



ALGORITHMES D'APPROXIMATION STOCHASTIQUES ET INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences
pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences par

Gregory ROTH

Thèse soutenue le 22 septembre 2011
en présence des membres du jury :

Prof. Michel BENAÏM	directeur de thèse
Dr. Hélène FRANKOWSKA	rapporteur (Paris)
Prof. Felix SCHLENK	examineur (Neuchâtel)
Prof. Sylvain SORIN	rapporteur (Paris)
Dr. Pierre TARRÈS	rapporteur (Oxford)

Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11, 2000 Neuchâtel

IMPRIMATUR POUR LA THESE

Stochastic Approximation Algorithms and Differential Inclusions

Gregory Roth

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

FACULTE DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury

MM. Michel Benaïm (directeur de thèse), Felix Schlenk,
Sylvain Sorin (Uni. P. et M. Curie, Paris),
Hélène Frankowska (CNRS et Uni. P. et M. Curie, Paris)
et Pierre Tarrès (Oxford Uni., UK)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 29 septembre 2011

Le doyen :
P. Kropf

Abstract

A successful method to describe the asymptotic behavior of a discrete time stochastic process governed by some recursive formula is to relate it to the limit sets of a well chosen mean differential equation. Benaïm, Hofbauer and Sorin generalised this approach to stochastic approximation algorithms whose average behavior is related to a differential inclusion instead. The aim of this thesis is to pursue this analogy by extending to this setting the following results.

First, under an attainability condition, we prove that convergence to a given attractor of the dynamical system induced by this differential inclusion occurs with positive probability, for a class of Robbins Monro algorithms. Next we generalize a result of Benaïm and Schreiber which characterizes the ergodic behavior of algorithms. In particular, we prove that the weak* limit points of the empirical measures associated to such processes are almost surely invariant for the associated deterministic dynamics. To do this, we give two equivalent definitions of the invariance of a measure for a set-valued dynamical system continuous in time.

Secondly, we consider approximation algorithms with constant step size associated to a differential inclusion. We prove that over any finite time span, the sample paths of the stochastic process are closely approximated by a solution of the differential inclusion with high probability. We then analyze infinite horizon behavior, showing that stationary measures of the stochastic process must become concentrated on the Birkhoff center of the deterministic system.

Keywords : Stochastic approximations ; set-valued dynamical systems ; differential inclusions ; attractor ; invariant measures ; ergodic theory ; evolutionary game theory ; best response dynamics ; Markovian fictitious play.

Remerciements

Ils iront tout d'abord avec une profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, Michel Benaïm, pour m'avoir soutenu tout au long de ce travail en m'accordant une grande liberté. Mon intérêt pour les probabilités est, sans nul doute, la conséquence de ses qualités de pédagogue et de son enthousiasme pour la recherche. D'une manière discrète mais certainement pas innocente, il m'a permis de rencontrer Mathieu Faure et Bill Sandholm qui furent de précieux collaborateurs.

Je témoigne toute ma reconnaissance à mon jury de thèse, les professeurs Hélène Franckowska, Sylvain Sorin et Pierre Tarrès qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que Felix Schlenk qui a accepté d'en être examinateur. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à la bonne continuation de mes projets.

J'aimerais remercier tout particulièrement Mathieu Faure. Ma thèse n'aurait pas été ce qu'elle est sans notre collaboration. Les discussions, les réflexions, les heures passées ensemble devant le tableau noir, les multiples "parachocos" partagés, les débats, quelque peu embrumés au 19 rue des Chavannes, ont été une merveilleuse source de motivation et de progrès. En espérant que notre amitié ne finira pas dans l'ombre du "shadowing", un grand merci Coco!

Que soit également remercié ici Bill Sandholm pour la confiance qu'il a eu en notre collaboration et pour tout ce qu'il m'a appris en théorie des jeux.

Pour leurs encouragements, leur assistance et toutes leurs corrections qui m'ont permis de rédiger au mieux cette thèse et d'en préparer la soutenance, je remercie chaleureusement Bastien, Alex, Régis et Amandine.

Quatre années de thèse ne sont bien évidemment pas que du travail et encore moins quand il s'agit de l'IM de Neuchâtel. Merci à Kola pour tous ces moments d'amitié partagés au sein du B209, merci à Olivier pour avoir traversé avec moi simultanément chaque étape clé de nos thèses respectives, et merci à tous les plus "jeunes" qui ont su faire perdurer cette ambiance fraternelle si particulière à l'institut.

Merci à mes amis qui, sans le savoir et sans rien comprendre à ce que je faisais, m'ont toujours soutenu et reconnu dans la bonne humeur.

