

ÉTUDE
SUR LA LOI DE HOOKE

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

OTTO ZUBER

DE WIL (ST-GALL)

INGÉNIEUR ÉLECTRICIEN DIPLÔMÉ DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE

BALE
IMPRIMERIE E. BIRKHÆUSER & Cie.
1933

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de MM. les professeurs A. JAQUERON et A. BERTHOUD, autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, février 1933.

Le doyen de la Faculté des sciences:

L-GUSTAVE DU PASQUIER.

A MES PARENTS

C'est grâce à

MONSIEUR LE PROFESSEUR A. JAQUEROD

que je suis à même de présenter cette thèse. Il m'en a suggéré l'idée et m'a témoigné, au cours de mes recherches, un intérêt dont je suis heureux de le remercier aujourd'hui.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma vive gratitude.

Bellinzona, le 13 février 1933.

Étude sur la loi de Hooke

par

O. Zuber.

Introduction.

L'objet de ce travail était d'étudier l'élasticité de traction en fonction de la charge spécifique pour de petites valeurs de cette dernière, et notamment de chercher à mettre en évidence, par une méthode statique, les écarts à la loi de Hooke.

Des recherches antérieures, effectués dans le même laboratoire par A. JAQUEROD et H. MÜGELI¹⁾, ont montré l'existence d'anomalies élastiques pour de très petites déformations; la méthode employée était une méthode dynamique basée sur l'emploi d'un ressort fait du métal à étudier. La loi de Hooke fut trouvée en défaut, dans la plupart des cas, dans la zone même où VON BACH croyait encore à l'existence de l'élasticité parfaite. La présente étude se rattache donc aux travaux dont il est fait mention. Il est inutile de souligner l'importance de ces questions: toute la théorie de l'élasticité est fondée sur la validité de la loi de Hooke pour de petites déformations, c'est à dire qu'on admet au moins

¹⁾ JAQUEROD et MÜGELI, *Helvetica Physica Acta*, vol. II (1929), p. 419. et vol. IV (1930), p. 3.

cette loi comme limite. On verra que cette extrapolation elle-même semble illégitime.

En 1906, GRÜNEISEN¹⁾ fit des déterminations du module de Young par trois procédés différents: par deux méthodes dynamiques utilisant des oscillations longitudinales et transversales et par l'application d'une méthode statique, basée sur l'emploi des interférences lumineuses. Le but de GRÜNEISEN était de comparer entre elles les valeurs obtenues par les trois méthodes en question.

Il trouva que la méthode statique et celle des vibrations longitudinales donnent la même valeur pour le module, avec un écart plus faible que les erreurs d'expériences. Le module obtenu par les vibrations transversales en diffère par contre, mais rarement de plus que 1,5%. Dans son travail, on ne trouve pas d'indication numérique sur la variation de l'élasticité en fonction de la tension.

DAROL et FROMAN²⁾ ont publié en 1930 un travail traitant de l'élasticité en fonction de la charge spécifique. Comme GRÜNEISEN, ils eurent recours aux interférences lumineuses pour mesurer l'allongement de leurs éprouvettes. Nous comparerons plus loin leurs résultats avec les nôtres.

Enfin récemment a paru un travail de TYTE³⁾ sur les anomalies élastiques; mais il s'occupe principalement des phénomènes plastiques qui accompagnent les déformations élastiques, c'est à dire de la variation en fonction du temps de la longueur d'un fil soumis à une traction.

Le problème à résoudre consiste à déterminer les allongements très faibles provoqués sur les éprouvettes ayant une certaine tension initiale variant de 1 à 150 kgs/cm², par l'application d'une charge auxiliaire constante de 1 kg. environ. Le dispositif que nous avons utilisé en vue de cette mesure très délicate comporte un jeu de 2 cylindres fixés respectivement aux deux extrémités de l'éprouvette à étudier. L'éprouvette cylindrique est placée verticalement; les 2 cylindres, isolés électriquement et dont les axes coïncident sensiblement avec celui de l'éprouvette, pénètrent l'un dans l'autre sans se toucher et forment par conséquent un condensateur. Si l'éprouvette s'allonge sous l'effet d'une variation de tension, les cylindres pénètrent moins l'un dans l'autre, la capacité du condensateur qu'ils réalisent diminue. Or

¹⁾ GRÜNEISEN, Annalen der Physik, vol. XXII (1907), p. 801.

²⁾ DAROL et FROMAN, Phys. Rev., vol. 35 (1930), p. 264.

³⁾ TYTE, (L. C.) Phil. Mag. X (1930) p. 1043 et XIII (1932), p. 49.

la forme cylindrique du condensateur, choisie ainsi intentionnellement, donne des variations de capacité proportionnelles aux déplacements de ses armatures, donc aux allongements de l'éprouvette. Si donc on mesure, par un moyen approprié, la variation de la capacité du condensateur, on aura du même coup mesuré l'allongement de l'éprouvette.

Deux circuits de haute fréquence superposés donnent des battements qu'on peut rendre audibles; ces battements «primaires» d'une fréquence de 384 hertz par exemple, étant superposés une deuxième fois avec les vibrations d'un diapason convenablement choisi, produisent à leur tour des battements «secondaires», qui sont eux-mêmes comparés avec ceux d'un pendule donnant 1,3 oscillations par seconde. Cette comparaison permet de régler les circuits à 0,1 hertz près.

L'un des circuits possède une fréquence constante tandis que l'autre, qui contient la capacité variable du condensateur cylindrique dont il vient d'être fait mention, a une fréquence variable avec la tension de la tige en expérience. Ce circuit se désaccorde dès qu'on suspend un poids supplémentaire à la tige; on doit donc, pour rétablir l'accord des circuits, compenser la diminution de capacité due à l'éloignement des cylindres par l'apport d'une capacité auxiliaire, en l'espèce celle d'un condensateur de mesure variable. La grandeur de la capacité auxiliaire introduite permet de calculer l'allongement de l'éprouvette.

La mise en œuvre de cette méthode exige une fréquence suffisamment stable dans les deux circuits oscillants, ce qui est délicat à obtenir. L'emploi d'un quartz piezo-électrique auquel on aurait pu songer tout d'abord pour réaliser cette stabilité n'était pas applicable, puisque l'un des deux circuits doit voir sa fréquence varier en cours d'expérience. L'emploi du quartz piezo-électrique dans le seul circuit à fréquence constante n'était pas indiqué non plus, car son emploi aurait créé une dissymétrie des deux circuits oscillants et cette dissymétrie aurait pu être la cause d'erreurs systématiques, puisque les perturbations extérieures (variation de température, etc.) auraient alors agi différemment sur les deux circuits et ne se seraient plus compensées et éliminées d'elles-mêmes.

