \left(\frac{n-k}{2}\right)!} \cdot x^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv n(2)}}^n (-1)^{\frac{n-k}{2}} 2^{\frac{n+k}{2}} h_k^n \cdot x^k, \\ &\text{avec } h_k^n = \frac{n!}{k! \left(\frac{n-k}{2}\right)!}. \end{aligned}$$

On a donc

$$(p-1) \text{ ord}_p h_k^n = \frac{n-k}{2} + S_p(k) + S_p\left(\frac{n-k}{2}\right) - S_p(n), \quad 0 \leq k \leq n, \quad k \equiv n \pmod{2}.$$

¹Charles Hermite (1822-1901).

2.2 Polygone de Newton de $H_{p^s}(x)$

Proposition 2.2.1 Pour $p \geq 3$ et $s \geq 1$, le polynôme d'Hermite $H_{p^s}(x)$ possède exactement $p^{s-1}(p-1)$ zéros de module p -adique

$$r_i = p^{\Delta_i}, \quad 0 \leq i \leq s, \quad \text{avec} \quad \Delta_0 = -\infty$$

$$\Delta_j = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p^{j-1}(p-1)}, \quad (1 \leq j \leq s).$$

La proposition 2.2.1 sera démontrée si l'on établit que le polygone de Newton de $H_{p^s}(x)$ a la configuration suivante (cf. fig. 2.2.1.).

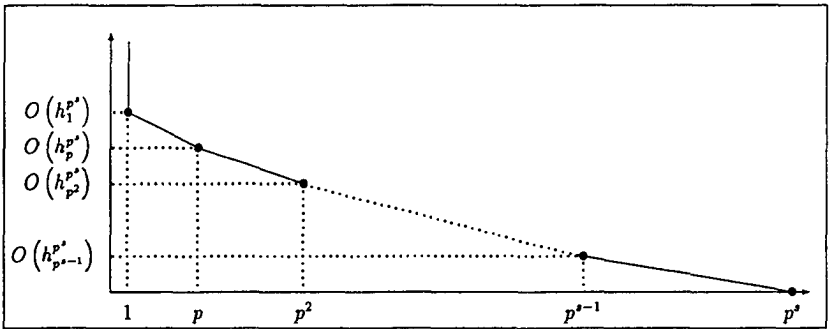


fig 2.2.1

Ici $O(h_k^{p^s}) = \text{ord}_p h_k^{p^s}$ et on obtient ainsi les s pentes critiques

$$\Delta_0 = -\infty \text{ et}$$

$$\Delta_i = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p^{i-1}(p-1)}; \quad 1 \leq i \leq s.$$

Avant de démontrer ce fait, effectuons quelques tests sur certains cas particuliers.

Exemple 1. - Prenons $p = 3$ et $s = 2$, d'où $p^s = 9$.

De la table suivante

i	1	3	5	7	9
$\text{ord}_3 h_i^9$	3	2	3	2	0

on déduit le polygone de Newton de $H_9(x)$, (fig. 2.2.2).

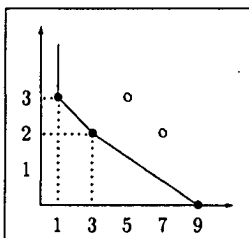


fig 2.2.2

En accord avec l'énoncé 2.2.1, celui-ci est constitué de 3 segments, de pentes

$$\Delta_0 = -\infty;$$

$$\Delta_1 = -1/2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)}; \text{ et}$$

$$\Delta_2 = -2/6 \stackrel{!}{=} -1/4 - 1/12 = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Exemple 2. - Prenons $p = 5$ et $s = 1$.

Le polygone de Newton du polynôme

$$H_5(x) = 120x + 160x^3 + 32x^5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5x - 2^5 \cdot 5x^3 + 2^5x^5$$

est représenté dans la figure 2.2.3.

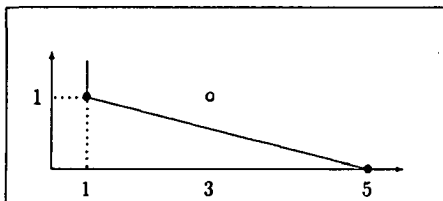


fig 2.2.3

Ici également, la proposition 2.2.1 se vérifie puisque l'on observe les deux pentes critiques

$$\Delta_0 = -\infty \text{ et}$$

$$\Delta_1 = -1/4 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)}.$$

Exemple 3. - Le cas $p = 5$ et $s = 2$ est traité dans la table suivante.

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$ord_5 h_i^{25}$	4	4	3	4	4	3	3	2	3	3	2	2	0

Le polygone $PN(H_{25}(x); 5)$ représenté ici

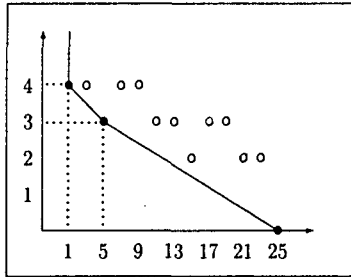


fig 2.2.4

possède bien les trois pentes critiques

$$\Delta_0 = -\infty;$$

$$\Delta_1 = -1/4 = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)} \text{ et}$$

$$\Delta_2 = -3/20 \stackrel{!}{=} -1/4 - 1/40 = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Ceci confirme la proposition 2.2.1

Finalement, attachons-nous à la démonstration du résultat.

Démonstration de la proposition 2.3.1. En vertu de la proposition 1 de l'introduction, il suffit de montrer que les rayons définis par

$$r_i = p^{\Delta_i}, \quad 0 \leq i \leq s, \quad \text{avec } \Delta_0 = -\infty$$

$$\text{et } \Delta_i = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p^{i-1}(p-1)}, \quad \text{si } i > 0$$

vérifient les deux relations

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{ord}_p h_{p^{i-1}}^{p^s} &\stackrel{1.}{=} -\operatorname{ord}_p h_{p^i}^{p^s} + (p-1)p^{i-1} \cdot \Delta_i; \\
 -\operatorname{ord}_p h_{p^{i-1}}^{p^s} &\stackrel{2.}{\geq} -\operatorname{ord}_p h_{p^{i-1+2k}}^{p^s} + 2k \cdot \Delta_i, \\
 &\text{où } 0 < 2k < (p-1)p^{i-1}.
 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
 -(p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^i}^{p^s} + p^{i-1}(p-1)^2 \cdot \Delta_i &= \\
 &= -\frac{p^s - p^i}{2} - S_p \left(\frac{p^s - p^i}{2} \right) - (p-1) \frac{p^{i-1} + 1}{2} \\
 &= -\frac{p^s - p^{i-1}}{2} - S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} \right) + \frac{p^s - p^{i-1}}{2} + \frac{p-1}{2} - (p-1) \frac{p^{i-1} + 1}{2} \\
 &= -\frac{p^s - p^{i-1}}{2} - S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} \right) \\
 &= -(p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^{i-1}}^{p^s}
 \end{aligned}$$

établit 1.

Dans un second temps, pour $0 < 2k < (p-1)p^{i-1}$, on calcule

$$\begin{aligned}
 -(p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^{i-1}}^{p^s} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^{i-1+2k}}^{p^s} - (p-1)2k \cdot \Delta_i &= \\
 &= \left\{ -\frac{p^s - p^{i-1}}{2} - S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} \right) - S_p(p^{i-1}) + S_p(p^s) \right\} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{p^s - p^{i-1}}{2} - k + S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} - k \right) + S_p(p^{i-1} + 2k) - S_p(p^s) \right\} + \\
 &\quad + \{ k + k/p^{i-1} \} \\
 &= S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} - k \right) - S_p \left(\frac{p^s - p^{i-1}}{2} \right) + S_p(2k) + k/p^{i-1} \\
 &= S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{i-1} - k \right) - S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{i-1} \right) + S_p(2k) + k/p^{i-1}.
 \end{aligned}$$

En posant alors $m = \frac{p-1}{2} p^{i-1}$ dans le corollaire 2 de l'introduction, on en déduit l'inégalité à démontrer. \blacksquare

2.3 Polygone de Newton de $H_{2m_\nu p^\nu}(x)$

Proposition 2.3.1 Pour $0 < 2m_\nu < p$, tous les zéros du polynôme d'Hermite $H_{2m_\nu p^\nu}(x)$ se trouvent sur la sphère critique

$$B_{=r_\nu}(0) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| = r_\nu\}$$

$$\text{avec } r_\nu = p^{\Delta_\nu} \text{ et } \Delta_\nu = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2p^\nu(p-1)}.$$

La proposition 2.3.1 se déduira de la représentation graphique du polygone de Newton de $H_{2m_\nu p^\nu}(x)$, (cf. fig. 2.3.1).

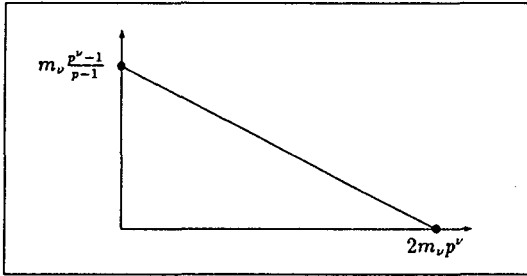


fig. 2.3.1

Avant de démontrer la proposition 2.3.1, testons-la sur quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 5$, $m_\nu = 1$, de sorte que $2m_\nu p^\nu = 10$.

On tire, de la table suivante

i	0	2	4	6	8	10
$\text{ord}_5 h_i^{10}$	1	2	2	1	1	0

la construction du polygone de Newton de $H_{10}(x)$, (fig. 2.3.2).

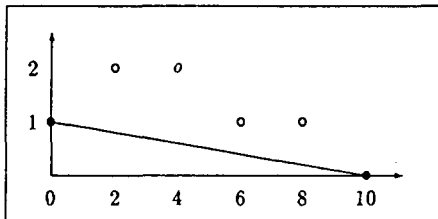


fig. 2.3.2

Comme le prétend la proposition 2.3.1, ce dernier est réduit à un unique segment de pente

$$\Delta_1 = -1/10 \stackrel{!}{=} -1/8 + 1/40 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Exemple 2. - Prenons $p = 5$, $m_\nu = 2$, si bien que $2m_\nu p^\nu = 20$.

A l'aide de la table des coefficients,

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$ord_5 h_i^{20}$	2	3	3	2	2	1	2	2	1	1	0

on construit le polygone de Newton associé à $H_{20}(x)$, (fig. 2.3.3).

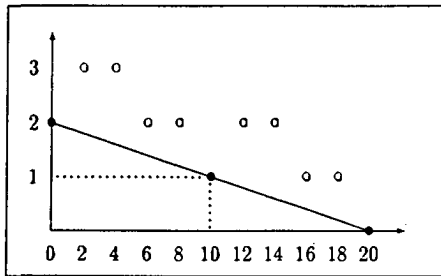


fig. 2.3.3

Conformément à la proposition 2.3.1, $H_{20}(x)$ et $H_{10}(x)$ possède donc la même pente critique.

Passons maintenant à la preuve de la proposition 2.3.1.

Preuve. - En vertu de la proposition 1 de l'introduction, il suffit de montrer que

$$r_\nu = p^\nu, \text{ où } \Delta_\nu = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2p^\nu(p-1)}$$

vérifie les deux propriétés

$$\begin{aligned} - ord_p h_0^{2m_\nu p^\nu} &\stackrel{!}{=} 2m_\nu p^\nu \cdot \Delta_\nu \\ - ord_p h_0^{2m_\nu p^\nu} &\stackrel{?}{\geq} - ord_p h_{2k}^{2m_\nu p^\nu} + 2k \cdot \Delta_\nu \\ &\text{où } 0 < 2k < 2m_\nu p^\nu. \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$-(p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{2m_\nu p^\nu} = -m_\nu p^\nu + m_\nu = 2m_\nu p^\nu \cdot \Delta_\nu$$

ce qui prouve 1.

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned} & -(p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{2m_\nu p^\nu} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{2k}^{2m_\nu p^\nu} - (p-1)2k \cdot \Delta_\nu = \\ & = \{-m_\nu p^\nu + m_\nu\} + \\ & \quad + \{m_\nu p^\nu - k + S_p(m_\nu p^\nu - k) + S_p(2k) - S_p(m_\nu p^\nu)\} + \\ & \quad + \{k - k/p^\nu\} \\ & = -m_\nu + S_p(2k) + S_p(m_\nu p^\nu - k) - k/p^\nu \quad \text{après simplification.} \end{aligned}$$

En substituant $m = m_\nu p^\nu$ dans le corollaire 2 de l'introduction, on obtient l'inégalité à démontrer. ■

2.4 Polygone de Newton de $H_{2m}(x)$

Proposition 2.4.1 *Pour $p \geq 3$ et $2m = \sum_{j=1}^\nu 2m_j p^j$, avec $0 < 2m_j < p$, le polynôme d'Hermite $H_{2m}(x)$ possède exactement $2m_\beta p^{j_\beta}$ racines ($1 \leq \beta \leq \nu$) de module p -adique*

$$\begin{aligned} r_{i_\beta} &= p^{\Delta_{i_\beta}}, \text{ où } \Delta_{i_\beta} = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2p^{i_\beta}(p-1)}, \quad (1 \leq \beta \leq \nu) \\ &= -\frac{1}{2p^{i_\beta}} \cdot \frac{p^{i_\beta} - 1}{p-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{i_\beta}} \right) \end{aligned}$$

La proposition 2.4.1 se déduira du fait que le polygone de Newton de $H_{2m}(x)$ s'obtient par la juxtaposition des polygones de Newton $H_{2m_i p^{i_\beta}}(x)$ ($1 \leq \beta \leq \nu$), comme le décrit la figure 2.4.1

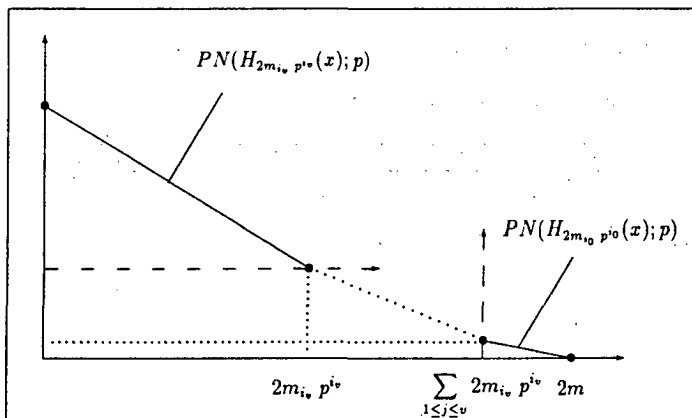


fig. 2.4.1

A nouveau, nous jugeons instructif de tester la proposition 2.4.1. sur quelques exemples avant d'en apporter une preuve.