Je clos ces remerciements en dédiant cette thèse à mes parents et à mes

deux frères. Je n'oublierai jamais leur bienveillance et leur générosité qui, tout au long de ce travail, m'ont accompagné et finalement permis de rédiger en toute sérénité les dernières lignes de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Historique du sujet	1
Méthode de l'équation différentielle ordinaire	4
Caractérisation des ensembles limites	4
Convergence avec probabilité positive vers un attracteur	10
Convergence faible	11
Algorithmes à pas constant	13
Méthode de l'inclusion différentielle	15
Caractérisation des ensembles limites	15
Présentation des résultats	19
1 Outils de base	31
1.1 Systèmes dynamiques	31
1.1.1 Flot et équation différentielle ordinaire	31
1.1.2 Ensembles limite et notion de récurrence	34
1.1.3 Attracteur	37
1.1.4 Récurrence par chaîne	37
1.1.5 Pseudo-trajectoires asymptotiques	41
1.2 Théorie ergodique	43
1.3 Systèmes dynamiques multivalués	45
1.3.1 Notions d'analyse multivaluée	45
1.3.2 Systèmes dynamiques généraux	46
1.3.3 Pseudo-trajectoire asymptotique	53
1.3.4 Inclusions différentielles	54

2	Stochastic approximations of set-valued dynamical systems :	
	Convergence with positive probability to an attractor	57
2.1	Introduction	58
2.1.1	Settings and bibliography.	58
2.1.2	The main result, a simple version.	60
2.2	Convergence with positive probability	62
2.2.1	Set-valued dynamical systems relative to a differential inclusion.	62
2.2.2	A deterministic result.	64
2.2.3	Stochastic processes.	65
2.2.4	Convergence of Stochastic approximation algorithms.	69
2.3	Application to the Markovian fictitious play	72
2.3.1	The model.	72
2.3.2	Proof of Theorem 2.25.	75
2.3.3	Potential Games and Proof of Corollary 2.27.	77
2.4	Proof of Lemma 2.15.	80
3	Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories for set-valued dynamical systems	85
3.1	Introduction	85
3.2	Ergodic theory for set-valued dynamical systems	87
3.2.1	Generalities	88
3.2.2	Invariant measures for a closed relation	89
3.2.3	Invariant measures for set-valued dynamical systems	91
3.2.4	Poincaré recurrence theorem for set-valued dynamical systems	94
3.3	Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories	95
3.3.1	Definition	95
3.3.2	Ergodic behavior	96
3.3.3	A simple deterministic example	99
3.4	Weak perturbed solution of a differential inclusion	100
3.4.1	Stochastic approximation algorithms	103
3.5	Appendix	104
3.5.1	Proof of Proposition 3.3	104
3.5.2	Proof of Lemma 3.15	105

3.5.3	Some remarks on semi-invariance	106
-------	---	-----

4 Stochastic approximations with constant step size and differential inclusions 109

4.1	Introduction	109
4.2	Definitions	112
4.2.1	Differential inclusions	112
4.2.2	Stochastic approximation processes with constant step size	113
4.3	Results	115
4.3.1	Finite horizon deterministic approximation	115
4.3.2	Limiting stationary distributions and invariant measures	116
4.4	Applications to game theory	119
4.4.1	Population games and stochastic evolutionary game dynamics	119
4.4.2	Examples of revision protocols and their mean dynamics	124
4.4.3	Which solution trajectories approximate sample paths?	126
4.4.4	Convergence of stochastic evolutionary game dynamics	129
4.5	Proofs	132
4.5.1	Proof of Proposition 4.3	132
4.5.2	Proof of Proposition 4.4	133
4.5.3	Proof of Theorem 4.8	134
4.5.4	Proof of Theorem 4.9	136
4.5.5	Proof of Proposition 4.11	139
4.5.6	Proof of Theorem 4.12	141
4.5.7	Proof of Theorem 4.15	142
4.5.8	Proof of Lemma 4.19	142

Bibliographie 151

INTRODUCTION

Cette thèse porte sur l'étude des algorithmes d'approximation stochastiques associés à une inclusion différentielle et se situe dans la continuité des travaux réalisés par Benaïm, Hofbauer et Sorin [16]. Nous généraliserons des résultats classiques de l'étude des algorithmes d'approximation stochastiques utilisant la méthode dite de l'*équation différentielle ordinaire* (EDO) aux algorithmes dont la dynamique moyenne est induite par une *inclusion différentielle*.

Le but de cette introduction est d'asseoir les résultats obtenus dans leur contexte et d'en donner les applications. Elle se compose de trois parties : dans un premier temps, nous présenterons l'historique du sujet, dans un second temps, nous rappellerons des résultats connus reliés aux méthodes de l'EDO et de l'inclusion différentielle et, finalement, nous exposerons les résultats principaux obtenus au cours de ce travail.

Les notions de dynamique univaluée et multivaluée, utilisées dans cette introduction, sont rappelées dans le chapitre 1. Les chapitres 2, 3 et 4 reproduisent trois manuscrits déjà publiés ou soumis pour publication. L'indépendance de ces chapitres entraînera la redondance de certaines définitions.

Historique du sujet

La théorie des algorithmes d'approximation stochastiques est née dans les années 50 aux travers des travaux de Robbins et Monro [80] et de Kiefer et Wolfowitz [54].

Le paradigme de base est une équation aux différences stochastiques

$$x_{n+1} = x_n + \gamma_n Y_{n+1}, \quad (1)$$

où x_n prend ses valeurs dans un espace euclidien, Y_n est une variable aléatoire et le pas $\gamma_n > 0$ est petit et tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Typiquement, x_n représente l'état, entre les instants n et $n + 1$, du paramètre d'un système. Son évolution, à l'instant $n + 1$, est fonction de son état à l'instant n et d'un certain aléa représenté par une variable aléatoire ξ_{n+1} , c'est-à-dire

$$Y_{n+1} = h(x_n, \xi_{n+1}),$$

où, selon la nature du problème, h peut être une fonction connue ou inconnue.