Appareil et circuits.

L'appareil fut modifié à plusieurs reprises avant de donner de bons résultats. Les figures 1 et 2 le représentent schématiquement dans son exécution actuelle.

On voit, au milieu, la tige d'expérience ou éprouvette dont la longueur est de 260 mm. Son diamètre peut varier de 4 à

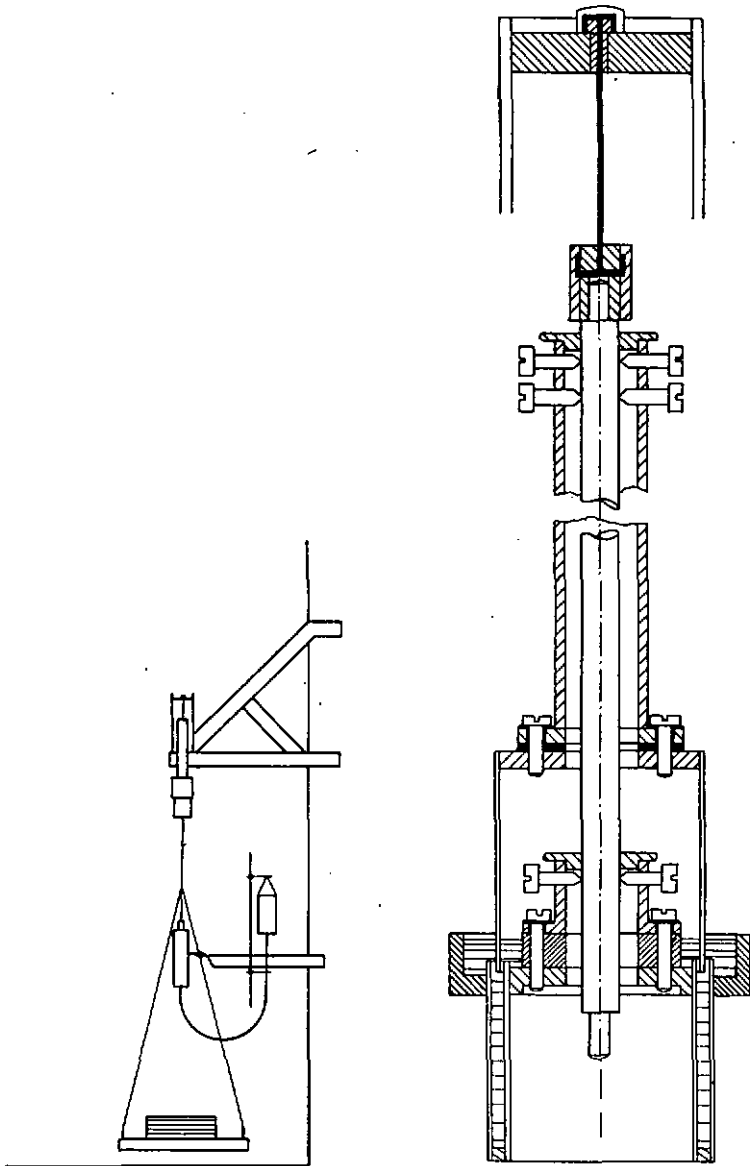


Fig. 1.

Fig. 2.

15 mm. Des essais effectués avec des diamètres plus faibles que 4 mm. n'ont pas donné de bons résultats. Pour assurer une ver-

ticalité parfaite l'éprouvette est librement suspendue à un câble flexible en acier. Au haut de l'éprouvette est bloqué avec des vis l'un des cylindres qui plonge entre deux autres cylindres fixés à la partie inférieure de l'éprouvette.

On peut, au moyen d'une vis de réglage, régler la hauteur de pénétration mutuelle des cylindres.

Une des principales difficultés rencontrées fut le centrage relatif des cylindres formant les armatures du condensateur. En effet, le moindre déplacement des axes des armatures l'un par rapport à l'autre fait varier la capacité du condensateur et peut fausser les résultats.

L'espace annulaire compris entre les deux cylindres inférieurs est rempli d'huile de ricin qui a pour effet, d'une part d'augmenter la capacité du condensateur, puisque la constante diélectrique de cette huile est de 4,7 environ, d'autre part d'amortir fortement les oscillations transversales des cylindres grâce à la grande viscosité de l'huile. L'huile de ricin, qui possède une grande résistance électrique, ne se décompose que très lentement. Nous avons vérifié, pendant la durée de 2 mois, que la variation de la constante diélectrique de l'huile de ricin n'a pas atteint 1%.

Afin d'éviter un décentrage des cylindres lors de l'application ou de l'enlèvement de la surcharge de 1 kg., on a utilisé le procédé suivant: dans le prolongement de l'axe de la tige (fig. 1) se trouve un récipient fixe qui communique par un tube de caoutchouc avec un récipient mobile qui peut être levé ou descendu à volonté plus haut ou plus bas que le premier. Cet ensemble est rempli de mercure. Le récipient fixe contient un flotteur cylindrique pesant 1,1276 kg. qui, guidé par des coulisses ne peut se déplacer que dans le sens vertical. Pour appliquer la charge de 1,1276 kg. il suffit d'abaisser le récipient mobile, le mercure s'écoule et le poids est suspendu doucement à l'éprouvette sans choc et bien dans son axe. L'expérience a montré que ce dispositif ne provoque aucun décentrage observable des cylindres.

Deux circuits à haute fréquence ont été construits à peu près d'après le « Meissner'sche Rückkopplung ». Le circuit I, fig. 3, a une fréquence constante, tandis qu'on peut faire varier la capacité du circuit II en réglant l'un de ses trois condensateurs. 1 est le condensateur cylindrique de mesure, 2 est un condensateur de compensation et 3 est aussi un condensateur variable, dont la capacité varie de 0,3395 cm. par degré. On utilise le condensateur 3 seulement pour l'accord approximatif.

La fréquence a été calculée à l'avance. La self a un coefficient d'environ 50,000 cm. et la capacité totale du circuit I. a une valeur de 400 cm. environ.

