

Publié dans Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques 44, e1-e12, 1983,  
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

DU STATUT DE OR DANS LES LIVRES DE MATHÉMATIQUES  
OU "LA RUÉE VERS L'OR"

par

H. ICART  
Enseignante en français  
langue étrangère

Y. GERBIER  
Maître assistant  
de mathématiques

Université de Pau

Enseignant à des étrangers de profil scientifique (futurs élèves de Mathématiques Supérieures) dans le cadre, d'une part de l'apprentissage du Français, d'autre part, d'une mise à niveau en Mathématiques, nous avons été confrontés à une problématique sémantique de OR.

Par expérience, nous avons constaté qu'enseignants scientifiques et enseignants de Français Langue Etrangère n'appréhendaient pas cet articulatoire de façons similaires.

OR, dans un contexte mathématique ne semblait pas devoir être appréhendé, sauf cas particulier, à travers les nuances d'opposition, de coïncidence ou d'objection véhiculées dans les contextes suivants:

- *Elle avait dit qu'elle viendrait aux aurores; or, il est midi.*
- *Le chien mordit furieusement le tibia. Or, il n'avait qu'une dent et il se la brisa.*
- *Tu veux être chef d'orchestre, or, tu es incapable de distinguer une harpe d'un violon.*

Il nous est apparu nécessaire de différencier les traitements de OR (et donc les manières de l'enseigner) sous peine de mettre nos étudiants en danger d'hypothèses sémantiques fausses, voire d'hypothèse sémantique tout court.

Aussi, nous sommes-nous ici proposé de réfléchir sur cette conjonction, la traquant dans un corpus limité volontairement au domaine des Mathématiques.

#### DESCRIPTION DU CORPUS

Les ouvrages dépouillés sont cités en annexe.

Les livres {1} à {7} sont des livres de cours. A l'exception de {1}, ce sont des livres destinés aux étudiants scientifiques du DEUG A des universités ainsi qu'aux élèves des classes

préparatoires (Mathématiques Supérieures et Spéciales). Mais ce sont des cours très complets, en ce sens qu'ils servent constamment de livres de référence quel que soit le niveau mathématique ultérieur. Ces cours sont plus ou moins concis (probablement plus pour des raisons de coût de l'ouvrage que pour des raisons de choix de l'auteur).

Les livres {8} et {9} présentent des corrections de problèmes de niveau DEUG A {8}, Agrégation {9}.

Enfin les livres {10} et {11} exposent des solutions d'exercices de niveau DEUG A.

Référence de l'ouvrage	Nombre de pages	Nombre de OR	On trouve donc un OR toutes les :	
Livres de cours	{1}	148	2	75 pages
	{2}	704	96	8 "
	{3}	630	60	11 "
	{4}	780	35	12 "
	{5}	640	42	22 "
	{6}	604	37	16 "
	{7}	358	17	21 "
Livres de problèmes	{8}	316	20	16 "
	{9}	220	20	12 "
Livres d'exercices	{10}	240	69	3 ou 4 pages
	{11}	340	38	9 "
TOTAL	4.980	436	11 pages	

Certains OR ont pu nous échapper; mais si on admet un taux d'erreurs de 10% (ce qui est beaucoup compte tenu du soin apporté), on a en moyenne une occurrence de OR toutes les 10 pages.

Tous les OR ont été trouvés dans des démonstrations. Les ouvrages qui contiennent le plus de démonstrations (livres d'exercices corrigés) sont donc ceux dans lesquels on a le plus de chance de rencontrer un grand nombre de OR. Si {11} n'en contient pas autant que {10} c'est partiellement dû au fait que dans {11}, il y a aussi des rappels de cours (donc sans démonstration correspondante). Par contre, dans {7}, qui est très concis, on trouve souvent: "le lecteur vérifiera que..." ou bien "la démonstration est laissée au soin du lecteur..." alors que {2} développe toutes ses démonstrations jusque dans le moindre détail. Bien que OR ne se trouve que dans des démonstrations, il n'apparaît pas comme "obligatoire" même lorsque les démonstrations sont intégralement faites confère {1}. Le nombre des démonstrations ne suffit donc pas pour expliquer le nombre d'occurrences de OR. De plus, à l'intérieur d'un même ouvrage, les OR ne sont pas en général répartis uniformément, on en trouve un certain nombre dans un chapitre, puis aucun dans le chapitre suivant.