Initialement cette théorie fut développée pour résoudre un problème classique en analyse numérique, à savoir, la recherche des zéros d'une fonction *inconnue* g . En considérant Y_n comme une variable aléatoire de moyenne $g(x_n)$, Robbins et Monro [80] montrèrent que, sous des hypothèses adéquates sur la fonction g et le pas (γ_n), la suite (x_n) converge en probabilité vers un zéro de la fonction g .

Par la suite, les algorithmes d'approximation stochastiques ont pris leur essor à travers de nombreux problèmes provenant de divers domaines tels que le traitement du signal, le contrôle adaptatif (voir [68], [61]) et l'estimation récursive (voir [74]). Cette théorie a connu un renouveau dans les années 90 dû au regain d'intérêt pour la théorie de l'apprentissage au sens large, par exemple dans le domaine des réseaux de neurones (voir [98], [38]) ou de la théorie des jeux (voir [40]).

Afin d'étudier le comportement asymptotique de (1), il est approprié d'écrire le terme aléatoire comme

$$Y_{n+1} = f(x_n) + U_{n+1}, \quad (2)$$

où $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un champ de vecteurs obtenu en calculant une certaine moyenne et U_n la résultante aléatoire.

La méthode utilisée par Robbins et Monro permet d'étudier la convergence de certains algorithmes. Cependant, dès que la dimension de l'espace d'états est grande et que les "objets limites" de l'algorithme sont compliqués, leur méthode est souvent insuffisante.

En 1973, Derevitskii et Fradkov [29] ont proposé l'idée de la *méthode de l'équation différentielle ordinaire*. Cette idée fût principalement exploitée par Ljung [67] et, par la suite, inspira un grand nombre de travaux. Elle est présentée en détail dans les livres de Kushner et Clark [60], Benveniste, Métivier et Priouret [22], Duflo [31] et Kushner et Yin [61].

Expliquons en quelques lignes l'heuristique de cette méthode. On parlera de méthode de l'EDO ou de *champ moyen* car le champ de vecteurs f est issu du calcul d'une moyenne (voir exemples 0.2 et 0.3). Il est naturel de voir la relation réursive (1), avec Y_{n+1} défini par (2), comme un schéma d'approximation d'Euler, avec une perturbation aléatoire, visant à approcher les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f(x). \tag{3}$$

Par conséquent, il est raisonnable d'espérer que le comportement asymptotique d'une réalisation $(x_n(\omega))$ de la suite aléatoire soit lié, pour presque tout ω , à celui des solutions de l'EDO (3). Néanmoins, le comportement des trajectoires de (3) peut être complexe. Par exemple, dès la dimension trois, des comportements chaotiques peuvent survenir. C'est pourquoi les premiers résultats utilisant cette méthode traitent uniquement des dynamiques simples telles que des systèmes dynamiques de type gradient pour lesquels toutes les trajectoires convergent vers l'ensemble des minima d'une fonction potentiel ou encore des systèmes dynamiques linéaires. Cependant, il apparaît dans de nombreuses situations, par exemple, dans les modèles d'apprentissage ou en théorie des jeux, des champs de vecteurs non linéaires et sans potentiel.

Au milieu des années 90, Benaïm et Hirsch ont développé des outils permettant de décrire qualitativement le comportement asymptotique d'algorithmes d'approximation stochastiques à partir de celui de l'EDO (3), ce pour une classe de champs de vecteurs f très générale (voir principalement [13] et [11]). Ces travaux font essentiellement intervenir des définitions et des résultats émanant de la théorie des systèmes dynamiques topologiques et de celle des probabilités. Le lecteur pourra se référer à la Section 1.1 du Chapitre 1 pour le rappel des notions importantes de systèmes dynamiques abstraits.

Méthode de l'équation différentielle ordinaire

Cette sous-section s'articule en deux parties : dans un premier temps, nous présenterons les outils développés par Benaïm et Hirsch ainsi que leur principal résultat qui caractérise les ensembles limites des *pseudo-trajectoires asymptotiques*. Dans un second temps, nous exposerons deux résultats que nous étendrons au cas des inclusions différentielles dans les chapitres 2 et 3. Finalement, nous introduirons le contexte des algorithmes d'approximation stochastiques à pas constant et nous présenterons deux résultats que nous généraliserons au cas des inclusions différentielles dans le chapitre 4.

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$. La norme usuelle sur \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) sera notée $\|\cdot\|$. Nous noterons $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$) l'espace des fonctions continues de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}_+) dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts.

Caractérisation des ensembles limites

Nous dirons qu'un processus stochastique $(x_n)_{n \geq 0}$ à valeur dans \mathbb{R}^m est un *algorithme d'approximation stochastique* associé à l'EDO (3) si les conditions suivantes sont satisfaites :

Hypothèse 0.1.