La formule de Thomson donne:

$$\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C}} \sim 10^6 \text{ hertz} \quad (1)$$

ce qui correspond à une longueur d'onde de 300 m. Cette lon-

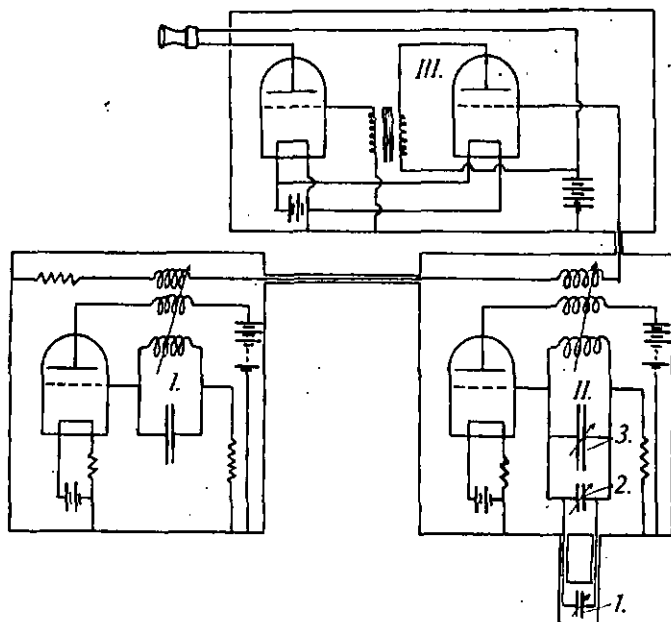


Fig. 3.

gueur d'onde a été vérifiée avec un onde-mètre, étalonné à l'aide des signaux de T.S.F.

PUNGS et BREUNER¹⁾ donnent la formule:

$$\Delta \nu = \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} - \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta C}{C} \right)^2 + \dots \right] \cdot \nu \quad (2)$$

pour exprimer la variation de la fréquence lorsque seule la capacité C varie. Si ΔC est très petit vis-à-vis de C il est permis de ne conserver que le premier terme de la série, ce qui donne:

$$\Delta \nu = \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \cdot \nu. \quad (3)$$

¹⁾ Zeitschr. f. Hochfrequenztech. 32 (1928), p. 185.

L'erreur qui résulte de cette simplification est, dans notre cas; de l'ordre d'un millionième.

La relation (3) montre que la sensibilité peut être augmentée en augmentant ΔC et r ou en diminuant C .

La valeur de ΔC a été augmentée en ajoutant le deuxième cylindre au bas de la tige et en remplissant la cuve d'huile de ricin. Par suite de cette modification, la sensibilité a été multipliée par le facteur 9,4.

La capacité C n'a pas pu être portée au-dessous de 400 cm.: d'abord parce que la capacité correspondant au zéro des 3 condensateurs parallèles dans le circuit II est trop grande, et ensuite parce que le rapport C/L ne doit pas devenir trop petit pour avoir encore des oscillations stables.

Les appareils sont installés dans un sous-sol. Les circuits sont solidement construits pour éviter le plus possible l'effet des vibrations du sol. La console à laquelle le condensateur cylindrique est suspendu est d'une construction très robuste, en fer en U de 8 cm. Elle est solidement scellée dans un pilier de maçonnerie (fig. 1).

Les circuits sont montés dans des cuves de béton reposant sur des bouchons en caoutchouc, afin de diminuer l'influence des trépidations. Les parois sont recouvertes de feuilles d'aluminium; un couvercle de même métal protège chaque cuve. Cette disposition met les circuits de hautes fréquences à l'abri de perturbations électriques; de plus elle diminue l'effet des variations de la température.

Les fils de communication sont fixés dans des tubes capillaires en verre entourés de forts tubes en métal reliés à la terre. Les contacts, notamment dans le circuit du filament des lampes à trois électrodes, sont tous soudés pour éviter le plus possible les variations des courants de chauffage et de tension de la plaque. Nous avons trouvé avantageux d'employer des accumulateurs de grande capacité et des lampes d'une puissance plutôt faible. Une résistance de 10 ohms dans le circuit du filament a donné de bons résultats. Une résistance dans le circuit de la grille stabilise beaucoup la fréquence par la diminution du courant de grille.

On est parvenu en définitive à ce résultat que la fréquence ne varie pas de plus de 15 hertz en 2 heures, ce qui est suffisant pour faire des mesures très exactes puisque chaque mesure proprement dite se fait en quelques secondes.

A l'aide du condensateur 3, on accorde les deux circuits de manière que le son produit par les battements « primaires » ait

une fréquence de 384 hertz, qui est celle du diapason utilisé (sol₃). Les circuits sont accordés lorsque

$$F_1 - F_2 = 384 \text{ hertz} = f,$$

F_1 = fréquence du circuit I,
 F_2 = fréquence du circuit II,
 f = fréquence du diapason (sol₃).

A ce moment, on lance un pendule faisant 1,3 oscillations par seconde. On règle alors la fréquence (battement primaires) à l'aide du condensateur 2 en augmentant la capacité jusqu'au moment où l'on obtient la coïncidence entre les battements «secondaires» d'une fréquence de 1,3 hertz (fréquence du pendule) produits par la superposition du son du diapason et celui du haut-parleur. Si cette coïncidence se produit sensiblement 8 fois de suite, le point de repère est établi avec une précision de 0,1 hertz. Il est nécessaire de faire cette opération très soigneusement pour être sûr que la fréquence du circuit III est toujours inférieure à celle du diapason.

Afin de calculer la capacité du condensateur cylindrique on a mesuré soigneusement les différents diamètres. Comme les cylindres ne sont pas absolument circulaires on a mesuré le diamètre en quatre endroits différents et pris la moyenne. Les écarts extrêmes ne dépassent pas 30 microns. Voici les valeurs moyennes :

Cylindre 1,	Diamètre extérieur	49,840 mm.
» 2,	» intérieur	51,107 »
» 2,	» extérieur	54,912 »
» 3,	» intérieur	56,689 »

La distance moyenne entre les cylindres 1 et 2 = 0,634 mm.
 » » » » » » 2 et 3 = 0,889 »

L'augmentation calculée de capacité pour 1 mm. de pénétration est égale à 3,5593 cm., le diélectrique étant l'air. En remplissant le condensateur avec de l'huile de ricin, comme cela était fait pour les mesures définitives, on obtient une capacité 4,7 fois plus grande.

Un condensateur de précision variable 2 a été construit pour compenser et mesurer les variations de capacité du condensateur cylindrique. On a pris la plus grande peine pour que sa capacité varie proportionnellement à l'angle de rotation. Il est construit comme les condensateurs employés en T.S.F., mais possède un seul disque tournant en laiton soigneusement rodé, d'une épaisseur de 7 mm. La distance entre le disque mobile et les disques fixes est de 8 mm. Sa capacité augmente linéairement avec l'angle de rotation; aucune anomalie n'a été observée.