#### L'ENVIRONNEMENT DE OR

En isolant les unités discursives qui marquent les étapes du raisonnement et en effaçant les groupes qui relèvent du domaine purement mathématique {noté ( ) ci-dessous} on fait apparaître l'ossature de la démonstration. En voici quelques exemples:

1/ On a ( ).

OR, tout ( ) admet ( ).

Donc ( ).

2/ Il faut prouver que ( ).

OR, conservant ( ), on a ( ).

On en déduit ( ).

3/ Pour que ( ), soit ( ), il faut et il suffit que ( ).

OR, d'après ( ).

On voit donc ( ).

4/ Prenons ( ).

OR, ( ) est ( ), parce que ( ).

A l'observation de ces quelques exemples, la démonstration s'organise (généralement) en trois périodes présentées dans une succession ordonnée.

On part d'un constat (on a) ou d'une condition à réaliser (il suffit de, il faut prouver que) pour aboutir à une conclusion. De l'un à l'autre, une étape de transition que OR introduit.

Considéré sous un angle descriptif, OR remplit bien la fonction de conjonction de coordination que lui assignent les grammaires normatives et descriptives ou les dictionnaires: elle réunit et agence. OR réunit puisque, introduisant un argument dans le procès de la démonstration, il l'ajoute au point de départ pour conduire à l'aboutissement. Il agence, car il ordonne la succession des étapes du raisonnement.

On retrouve ici, en cas particulier, les syllogismes quels que soient leur mode et leur figure (cf. W.V.O. Quine, Méthodes de logique). Les deux prémisses peuvent être reliées par OR et la conclusion peut être annoncée par DONC:

*Tous les hommes sont mortels*

*Or tous les grecs sont des hommes*

*Donc tous les grecs sont mortels.*

Ou encore:

*Aucun philosophe n'est méchant*

*Or quelques grecs sont philosophes*

*Donc quelques grecs ne sont pas méchants.*

Détaillons maintenant l'environnement de OR.

La première période

OR est toujours précédé d'une proposition (qui peut être un groupe de propositions). Cette proposition peut prendre plusieurs formes selon qu'elle est exprimée en langue naturelle,

en langage symbolisé ou par une formule: équation, inéquation...

Cette proposition peut être énoncée suivant plusieurs modes:

- Le mode du vrai:  
"on a...", "on voit que...", "on sait que...",...
- Le mode du nécessaire, ou le mode du suffisant, ou le mode du nécessaire et suffisant:  
"il nous faut considérer...", "il nous faut vérifier que..."  
"il suffit de prouver que...", "il suffit de vérifier que..."  
"il faut et il suffit que..." ainsi que "il reste à montrer que...",  
"on est ramené à prouver que...",...

La forme et le mode sous lesquels est énoncée la proposition de la première période ne dépendent que de la façon dont la démonstration a été construite par l'auteur, ils sont donc dus à des raisons techniques, commodité d'expression, rapidité d'expression, souci pédagogique...

#### La deuxième période

OR introduit explicitement une autre proposition<sup>1)</sup>.

Cette nouvelle proposition est énoncée de plusieurs façons, nous les avons classées ainsi:

Type 1: La proposition est énoncée sans aucune justification.

Type 2: La proposition est énoncée avec une "fausse" justification:

- ... "OR, il est immédiat que...", "OR, il est facile de voir..."
- ... "OR, ...visiblement...", "OR, l'hypothèse implique..."