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1}(f(x_n) + U_{n+1}), \quad (4)$$

où

- $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un champ de vecteurs lipschitzien ;
- $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires adaptée à la filtration \mathbb{F} ;
- $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n = \infty.$$

Comme nous le verrons dans la section 1.1.1, l'EDO (3) induit un flot sur \mathbb{R}^m que nous noterons ϕ .

Nous dirons que (x_n) satisfait la condition de *Robbins-Monro* ou de *différence de martingales* si

$$\mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Pour comparer le comportement du processus (x_n) avec celui des trajectoires de l'EDO (3), nous définissons le processus en temps continu $\mathbf{X}(\cdot)$, affine par morceau, interpolant les (x_n) :

$$\mathbf{X}(\tau_i + s) := x_i + s \frac{x_{i+1} - x_i}{\gamma_{i+1}}, \text{ pour } s \in [0, \gamma_{i+1}],$$

où

$$\tau_0 := 0, \quad \tau_n := \sum_{i=1}^n \gamma_i \text{ pour } n \geq 1.$$

L'exemple suivant est inspiré de la section 2.2 de [11].

Exemple 0.2 (Urne de Pólya généralisée). *Le simplexe de dimension m est le sous-ensemble $\Delta^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ défini par*

$$\Delta^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\}.$$

Nous considérerons Δ^m comme une variété différentielle et nous identifierons en chaque point $p \in \Delta^m$ le plan tangent $T_p \Delta^m$ avec l'hyperplan

$$E^m := \{v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_i v_i = 0\}.$$

Soit $h: \Delta^m \rightarrow \Delta^m$ une fonction suffisamment régulière (typiquement lipschitzienne).

Une urne contient initialement $n_0 > 0$ boules de couleur $1, \dots, m+1$. A chaque instant (le temps est discret et sera représenté par $n \in \mathbb{N}$), une nouvelle boule est ajoutée à l'urne et sa couleur est choisie aléatoirement selon le mode opératoire suivant :

La variable $x_n^i \in [0, 1]$ représente la proportion de boules de couleur i dans l'urne à l'instant n et $x_n \in \Delta^m$ est le vecteur de ces proportions, à savoir $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^{m+1})$. La couleur de la boule ajoutée à l'instant $n+1$ est i avec une probabilité $h_i(x_n)$, où h_i est la i ème coordonnée de h .

De tels processus sont connus sous le nom d'urnes généralisées de Pólya et ont été considérés, entre autres, par Hill, Lane et Sudderth [45] (pour $m = 1$), Arthur, Ermol'ev et Kaniousskii [2] ou encore Pemantle [77]. Plus récemment, Benaïm, Schreiber et Tarrès [19] ont étudié des modèles d'urnes où plusieurs couleurs pouvaient être ajoutées ou retirées à chaque étape.

Supposons que la composition initiale $(x_0, n_0) \in \Delta^m \times \mathbb{N}$ soit fixée une fois pour toute. La tribu \mathcal{F}_n est la tribu engendrée par les variables aléatoires x_0, \dots, x_n .

Un calcul simple montre que

$$\mathbb{E}(x_{n+1} - x_n | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{n_0 + n + 1} (-x_n + h(x_n)).$$

Ainsi en posant

$$f(x) := -x + h(x) \quad \text{et} \quad U_{n+1} := (n_0 + n + 1)(x_{n+1} - x_n - \mathbb{E}(x_{n+1} - x_n | \mathcal{F}_n)),$$

nous obtenons que le processus (x_n) satisfait l'hypothèse 0.1 avec $\gamma_n := \frac{1}{n_0 + n}$.

Exemple 0.3 (Apprentissage par renforcement). *Le contexte général est le suivant : deux joueurs répètent un jeu et, à la fin de chaque tour, ils adaptent leur stratégie selon une règle simple, dite d'apprentissage. Cette règle dépend fortement des hypothèses mises sur le jeu. Dans cet exemple, nous supposons que les joueurs observent uniquement leur propre action jouée ainsi que leur gain.*

Le modèle de base d'apprentissage par renforcement est dû à Erev et Roth (voir [82, 34]) et peut s'écrire comme un algorithme d'approximation stochastique avec un pas aléatoire. Imaginons que chaque joueur possède une urne remplie de boules de couleurs correspondant aux différentes actions possibles. A chaque étape, les joueurs tirent une boule dans leur urne respective et jouent l'action correspondante. Ensuite, ils ajoutent à l'urne un nombre de boule de la "couleur jouée" égale au gain obtenu.

Dans [1], Arthur étudie un modèle alternatif à celui de Erev et Roth dans lequel, le nombre de boules est renormalisé après chaque étape, afin d'obtenir un algorithme d'approximation stochastique avec un pas déterministe d'ordre $\frac{1}{n}$. Nous présentons ce modèle dans le cadre d'un jeu 2×2 (2 joueurs, 2 actions). Nous nous inspirons de l'article de Posch (voir [79]) dans lequel, il étudie les ensembles limites de l'algorithme stochastique en question.