Pour mesurer l'angle de rotation, on a utilisé la méthode de Poggendorff. Un miroir concave, fixé sur l'axe de l'armature mobile, projette sur une échelle placée à une distance d'environ 3 m. l'image du filament d'une lampe électrique. La position du spot peut être lue à un demi-millimètre près, ce qui donne une précision de 17 secondes d'arc. La variation de capacité correspondante est égale à 0,000206 cm., soit 0,0436 cm. pour 1°.

Etalonnage de l'appareil.

Tout d'abord, il a fallu déterminer la capacité du condensateur 1 en fonction de la longueur dont les cylindres pénètrent l'un dans l'autre. Cette détermination a été faite par la méthode très précise de la clé vibrante double¹⁾. Les nombres de la colonne 2 représentent l'augmentation de capacité pour une pénétration de 1 mm. Le fait qu'on ne trouve pas une proportionnalité parfaite pour des pénétrations des cylindres plus petites que 4 mm. est dû à l'influence des bords.

Variation de pénétration de à mm.		Capacité cm.
-3	-2	0,416
-2	-1	0,903
-1	0	1,67
0	+1	2,64
+1	+2	3,36
2	3	3,62
3	4	3,71
4	5	3,71
5	6	3,71

Le graphique de la fig. 4 montre qu'à partir de 3,5 mm. la capacité augmente proportionnellement à la pénétration.

Les mêmes mesures ont été répétées en introduisant de l'huile de ricin entre les cylindres; elles ont donné une augmentation de capacité de 17,6 cm. par mm. de pénétration, ce qui permet de déterminer la constante diélectrique de l'huile.

$$\epsilon = \frac{C_{\text{huile}}}{C_{\text{air}}} = \frac{17,6}{3,71} = 4,74.$$

Le condensateur de mesure permettant de mesurer une variation de capacité de 0,000206 cm, cela correspond à un allongement

¹⁾ A. JAQUEROD. Arch. des Sc. phys. et nat. de Genève, 44 (1917) p. 62.

de la tige de 0,0000117 mm., soit 11,7 millimicrons. La sensibilité de la méthode est donc du même ordre que celle des interférences.

Influence de l'excentricité.

La capacité d'un condensateur cylindrique varie pour tout déplacement quelconque de la position relatives des deux cylindres. Ce déplacement peut être décomposé selon deux directions, la direction axiale et la direction radiale, en admettant que les axes restent parallèles entre eux. La capacité augmente ou diminue

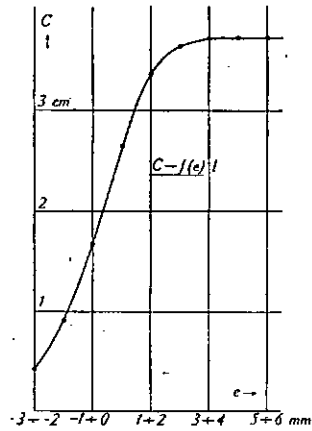


Fig. 4.

linéairement lors d'un mouvement axial et ceci même si les cylindres ne sont pas centrés. Un déplacement radial fait par contre varier la capacité d'après une loi plus compliquée. La formule suivante, prise dans l'ouvrage de KÜHLMANN, « Theoretische Elektrotechnik », permet de calculer la capacité d'un condensateur cylindrique en fonction des positions radiales des cylindres.

$$C = \frac{l}{2 \ln \frac{m_1}{m_2}} ; \text{ où } m_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - e^2 + \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 + e^2)^2 - 4e r_2^2}}{2 \cdot e \cdot r_1}$$

$$\text{et } m_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + e^2 + \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 + e^2)^2 - 4e r_2^2}}{2 \cdot e \cdot r_2}$$

$r_1, r_2,$ = rayons des cylindres.

e = excentricité des cylindres.

l = longueur dont les cylindres pénètrent l'un dans l'autre.

Si le déplacement radial e est très faible, cette formule peut se simplifier considérablement.

Posons :

$$r_2^2 - r_1^2 = a \quad 4 r_2^2 = b$$

il vient

$$\frac{m_1}{m_2} = y \frac{r_2}{r_1}; \text{ avec } y = \frac{a - e^2 + \sqrt{(a + e^2)^2 - be}}{a + e^2 + \sqrt{(a + e^2)^2 - be}}$$

négligeant les termes en e^4 et effectuant les approximations usuelles sur les radicaux :

$$y = \frac{2a + \left(\frac{2a-b}{2a} - 1\right)e^2}{2a + \left(\frac{2a-b}{2a} + 1\right)e^2}$$

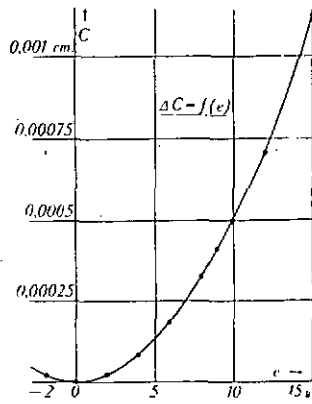


Fig. 5.

dans notre cas

$$a = 0,31975 \quad b = 26,12$$

donc

$$y = \frac{2a - 40,84 e^2}{2a - 38,84 e^2}$$

ou

$$y = \frac{1 - \frac{\alpha}{2a} e^2}{1 - \frac{\beta}{2a} e^2} \quad \alpha = 40,84$$

$$\beta = 38,84$$

ou encore

$$y = \frac{\beta - \alpha}{2a} e^2 + 1 = 1 - \frac{e^2}{\alpha}$$

Comme nous avons en définitive un condensateur cylindrique,

par suite de la présence de 3 cylindres, on aura deux termes semblables:

$$\frac{m_1}{m_2} = y \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{m_3}{m_4} = y' \frac{r_4}{r_3}.$$

$$C_1 = \frac{l}{2 \ln \frac{m_1}{m_2}}; \quad C_2 = \frac{l}{2 \ln \frac{m_3}{m_4}}$$

Substituant et tenant compte de la relation approchée $y = 1 - \frac{e^2}{a}$ il vient

$$C_1 = \frac{l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1} + 2 \ln \left(1 - \frac{e^2}{a}\right)}$$

et comme $\ln \left(1 - \frac{e^2}{a}\right) \sim -\frac{e^2}{a}$ si $\frac{e^2}{a}$ est très petit, on aura en définitif au même degré d'approximation

$$C_1 = \frac{l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} + \frac{2l}{a \left(2 \ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2} e^2. \quad (4)$$