Exemple 1. Si l'on choisit $2m = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \in \mathbf{Z}_3$, alors le polynôme

$$\begin{aligned} H_8(x) &= 1680 - 13440 x^2 + 13440 x^4 - 3584 x^6 + 256 x^8 = \\ &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 x^2 + 2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 x^4 - 2^9 \cdot 7 x^6 + 2^8 x^8 \end{aligned}$$

donne lieu à un polygone de Newton que l'on obtient en juxtaposant les polygones $PN(H_6(x); 3)$ et $PN(H_2(x); 3)$, (cf. fig. 2.4.2).

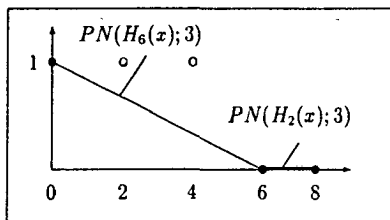


fig. 2.4.2

Ainsi, en accord avec le résultat 2.4.1, $H_8(x)$ possède les deux pentes critiques

$$\Delta_0 = 0 \quad \text{et}$$

$$\Delta_1 = -1/6 \stackrel{!}{=} -1/2 \cdot 1/3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}.$$

Exemple 2. Dans Z_3 , prenons cette fois $2m = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 24$.

L'information contenue dans la table ci-dessous

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$\text{ord}_3 h_i^{24}$	5	6	5	4	6	4	3	4	3	1	2	1	0

permet de construire le polygone de Newton de $H_{24}(x)$, (fig. 2.4.3).

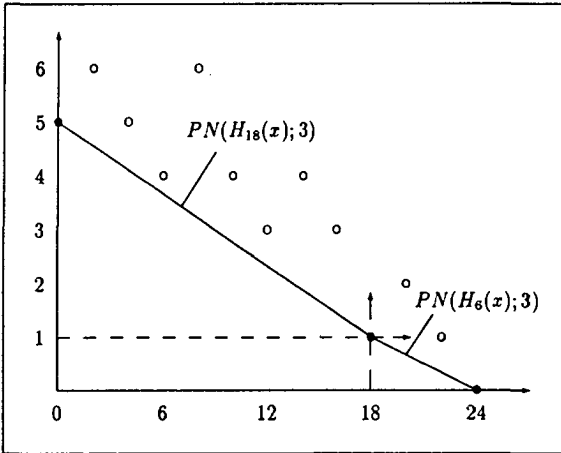


fig. 2.4.3

Les deux pentes critiques

$$\Delta_1 = -1/6 \stackrel{!}{=} -1/2 \cdot 1/3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \quad \text{et}$$

$$\Delta_2 = -2/9 \stackrel{!}{=} -1/2 (1/3 + 1/9) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right)$$

relatives à $PN(H_{18}(x); 3)$ et $PN(H_6(x); 3)$ respectivement (cf. fig. 2.4.3), viennent confirmer la proposition 2.4.1.

Exemple 3. - Soient maintenant $p = 5$, $2m = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 25 = 60$, et dressons la table des ordres p -adiques des coefficients de $H_{60}(x)$.

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$ord_5 h_i^{60}$	7	8	8	7	7	6	8	8	7	7	6	7	7

i	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
$ord_5 h_i^{60}$	5	5	4	5	5	4	4	3	4	4

i	46	48	50	52	54	56	58	60
$ord_5 h_i^{60}$	3	3	1	2	2	1	1	0

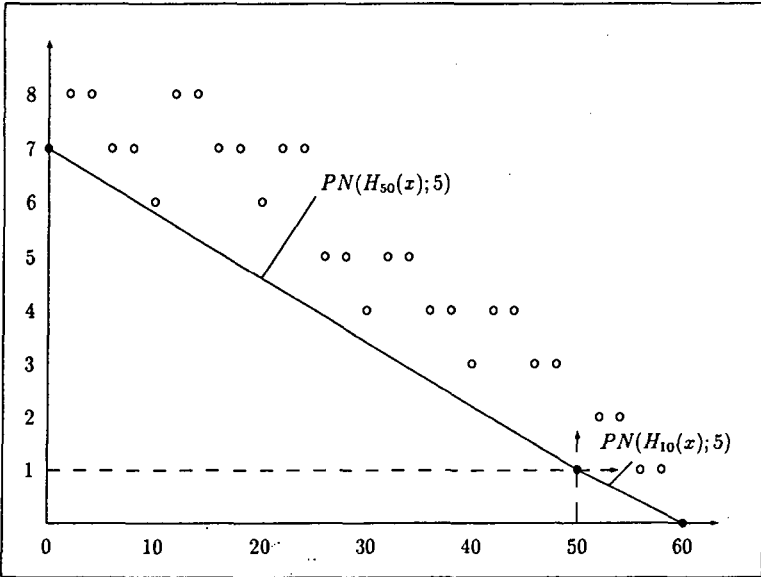


fig. 2.4.4

La figure 2.4.4 fait apparaître clairement la juxtaposition des polygones $PN(H_{50}(x); 5)$ et $PN(H_{10}(x); 5)$. Comme annoncé dans la proposition 2.4.1, ceux-ci fournissent les pentes

$$\Delta_1 = -1/10 \stackrel{!}{=} -1/2 \cdot 1/5 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} \text{ et}$$

$$\Delta_2 = -3/25 \stackrel{!}{=} -1/2(1/5 + 1/25) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right).$$

Démonstration de la proposition 2.4.1. En vertu de la proposition 1 de l'introduction, il suffit de montrer que les rayons définis par

$$r_{i\beta} = p^{\Delta_{i\beta}}, \text{ où } \Delta_{i\beta} = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2p^{i\beta}(p-1)},$$

vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j} &\stackrel{1.}{=} -\text{ord}_p h_{\sum_{j\geq\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j} + 2m_i p^{i\beta} \cdot \Delta_{i\beta}; \\ -\text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j} &\stackrel{2.}{\geq} -\text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j+2k} + 2k \cdot \Delta_{i\beta}. \\ &0 < 2k < 2m_i p^{i\beta} \end{aligned}$$

La suite d'égalités

$$\begin{aligned} -(p-1) \text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j} &= -\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j} - S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j}) - \\ &\quad - S_p(\sum_{j>\beta} 2m_i, p^{i_j}) + S_p(2m) \\ &= -\sum_{j<\beta} 2m_i, p^{i_j} - m_i p^{i\beta} - S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j}) - m_i p^{i\beta} - \\ &\quad - S_p(\sum_{j\geq\beta} 2m_i, p^{i_j}) + 2m_i p^{i\beta} + S_p(2m) \\ &= -(p-1) \text{ord}_p h_{\sum_{j\geq\beta}^{2m}} m_i, p^{i_j} + (p-1) 2m_i p^{i\beta} \cdot \Delta_{i\beta} \end{aligned}$$

établit la première assertion.

Par ailleurs, pour $0 < 2k < 2m_i p^{i\beta}$, on a l'égalité

$$S_p(\sum_{j>\beta} m_i, p^{i_j} + 2k) = S_p(\sum_{j>\beta} m_i, p^{i_j}) + S_p(2k).$$

De cette dernière, on déduit que

$$\begin{aligned} -(p-1) \text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j} + (p-1) \text{ord}_p h_{\sum_{j>\beta}^{2m}} 2m_i, p^{i_j+2k} - 2k(p-1)\Delta_{i\beta} &= \\ = \{-\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j} - S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j}) - S_p(\sum_{j>\beta} 2m_i, p^{i_j}) + S_p(2m)\} &+ \\ + \{\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j} - k + S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j} - k) + S_p(\sum_{j>\beta} 2m_i, p^{i_j} + 2k) - S_p(2m)\} &+ \\ + \{k - k/p^{i\beta}\} & \\ = -S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j}) + S_p(\sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j} - k) + S_p(2k) - k/p^{i\beta}. & \end{aligned}$$

En définissant $m = \sum_{j\leq\beta} m_i, p^{i_j}$ et en utilisant le corollaire 2 de l'introduction, on obtient l'inégalité à prouver. ■

2.5 Polygone de Newton de $H_{p^s+p^t}(x)$, $s < t$.

Proposition 2.5.1 Pour $p \geq 5$, les zéros du polynôme d'Hermite $H_{p^s+p^t}(x)$ se répartissent comme suit dans \mathbb{C}_p .

1. $(1+p)p^s$ racines de module

$$r_0 = p^{\Delta_0}, \text{ avec } \Delta_0 = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{p-3}{2p^s(1+p)(p-1)};$$

2. Si $t-s > 1$, on a encore $(p-1)p^{s+j}$ racines de module

$$r_j = p^{\Delta_j}, \text{ avec } \Delta_j = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)p^{s+j}}, \quad (1 \leq j \leq t-s-1).$$

La proposition 2.5.1 découlera de la configuration suivante du polygone de Newton de $H_{p^s+p^t}(x)$.

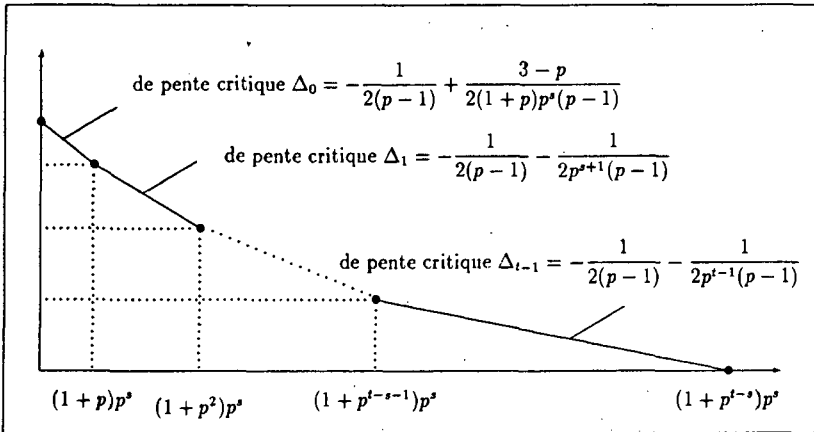


fig. 2.5.1

Remarque. Le cas $p = 3$ fait exception. En effet, à titre d'exemple, prenons $t = 2$, $s = 0$ et donc $p^s + p^t = 10$. La figure 2.5.2 représente alors le polygone de Newton du polynôme

$$\begin{aligned} H_{10}(x) &= -30240 + 302400 x^2 - 403200 x^4 + 161280 x^6 - 23040 x^8 + 1024 x^{10} \\ &= -2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 + 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 x^2 - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 x^4 + \\ &\quad + 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 x^6 - 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 x^8 + 2^{10} x^{10}. \end{aligned}$$

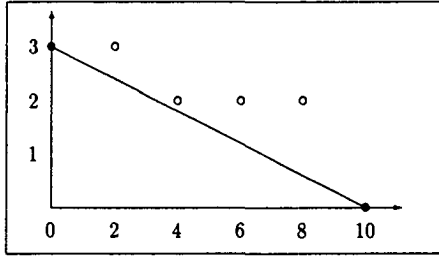


fig. 2.5.2

Comme pressenti, le polygone $PN(H_{10}(x); 3)$ est formé d'un seul segment de pente

$$\Delta = -3/10 \neq \Delta_0 = \frac{-1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2p^2(1+p)(p-1)},$$

ce qui infirme la proposition 1.2.1.

Testons la proposition 2.5.1 sur quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 5$, $s = 0$, $t = 1$ de sorte que $p^s + p^t = 1 + 5 = 6$.

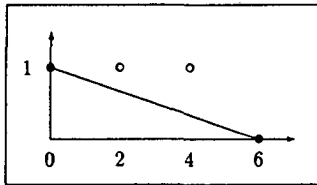


fig. 2.5.3

La figure 2.5.3 représente le polygone de Newton du polynôme

$$H_6(x) = -120 + 720x^2 - 480x^4 + 64x^6 = -2^3 \cdot 3 \cdot 5 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5x^2 - 2^5 \cdot 3 \cdot 5x^4 + 2^6x^6.$$

Comme le laissait prévoir la proposition 2.5.1, on observe une pente unique

$$\Delta_0 = -1/6 \stackrel{!}{=} -1/8 - 2/48 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2(1+p)(p-1)}.$$

Exemple 2. - Si $s = 0$ et $t = 2$ (pour $p = 5$), alors $p^s + p^t = 1 + 5^2 = 26$.

C'est le cas dont la table suivante fait état.

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$ord_s h_i^{26}$	4	4	4	3	4	3	3	3	2	3	2	2	2	0

On construit le polygone $PN(H_{26}(x); 5)$, (cf. fig. 2.5.4).

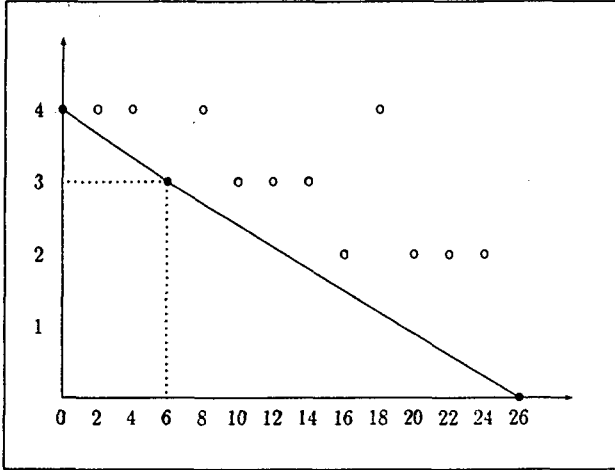


fig. 2.5.4

Ce dernier est bien constitué de deux segments de pentes

$$\Delta_0 = -1/6 \stackrel{!}{=} -1/8 - 2/48 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2(1+p)(p-1)} \text{ et}$$

$$\Delta_1 = -3/20 \stackrel{!}{=} -1/8 - 1/40 = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2p(p-1)}.$$

Exemple 3. - Toujours pour $p = 5$, prenons $s = 1$ et $t = 2$.

Ainsi $p' + p' = 5 + 5^2 = 30$.

La table de coefficients

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$ord_s b_i^{30}$	4	5	5	4	4	3	4	4	3

i	18	20	22	24	26	28	30
$ord_s b_i^{30}$	3	2	3	1	1	1	0

permet la construction de $PN(H_{30}(x); 5)$, (fig. 2.5.5).

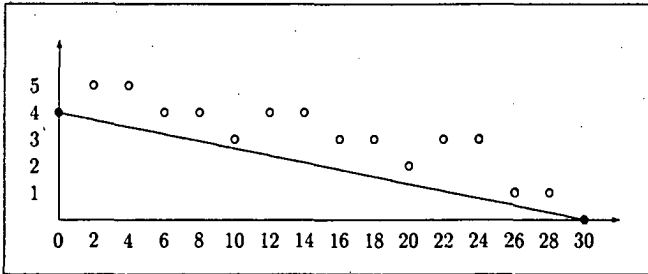


fig. 2.5.5

Sur la figure 2.5.5, on observe une pente unique

$$\Delta_0 = -4/30 \stackrel{!}{=} -1/8 - 2/240 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2p(1+p)(p-1)}$$

Démonstration de la proposition 2.5.1. Montrons tout d'abord que

$$\Delta_0 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2p^2(p-1)(1+p)}$$

apparaît bien comme pente critique de $H_{p^s+p^t}(x)$.