Considérons deux joueurs a et b et supposons que chacun d'eux a deux actions possibles 1 et 2. Leurs matrices de paiement seront notées respectivement A et B. La variable d'état considérée est la proportion de boule à l'intérieur des urnes, c.-à-d.

$$x_n := (x_n^a, x_n^b) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

où x_n^i représente la proportion de couleur 1 de l'urne $i \in \{a, b\}$. Nous notons S_n^i le nombre de boule de couleur 1 dans l'urne i à l'instant n , P_n^i la variable

aléatoire décrivant le gain du joueur i au tour n et σ_n^i la variable aléatoire décrivant le nombre de boules de couleur 1 ajoutées dans l'urne i au temps n , c.-à-d.

$$\sigma_n^i := \begin{cases} \text{Paiement obtenu par le joueur } i & \text{si le joueur } i \text{ choisit l'action } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Afin de maîtriser la croissance du nombre de boules, nous imposons que le nombre de boules à l'instant n est égale à $C_n = Cn$ pour un certain $C > 0$. Ainsi chaque joueur devra renormaliser son urne à chaque étape, c.-à-d.

$$S_{n+1}^i = (S_n^i + \sigma_n^i) \frac{C(n+1)}{Cn + P_n^i}, \quad i = a, b.$$

et de même pour l'autre couleur. Ainsi la variable d'état est égale à

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= \frac{S_{n+1}^i}{C(n+1)} \\ &= x_n^i + \frac{1}{Cn + P_n^i} (\sigma_n^i - x_n^i P_n^i) \\ &= x_n^i + \frac{1}{Cn} (\sigma_n^i - x_n^i P_n^i) + \varepsilon^i(x_n). \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que le processus (x_n) satisfait une relation de récurrence du type (4) pour un bruit $(U_n)_n$ satisfaisant la condition de Robbins-Monro et pour $f(x) = (f_a(x), f_b(x))$ définie par

$$\begin{aligned} f_a(x^a, x^b) &= x^a(1 - x^a) (\alpha_1 - x^b(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ f_b(x^a, x^b) &= x^b(1 - x^b) (\beta_1 - x^a(\beta_1 + \beta_2)), \end{aligned}$$

où $\alpha_1 := a_{12} - a_{22}$, $\alpha_2 := a_{21} - a_{11}$, $\beta_1 := b_{12} - b_{22}$ et $\beta_2 := b_{21} - b_{11}$. La dynamique induite par le champ de vecteur f est connue sous le nom de dynamique du réplicateur (voir p.ex. [52]).

L'idée de base de la théorie développée par Benaïm et Hirsch est de généraliser la notion de trajectoire-solution de (3) afin que le processus \mathbf{X} induit par (x_n) en soit une. Premièrement, il faut pouvoir tenir compte de petites perturbations survenant à certains instants. Cette généralisation fut introduite par Bowen ([25]) et Conley ([28]) avec la notion de *récurrence par chaîne* et donne lieu à de multiples résultats concernant la topologie et la géométrie des ensembles limites associés à de telles "trajectoires perturbées" (voir Section 1.1.2). Cette généralisation ne tenant pas compte de la

continuité temporelle, Benaïm et Hirsch ont introduit la notion de *pseudo-trajectoire asymptotique* :

Définition 0.4. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une pseudo-trajectoire asymptotique (PTA) pour le flot ϕ si pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} \|X(t+h) - \phi_h(X(t))\| = 0. \quad (5)$$

Intuitivement, la courbe

$$\begin{aligned} [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\mapsto X(t+h) \end{aligned}$$

suit la trajectoire solution de l'EDO partant de $X(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec un écart arbitrairement petit pour un t suffisamment grand. Au vu des Théorèmes 0.5 et 0.6, cette notion est très utile pour comprendre le comportement asymptotique des algorithmes d'approximation stochastiques considérés ici.

Rappelons que l'ensemble

$$\mathcal{L}(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{X([t, \infty])\}}$$

est l'*ensemble limite* de X (cf. définition 1.1.2). Benaïm et Hirsch [13] caractérisent l'ensemble limite d'une PTA :

Théorème 0.5 (Benaïm et Hirsch [13]).

- (i) Soit X une pseudo-trajectoire asymptotique précompacte pour le flot ϕ . Alors $\mathcal{L}(X)$ est intérieurement transitif par chaîne (ITC) (cf. définition 1.19).
- (ii) Soit $L \subset E$ un sous-ensemble intérieurement transitif par chaîne. Alors il existe une pseudo-trajectoire asymptotique X telle que $\mathcal{L}(X) = L$.

Le lecteur trouvera la version générale de ce théorème dans la Section 1.1.5, ainsi qu'une explication détaillée des notions utilisées dans son énoncé. Le résultat suivant réalise le lien entre un algorithme d'approximation stochastique et une PTA.

Théorème 0.6 (Benaïm [9, 11]). Soit (x_n) un algorithme d'approximation stochastique associé à (3) satisfaisant la condition de Robbins-Monro. Supposons que

(A) il existe $q \geq 2$ tel que

$$(a.1) \quad \sum_n \gamma_n^{1+q/2} < \infty,$$

$$(a.2) \quad \sup_n \mathbb{E}(\|U_n\|^q) < \infty,$$

ou

(B)

$$(b.1) \quad \text{pour tout } c \geq 0, \sum_n e^{-c\gamma_n} < \infty,$$

$$(b.2) \quad (U_n)_{n \geq 1} \text{ est sous-gaussien dans le sens où pour tout } \theta \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbb{E}(\exp(\langle \theta, U_{n+1} \rangle) | \mathcal{F}_n) \leq \exp(\frac{1}{2}\Gamma \|\theta\|^2).$$

Alors le processus en temps continu \mathbf{X} associé à $(x_n)_{n \geq 0}$ est une pseudo-trajectoire asymptotique pour le flot ϕ .