La fig. 5 donne les valeurs numériques du second terme de cette équation. On aura, dans notre cas, pour une longueur $l = 0,1$ cm. des capacités:

$$C_1 = 1,99163 + 253,663 e^2; \quad C_2 = 1,56989 + 244,379 e^2.$$

Le tableau ci-dessous donne, en fonction de l'excentricité e , d'une part la capacité totale C en cm. et d'autre part la variation de capacité ΔC .

e cm.	$C_1 + C_2$ cm.	ΔC cm.
0,01	3,61132	0,04980
0,006	3,57944	0,01792
0,002	3,56351	0,00199
0,001	3,56201	0,00049
0,0006	3,56169	0,00017
0,0002	3,56154	0,00002
0,0000	3,56152	0,00000

Si les cylindres ne se déplaçaient pas dans le sens radial pendant les mesures, un décentrage initial ne jouerait aucun rôle, puisqu'il ne s'agit pas ici de mesures absolues du module de Young, mais seulement de mesures relatives, et notamment de constater

si ce module est constant ou variable. Mais le moindre décentrage pendant les mesures, provenant de tiges non droites ou d'une suspension du flotteur qui ne coïnciderait pas exactement avec l'axe vertical de la tige, suffit à provoquer un déplacement transversal des cylindres. Dans ce cas il se produit une variation parasite de la capacité, qui fausse les résultats et qui ne doit donc pas dépasser une certaine limite.

La dérivation de l'équation (4) donne l'inclinaison de la courbe (fig. 5):

$$\frac{dC}{de} = \frac{2l \cdot e}{a \left(2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right)^2} \quad (5)$$

A l'aide de cette équation (5) on peut calculer de quelle quantité dC varie la capacité pour un très petit déplacement radial de et ceci pour différentes positions excentriques initiales des cylindres e .

Voici les résultats de ce calcul par mm. de longueur du condensateur, avec l'air comme diélectrique.

e en microns	ΔC en em.	dC en centimètres		
		$de = 1 \mu$	$de = 0,1 \mu$	$de = 0,01 \mu$
2	0,00002	0,00001	0,000001	0,0000001
6	0,00018	0,00003	0,000003	0,0000003
10	0,00049	0,00005	0,000005	0,0000005
20	0,00199	0,00010	0,000010	0,0000010
60	0,01792	0,00030	0,000030	0,0000030
100	0,04980	0,00050	0,000050	0,0000050

Nous avons admis que cette variation de capacité dC ne doit pas dépasser 0,0002 em., ce qui correspond à la variation de capacité encore mesurable.

Les cylindres, dans le cas de nos mesures, pénétraient les uns dans les autres de 4 mm. environ, et l'air remplacé par l'huile de ricin de constante diélectrique 4,74 les données du tableau ci-dessus doivent être multipliées par 18,96.

Le centrage initial est obtenu à l'aide de rondelles percées, exactement calibrés pour chacun des diamètres des diverses tiges d'essai. Lorsque les cylindres sont bloqués en place, on enlève les rondelles de centrage, afin d'éviter tout frottement. Pour réduire au minimum l'influence d'une traction excentrique, tout l'appareil est librement suspendu, ce qui permet à l'ensemble de se déplacer, de sorte que la position radiale relative des cylindres ne subit alors pratiquement aucun changement.

Admettant un décentrage initial de 0,02 mm, soit 20μ , on voit que le décentrage produit par la traction excentrique du flotteur peut atteindre $0,1 \mu$, ce qui semble considérable étant donné les précautions prises. Pour augmenter la sécurité, une coulisse a été fixée au cylindre qui est vissé au sommet de l'éprouvette.

Elle est composée de trois vis qui sont légèrement serrées, ce qui produirait un frottement notable lorsque la tige s'allonge ou se raccourcit, si l'on avait affaire à des vis rigoureusement rigides. Pour éviter ce risque, ces vis ont été choisies assez longues par rapport à leur diamètre; elles se plient donc facilement et le frottement reste très petit.

Ces diverses considérations peuvent paraître quelque peu arbitraires. Elles sont cependant justifiées par les résultats expérimentaux et cela de la façon suivante: nous avons opéré, pour chacun des deux métaux étudiés, sur plusieurs tiges-éprouvettes de diamètres différents et en répétant chaque fois les mesures après réglage à nouveau. On peut donc admettre que l'excentricité initiale a pris toutes sortes de valeurs d'ailleurs voisines de zéro, et que les variations ΔC de capacité provoquées par les variations Δe d'excentricité produites par la mise en œuvre de la méthode ont été tantôt positives, tantôt négatives, sans prendre de signe ou de grandeur privilégiés. Si donc ces variations parasites de capacité avaient eu une influence importante sur les mesures, les courbes d'élasticité auraient varié d'allure d'une fois à l'autre. Nous avons au contraire constaté que, pour les mesures définitives, ces courbes conservaient une allure caractéristique et constante. Au début, au contraire, des variations capricieuses ont prouvé que les conditions voulues n'étaient pas remplies; de plus, nous avons observé que les tiges d'un diamètre inférieur à 4 mm. ne donnaient pas en général de résultats cohérents, c'est pourquoi nous les avons abandonnées. Il est probable que pour ces tiges minces, qui n'étaient pas très droites au début, des variations parasites de capacité se sont produites par suite du redressement progressif dû à la charge croissante qui leur était appliquée.

Influence de la contraction transversale.

Lorsqu'une tige soumise à une traction s'allonge, sa section diminue, et il faudrait, en toute rigueur, tenir compte de cette contraction dans le calcul du module de Young. GRÜNEISEN, dans le travail cité plus haut, s'est également préoccupé de la question. Il considère un facteur de correction f calculé par Lord

RAGLEIGH, par lequel on devrait multiplier le module pour tenir compte de cette contraction :

$$f = 1 + \frac{\mu^2 \cdot \pi^2 \cdot d^2}{8 \cdot l^2}$$

où μ est le coefficient de Poisson, d le diamètre et l la longueur de l'éprouvette en expérience.

Si l'on considère le cas le plus défavorable pour ce qui concerne nos mesures, avec $d = 0,9$ cm., $l = 19$ cm. et en admettant $\mu = 1/3$, on trouve pour ce facteur correctif la valeur $f = 1,000307$. Il est donc tout à fait négligeable, surtout si l'on pense que nos mesures, ainsi que nous l'avons répété, sont essentiellement relatives et ne prétendent pas aboutir à des mesures absolues de l'élasticité.