D'après la proposition 1 de l'introduction, il s'agit de montrer que le nombre

$$r_0 = p^{\Delta_0}, \quad \text{où} \quad \Delta_0 = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2p^2(p-1)(1+p)}$$

vérifie les relations

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p h_0^{p^s+p^t} &\stackrel{!}{=} -\text{ord}_p h_{p^s+p^t}^{p^s+p^t} + (p^s + p^{s+1}) \cdot \Delta_0 \\ -\text{ord}_p h_0^{p^s+p^t} &\stackrel{2}{\geq} -\text{ord}_p h_{2k}^{p^s+p^t} + 2k \cdot \Delta_0 \\ &0 < 2k < p^s + p^{s+1}. \end{aligned}$$

L'égalité 1. s'établit comme suit.

$$\begin{aligned}
 (p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{p^s+p^t} &= \frac{p^s+p^t}{2} + S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2}\right) - 2 \\
 &= \frac{p^t-p^{s+1}}{2} + \frac{p^{s+1}+p^s}{2} + S_p\left(\frac{p^t-p^{s+1}}{2}\right) + S_p\left(\frac{p^{s+1}+p^s}{2}\right) - 2 \\
 &= (p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}}^{p^s+p^t} + \frac{1+p}{2}p^s + \frac{p-3}{2} \\
 &= (p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}}^{p^s+p^t} - (p-1)(p^s+p^{s+1})\Delta_0.
 \end{aligned}$$

Quant à l'inégalité 2., on la démontre en exploitant le fait que , pour $0 < 2k < p^s(1+p)$, on a

$$\begin{aligned}
 1. \quad S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2}\right) &= S_p\left(p^s\frac{1+p}{2}\right) + S_p\left(\frac{p^t-p^{s+1}}{2}\right); \\
 2. \quad S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2} - k\right) &= S_p\left(p^s\frac{1+p}{2} - k\right) + S_p\left(\frac{p^t-p^{s+1}}{2}\right);
 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 D &= -(p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{p^s+p^t} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{2k}^{p^s+p^t} - 2k(p-1) \cdot \Delta_0 = \\
 &= \left\{ -\frac{p^s+p^t}{2} - S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2}\right) + 2 \right\} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{p^s+p^t}{2} - k + S_p(2k) + S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2} - k\right) - 2 \right\} - \\
 &\quad - \left\{ 2k\left(-1/2 + \frac{3-p}{2p^s(1+p)}\right) \right\}. \\
 &= -S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2}\right) + S_p(2k) + S_p\left(\frac{p^s+p^t}{2} - k\right) - 2k\frac{3-p}{2p^s(1+p)}; \\
 &= S_p\left(p^s\frac{1+p}{2} - k\right) + S_p(2k) - S_p\left(p^s\frac{1+p}{2}\right) - 2k\frac{3-p}{2p^s(1+p)}.
 \end{aligned}$$

Mais

- ou bien $k = k_s p^s$, avec $0 < k_s < \frac{1+p}{2}$,
de sorte que, $k_s \leq \frac{p-1}{2}$ et $2k_s \leq p-1$, et on obtient $D \geq 0$.
- ou bien $k = \dots + k_{s-1} p^{s-1} + k_s p^s$, avec $k_s \leq \frac{p-1}{2}$ et $\frac{1+p}{2} \leq k_{s-1} \leq p-1$,
et alors

$$\begin{aligned} 2k &= \dots + 2k_{s-1} p^{s-1} + 2k_s p^s \\ &= \dots + \{2k_{s-1} - (p-1)\} p^{s-1} + (2k_s + 1) p^s \\ &= \dots + (2k)_{s-1} p^{s-1} + (2k)_s p^s \end{aligned}$$

et donc

$$S_p(2k) \geq 2S_p(k) - (p-1).$$

D'autre part,

$$\frac{1+p}{2} p^s - k = \dots + \{p-1 - k_{s-1}\} p^{s-1} + \left\{ \frac{1+p}{2} - k_s - 1 \right\} p^s$$

implique

$$S_p\left(\frac{1+p}{2} - k\right) \geq S_p\left(\frac{1+p}{2}\right) - S_p(k) + (p-1);$$

on en déduit alors que

$$D = -(p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{p^s+p^s} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{2k}^{p^s+p^s} - 2k(p-1) \cdot \Delta_0 \geq 0.$$

- Soit $k = \dots + k_{s-1} p^{s-1} + k_s p^s$ avec $k_s \leq \frac{p-1}{2}$ et $0 \leq k_{s-1} \leq \frac{p-1}{2}$;
et, par un raisonnement analogue aux précédents, on conclut également que

$$D = -(p-1) \operatorname{ord}_p h_0^{p^s+p^s} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{2k}^{p^s+p^s} - 2k(p-1) \cdot \Delta_0 \geq 0.$$

Finalement, montrons que si $t - s > 1$,

$$\Delta_i = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)p^{s+i}}, \quad 1 \leq i \leq t - s - 1.$$

est également pente critique de $PN(H_{p^s+p^t}(x); p)$.

A nouveau, il s'agit de vérifier que

$$r_i = p^{\Delta_i}, \quad \text{où } \Delta_i = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)p^{s+i}}$$

satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i}}^{p^s+p^t} &\stackrel{1}{\leq} -\text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i+1}}^{p^s+p^t} + p^{s+i}(p-1) \cdot \Delta_i \\ -\text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i}}^{p^s+p^t} &\stackrel{2}{\geq} -\text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i+2k}}^{p^s+p^t} + 2k \cdot \Delta_i \\ &0 < 2k < p^{s+i}(p-1). \end{aligned}$$

Mais, la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (p-1) \text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i}}^{p^s+p^t} &= \frac{p^t - p^{s+i}}{2} + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} \right) \\ &= \frac{p^t - p^{s+i+1}}{2} + \frac{p^{s+i+1} - p^{s+i}}{2} + \\ &\quad + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i+1}}{2} \right) + S_p \left(\frac{p^{s+i+1} - p^{s+i}}{2} \right) \\ &= (p-1) \text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i+1}}^{p^s+p^t} + \frac{p-1}{2} (p^{s+i} + 1) \\ &= (p-1) \text{ord}_p h_{p^s+p^{s+i+1}}^{p^s+p^t} - (p-1)^2 p^{s+i} \cdot \Delta_i \end{aligned}$$

établit 1. D'autre part, pour $0 < 2k < (p-1)p^{s+i}$, on calcule

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}}^{p^s+p^t} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}+2k}^{p^s+p^t} - 2k(p-1) \cdot \Delta_i = \\
& = \left\{ -\frac{p^t - p^{s+i}}{2} - S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} \right) \right\} + \\
& + \left\{ \frac{p^t - p^{s+i}}{2} - k + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} - k \right) + S_p (p^s + p^{s+i} + 2k) - 2 \right\} + \\
& + \{k + k/p^{s+i}\}, \quad \text{par définition de } \operatorname{ord}_p h_k^n \\
& = -S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} \right) + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} - k \right) + S_p (p^s + p^{s+i} + 2k) - 2 + k/p^{s+i}.
\end{aligned}$$

On déduit alors de l'hypothèse $0 < 2k < (p-1)p^{s+i}$ que

1. $S_p (p^s + p^{s+i} + 2k) = S_p (p^s + 2k) + S_p (p^{s+i});$
2. $S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} - k \right) = S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{s+i} - k \right) + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i+1}}{2} \right);$
3. $S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i}}{2} \right) = S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{s+i} \right) + S_p \left(\frac{p^t - p^{s+i+1}}{2} \right),$

ce qui se traduit comme suit sur l'inégalité à démontrer.

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}}^{p^s+p^t} + (p-1) \operatorname{ord}_p h_{p^s+p^{s+1}+2k}^{p^s+p^t} - 2k(p-1) \cdot \Delta_i = \\
& = -S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{s+i} \right) + S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{s+i} - k \right) + S_p (p^s + 2k) - 1 + k/p^{s+i}.
\end{aligned}$$

Après avoir traité le cas $(2k)_s = p-1$ (facile), on suppose $(2k)_s < p-1$ et on utilise le corollaire 2 de l'introduction avec $m = \frac{p-1}{2} p^{s+i}$ pour démontrer l'inégalité en question. ■

2.6 Polygone de Newton de $H_q(x)$

Proposition 2.6.1 Si $p \geq 5$ et $q = \sum_{i=1}^{2\gamma} p^{\alpha_i}$, avec $\alpha_i \leq \alpha_j$ pour $i \leq j$, alors les zéros de $H_q(x)$ se répartissent comme suit dans C_p .

1. $(1+p)p^{\alpha_{2t-1}}$ racines de module p -adique égal à

$$r_{0,2t-1} = p^{\Delta_{0,2t-1}}, \text{ où } \Delta_{0,2t-1} = -\frac{1}{2(p-1)} + \frac{3-p}{2p^{\alpha_{2t-1}}(1+p)(p-1)}, \quad (1 \leq t \leq \gamma);$$

2. $(p-1)p^{\alpha_{2t-1}+j}$ racines de module p -adique égal à

$$r_{j,2t-1} = p^{\Delta_{j,2t-1}}, \text{ où } \Delta_{j,2t-1} = -\frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)p^{\alpha_{2t-1}+j}},$$

$$(1 \leq j \leq \alpha_{2t} - \alpha_{2t-1} - 1).$$

La proposition 2.6.1 se déduira de la représentation suivante de $PN(H_q(x); p)$, (cf. fig. 2.6.1).

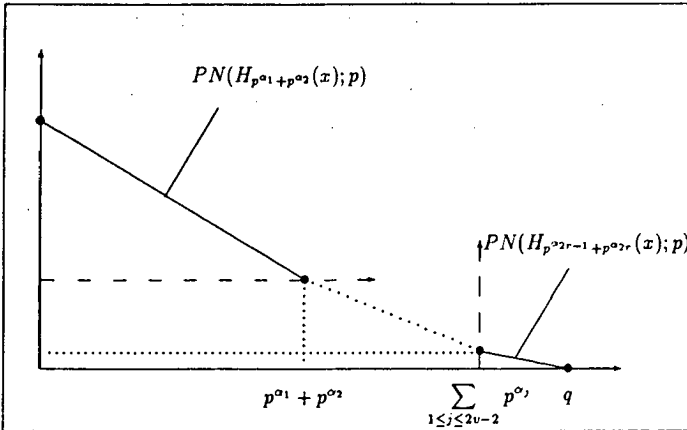


fig. 2.6.1

La preuve de la proposition 2.6.1 s'exécutant de façon tout à fait analogue à la démonstration précédente, nous laissons au lecteur le soin d'en régler les derniers détails. Vérifions tout de même la validité de la proposition sur l'exemple suivant.

Exemple. - Prenons $p = 5$ et $q = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 = 156$.

Les informations se trouvant dans la table ci-dessous nous permettent de construire le polygone $PN(H_{156}(x); 5)$, (fig. 2.6.2).

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$ord_5 h_i^{156}$	20	20	20	19	21	20	20	20	19	20	19	19	19

i	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$ord_5 h_i^{156}$	17	18	17	17	17	16	17	16	16	16	15	16	14

i	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76
$ord_5 h_i^{156}$	14	14	13	15	14	14	14	13	14	13	13	13	11

i	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100
$ord_5 h_i^{156}$	12	11	11	11	10	11	10	10	10	9	10	8

i	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120
$ord_5 h_i^{156}$	8	8	7	9	8	8	8	7	8	7

i	122	124	126	128	130	132	134	136	138
$ord_5 h_i^{156}$	7	7	4	5	4	4	4	3	4

i	140	142	144	146	148	150	152	154	156
$ord_5 h_i^{156}$	3	3	3	2	3	1	1	1	0

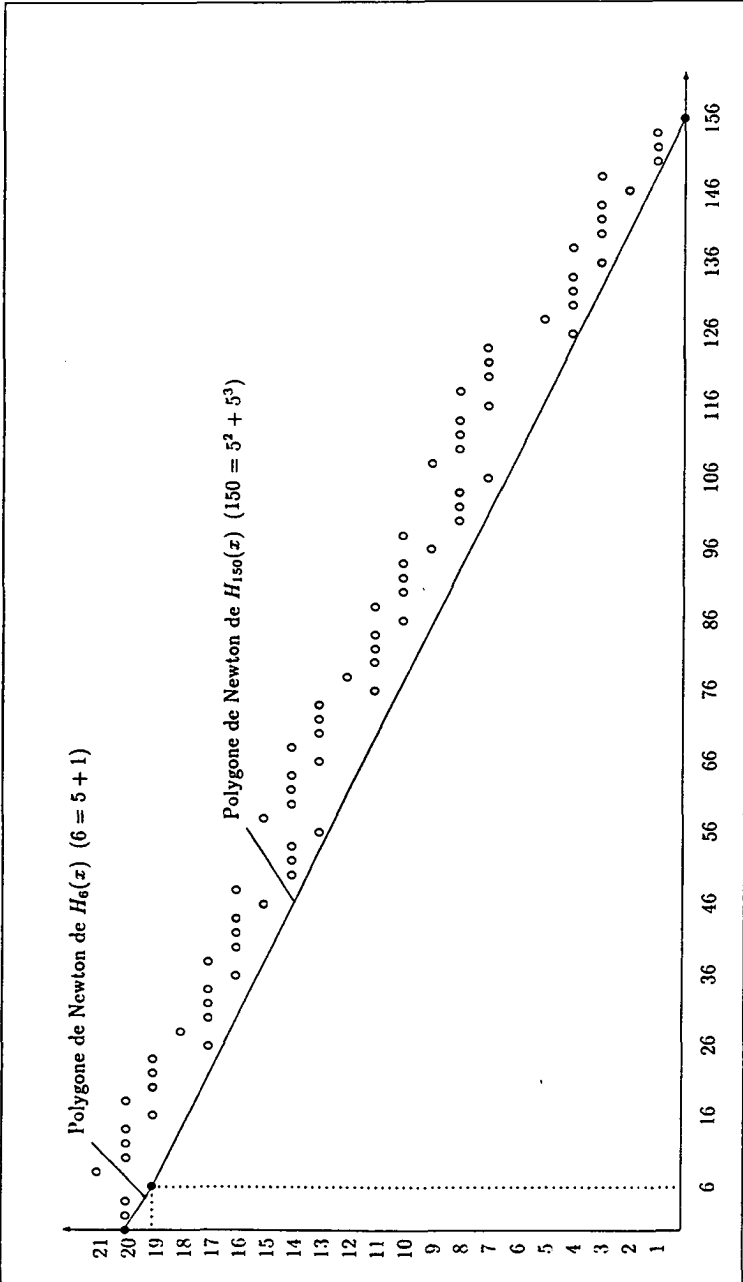


fig. 2.6.2

2.7 Polygone de Newton de $H_n(x)$

Dans cette section, nous traitons le cas général. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ que nous décomposons selon la forme "exotique"

$$n = \epsilon p^s + q + 2m, \quad (\epsilon \in \{0; 1\} \text{ et } \epsilon \equiv n \pmod{2})$$

où $2m$ et q sont définis comme dans l'introduction, c'est-à-dire que

$$2m = \sum_{j \geq 0} 2m_j p^j, \quad \text{avec } 0 < 2m_j < p;$$

$$q = \sum_{i=1}^{2r} p^{\alpha_i}, \quad \text{avec } s < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{2r}. \quad (q = 0 \text{ si } r = 0)$$

Afin d'illustrer cette décomposition, considérons les exemples suivants.