A la suite de ces deux théorèmes, deux questions naturelles surviennent. Dans un premier temps, quels sont les ensembles ITC? Dans un deuxième temps, parmi eux, lesquels sont réellement atteints avec une probabilité positive par l'algorithme? Remarquons que, par le Théorème 0.5, tout ensemble ITC est un ensemble limite d'une PTA mais toute PTA n'est pas forcément une réalisation de l'algorithme.

Le Théorème 1.21 de Bowen (voir Section 1.1.4) répond à la première question en caractérisant, de deux façons, les ensembles ITC. Il montre, entre autre, qu'un tel ensemble est compact, invariant par le flot ϕ et n'admet pas d'attracteur propre (c.-à-d. le flot restreint à cet ensemble n'a pour seul attracteur que lui-même). Le deuxième point donne lieu à deux types de résultat : des résultats de *convergence avec probabilité positive* et des résultats de *non convergence*. Dans la première catégorie, on peut montrer que sous certaines hypothèses d'atteignabilité, l'algorithme converge vers tout *attracteur* avec une probabilité strictement positive. La section suivante est consacrée à ce résultat. Dans la deuxième catégorie, on peut montrer que, certains ensembles répulsifs ne sont presque-sûrement pas atteints lorsque le bruit est assez "agit". Ce type de résultat ne fait pas l'objet de ce travail. Le lecteur intéressé pourra se référer au "survey" de Pemantle [78], au cours de Benaïm [11] ou à la thèse de Tarrès [93] pour un aperçu général de ces résultats.

Convergence avec probabilité positive vers un attracteur

Les idées développées dans cette partie apparaissent originellement dans les travaux de Benaïm [11] et Duflo [32]. Le but est de donner des conditions simples assurant que l'algorithme converge avec une probabilité strictement positive vers un attracteur (voir définition 1.13) donné.

Nous considérons ici un processus stochastique \mathbf{X} continu dans le temps, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^m , et adapté à une certaine filtration (\mathcal{F}_t) . Nous nous plaçons sous l'hypothèse

Hypothèse 0.7. *Il existe une fonction $\omega: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $\delta > 0$ et tout $T > 0$,*

$$\omega(t, \delta, T) \downarrow_{t \rightarrow +\infty} 0,$$

et

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \sup_{0 \leq h \leq T} \|\phi_h(\mathbf{X}(s)) - \mathbf{X}(s+h)\| \geq \delta \mid \mathcal{F}_t \right) \leq \omega(t, \delta, T), \quad (6)$$

presque sûrement.

Cette condition est satisfaite par un grand nombre d'algorithmes d'approximation stochastiques.

Proposition 0.8 (Benaïm [11]). *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ un algorithme d'approximation stochastique associé à l'EDO (3) et satisfaisant la condition de Robbins-Monro. Sous les conditions du Théorème 0.6, le processus en temps continu \mathbf{X} associé à (x_n) satisfait l'hypothèse 0.7.*

Définition 0.9. *Un point $x \in \mathbb{R}^m$ est atteignable par \mathbf{X} si, pour tout $t > 0$ et pour tout voisinage U de x ,*

$$\mathbb{P}(\exists s \geq t : \mathbf{X}(s) \in U) > 0.$$

L'ensemble des points atteignables par \mathbf{X} sera noté $\text{Att}(\mathbf{X})$.

Théorème 0.10 (Benaïm [11] et Duflo [32]). *Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un attracteur (cf. définition 1.13) pour le flot ϕ et $\mathcal{B}(A)$ son bassin d'attraction. Si $\text{Att}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$, alors*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{X}) \subset A) > 0.$$

Plus précisément, pour tout ouvert relativement compact $U \subset \mathbb{R}^m$ tel que $\bar{U} \subset \mathcal{B}(A)$, il existe des nombres $T, \delta > 0$ (dépendant de U) tels que

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{X}) \subset A) \geq (1 - \omega(t, \delta, T)) \mathbb{P}(\exists s \geq t : \mathbf{X}(s) \in U).$$

Le Théorème 0.10 est un résultat dit *de convergence avec probabilité positive* : pour tout attracteur du flot, le processus a une probabilité positive d'y converger. Soulignons que ce résultat n'assure pas la convergence du processus vers un attracteur.

Remarque 0.11. *La deuxième partie du théorème donne une borne inférieure de la probabilité de converger vers un attracteur. Il est important de remarquer que, sous les hypothèses de la Proposition 0.8, la fonction $\omega(t, \delta, T)$ est explicitement connue. Elle est exprimée en fonction du bruit $(U_n)_n$ et du pas $(\gamma_n)_n$. Le point clef pour exhiber ω est l'utilisation du lemme de Grönwall qui nécessite le caractère lipschitzien du champ de vecteur f .*

Convergence faible des pseudo-trajectoires asymptotiques

Au vu des sections précédentes, la théorie des *pseudo-trajectoires asymptotiques* fournit un cadre propice à l'analyse du comportement à long terme de certains algorithmes d'approximation. Les résultats énoncés précédemment portent sur la convergence des PTA. En 2000, Benaïm et Schreiber [18] ont étudié le comportement *ergodique*, ou *statistique*, des PTA. Il se trouve qu'ils ont prouvé leurs résultats pour une classe plus générale de processus que l'on appelle *pseudo-trajectoires asymptotiques faibles* (PTAF). Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous noterons, pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}_{[0, T]}$ la tribu borélienne sur l'intervalle $[0, T]$.