---

1) Dans notre corpus, nous avons cependant trouvé des OR qui n'introduisaient aucune proposition explicite, il s'agit du groupe:

"OR CECI 

est faux
est impossible
est absurde
contredit

"

Les occurrences de OR CECI... sont faibles (moins 2%) attestées dans {3}, {10}, {11}. Ou alors "OR CECI {est + qualificatif} + {verbe}

éventuellement une justification". Dans la suite, sauf mention contraire, nous excluerons ce cas.

Type 3: La proposition est énoncée avec une justification "succincte": "OR, d'après (suivi d'une référence)...", "OR, on a vu que...", "OR, on sait par ailleurs (+ référence entre parenthèses) que...", "OR, par définition de..."

Type 4: La proposition est énoncée avec une justification "complète". "OR, puisque..., on a...", "OR,..., (+ parenthèse qui justifie)...", "OR,... { d'après ...", "OR, en faisant car parce que puisque ceci ou cela..., on a..."

La proposition de la deuxième période reprend explicitement un ou plusieurs des termes utilisés dans la proposition de la première période. De plus, elle est toujours brève, en ce sens qu'elle n'occupe rarement plus de deux lignes.

#### La troisième période

- Elle peut ne pas exister du tout (car évidente).
- Elle peut être extrêmement succincte et se réduire à un signe typographique tel que  $\square$ , ou à des abréviations C.Q.F.D. ou Q.E.D.
- Enfin elle peut être elle-même une autre proposition introduite par des marqueurs de conséquence tels que "d'où...", "donc...", "alors...", "finalement...", "par suite...", "par conséquent...", "ainsi...", "ceci prouve que...", "il en résulte que...", "il en découle que...", "on en déduit que...", "on obtient alors...". Elle peut également être énoncée sans marqueurs.

#### L'ANALYSE

- L'objectif de la partie de la démonstration directement concernée par OR est de faire passer de la proposition (notée dorénavant P) de la première période à la proposition (notée R) de la troisième période. Mais l'auteur ne peut déduire immédiatement

R de P; il va donc utiliser "un catalyseur": la propriété Q de la deuxième période, introduite par OR.

[L'expression catalyseur, si elle est parlante est trop générale, en ce sens qu'un catalyseur peut permettre la conjonction de deux éléments sans aucun rapport entre eux alors qu'ici, P et Q ont forcément des termes communs].

-D'où vient cette proposition Q ? La proposition introduite par OR est:

1/ soit un rappel, c'est-à-dire un résultat déjà acquis. Ce résultat peut être acquis depuis fort longtemps, depuis peu, ou même au cours de la démonstration étudiée; mais le lecteur n'a pas nécessairement ce résultat en mémoire, aussi l'auteur lui rappelle-t-il que...

Du point de vue des marques linguistiques, on a les types 1 ou 3 (cf. pp. 5-6).

2/ Soit une conséquence des données du problème, des hypothèses ou des résultats déjà obtenus. Mais cette conséquence n'avait pas encore été exprimée explicitement, car l'auteur n'avait vu ni nécessité ni intérêt à le faire (il ne s'agit en aucun cas d'un oubli). Donc, bien que l'auteur eût souvent pu écrire Q avant d'écrire P, il ne l'a pas fait, car cela n'aurait pas permis de poursuivre la démonstration.

Du point de vue des marqueurs linguistiques on a les types 1, 2 ou 4, (cf. pp. 5-6).

Enfin cette conséquence est "facile" à voir, à vérifier ou à mettre en évidence en exécutant tel ou tel acte.

Lorsque la conséquence n'est pas "facile" à voir, la démonstration est construite autrement, on peut démontrer au préalable la propriété Q (éventuellement sous forme d'un lemme) et on peut avoir alors un OR qui introduit une proposition "rappelant" ce lemme. Ceci montre que la nature de Q en tant que rappel ou conséquence est liée à la chronologie de la démonstration.

-Quelle interprétation sémantique donner à OR? Nous sommes tentés de dire aucune, car ce mot ne nous paraît pas avoir

une fonction sémantique autonome.