Influence de la température.

L'appareil est construit de telle manière qu'une variation de la température pendant les mesures n'a qu'une influence négligeable sur l'exactitude des mesures et sur leur sensibilité. En effet, les dilatations thermiques se compensent pratiquement d'elles-mêmes.

Si, au cours des essais, on opère avec une tige qui soit d'un autre métal que celui des cylindres, c'est de la différence seulement de leur coefficient linéaire de dilatation qu'il y aura lieu de tenir compte, et ceci pour une longueur de 20 cm.

Si, par contre, la tige est du même métal que les cylindres, la compensation est pratiquement parfaite.

Admettons, ce qui correspond à nos constatations, que la variation maximum de la température atteigne 1° en 6 heures : pendant les 20 secondes que dure une mesure, cette variation sera de $0,001^\circ$. On calcule alors que, pour la combinaison acier-cuivre, l'allongement maximum dû à un changement de température est de $8,10^{-8}$ cm., pour la combinaison acier-acier elle se réduit à $6,10^{-9}$ cm.

En définitive, l'allongement maximum que la température peut provoquer ne dépassera jamais le 1% de l'allongement total dû aux circonstances de l'expérience, il est donc pratiquement négligeable, nos mesures ne pouvant prétendre à une précision supérieure à un pour cent.

L'allongement de la tige est-il un phénomène adiabatique ou isothermique ?

Puisque nous ne cherchons pas à établir la valeur exacte du module de Young, et puisque nous mesurons les allongements toujours pour la même charge et après le même temps, il est sans importance de savoir si la variation de longueur de la tige a lieu adiabatiquement ou isothermiquement; ceci d'autant plus que le module adiabatique et le module isothermique de l'acier et du cuivre ne diffèrent entre eux que d'environ 0,22%. La variation de température provoquée par un allongement adiabatique est donnée par la formule thermodynamique:

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{l} \cdot T \cdot \frac{\alpha \cdot E_a}{S \cdot C_p}$$

où

- E_a = module d'Young adiabatique
- T = Température absolue
- ΔT = variation de température
- S = densité
- C_p = chaleur spécifique à pression constante
- α = coefficient de dilatation
- l = longueur de l'éprouvette
- $\Delta l_i; \Delta l_a$ = variation de la longueur de l'éprouvette (i = isotherme; a = adiabatique)

qui donne, dans le cas de l'acier, pour

$$T = 291^{\circ}; \quad l = 20 \text{ cm.} \quad \Delta l = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ cm.} \quad \Delta T = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta l_i}{l} = \frac{\Delta l_a}{l} \left(1 + \alpha T \frac{\alpha \cdot E}{S \cdot C_p} \right) = \frac{\Delta l_a}{l} 1,0021.$$

La différence entre une dilatation adiabatique ou isothermique n'est donc que de $2,1 \cdot 10^{-3}$, soit deux millièmes, sans influence pratique sur le résultat. Nous opérons d'ailleurs toujours de la même façon de sorte que les résultats comparatifs que nous avons en vue ne sont pas touchés par cette influence.

Marche d'une expérience.

La stabilisation des circuits à haute fréquence se fait progressivement, et prend une heure environ; on met donc les circuits sous tension une heure avant de faire les mesures. Ce laps de temps écoulé, on mesure les variations de longueur de l'éprouvette en y suspendant et détachant alternativement le flotteur (poids 1,1276 kgs.) ainsi qu'il a été expliqué, et cela 10 à 20 fois de suite.

Les positions de l'armature mobile du condensateur de compensation, correspondant aux variations de longueur de la tige, sont lues sur l'échelle (méthode de Poggendorff) et portées sur un graphique en fonction du temps. La figure 6 donne deux exemples: l'un correspondant à un cas où la stabilisation n'était pas encore parfaite, l'autre où elle était pratiquement obtenue. Sur ce graphique on lit directement la variation d'ordonnée pour un même instant, et l'on prend les moyennes, ce qui élimine

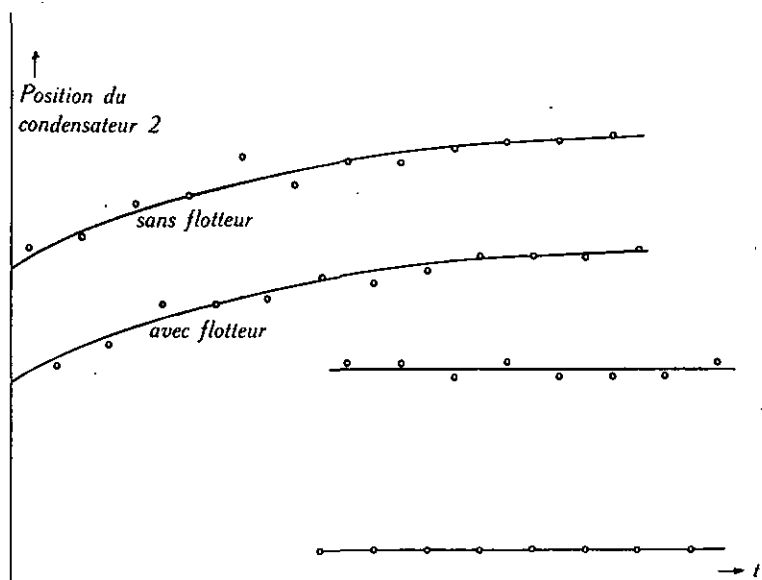


Fig. 6.

l'influence de l'inconstance éventuelle des circuits, et l'équation personnelle. Cette moyenne est ensuite réduite en longueur, et donne l'allongement à 10 millimicrons près.

Pour déterminer le module d'Young en fonction de la tension, on fait varier progressivement les poids sur le plateau, de 0 à 60 kgs., en allant de 5 en 5 kgs., ou parfois de $2\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$ kgs. En réalité, on ne part jamais d'une charge nulle, car le poids mort du plateau et des chaînes de suspension est de 1,3192 kgs. Pour chaque charge nouvelle, on opère comme ci-dessus.

Afin de déterminer avec plus de sûreté le début de la courbe d'élasticité, on opère, dans une première série d'expériences, par charges croissantes jusqu'à 10 kgs. et retour à zéro par charges décroissantes; dans une seconde série, la charge est portée pro-

gressivement à 60 kgs., avec retour éventuel à zéro. Comme on le verra, une hystérésis notable s'observe dans la plupart des cas. les points obtenus en descendant ne se placent pas sur la même courbe que ceux obtenus en montant.