Définition 0.12. *Un processus*

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

est appelé pseudo-trajectoire asymptotique faible (PTAF) pour un flot ϕ sur \mathbb{R}^m si

- (i) *Il est progressivement mesurable : $\mathbf{X}_{|[0, T] \times \Omega}$ est $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}_T$ mesurable pour tout $T > 0$,*

(ii) Pour tout $\alpha > 0$ et $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq h \leq T} \|\mathbf{X}(t+h) - \phi_h(\mathbf{X}(t))\| \geq \alpha | \mathcal{F}_t \right) = 0$$

presque sûrement.

Remarquons qu'un processus aléatoire \mathbf{X} étant presque sûrement une PTA est une pseudo-trajectoire asymptotique faible. L'inverse n'est pas vrai. Il est donc important de souligner que le Théorème 0.5 ne s'applique pas pour une pseudo-trajectoire asymptotique faible \mathbf{X} et, par conséquent, son ensemble limite n'est généralement pas presque sûrement ITC.

Les pseudo-trajectoires asymptotiques faibles permettent d'étudier une classe d'algorithmes d'approximation stochastiques plus grande que celle donnée par les hypothèses du théorème 0.6. En contre partie, les résultats obtenus sont de nature différente. Il est possible d'étudier le comportement asymptotique des mesures empiriques d'occupation de l'algorithme et d'obtenir des résultats dits de *convergence faible*.

Avant d'énoncer le résultat principal de Benaïm et Schreiber, exhibons le lien entre les PTAF et les algorithmes d'approximation (voir [18]).

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ un algorithme d'approximation stochastique associé à l'EDO (3) satisfaisant la condition de Robbins-Monro.

Proposition 0.13 (Benaïm et Schreiber [18]). *Supposons que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} (\|U_{n+1}\| \mathbf{1}_{\{\|U_{n+1}\| \geq R\}} | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Alors le processus en temps continu \mathbf{X} associé à (x_n) est une pseudo-trajectoire asymptotique faible pour le flot ϕ .

Remarque 0.14. *Soulignons qu'aucune hypothèse n'est faite sur la vitesse de convergence du pas (γ_n) à l'inverse du Théorème 0.6. Typiquement, si le bruit (U_n) est uniformément borné, alors \mathbf{X} est une PTAF, et ce même si le pas décroît très lentement (p.ex. $\gamma_n = O(\frac{1}{\ln(n)})$),*

Le résultat principal de Benaïm et Schreiber est

Théorème 0.15 (Benaïm et Schreiber [18]). *Soit \mathbf{X} une PTAF pour un flot ϕ , les valeurs d'adhérence, pour la topologie faible étoile, des mesures*

empiriques d'occupation

$$\mu_t(\omega) := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s,\omega)} ds$$

(où δ_p est la mesure de Dirac au point p) sont presque sûrement des mesures invariantes pour ϕ . En particulier, si la famille de mesures

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s)} ds \right\}_{t \geq 0}$$

est tendue, alors, avec probabilité un, le processus $\mathbf{X}(t)$ passe la plupart de son temps dans tout voisinage arbitrairement petit du centre de Birkhoff de ϕ .

Le lecteur pourra se référer à la Section 1.2 pour une définition précise des notions abordées dans l'énoncé ci-dessus. Afin de comprendre la différence entre les Théorèmes 0.5 et 0.15, considérons le flot ϕ traité dans l'exemple 1.18, restreint à l'intervalle $[0, 2\pi[$. Si (x_n) est un algorithme d'approximation stochastique associé à ϕ , satisfaisant les hypothèses du Théorème 0.6, alors par le Théorème 0.5, $\mathcal{L}((x_n)) \in \{\{0\}, \{\pi\}, S^1\}$. Le Théorème 0.15 complète ce résultat en garantissant que le processus (x_n) passe la plupart de son temps dans tout voisinage arbitrairement petit de $\{0, \pi\}$.

Algorithmes d'approximation stochastique à pas constant

Soit une famille de processus stochastiques $(x_n^\varepsilon)_n$ satisfaisant la formule récursive (4) avec un *pas constant* $\varepsilon > 0$, à savoir

$$x_{n+1}^\varepsilon - x_n^\varepsilon = \varepsilon (f(x_n^\varepsilon) + U_{n+1}), \quad (7)$$

où f et $(U_n)_{n \geq 0}$ sont définis de la même manière que dans la Section . Nous dirons que la famille de processus $\{(x_n^\varepsilon)_n\}_\varepsilon$ est un *algorithme d'approximation stochastique à pas constant* associé à l'EDO (3). De tels processus apparaissent fréquemment dans divers domaines d'applications tels que la théorie de l'apprentissage, la théorie des jeux ou encore l'écologie. Dans la dernière partie de cette introduction et dans le chapitre 4, nous développerons l'exemple des *jeux de population*. Intuitivement, ce type de jeu décrit le comportement d'une population, de taille finie, d'individus qui interagissent entre eux aux travers d'un jeu. Chacun d'eux choisit, à chaque instant et

selon un certain protocole, une stratégie dans un ensemble fini commun à tous. La chaîne de Markov représentant le vecteur des proportions des stratégies choisies par la population est alors un algorithme d'approximation stochastique à pas constant.