Dans les cas traités, la proposition qu'introduit OR renvoie à une notion intégrée consciemment ou non, mais qu'il est en tout cas possible et nécessaire de ressaisir ou saisir à ce moment-là de la démonstration. Ce sens de rappel, de mise en évidence, de conscientisation n'est pas contenu dans OR même, mais dans son environnement: d'après, puisque, visiblement...

- Du côté du lecteur que se passe-t-il? Le lecteur est rendu conscient d'un fait, sous la forme d'un rappel, d'une opération logique, ou d'une évidence. OR, selon l'environnement, prend l'un ou l'autre de ces traits, mais il n'agit pas par lui-même en tant que marqueur de rappel, mise en relation logique ou évidence. Il agit au plan de l'adjonction. Il adjoint (avec une connotation d'accentuation) à une proposition précédente un acte de prise en compte d'un fait, selon les modalités soulignées (rappel, etc.).

Mais OR n'est pas n'importe quel élément de coordination. Il n'est pas neutre. Nous reviendrons sur ce point.

- Quel schéma logique sous-jacent ? L'environnement de OR peut être schématisé de la façon suivante:

P OR Q DONC R

Comme nous l'avons déjà dit P et Q ont forcément des termes en commun; notons les X, nous avons alors un schéma plus détaillé : P(X,Y) OR Q(X,Z) DONC R(X,Y,Z)  
c'est-à-dire que la première proposition dépend de X et éventuellement d'autres termes Y, de plus on rappelle ou on démontre rapidement que ce même X vérifie une propriété avec éventuellement d'autres termes Z distincts ou pas de Y : Q(X,Z). Alors la conjonction de P(X,Y) et de Q(X,Z) permet de déduire R(X,Y,Z).

Dans le cas particulier des syllogismes, X est le terme moyen qui disparaît dans la conclusion pour laisser la place à une relation R(Y,Z) entre le terme majeur (prédicat de la conclusion) et le terme mineur (sujet de la conclusion).

Eventuellement la proposition  $R(X,Y,Z)$  est omise comme étant évidente. Par ailleurs, chaque fois que  $Q(X,Z)$  sera contradictoire avec  $P(X,Y)$ , on aura une démonstration par l'absurde.

[Revenons un instant sur OR CECI. Dans les cas observés, est pris en compte selon les contextes soit  $P$  elle-même, soit "non  $P$ " soit les deux à la fois, soit enfin une propriété contradictoire avec  $P$ . On a, en raccourci, un schéma du type " $P$ " "non  $P$ ", caractéristique de la démonstration par l'absurde, correspondant d'ailleurs aux contextes des occurrences citées].

Le schéma logique général montre que OR peut être remplacé par beaucoup d'autres articulateurs, cependant pas par n'importe lequel. En effet, s'il y a bien conjonction (du point de vue logique) des propositions  $P$  et  $Q$ , il y a une certaine chronologie pédagogique, car l'intérêt d'énoncer la proposition  $Q$  n'existe qu'après avoir énoncé  $P$ . C'est pourquoi, on peut trouver à la place de OR: mais, de plus, par ailleurs, étant donné que, compte-tenu de... . Il peut également y avoir absence d'articulateurs.

Le logicien travaille en dehors du temps, c'est pourquoi il n'a pas créé de signe logique particulier ni pour OR ni pour les autres articulateurs cités plus haut, et il traduit CR par  $\wedge$ . Il ne prend donc en compte que la conjonction et traduit  $P$  OR  $Q$  par  $P \wedge Q$ , c'est-à-dire  $P$  et  $Q$ .

## CONCLUSION

Les ouvrages dépouillés sont de nature explicative et didactique. La démonstration (processus déductifs) y occupe une grande place et, en tant que discours finalisé, vise à établir la vérité d'une conclusion.