1. Prenons $p = 5$. Alors $n = 91$ se décompose de la manière suivante.

$$\begin{aligned} n = 91 &= 75 + 15 + 1 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 5^0, \quad (\text{décomposition de } n = 91 \text{ en base } 5) \\ &= 5^0 + (5 + 5^2) + (2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2) \\ &= 5^s + q + 2m, \quad \text{où } s = 0, \quad q = 5^1 + 5^2 \text{ et } 2m = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2. \end{aligned}$$

2. Toujours pour $p = 5$, écrivons $n = 122$ sous la forme $n = \epsilon p^s + q + 2m$ avec s , q et $2m$ définis comme ci-dessus.

$$\begin{aligned} n = 122 &= 4 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 2, \quad (\text{décomposition de } n=122 \text{ en base } 5) \\ &= \{2 + 2(2 \cdot 5) + 2(2 \cdot 5^2)\} \\ &= 2m. \end{aligned}$$

Proposition 2.7.1 *Le polygone de Newton de $H_n(x)$ s'obtient par juxtaposition des polygones de Newton de $H_{p^s}(x)$, $H_q(x)$ et $H_{2m}(x)$.*

Plus précisément, on a la situation suivante.

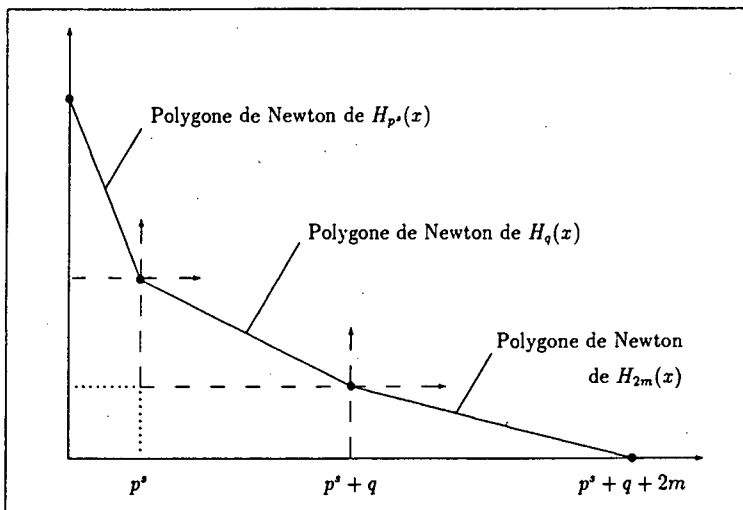


fig. 2.7.1: Polygone de Newton de $H_{p^s+q+2m}(x)$.

La preuve de la proposition 2.7.1 faisant appel à des méthodes déjà présentée dans ce chapitre, nous en faisons grâce au lecteur. Néanmoins, vérifions sa véracité sur l'exemple suivant.

Exemple. - Prenons $p = 5$ et $n = 5^0 + (5^1 + 5^2) + (2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2) = 91$.
Alors la table suivante

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$ord_5 h_i^{91}$	11	12	11	11	11	10	11	10	10	10	9	10

i	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47
$ord_5 h_i^{91}$	8	8	8	7	8	7	7	7	6	8	7	7

i	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71
$ord_5 h_i^{91}$	7	5	6	5	5	5	4	5	4	4	4	3

i	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91
$ord_5 h_i^{91}$	4	2	2	2	1	2	1	1	1	0

permet de construire le polygone $PN(H_{91}(x); 5)$, (cf. fig. 2.7.2).

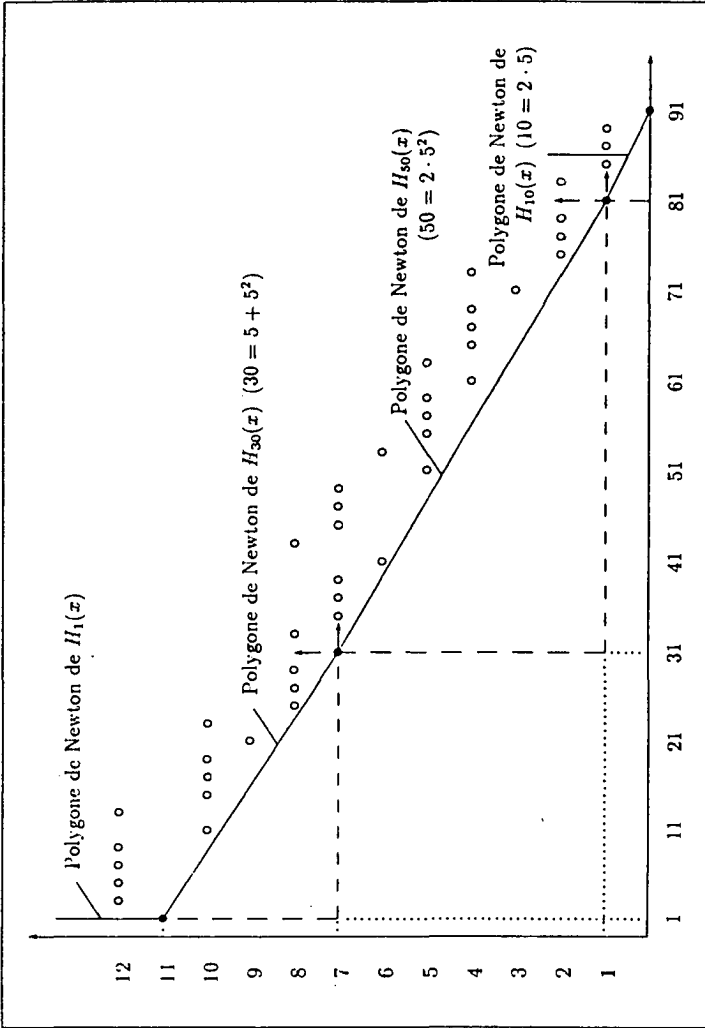


fig. 2.8.1

Chapitre 3

POLYNOMES DE LEGENDRE

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1.1 On définit la suite des polynômes de Legendre ¹ $(P_n(x))_{n \geq 0}$ par la formule de récurrence

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x), & n \geq 1; \\ P_0(x) = 1, P_1(x) = x. \end{cases}$$

Les propriétés suivantes résultent immédiatement de cette définition (cf. [6]).

1. $P_n(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$ pour tout nombre premier p impair.
2.
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv n(2)}}^n (-1)^{\frac{n-k}{2}} \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \binom{n+k}{k} x^k$$
$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv n(2)}}^n (-1)^{\frac{n-k}{2}} \ell_k^n x^k.$$
3.
$$P_n(1+2t) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} t^k$$
$$= \sum_{k=0}^n b_k^n t^k.$$

Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{cases} (p-1) \operatorname{ord}_p \ell_k^n = S_p\left(\frac{n-k}{2}\right) + S_p\left(\frac{n+k}{2}\right) + S_p(k) - S_p(n+k), & (k \equiv n \pmod{2}); \\ (p-1) \operatorname{ord}_p b_k^n = 2S_p(k) + S_p(n-k) - S_p(n+k). \end{cases}$$

¹Adrien Marie Legendre (1752-1833)

3.2 Polygone de Newton de $P_n(1+2t)$ pour $p=2$

Cette section s'inspire de l'article [10] de J.H. Wahab.

Proposition 3.2.1 Pour $p=2$ et $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_m}$, $k_1 > k_2 > \dots > k_m$,

les points $(0,0)$, $(2^{k_1},1)$, $(2^{k_1}+2^{k_2},2)$, \dots , (n,m) sont les sommets du polygone de Newton associé au polynôme de Legendre $P_n(1+2t)$.

Avant de démontrer cette proposition, testons sa validité sur quelques exemples.

Exemple 1. - Si $n=2$, alors le polynôme $P_2(1+2t) = 1+6t+6t^2$ donne lieu au polygone $PN(P_2(1+2t); 2)$ représenté ci-dessous.

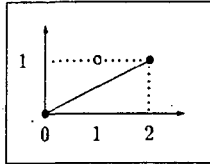


fig. 3.2.1

Exemple 2. - Le tableau suivant traite le cas de $n=6=2^1+2^2$,

i	0	1	2	3	4	5	6
$ord_2 b_i^6$	0	1	2	4	1	2	2

d'où on tire la construction de $PN(P_6(1+2t); 2)$, (fig. 3.2.2).

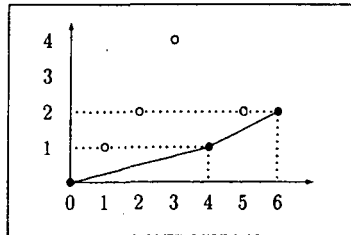


fig. 3.2.2

Exemple 3. - Finalement, la figure 3.2.3 représente le polygone de Newton de $PN(P_{14}(1+2t); 2)$ (fig. 3.2.3), correspondant donc au cas $n=14=2^1+2^2+2^3$.

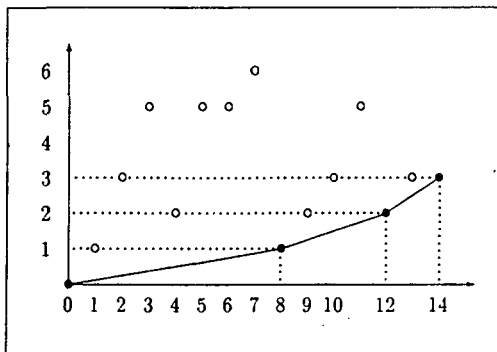


fig. 3.2.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$ord_2 b_i^{14}$	0	1	3	5	2	3	3	6	1	2	3	5	2	3	3

Démontrons maintenant la proposition 3.2.1.

Démonstration de la proposition 3.2.1. - Pour $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$, ($k_1 > k_2 > \dots > k_m$), et $k = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_i}$, ($i < m$), on a

$$S_2(k) = i \text{ et } S_2(n - k) = m - i.$$

De l'écriture

$$n + k = 2k + (n - k),$$

il ressort que

$$S_2(n + k) = S_2(2k) + S_2(n - k) = S_2(k) + S_2(n - k).$$

et ainsi

$$\begin{aligned} ord_2 b_k^n &= 2S_2(k) + S_2(n - k) - S_2(n + k) \\ &= (2i) + (m - i) - (i + m - i) = i. \end{aligned}$$

Il suffit dès lors de montrer que $k = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_i}$ est le plus grand entier tel que $ord_2 b_k^n = i$.

Mais, si $r > k$, alors r s'écrit

$$r = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_i} + 2^\alpha + \dots \text{ et donc } S_2(r) > i.$$

D'autre part, comme $S_2(2r) = S_2(r)$, alors

$$\text{ord}_2 \binom{n+r}{2r} = S_2(r) + S_2(n-r) - S_2(n+r) \geq 0,$$

et ainsi

$$\text{ord}_2 b_r^n = 2S_2(r) + S_2(n-r) - S_2(n+r) \geq S_2(r) > i.$$

■

3.3 Polygone de Newton de $P_n(1+2t)$, $p \geq 3$

La propriété ultramétrique

$$|1+2t| = |t| \quad \text{si } |t| > 1,$$

permet d'écrire l'égalité

$$\{ |x| > 1 : P_n(x) = 0 \} = \{ |t| > 1 : P_n(1+2t) = 0 \}.$$

Dans cette section, nous rechercherons donc les modules $|t| > 1$ des zéros de $P_n(1+2t)$.

Afin d'étudier cette situation, décomposons l'entier n sous la forme

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p-1}{2} + \text{sgn}(\alpha_i) |\alpha_i| \right) p^i, & -\frac{p-1}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{p-1}{2} \\ &= \sum_{i \in M} \left(\frac{p-1}{2} - |\alpha_i| \right) p^i + \sum_{i \in N} \frac{p-1}{2} p^i + \sum_{i \in P} \left(\frac{p-1}{2} + |\alpha_i| \right) p^i; \end{aligned}$$

$$\text{avec } M = \{ i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = -1 \};$$

$$N = \{ i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = 0 \} = \{ i \geq 0 : \alpha_i = 0 \};$$

$$P = \{ i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = +1 \},$$

et considérons les deux cas particuliers suivants

- $M = \emptyset$;
- $N = \emptyset$.

Par exemple, pour $p = 5$, on écrit

$$\begin{aligned} n = 563 &= 3 + 10 + 50 + 500 \\ &= (2+1) + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + (2+2)5^3 \\ &= \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \frac{p-1}{2}p + \frac{p-1}{2}p^2 + \left(\frac{p-1}{2} + 2\right)p^3 \end{aligned}$$

si bien que

$$M = \emptyset; \quad N = \{1; 2\} \quad \text{et} \quad P = \{0; 3\}.$$

1. $M = \emptyset$

Supposons

$$n = \sum_{i=0}^N \left(\frac{p-1}{2} + \alpha_i\right) p^i \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha_i \leq \frac{p-1}{2}.$$

Avant de présenter la construction de $PN(P_n(1+2t); p)$, introduisons quelques définitions.

1. $i_1 = \max_{i \in P} i$;

$$i_j = \max_{i \in P_j} i \quad \text{avec} \quad P_j = P - \{i_1; i_2; \dots; i_{j-1}\}; \quad (P_1 = P)$$

2. $k_{i_0} = k_0 = \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p-1}{2} - \alpha_i\right) p^i$;

$$k_{i_j} = k_{i_{j-1}} + 2\alpha_{i_j} p^{i_j}$$

3. $\# : P \rightarrow \mathbf{N}; i \mapsto \#(i)$ telle que

$$\alpha_i > 0, \quad \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \dots = \alpha_{i+\#(i)-1} = 0, \quad \text{et} \quad \alpha_{i+\#(i)} > 0.$$

Remarque. Dans la situation qui nous occupe,

$$\# : P_2 \rightarrow \mathbf{N}; i \mapsto \#(i) = j - i$$

où $j \in P$ est le plus petit entier strictement supérieur à i ,
et $\#(i_1) = N + 1 - i_1$.