Résultats expérimentaux.

Les mesures ont porté sur l'acier, à l'état écroui et recuit, et sur le cuivre électrolytique, à l'état écroui et recuit également. L'acier était de l'acier anglais en pieds, dit silversteel, composé de fer, carbone, tungstène et vanadium. Si nous avons choisi ce métal, c'est tout d'abord qu'il se trouve dans le commerce en tiges très bien calibrées et très droites. De plus, et surtout, les recherches de JAQUEROD et MÜOELI déjà citées avaient montré que pour l'élasticité de flexion et par une méthode dynamique, la loi de Hooke est obéie dans le cas de l'acier. Nous pensions donc contrôler l'exactitude de la nouvelle méthode à l'aide de ce métal. En fait, à part l'incertitude qui se produit toujours aux faibles tensions et les effets d'hystérésis, l'acier recuit a bien fourni des graphiques conformes à la loi de Hooke, et le contrôle attendu peut être considéré comme effectif.

Acier.

Pour l'acier non recuit nous avons trouvé (courbes 1, 2, 3, 4), fig. 7, que le module de Young diminue linéairement de 25 à 500 kgs/cm². Les mesures n'ont pas été poussées plus loin.

L'inclinaison de la droite n'est pas tout à fait la même pour des tiges différentes. En moyenne on peut dire que la diminution du module est 5% environ pour une augmentation de tension de 100 kgs/cm².

Pour 20 kgs/cm² environ le module de Young passe par un maximum.

Plus les tensions initiales sont faibles, plus il devient difficile de faire des mesures exactes. Il semble que dans cette zone de 3 jusqu'à 15 kgs/cm² l'acier est particulièrement plastique.

Nous avons dit que la réalisation d'une mesure dure environ 20 secondes; comme le mercure met environ 5 secondes pour s'écouler d'un récipient dans l'autre, il en résulte que la tige est toujours, pendant 15 secondes environ, soumise à la traction provoquée par le poids du flotteur. On constate que, si cette durée varie et est réglée de 11 à 60 secondes, les allongements

varient également. La sensibilité de notre appareil ne nous a pas permis d'étudier de plus près ce phénomène ni de déterminer la loi selon laquelle varient les allongements quand la durée de la tension varie.

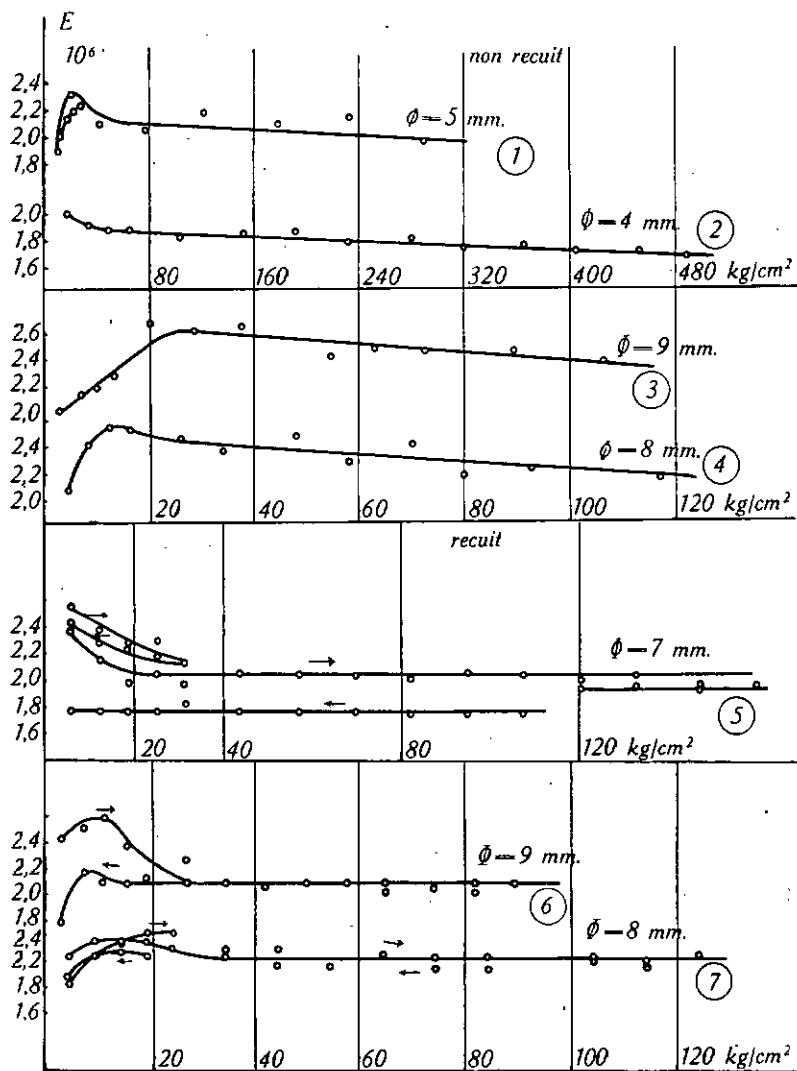


Fig. 7.

Acier recuit: Dans un four électrique, on a chauffé l'acier pendant 12 heures à 600° avec refroidissement lent. La température était contrôlée par un couple thermo-électrique.

Le recuit a notablement changé l'allure de la courbe. A partir de 20 kgs/cm^2 environ le module reste constant. La loi de Hooke est donc ici applicable (courbes 5, 6, 7, fig. 7).

Pour les tensions plus petites, on trouve des fluctuations du module. Le module de Young semble augmenter et il est même probable qu'il passe par un maximum pour une tension d'environ 10 kgs/cm^2 . La plus petite tension réalisée étant de 3 kgs/cm^2 le maximum trouvé n'est pas absolument certain.

Nous avons pu faire encore une autre observation intéressante: si la tension est alternativement augmentée et diminuée les deux courbes obtenues en montant et en descendant ne se recouvrent pas. Au retour (décharge) le module est plus faible qu'à l'aller (charge). Sur huit observations faites sur des tiges différentes

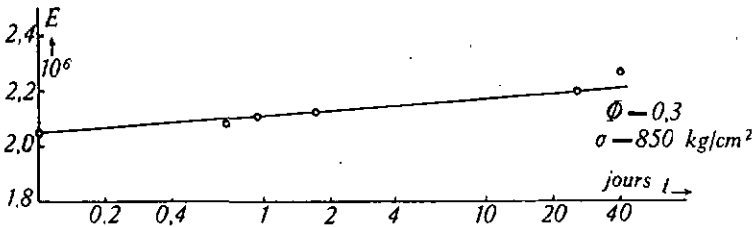


Fig. 8.

on a remarqué nettement six fois ce phénomène pour des tensions plus élevées que 20 kgs/cm^2 . Si on prend la moyenne des écarts pour les 8 courbes, on obtient une diminution de l'élasticité de 5% environ.