Le locuteur (l'auteur) se donne la charge de guider le destinataire (généralement étudiant) vers une conclusion. Si

la conclusion préexiste pour le locuteur, il n'en va pas en principe de même pour le destinataire. Il s'agit donc de construire une démarche, fût-ce au prix d'artifice dans la forme, capable de convaincre celui qui ne sait déjà.

La démonstration s'opère donc en trois temps dans une succession ordonnée. OR agit en tant que repère de sorte que l'on pourrait déclarer que sa valeur (le statut qu'il attribue à l'argument qu'il introduit) est liée à la place qu'il occupe dans l'ordonnance de la succession. OR, en effet, ne semble pas avoir de sens véritablement autonome dans les contextes mathématiques analysés.

Élément constitutif de l'argumentation, mais non réellement signifiant, il joue un rôle dans la logique des enchaînements. OR ne se trouve pas en tête de démonstration, de raisonnement, mais succède à une première proposition en renvoyant à un existant qu'il est nécessaire de rappeler ou d'actualiser dans l'optique de la conclusion. OR est un organisateur qui fonctionne, qui plus est, comme code de renvoi et/ou d'actualisation, et l'auteur en dispose pour orienter la pensée du lecteur dans la direction souhaitée.

Par ailleurs, OR est assorti d'une aura de sérieux irréfutable. Que dans un raisonnement il accompagne un argument, garantit l'effet de prise en considération. Ce qui permet, ailleurs, des emplois abusifs: qu'importe le fondement, pourvu qu'il y ait OR.

La typologie du discours que nous avons étudié contient un caractère systématique et répétitif, ce qui représente l'avantage, pour le lecteur, de se situer plus facilement dans les étapes de la démonstration. OR, en quelque sorte, ponctuait ce discours. Son usage n'est cependant pas imposé. Cela explique (en grande partie) les différences constatées dans la fréquence de ses occurrences.

Mot outil, utilisé ou non selon les auteurs, certains

Le négligeront au profit de MAIS, particulièrement dans le cas où les propositions P et Q sont contradictoires. Pourtant, le choix de OR, en préférence à tout autre articulatoire en liaison, bien entendu, avec le sens de P et Q, ne relève certainement pas du hasard ou de la manie. OR confère une accentuation à l'argument qu'il introduit et le choix opéré en sa faveur par l'auteur correspond à un souci d'efficacité pédagogique. OR participerait donc d'un procédé essentiellement rhétorique.

ANNEXE

COMPOSITION DU CORPUS

Livres de cours:

- {1} N. BOURBAKI : Eléments de Mathématiques. Théorie des ensembles chap. 3. Hermann, 1963.
- {2} L. CHAMBADAL et J.L. OVAERT : Cours de Mathématiques. Notions fondamentales d'Algèbre et d'Analyse. Gauthier-Villars, 1966.
- {3} J. DIXMIER : Cours de Mathématiques du premier cycle, première année. Gauthier-Villars, 1976.
- {4} R.COUTY - U. EZRA : Analyse, collection U. A. Colin, 1965.
- {5} J. LELONG-FERRANG, J.M. ARNAUDIES: Cours de Mathématiques. T.2. Dunod-Université, 1977.
- {6} M. QUEYSANNE : Algèbre, collection U. A. Colin, 1964.
- {7} E. RAMIS, C. DESCHAMPS, J. ODOUX : Cours de Mathématiques Spéciales. T. 3. Masson, 1976.

Livres de problèmes:

- {8} E. AZOULAY, M. MESERI, M. SERFATI : Problèmes de Mathématiques, SEDES, 1967.
- {9} A. BALLICIONI, M. CHAZEL : Choix de problèmes de Mathématiques. Masson, 1962.

Livres d'exercices:

- {10} F. BOSCHET, B. CALVO, A. CALVO, J. DOYEN: Exercices d'Algèbre MPI. Collection U, A. Colin, 1970.
- {11} J. GENET et G. PUPION : Analyse moderne (Rappel de cours et solutions d'exercices). T. 1, Vuibert, 1971.