A ce stade, reprenons l'exemple où $p = 5$ et $n = 563$ afin d'expliciter les définitions présentées ci-dessus.

On obtient alors

$$i_1 = 3; i_2 = 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned} k_{i_0} &= \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) + \frac{p-1}{2}p + \frac{p-1}{2}p^2 + \left(\frac{p-1}{2} - 2\right)p^3 + \left(\frac{p-1}{2} - 2\right)p^4 \\ &= 1 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 61; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{i_1} &= k_{i_0} + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} \\ &= 61 + 2 \cdot 2 \cdot 5^3 = 561; \quad (\alpha_{i_1} = 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{i_2} &= k_{i_1} + 2\alpha_{i_2} p^{i_2} \\ &= 561 + 2 \cdot 1 \cdot p^0 = 563. \quad (\alpha_{i_2} = 1) \end{aligned}$$

Finalement, on a encore

$$\#(0) = 3 \text{ et } \#(3) = 1.$$

Lemme 3.3.1 *La famille des $(k_i)_{i \geq 0}$ définie sous 2. vérifie alors les égalités suivantes.*

1. $\text{ord}_p b_{k_0}^n = 0;$
2. $\text{ord}_p b_{k_i}^n = \sum_{k=1}^i \#(i_k).$

Preuve. Par construction

$$(n + k_0)_i = p - 1 = (n)_i + (k_0)_i, \quad i \geq 0;$$

$$(n - k_0)_i = 2\alpha_i = (n)_i - (k_0)_i, \quad i \geq 0$$

et donc

$$\text{ord}_p b_{k_0}^n = \frac{1}{p-1} \{2S_p(k_0) + S_p(n - k_0) - S_p(n + k_0)\} = 0.$$

La seconde partie du lemme se démontre par induction sur j .

Supposons $k = 1$ et rappelons que

$$k_{i_1} = k_{i_0} + 2\alpha_{i_1} p^{i_1};$$

$$k_{i_0} = \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p-1}{2} - \alpha_i \right) p^i.$$

Ainsi

$$(n - k_{i_1})_i = (n)_i - (k_{i_1})_i \quad i \geq 0;$$

$$(n + k_{i_1})_i = (n)_i + (k_{i_1})_i \quad i < i_1;$$

$$(n + k_{i_1})_{i_1} = (n)_{i_1} + (k_{i_1})_{i_1} - p;$$

$$(n + k_{i_1})_i = (n)_i + (k_{i_1})_i - (p-1) \quad i > i_1;$$

$$(n + k_{i_1})_{\#(i_1)+i_1} = 1.$$

S'ensuit alors, l'égalité

$$\text{ord}_p b_{k_{i_1}}^n = \frac{1}{p-1} \{2S_p(k_{i_1}) + S_p(n - k_{i_1}) - S_p(n + k_{i_1})\}$$

$$= \#(i_1) = \text{nombre de retenues dans l'addition } n + k_{i_1}.$$

Le pas d'induction s'effectuant de manière analogue, nous ne le détaillons pas ici.

Théorème 3.3.1 *L'enveloppe convexe des points*

$$(k_{i_0}; 0), (k_{i_1}; \sum_{k=1}^j \#(i_k)), \quad (j \geq 1),$$

fournit le polygone de Newton de $P_n(1+2t)$.

Démonstration. Nous allons montrer, par induction sur j , que

- $\text{ord}_p b_{k_{i_j}}^n = \sum_{s=1}^j \#(i_s), \quad (j \geq 1)$
- $\text{ord}_p b_{k_{i_j}+k}^n \geq \text{ord}_p b_{k_{i_{j+1}}}^n, \quad 0 < k < k_{i_{j+1}} - k_{i_j} \text{ et } (j \geq 1).$

L'égalité 1. résulte du lemme précédent.

Par ce qui concerne la seconde égalité, supposons $j = 1$ (ancrage), et montrons que

$$\text{ord}_p b_{k_{i_1}+k}^n \geq \text{ord}_p b_{k_{i_2}}^n.$$

Par construction, pour $0 < k = k_\ell p^\ell + k_{\ell+1} p^{\ell+1} + \dots + k_{i_2} p^{i_2} < 2\alpha_{i_2} \leq p-1$
 où $0 \leq k_i < p$, on a, d'une part

$$\begin{aligned} n + k_{i_1} + k &= (n + k_{i_0}) + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} + k \\ &= \sum_{i \geq 0}^N (p-1)p^i + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} + k \\ &= \sum_{i < \ell} (p-1)p^i + (k_\ell - 1)p^\ell + k_{\ell+1} p^{\ell+1} + \dots + k_{i_2} p^{i_2} + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} + p^{N+1} \end{aligned}$$

de sorte que

$$S_p(n + k_{i_1} + k) \geq S_p(n + k_{i_2}) + S_p(k);$$

d'autre part

$$S_p(n - k_{i_1} - k) \geq S_p(n - k_{i_1}) - S_p(k);$$

$$S_p(k_{i_1} + k) = S_p(k_{i_1}) + S_p(k),$$

ce qui prouve l'inégalité écrite plus haut.

Le pas d'induction s'établit de façon tout à fait analogue.

Remarque. Des égalités

$$\begin{aligned} n - k_{i_0} &= \sum_{i \in P} 2\alpha_i p^i; \\ k_{i_j} &= k_{i_0} + \sum_{s=1}^j 2\alpha_{i_s} p^{i_s}, \end{aligned}$$

il résulte que

$$S_p(n - k_{i_j}) = S_p(n) - S_p(k_{i_j}).$$

Comme conséquence immédiate du théorème 3.3.1, nous citons le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1 Si

$$\frac{\#(i_j)}{2\alpha_{i_j} p^{i_j}} \leq \frac{\#(i_{j+1})}{2\alpha_{i_{j+1}} p^{i_{j+1}}}$$

alors les points

$$(k_{i_0}; 0); (k_{i_j}; \sum_{k=1}^j \#(i_k)) \quad (j \geq 1)$$

sont les seuls sommets du polygone de Newton de $P_n(1+2t)$.

Avant de traiter le second cas particulier défini au début de cette section, examinons quelques exemples relatifs à la situation où n s'écrit

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)p + \frac{p-1}{2}p^2 + \cdots + \frac{p-1}{2}p^\alpha,$$

et où $\alpha \geq 2$ sera fixé de cas en cas.

La théorie exposée plus haut, prédit que les entiers

$$k_{i_0} = \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} - 1\right)p + \frac{p-1}{2}p^2 + \cdots + \frac{p-1}{2}p^\alpha;$$

$$k_{i_1} = k_{i_0} + 2p;$$

$$k_{i_2} = n,$$

vérifient les égalités

$$\text{ord}_p b_{k_{i_0}}^n = 0;$$

$$\text{ord}_p b_{k_{i_1}}^n = \alpha;$$

$$\text{ord}_p b_n^n = \alpha + 1.$$

Exemple 1. En prenant $p = 3$ et $\alpha = 2$ dans ce qui précède, c'est-à-dire

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)p + \frac{p-1}{2}p^2 = 17,$$

nous obtenons le polygone $PN(P_{17}(1+2t); 3)$ décrit par la figure suivante.

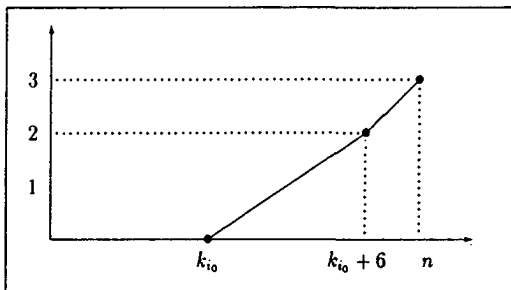


fig. 3.3.1

Remarque. Les sommets de $PN(P_{17}(1+2t); 3)$ ont pour abscisses k_{i_0} , k_{i_1} et n .

Exemple 2. Le choix $p = 3$ et $\alpha = 3$ implique $n = 44$ et il donne lieu au cas limite où le polygone $PN(P_{44}(1+2t); 3)$ se réduit à un segment critique, comme le montre la figure 3.3.2.

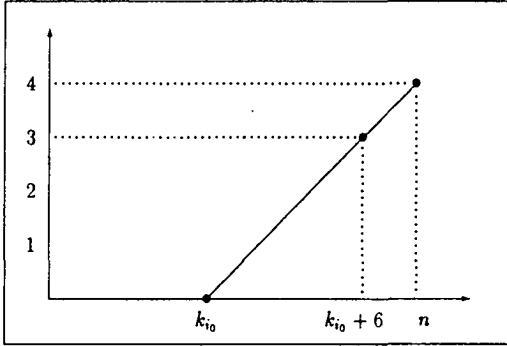


fig. 3.3.2

On constate ici que le point d'abscisse k_{i_1} est exactement situé sur l'unique segment de $PN(P_{44}(1+2t); 3)$.

Exemple 3. Si $p = 3$ et $\alpha = 4$ alors $n = 125$, et comme on l'observe sur la figure 3.3.3, le point d'abscisse k_{i_1} n'est plus sommet du polygone $PN(P_{125}(1+2t); 3)$.

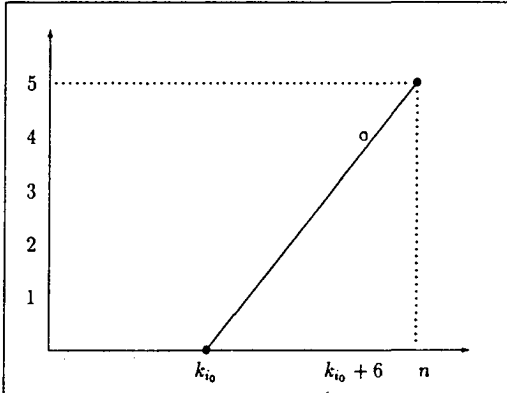


fig. 3.3.3

2. $N = \emptyset$

Théorème 3.3.2 *Les sommets du polygone de Newton de $P_n(1+2t)$ ont pour coordonnées*

$$(k_{i_0}; 0); \quad \text{et } (k_{i_1}; j) \quad (j \geq 1).$$

Preuve. Nous allons montrer, par induction,

$$1. \quad \text{ord}_p b_{k_{i_1}}^n = j$$

$$2. \quad \text{ord}_p b_{k_{i_1}+k}^n > j, \text{ c'est-à-dire que } k_{i_1} \text{ est le plus grand entier } k \text{ satisfaisant } \\ \text{ord}_p b_k^n = j.$$

Comme lors des démonstrations précédentes, nous nous contenterons d'établir l'ancrage.

Ainsi, supposons $j = 1$, et constatons, tout d'abord, que l'égalité

$$\begin{aligned} n + k_{i_1} &= (n + k_{i_0}) + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} \\ &= \sum_{i \in P} (p-1)p^i + 2\alpha_{i_1} p^{i_1} \\ &= \sum_{i \in P_2} (p-1)p^i + (2\alpha_{i_1} - 1)p^{i_1} + p^{i_1+1} \end{aligned}$$

entraîne que

$$S_p(n + k_{i_1}) = S_p(n) + S_p(k_{i_1}) - (p-1).$$

En outre, grâce à une remarque faite précédemment, on a

$$S_p(n - k_{i_1}) = S_p(n) - S_p(k_{i_1}),$$

si bien que

$$\text{ord}_p b_{k_{i_1}}^n = \frac{1}{p-1} \{2S_p(k_{i_1}) + S_p(n - k_{i_1}) - S_p(n + k_{i_1})\} = 1.$$

L'inégalité 2. se déduit de l'inégalité

$$S_p(n + k_{i_1} + k) < S_p(n + k_{i_1}) + S_p(k),$$

dont la démonstration s'établit en utilisant les mêmes arguments que ceux invoqués dans la preuve du lemme 3.3.1.

A ce stade, examinons quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 3$ et

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) p^2 = 20.$$

Les entiers

$$k_{i_0} = \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) p^2 = 0,$$

$$k_{i-1} = k_{i_0} + 2p^2 = 18,$$

$$k_{i_2} = n = 20,$$

vérifient alors l'identité

$$\text{ord}_p b_{k_j}^n = j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Par ailleurs, le tableau relatif aux coefficients de $P_{20}(1 + 2t)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{ord}_3 b_i^{20}$	0	1	1	1	2	2	1	4	4	1	2	2	2

i	13	14	15	16	17	18	19	20
$\text{ord}_3 b_i^{20}$	3	3	2	4	4	1	2	2

permet de construire le polygone $PN(P_{20}(1 + 2t); 3)$, qui confirme les conclusions du théorème 3.3.2.

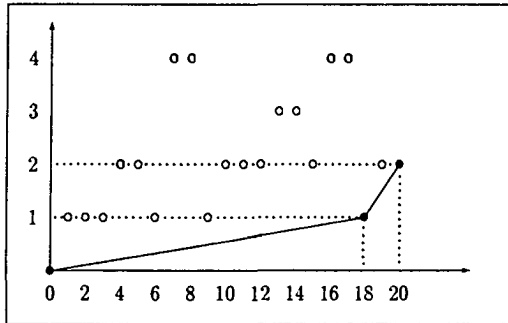


fig. 3.3.4

Exemple 2. Pour $p = 3$ et

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) p^2 + \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) p^3 = 74,$$

on montre facilement que les entiers

$$k_{i_0} = \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) + \left(\frac{p-1}{2} - 1\right)p^2 + \left(\frac{p-1}{2} - 1\right)p^3 = 0,$$

$$k_{i_1} = k_{i_0} + 2p^3 = 54,$$

$$k_{i_2} = k_{i_1} + 2p^2 = 72,$$

$$k_{i_3} = n = 74,$$

vérifient

$$\text{ord}_p b_{k_i}^n = j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

La théorie prédit que seuls les points d'abscisse k_i , sont des sommets du polygone $PN(P_{74}(1 + 2t); 3)$.

Construisons le tableau des ordres p -adiques des coefficients de $P_{74}(1 + 2t)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	0	1	1	1	2	2	1	5	5	2	3	3	3

i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	4	4	3	5	5	2	3	3	4	5

i	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	5	4	6	6	1	2	2	2	3	3

i	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	2	5	5	2	3	3	3	4	4	3

i	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	5	5	2	3	3	4	5	5	4	6

i	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	6	1	2	2	2	3	3	2	5	5	2

i	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
$\text{ord}_3 b_i^{74}$	3	3	3	4	4	3	5	5	2	3	3

Celui-ci fournit le polygone $PN(P_{74}(1 + 2t); 3)$ représenté dans la figure 3.3.5.

Ici encore, le théorème 3.3.5 trouve confirmation.