Pour l'acier recuit, nous avons en outre remarqué ce qui suit: une tige de $0,3 \text{ cm}$. de diamètre a été soumise à une tension de 860 kgs/cm^2 pendant 40 jours. Les premières mesures ont été faites en moyenne 7,5 minutes après la mise en charge et les dernières exactement 40 jours plus tard. Pendant ce temps le module a augmenté de 8% selon une courbe exponentielle, ainsi que le montre le graphique logarithmique fig. 8. Si on considère l'intervalle entre 1 et 40 jours, l'augmentation est encore de 5%. Nous n'avons pas eu l'occasion de répéter cet essai.

Cuivre.

Le cuivre s'écarte moins de la loi de Hooke que l'acier, du moins que l'acier *écroui*. Aux tensions élevées le module est pratiquement constant. Les mesures n'ont pas été poussées plus loin que des tensions d'environ 160 kgs/cm^2 . La partie initiale, correspondant aux faibles tensions, présente des anomalies assez considérables, avec l'indication d'un maximum nettement accusé.

Le cuivre recuit à 500° pendant 12 heures montre une élasticité à peu près constante à partir de 20 kgs/cm^2 (en montant). Il semble y avoir un maximum vers 10 kgs/cm^2 (courbes 11, 12, fig. 9).

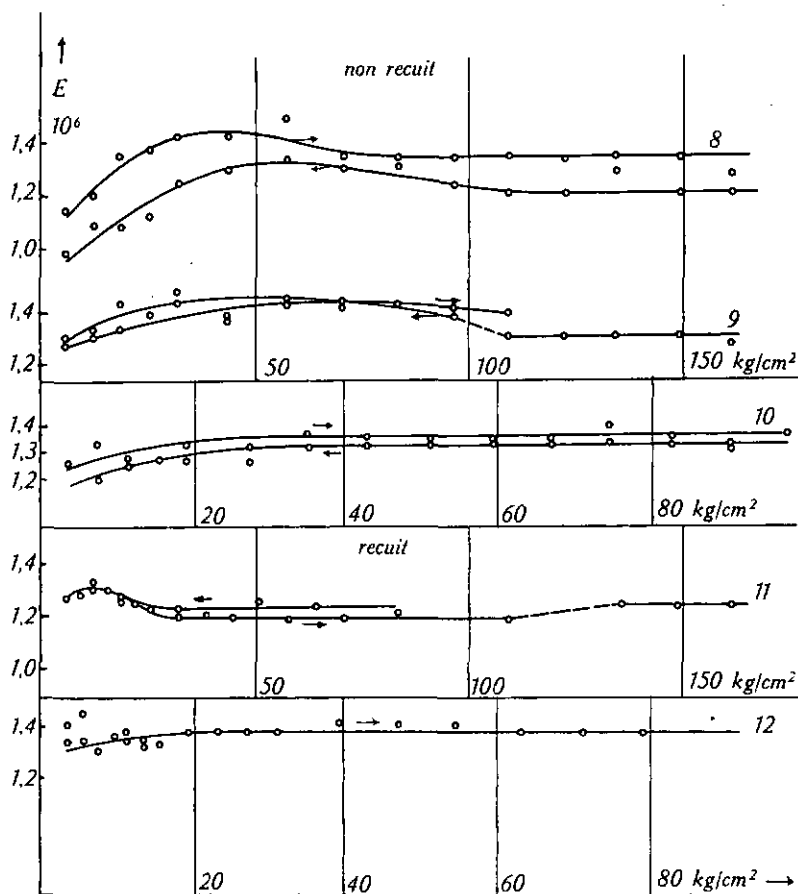


Fig. 9.

Diamètres des éprouvettes: 7 mm. pour les courbes 8, 9, 11.

9 mm. pour les courbes 10 et 12.

Nous avons constaté que le recuit aplatit les courbes, c'est à dire les fait tendre vers la droite représentative de la loi de Hooke.

Il semble évident que ce changement est lié à la variation de grosseur et du nombre des cristallites; il y aurait donc un grand intérêt à reprendre ces mesures et à les faire porter sur des métaux monocristallins. Nous espérons pouvoir prochainement compléter nos recherches dans ce sens.

Comparaison de nos résultats avec ceux d'autres auteurs.

Il est intéressant de remarquer que DAROL et FROMAN ont trouvé que, pour l'acier non recuit, le module diminue à partir de 15 kgs/cm² environ, alors que nous avons trouvé également une diminution, commençant vers 25 kgs/cm² environ.

L'inclinaison de nos courbes respectives est d'ailleurs à peu près la même.

DAROL et FROMAN ont, comme nous-même, trouvé que la courbe représentant l'élasticité possède un maximum pour différents métaux; pour eux ce maximum se situe vers 4 kgs/cm². Ils ont trouvé également, comme nous-même, que pour des charges de plus en plus petites l'élasticité diminue.

Nous rappelons que la méthode de mesure de DAROL et FROMAN était complètement différente de la nôtre; ils utilisaient, en effet, une méthode optique basée sur l'interférence des rayons lumineux, principe déjà appliqué par GRÜNEISEN.

Cette différence dans les méthodes d'investigations et la coïncidence des résultats obtenus donne, pensons-nous, de la valeur aux résultats des uns et des autres.

Enfin les mesures tout récentes de TYRE peuvent être rapprochées de nos résultats. Cet auteur ne s'est pas appliqué à déterminer la variation du module d'Young avec la charge spécifique. Il s'est voué tout spécialement à l'étude des effets d'hystérésis (elastische Nachwirkung) et de plasticité des métaux. Les courbes qu'il publie montrent que tous les fils métalliques soumis à une tension s'allongent en fonction du temps suivant une loi d'allure exponentielle, pour tendre finalement, dans la plupart des cas, vers une limite fixe. Ce phénomène n'a été poursuivi en général que sur un laps de temps inférieur à une heure; il est probablement en relation avec la variation du module en fonction du temps, variation que nous avons constatée durant plus d'un mois, dans un cas malheureusement unique.

Neuchâtel, Institut de physique de l'Université, 1932.