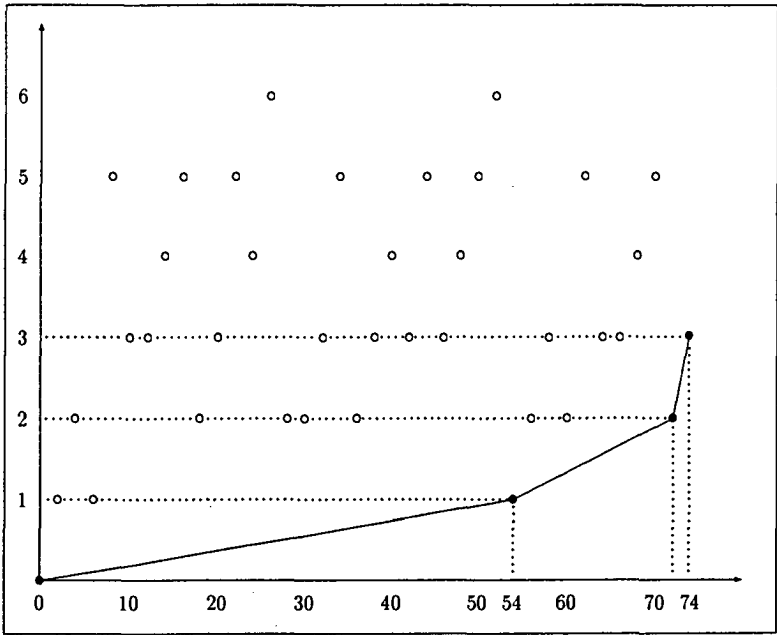


fig. 3.3.5

3. Cas général

Avant d'entreprendre une approche générale de la construction du polygone de Newton de $P_n(1+2t)$, nous allons nous restreindre à la situation particulière d'un entier n de la forme

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)p^2 + \frac{p-1}{2}p^3 + \dots + \frac{p-1}{2}p^\alpha$$

où $\alpha \geq 3$ est un entier que l'on fixera de cas en cas.

En l'occurrence, on a donc :

$$M = \{i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = -1\} = \{0; 1\};$$

$$N = \{i \geq 0 : \alpha_i = 0\} = \{3; 4; \dots; \alpha\};$$

$$P = \{i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = +1\} = \{2\},$$

et ainsi

1. $\text{ord}_p b_{k_{i_0}}^n = 0$ avec $k_{i_0} = \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) p^2 + \frac{p-1}{2} p^3 + \dots + \frac{p-1}{2} p^\alpha$;
2. $\text{ord}_p b_{k_{i_0} + (p-1)p}^n = 1$;
3. $\text{ord}_p b_{k_{i_0} + (p-1) + (p-1)p}^n = 2$;
4. $\text{ord}_p b_n^n = \alpha - 1$.

Examinons quelques exemples pour $p = 3$.

Exemple 1. Si $\alpha = 3$, alors

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) p^2 + \frac{p-1}{2} p^3 = 45$$

et on obtient le polygone $PN(P_{45}(1 + 2t); 3)$ décrit par la figure 3.3.6.

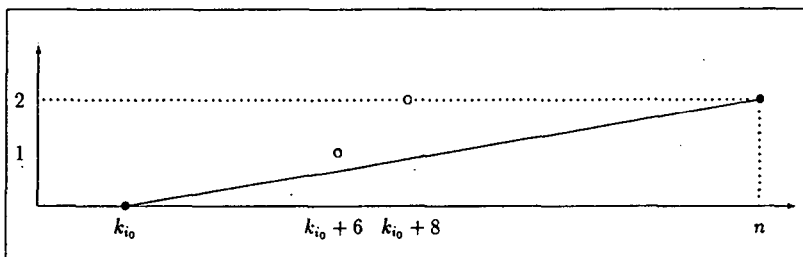


fig. 3.3.6

Remarque. Les deux couples de points $(k_{i_0} + (p-1)p; 1)$ et $(k_{i_0} + (p-1) + (p-1)p; 2)$ ne sont pas sommets de $PN(P_{45}(1 + 2t); 3)$.

Exemple 2. La figure 3.3.7 représente le polygone de Newton de $P_{369}(1+2t)$ correspondant donc au cas où $\alpha = 5$ et

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)p^2 + \frac{p-1}{2}p^3 + \frac{p-1}{2}p^4 + \frac{p-1}{2}p^5 = 369.$$

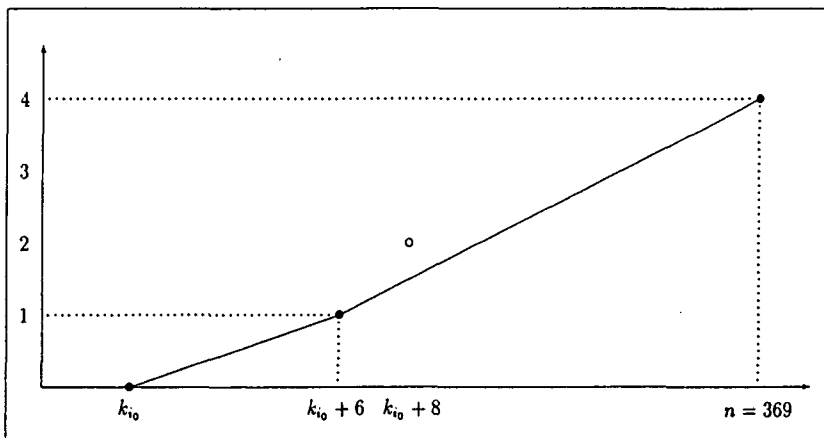


fig. 3.3.7

Remarque. Les sommets du polygone $PN(P_{369}(1+2t); 3)$ ont pour coordonnées $(k_{i_0}; 0)$; $(k_{i_0} + (p-1)p; 1)$ et $(n; 5)$, alors que le point $(k_{i_0} + (p-1) + (p-1)p; 2)$ se situe au-dessus des segments les reliant.

Exemple 3. Prenons $\alpha = 13$, si bien que

$$n = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right)p^2 + \frac{p-1}{2}p^3 + \dots + \frac{p-1}{2}p^{13}.$$

Comme le montre la figure 3.3.8, les couples $(k_{i_0}; 0)$; $(k_{i_0} + (p-1)p; 1)$; $(k_{i_0} + (p-1) + (p-1)p; 2)$ et $(n; 12)$ fourniront les sommets du polygone $PN(P_n(1+2t); 3)$.

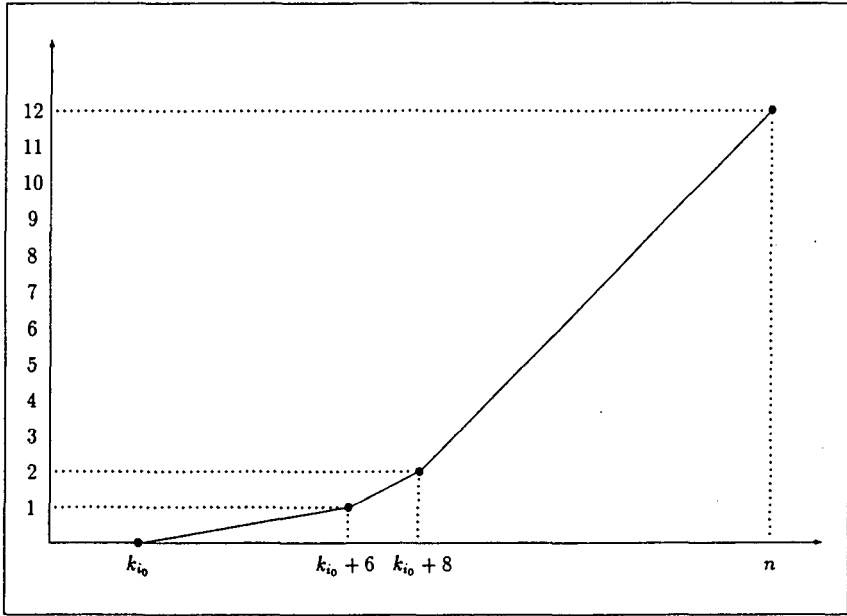


fig. 3.3.8

Contrairement aux cas particuliers exposés au début de cette section, les trois exemples précédents démontrent que les éléments d'indice

$$j \in M = \{i \geq 0 : \text{sgn}(\alpha_i) = -1\}$$

peuvent modifier la construction du polygone $PN(P_n(1+2t); p)$.

Le reste de cette section est consacrée à mesurer (sans démonstration) leur influence.

Pour

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i \geq 0} \left(\frac{p-1}{2} + \text{sgn}(\alpha_i) |\alpha_i| \right) p^i \\ &= \sum_{i \in M} \left(\frac{p-1}{2} - |\alpha_i| \right) p^i + \sum_{i \in N} \left(\frac{p-1}{2} \right) p^i + \sum_{i \in P} \left(\frac{p-1}{2} + |\alpha_i| \right) p^i, \end{aligned}$$

Ordonnons, de manière croissante, les éléments s_j de M , ($j \geq 1$), et associons-leur

$$k_{s_j} = \left(\frac{p-1}{2} + |\alpha_{s_j}| \right) p^{s_j}.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.3.3 *L'enveloppe convexe des points*

$$(k_{i_\ell}; \#(i_\ell)); \left(k_{i_{\ell-1}} + \sum_{j=1}^v k_{s_j}; \#(i_{\ell-1}) + v \right),$$

où $\ell \geq 1$ et $s_v < i_\ell$, fournit le polygone de Newton de $P_n(1 + 2t)$.

Remarque. Pour $\ell \geq 1$ et $s_v < i_\ell$, l'inégalité

$$k_{i_{\ell-1}} + \sum_{j=1}^v k_{s_j} < n$$

est vérifiée.

3.4 Polygone de Newton de $P_{p^s}(x)$

Proposition 3.4.1 *Le polynôme de Legendre $P_{p^s}(x)$ possède exactement $p^{i-1}(p-1)$ racines de module p -adique*

$$r_i = p^{\Delta_i}, \quad 1 \leq i \leq s \quad \text{où} \quad \Delta_i = -\frac{1}{p^{i-1}(p-1)}.$$

La proposition 3.4.1 se déduira de la configuration suivante, pour le polygone $PN(P_{p^s}(x); p)$.

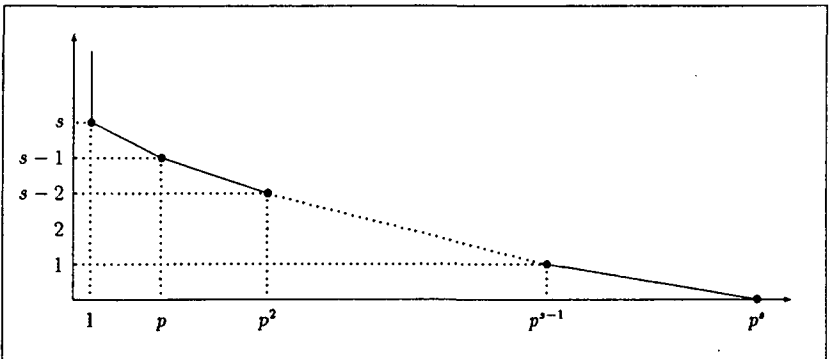


fig. 3.4.1

Comme dans les chapitres précédents, effectuons quelques tests.

Exemple 1. Prenons $p = 3$ et $s = 1$, donc $p^s = 3$.

Le polygone de Newton

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$$

est représenté dans la figure 3.4.2.

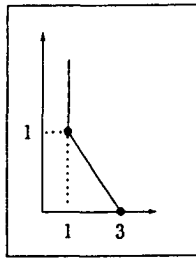


fig 3.4.2

Comme annoncé dans la proposition 3.4.1, il est constitué de deux segments; l'un vertical, de pente

$$\Delta_0 = -\infty;$$

l'autre oblique, de pente

$$\Delta_1 = -1/2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(p-1)}.$$

Exemple 2. Le tableau suivant répertorie les ordres p -adiques des coefficients de $P_3(x)$ correspondant donc au cas $p = 3$ et $s = 2$.

i	1	3	5	7	9
$ord_3 c_i$	2	1	2	2	0

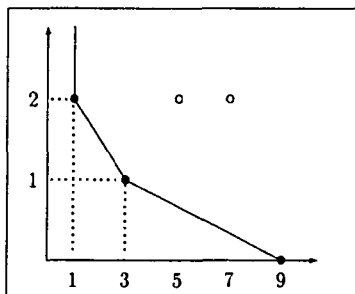


fig 3.4.3

Le polygone $PN(P_9(x); 3)$, fait apparaître trois segments de pente

$$\Delta_0 = -\infty;$$

$$\Delta_1 = -1/2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(p-1)};$$

$$\text{et } \Delta_2 = -1/6 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(p-1)}.$$

A nouveau, la proposition 3.4.1 est vérifiée.

Exemple 3. Le cas $p = 3$ et $s = 3$ est traité par le tableau suivant.

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$\text{ord}_3 \ell_i^{2^i}$	3	2	3	3	1	3	3	2	3	3	2	3	3	0

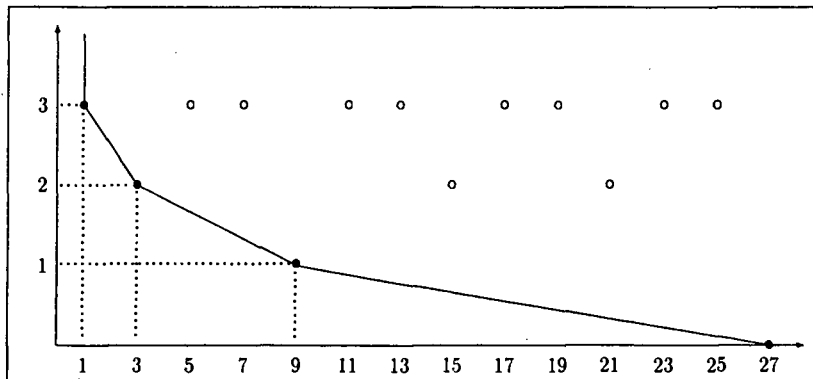


fig 3.4.4

Comme prévu, on observe quatre segments ayant pour pente

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= -\infty; \\ \Delta_1 &= -1/2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(p-1)}; \\ \Delta_2 &= -1/6 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(p-1)}; \\ \text{et } \Delta_3 &= -1/18 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p^2(p-1)}.\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 3.4.1. ² Nous allons montrer que

$$1. \text{ord}_p \ell_{p^s}^{p^s} = s - i;$$

$$2. \text{ord}_p \ell_{p^i+2k}^{p^s} \geq \text{ord}_p \ell_{p^i}^{p^s}, \quad 0 < 2k < p^{i-1}(p-1).$$

Dans un premier temps, la suite d'égalités

$$\begin{aligned}(p-1) \text{ord}_p \ell_{p^s}^{p^s} &= S_p \left(\frac{p^s - p^i}{2} \right) + S_p \left(\frac{p^s + p^i}{2} \right) + S_p(p^i) - S_p(p^i + p^s) \\ &= (s-i) \frac{p-1}{2} + (s-i-1) \frac{p-1}{2} + \frac{1+p}{2} - 1 \\ &= (s-i)(p-1)\end{aligned}$$

établit l'assertion 1.

Dans un second temps, on calcule

$$\begin{aligned}(p-1) \text{ord}_p \ell_{p^i+2k}^{p^s} - (p-1) \text{ord}_p \ell_{p^i}^{p^s} &= \\ &= S_p \left(\frac{p^s - p^i}{2} - k \right) + S_p \left(\frac{p^s + p^i}{2} + k \right) + S_p(p^i + 2k) - S_p(p^s + p^i + 2k) - \\ &\quad - S_p \left(\frac{p^s - p^i}{2} \right) - S_p \left(\frac{p^s + p^i}{2} \right) - S_p(p^i) + S_p(p^s + p^i)\end{aligned}$$

²On trouvera dans [11] une preuve moins technique utilisant les congruences dites "de Honda", que vérifient les polynômes de Legendre.

$$= S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{i-1} - k \right) + S_p \left(\frac{1+p}{2} p^{i-1} + k \right) - S_p \left(\frac{p-1}{2} p^{i-1} \right) + S_p \left(\frac{1+p}{2} p^{i-1} \right) \\ \geq 0$$

En effet,

$$S_p(a-b) \geq S_p(a) - S_p(b) \text{ et } S_p \left(\frac{1+p}{2} p^{i-1} + k \right) = S_p \left(\frac{1+p}{2} p^{i-1} \right) + S_p(k).$$

3.5 Polygone de Newton de $P_{p^s+p^t}(x)$, $s < t$

Proposition 3.5.1 Pour $p \geq 3$, le polynôme de Legendre $P_{p^s+p^t}(x)$ possède exactement

1. $(1+p)p^s$ racines de module p -adique

$$r_0 = p^{\Delta_0}, \quad \text{où } \Delta_0 = -\frac{1}{(1+p)p^s}.$$

2. Si, de plus $t-s > 1$, alors s'ajoutent $(p-1)p^{s+j}$ racines, $(1 \leq j \leq t-s-1)$ de module p -adique égal à

$$r_j = p^{\Delta_j}, \quad \text{où } \Delta_j = -\frac{1}{(p-1)p^{s+j}}.$$

Avant de démontrer cette proposition, nous nous proposons de vérifier sa validité sur quelques exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 3$ et $n = 3 + 3^2 = 12$.

Alors la table

i	0	2	4	6	8	10	12
$\text{ord}_3 \ell_i^2$	1	2	2	1	2	1	0

nous permet de construire le polygone $PN(P_{12}(x); 3)$, (fig. 3.5.1).

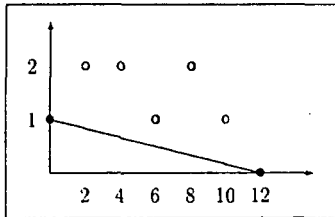


fig. 3.5.1

Comme pressenti, celui-ci est réduit à un segment oblique de pente

$$\Delta_0 = -1/12 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(1+p)}.$$

Exemple 2. - Prenons $p = 3$ et $n = 1 + 3^3 = 28$.

Du tableau suivant

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$ord_3 \ell_i^{28}$	3	3	2	3	3	1	3	3	2	3	3	2	3	3	0

on déduit le polygone $PN(P_{28}(x); 3)$, (fig. 3.5.2).

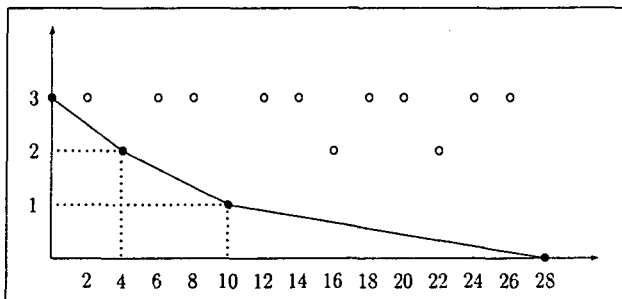


fig. 3.5.2

Comme annoncé dans la proposition 3.5.1, on observe trois segments de pentes

$$\Delta_0 = -1/4 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(1+p)};$$

$$\Delta_1 = -1/6 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(p-1)};$$

$$\Delta_2 = -1/18 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Exemple 3. - Prenons $p = 5$ et $n = 1 + 25 = 26$, et dressons le tableau des ordres p -adiques des coefficients de $P_{26}(x)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ord_5 \ell_i^{26}$	0	2	2	1	2	2	1	2	2	1	3

i	11	12	13	14	15	16	17	18
$ord_5 \ell_i^{26}$	3	2	3	3	2	3	3	1

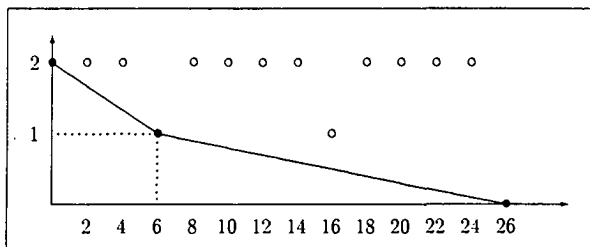


fig. 3.5.3

En accord avec la proposition 3.5.1, la figure 3.5.3 fait apparaître deux segments de pente

$$\Delta_0 = -1/6 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(1+p)};$$

$$\Delta_1 = -1/20 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(p-1)}.$$

Finalement, attachons-nous à la démonstration de la proposition.

Démonstration de la proposition 3.5.1.

Commençons par établir la première pente

$$\Delta_0 = -\frac{1}{(1+p)p^s}.$$

Grâce à la proposition 1 de l'introduction, il suffit de montrer que Δ_0 vérifie

$$-ord_p \ell_0^{p^s+p^t} = -ord_p \ell_{(1+p)p^s}^{p^s+p^t} + (1+p)p^s \cdot \Delta_0;$$

$$-ord_p \ell_0^{p^s+p^t} \geq -ord_p \ell_{2k}^{p^s+p^t} + 2k \cdot \Delta_0,$$

$$0 < 2k < (1+p)p^s.$$

Tout d'abord on a

$$\begin{aligned}
 & -(p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{(1+p)p^s}^{p^s+p^t} + (p-1)(1+p)p^s \cdot \Delta_0 = \\
 & = -S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} + \frac{1+p}{2} p^s \right) - S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} - \frac{1+p}{2} p^s \right) - \\
 & \quad -S_p((1+p)p^s) + S_p((1+p)p^s + p^s + p^t) - (p-1) \\
 & = -S_p \left(p^s + \frac{p^{s+1}+p^t}{2} \right) - S_p \left(\frac{p^t-p^{s+1}}{2} \right) + S_p(p^s+p^t) - (p-1) \\
 & = -S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} \right) + \frac{p-1}{2} - 1 - S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} \right) + \frac{1+p}{2} - S_p(p^s+p^t) - (p-1) \\
 & = -2S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} \right) - S_p(p^s+p^t) \\
 & = -(p-1) \operatorname{ord}_p \ell_0^{p^s+p^t}.
 \end{aligned}$$

Ceci prouve bien la première assertion.

Par ailleurs, pour $0 < 2k < (1+p)p^s$, on calcule

$$\begin{aligned}
 & -(p-1) \operatorname{ord}_p \ell_0^{p^s+p^t} + (p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{2k}^{p^s+p^t} - (p-1)2k \cdot \Delta_0 = \\
 & = -2S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} \right) + S_p(p^s+p^t) + \\
 & \quad + S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} - k \right) + S_p \left(\frac{p^s+p^t}{2} + k \right) + S_p(2k) - S_p(p^s+p^t+2k) + \\
 & \quad + (p-1)2k/(1+p)p^s \\
 & = -2S_p \left(\frac{1+p}{2} p^s \right) + S_p(p^s) + S_p \left(\frac{1+p}{2} p^s - k \right) + S_p \left(\frac{1+p}{2} p^s + k \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +S_p(2k) - S_p(p^s + 2k) + (p-1)2k/(1+p)p^s \\
& \geq -2S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s\right) + S_p(p^s) + S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s - k\right) + S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s + k\right) + \\
& \quad +S_p(2k) - S_p(p^s + 2k)
\end{aligned} \tag{1}$$

Afin de démontrer la positivité du membre de droite de (1), considérons les deux cas suivants ($k = \sum_{0 \leq i \leq s} k_i p^i$)

- $k_s < \frac{p-1}{2}$
- $k_s = \frac{p-1}{2}$

Premièrement, supposons $k_s < \frac{p-1}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}
S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s + k\right) &= S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s\right) + S_p(k); \\
S_p(p^s + 2k) &\leq S_p(p^s) + S_p(2k),
\end{aligned}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \text{ord}_p \ell_0^{p^s+p^s} + (p-1) \text{ord}_p \ell_{2k}^{p^s+p^s} - (p-1)2k \cdot \Delta_0 \geq \\
& \geq -S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s\right) + S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s - k\right) + S_p(k) \geq 0.
\end{aligned}$$

Secondement, supposons $k_s = \frac{p-1}{2}$.

Alors ou bien $k = k_s p^s = \frac{p-1}{2}p^s$ et on obtient

$$\begin{aligned}
S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s + k\right) &= S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s\right) + S_p(k) - (p-1) \\
S_p(p^s + 2k) &= S_p(p^s) + S_p(2k) - (p-1)
\end{aligned}$$

ce qui se traduit sur l'égalité (1) par

$$\begin{aligned}
& -(p-1) \text{ord}_p \ell_0^{p^s+p^s} + (p-1) \text{ord}_p \ell_{2k}^{p^s+p^s} - (p-1)2k \cdot \Delta_0 \geq \\
& \geq -S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s\right) + S_p\left(\frac{1+p}{2}p^s - k\right) + S_p(k) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ou bien $k \neq k, p^s$ et on obtient

$$S_p \left(\frac{1+p}{2} p^s - k \right) \geq S_p \left(\frac{1+p}{2} p^s \right) - S_p(k) + (p-1)$$

ce qui prouve (1).

Pour montrer que

$$\Delta_j = -\frac{1}{(p-1)p^{s+j}}$$

est pente critique, il suffit de voir que Δ_j vérifie

$$\begin{aligned} -\text{ord}_p \ell_{(1+p^j)p^s}^{p^s+p^s} &= -\text{ord}_p \ell_{(1+p^{s+1})p^s}^{p^s+p^s} + (p-1)p^{s+j} \cdot \Delta_j; \\ -\text{ord}_p \ell_{(1+p^j)p^s}^{p^s+p^s} &\geq -\text{ord}_p \ell_{(1+p^s)p^s+2k}^{p^s+p^s} + 2k \cdot \Delta_j; \\ 0 < 2k < (p-1)p^{s+j}. \end{aligned}$$

D'une part, la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (p-1) \text{ord}_p \ell_{p^s+p^{s+j}}^{p^s+p^s} &= S_p \left(\frac{p^t - p^{s+j}}{2} \right) + S_p \left(p^s + \frac{p^{s+j} + p^t}{2} \right) + \\ &\quad + S_p(p^s + p^{s+j}) - S_p(2p^s + p^{s+j} + p^t) \\ &= S_p \left(\frac{p^t - p^{s+j+1}}{2} \right) + \frac{p-1}{2} + S_p \left(p^s + \frac{p^{s+j+1} + p^t}{2} \right) + \frac{p-1}{2} + \\ &\quad + S_p(p^s + p^{s+j+1}) - S_p(2p^s + p^{s+j+1} + p^t) \\ &= (p-1) \text{ord}_p \ell_{(1+p^{s+1})p^s}^{p^s+p^s} + (p-1) \end{aligned}$$

prouve 1.

D'autre part, pour $0 < 2k < (p-1)p^{s+j}$, on calcule

$$\begin{aligned}
 & -(p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{(1+p^s)p^s}^{p^s+p^t} + (p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{(1+p^s)p^{s+2k}}^{p^s+p^t} - (p-1)2k \cdot \Delta_j = \\
 & = -S_p\left(\frac{p^t - p^{s+j}}{2}\right) - S_p\left(p^s + \frac{p^{s+j} + p^t}{2}\right) - S_p(p^s + p^{s+j}) + S_p(2p^s + p^{s+j} + p^t) + \\
 & \quad + S_p\left(\frac{p^t - p^{s+j}}{2} - k\right) + S_p\left(p^s + \frac{p^t + p^{s+j}}{2} + k\right) + S_p(p^s + p^{s+j} + 2k) - \\
 & \quad - S_p(2p^s + p^{s+j} + p^t + 2k) + 2k/p^{s+j} \\
 & = -S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j}\right) - S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2} p^{s+j}\right) - S_p(p^s + p^{s+j}) + S_p(2p^s) + \\
 & \quad + S_p(p^{s+j} + p^t) + S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j} - k\right) + S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2} p^{s+j} + k\right) + \\
 & \quad + S_p(p^s + 2k) + S_p(p^{s+j}) - S_p(2p^s + 2k) - S_p(p^{s+j} + p^t) + 2k/p^{s+j} \\
 & = -S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j}\right) - S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2} p^{s+j}\right) + S_p(p^s) + \\
 & \quad + S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j} - k\right) + S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2} p^{s+j} + k\right) + \\
 & \quad + S_p(p^s + 2k) - S_p(2p^s + 2k) + 2k/p^{s+j} \\
 & = -S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j}\right) + S_p(2p^s) + S_p\left(\frac{p-1}{2} p^{s+j} - k\right) + \\
 & \quad + S_p(p^s + k) + S_p(p^s + 2k) - S_p(2p^s + 2k) + 2k/p^{s+j}.
 \end{aligned}$$

Mais, l'entier $2p^s + 2k$ étant pair, il en résulte l'égalité

$$S_p(2p^s + 2k) = S_p(p^s) + S_p(p^s + 2k) \quad (1)$$

Par ailleurs,

- ou bien $S_p(p^s + k) = S_p(p^s) + S_p(k)$, et on en déduit

$$S_p\left(p^s + k + \frac{1+p}{2} p^{s+j}\right) = S_p(p^s) + S_p(k) + S_p\left(\frac{1+p}{2} p^{s+j}\right). \quad (2)$$

• Ou bien $S_p(p^s + k) < S_p(p^s) + S_p(k)$, et on obtient

$$1. S_p\left(p^s + k + \frac{1+p}{2}p^{s+j}\right) \geq S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2}p^{s+j}\right) + S_p(k) - (j+1)(p-1);$$

$$2. S_p\left(\frac{p-1}{2}p^{s+j} - k\right) \geq S_p\left(\frac{p-1}{2}p^{s+j}\right) - S_p(k) + (j+1)(p-1),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S_p\left(p^s + k + \frac{1+p}{2}p^{s+j}\right) + S_p\left(\frac{p-1}{2}p^{s+j} - k\right) &\geq \\ &\geq S_p\left(p^s + \frac{1+p}{2}p^{s+j}\right) + S_p\left(\frac{p-1}{2}p^{s+j}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Fort des égalités (1), (2) et (3), on conclut que

$$-(p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{(1+p^s)p^s}^{p^s+p^s} + (p-1) \operatorname{ord}_p \ell_{(1+p^s)p^s+2k}^{p^s+p^s} - (p-1)2k \cdot \Delta_j \geq 0.$$

■

3.6 Polygone de Newton de $P_q(x)$

Proposition 3.6.1 Pour $p \geq 3$, le polynôme de Legendre $P_q(x)$ possède exactement

1. $(1+p)p^{\alpha_{0;2t-1}}$ racines de module p -adique valant

$$r_0 = p^{\Delta_{0;2t-1}}, \quad \text{où } \Delta_{0;2t-1} = -\frac{1}{(1+p)p^{\alpha_{0;2t-1}}};$$

2. $(p-1)p^{\alpha_{0;2t-1}+j}$ racines de module p -adique valant

$$r_j = p^{\Delta_j}, \quad \text{où } \Delta_j = -\frac{1}{(p-1)p^{\alpha_{0;2t-1}+j}}.$$

Testons cette dernière proposition sur deux exemples.

Exemple 1. - Prenons $p = 3$, $q = (1+3) + (9+27) = 40$.

De la table suivante

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$\operatorname{ord}_3 \ell_i^{40}$	2	2	1	4	4	2	3	3	2	2	2	1

i	24	26	28	30	32	34	36	38	40
$\operatorname{ord}_3 \ell_i^{40}$	4	4	1	2	2	1	1	1	0

résulte le polygone de Newton de $P_{40}(x)$.

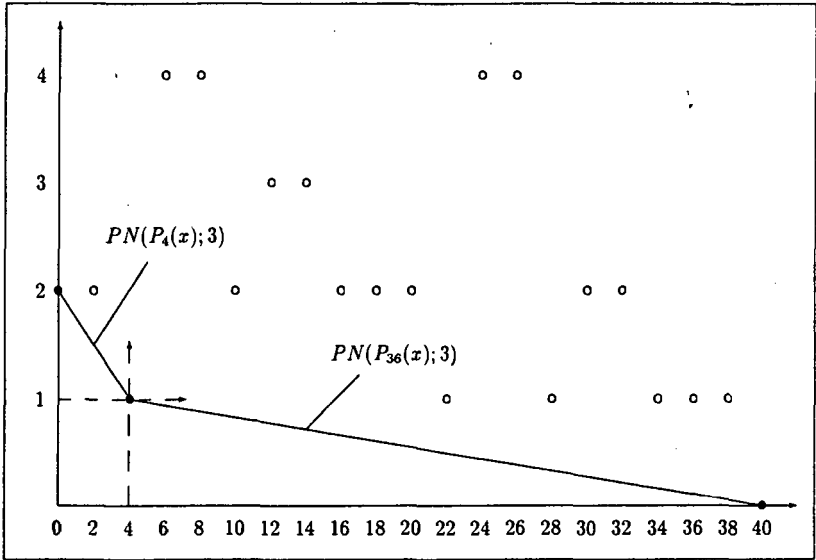


fig. 3.6.1

Comme le montre la figure 3.6.1, celui-ci est formé de deux segments obliques de pentes

$$\Delta_0 = -1/4 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{1+p};$$

$$\Delta_1 = -1/36 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{(1+p)p^2}.$$

Ceci confirme la proposition 3.6.1.

Exemple 2. - Si $p = 3$ et $q = (1 + 9) + (27 + 81) = 118$;

alors, on construit le polygone $PN(P_{118}(x); 3)$ à l'aide de la table suivante

i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$ord_3 \ell_i^{118}$	3	3	2	3	3	1	4	4	3	5	5	4	5

i	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
$ord_3 \ell_i^{118}$	5	2	4	4	3	4	4	3	4	4	2

i	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66
$ord_3 \ell_i^{118}$	4	4	3	3	3	2	3	3	1	4

i	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86
$ord_3 \ell_i^{118}$	4	3	5	5	4	5	5	1	3	3

i	88	90	92	94	96	98	100	102	104
$ord_3 \ell_i^{118}$	2	3	3	2	3	3	1	3	3

i	106	108	110	112	114	116	118
$ord_3 \ell_i^{118}$	2	2	2	1	2	2	0

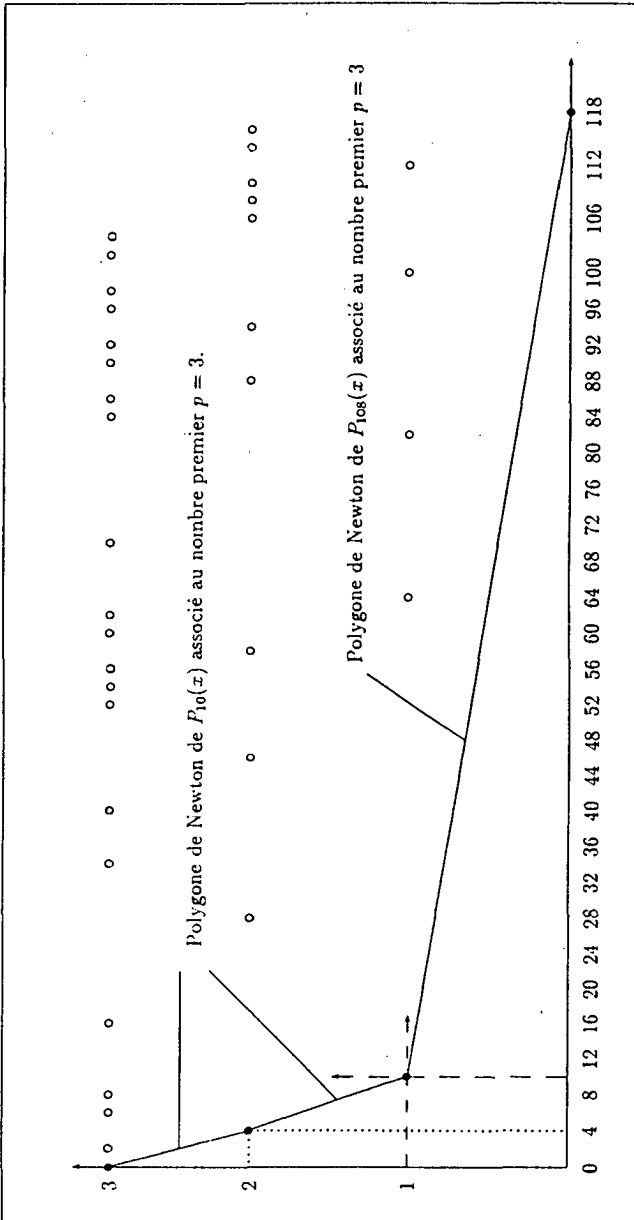


fig. 3.6.2

3.7 Polygone de Newton de $P_n(x)$

Théorème 3.7.1 *Pour un nombre premier p impair et un entier n quelconque que l'on écrit*

$$n = p^s + q + 2m, \quad \text{où les entiers } s; q \text{ et } 2m \text{ sont définis précédemment,}$$

le polygone $PN(P_n(x); p)$ s'obtient par "juxtaposition" des polygones $PN(P_{p^s}(x); p)$; $PN(P_q(x); p)$ et $PN(P_{n(1+2t)}(x); p)$.

Remarque. Les racines ayant module $r < 1$ (respectivement $r > 1$) sont décrites par les polygones $PN(P_{p^s}(x); p)$ et $PN(P_q(x); p)$ (respectivement $PN(P_{n(1+2t)}(x); p)$).

Quant aux racines de module $r = 1$, elles sont au nombre de $k_i - (p^s + q)$.

Exemple 1. Prenons $p = 3$ et

$$n = 3 + (3^2 + 3^3) + 2 = 41;$$

en l'occurrence $s = 1$, $q = 3^2 + 3^3$ et $2m = 2$.

A l'aide du tableau suivant

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$ord_3 \ell_i^{41}$	2	1	3	4	2	3	3	2	3	2	1	3

i	25	27	29	31	33	35	37	39	41
$ord_3 \ell_i^{41}$	4	1	2	2	1	2	1	0	3

on construit le polygone $PN(P_{41}(x); 3)$ décrit dans la figure 3.7.1.

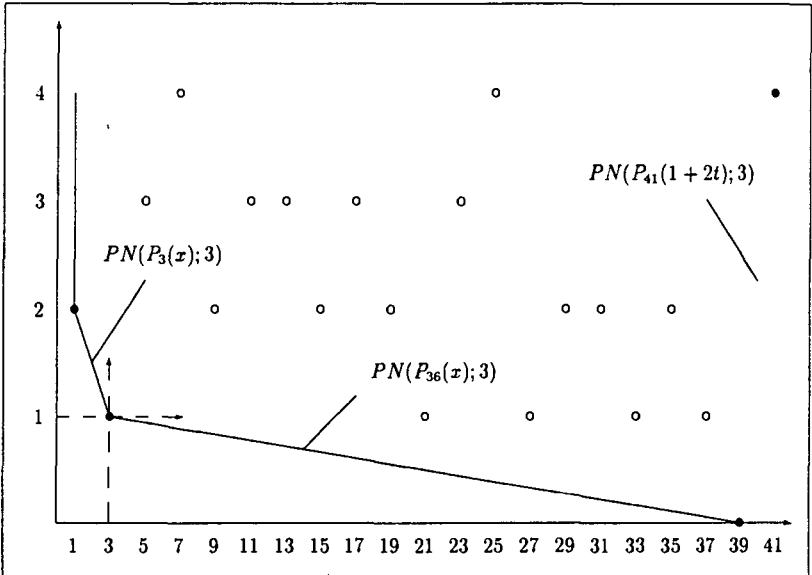


fig. 3.7.1

En écrivant $n = 41 = \left(\frac{p-1}{2} + 1\right) + \frac{p-1}{2}p + \frac{p-1}{2}p^2 + \frac{p-1}{2}p^3$, et en utilisant les résultats de la section 3.3 (cas particulier $M = \emptyset$), on montre que $PN(P_{41}(x); 3)$ est bel et bien le polygone représenté dans la figure 3.7.1.

Exemple 2. Prenons $p = 3$ et $n = 1 + (3^1 + 3^3) + 2 \cdot 3^2 = 49$, c'est-à-dire $s = 0$, $q = 3^1 + 3^3 = 30$, et $2m = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Les indications se trouvant dans la table ci-dessous nous permettent de construire le polygone $PN(P_{49}(x); 3)$, (fig. 3.7.2).

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$ord_3 \ell_i^{49}$	2	3	3	2	2	2	1	4	4	2	3	3

i	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
$ord_3 \ell_i^{49}$	2	1	1	0	5	5	3	4	4	3	3	3	2

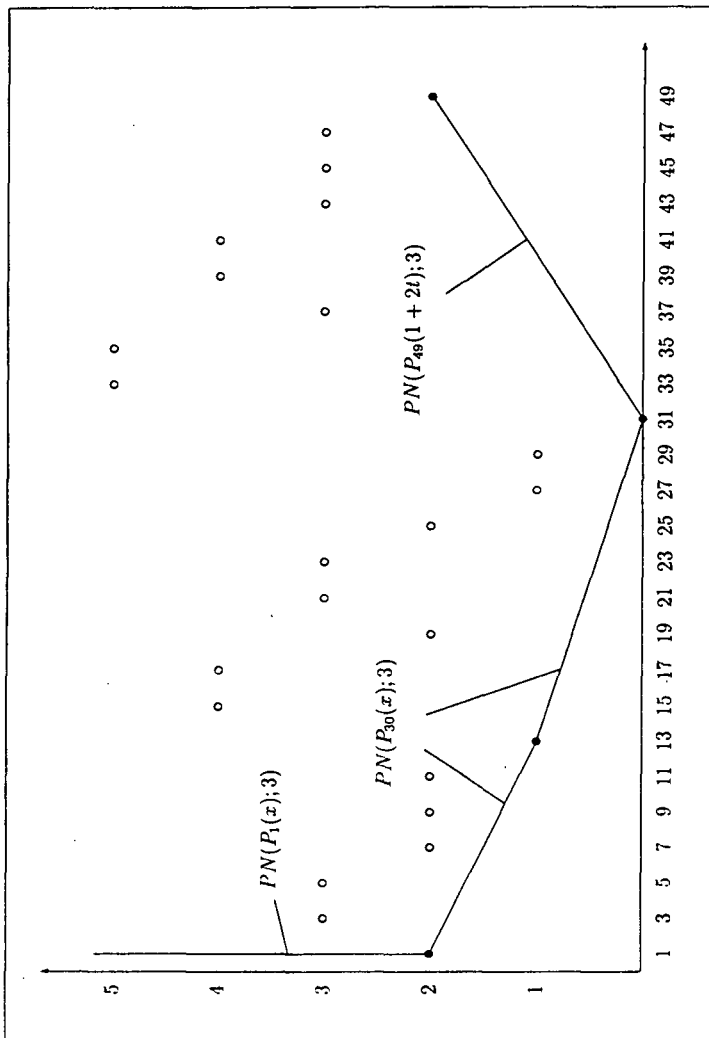


fig. 3.7.2

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
- [2] Y. Amice, *Les nombres p -adiques*, P.U.F., collection Sup., Paris, 1975.
- [3] G. Bachmann, *Introduction to p -Adic Numbers and Valuation Theory*, Academic Press, New York and London, 1964.
- [4] D. Barsky, *Congruences des coefficients des polynômes de Legendre*, Exposé présenté au colloque de l'Institut de mathématiques, Neuchâtel, 1989.
- [5] N. Koblitz, *P -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions*, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer Verlag, 1977.
- [6] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 52, Third Edition, Springer Verlag, 1966.
- [7] A. Robert. *Cours d'analyse ultramétrique*, Troisième cycle romand de mathématiques, Lausanne et Berne, 1990-1991.
- [8] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus - An introduction to p -adic analysis*, Cambridge studies in advanced mathematics 4, Cambridge University Press, 1984.
- [9] C. Vonlanthen, *Polygones de Newton*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 315, Série I, p. 873-876, 1992.
- [10] J. Wahab, *New cases of irreducibility for Legendre polynomials*, Duke Math. J. 19, 1952, p.165-176.
- [11] M. Zuber, *Propriétés de congruence de certaines familles classiques de polynômes*, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 315, Série I, p. 869-872, 1992.
- [12] M. Zuber, *Propriétés p -adiques de polynômes classiques*, Thèse, Université de Neuchâtel, 1992.