L'analyse de ces algorithmes concerne leur comportement quand le paramètre ε tend vers zéro. À l'inverse de la théorie des algorithmes à pas décroissant qui mène principalement à un "théorème limite", celle des algorithmes à pas constant mène à deux types de résultats. Un pas constant permet à l'algorithme d'explorer sans cesse l'espace d'état. Nous ne pouvons donc pas espérer que ce dernier converge, comme dans le cas d'un pas décroissant, quand le temps tend vers l'infini. Cependant, sur un horizon de temps fini, nous pouvons espérer qu'il converge vers l'ensemble des solutions de (7) quand ε tend vers zéro. Ce type de résultat est dit à *horizon fini* (Théorème 0.16). Par ailleurs, dans un contexte markovien, en étudiant la convergence des mesures invariantes des chaînes de Markov (x_n^ε) , nous pouvons espérer relier le comportement ergodique du processus à celui de la dynamique moyenne (3). Ce type de résultat est dit *de convergence faible* (Théorème 0.17). La littérature consacrée à ce sujet (voir [22], [30], [60], [61]) regroupe plusieurs résultats sous des hypothèses variées. Contrairement aux résultats de Benaïm énoncés précédemment concernant les algorithmes à pas décroissant, ces résultats n'exploitent pas pleinement la théorie des systèmes dynamiques abstraits.

Dans la lignée de ses précédents travaux, Benaïm [10] étudie, sous une hypothèse markovienne, le comportement asymptotique de la famille des mesures invariantes $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ associées à la chaîne de Markov (x_n^ε) . Il montre que toute valeur d'adhérence (pour la topologie faible étoile) est une mesure se concentrant sur le *centre de Birkhoff* (voir définition 1.12) du flot associé à (3). Pour ce faire, il prouve, dans un contexte précis, un résultat de convergence à horizon fini (cf. Théorème 0.16).

Soit $M \subset \mathbb{R}^m$ un sous ensemble compact invariant pour le flot ϕ . Nous supposons que le processus $(x_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$ prend ses valeurs dans M et nous notons $\mathbf{X}^\varepsilon(\cdot)$ le processus en temps continu associé à (x_n^ε) .

Théorème 0.16 (Benaïm [10] et Benaïm et Weibull [20]). *Pour tout $T > 0$*

et pour tout $\alpha > 0$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq h \leq T} \|\mathbf{X}^\varepsilon(h) - \phi_h(x)\| \geq \alpha \mid \mathbf{X}^\varepsilon(0) = x \right) = 0.$$

uniformément en $x \in M$.

Théorème 0.17 (Benaïm [10]). *Soit μ^ε une mesure invariante pour la chaîne de Markov $(x_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$, μ une valeur d'adhérence de $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ (pour la topologie de la convergence faible étoile) et ϕ le flot induit par (3). Alors μ est invariante pour ϕ .*

Méthode de l'inclusion différentielle

En 2005, Benaïm, Hofbauer et Sorin [16, 17] ont généralisé la théorie dite de l'EDO au cas où la dynamique moyenne est induite par une inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}), \tag{8}$$

où $F: \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ est une fonction multivaluée. Nous parlerons de *généralisation de la méthode de l'EDO aux inclusions différentielles*.

Ce travail fut fortement motivé par des problèmes survenant en économie et en théorie des jeux. En effet, cette généralisation permet d'étendre la technique de l'EDO à une classe d'exemples plus importante (voir p.ex. Chapitre 2 ou les articles de Benaïm et al. [17], Leslie et Collins [64]). Nous illustrerons cette motivation dans l'exemple 0.19.

Le lecteur trouvera les outils nécessaires à la compréhension des sous-sections suivantes dans la Section 1.3 du Chapitre 1.

Caractérisation des ensembles limites

Un processus stochastique $(x_n)_{n \geq 0}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sera dit *algorithme d'approximation stochastique associé à (8)* s'il satisfait les conditions suivantes

Hypothèse 0.18.

$$x_{n+1} - x_n - \gamma_n U_{n+1} \in \gamma_{n+1} F(x_n). \tag{9}$$

où

- $F: \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une fonction multivaluée standard (cf. définition 1.73);
- $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires adaptée à la filtration \mathcal{F} ;
- $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n = \infty.$$

L'exemple suivant est inspiré de la section 2.1 de [16].

Exemple 0.19 (Modèle de prise de décision). Soit A, B deux espaces mesurables, $E \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble compact et $H: A \times B \rightarrow E$ une fonction mesurable. A chaque instant $n = 1, 2, \dots$, la nature est dans un certain état $b_n \in B$ et le preneur de décision (DM) doit choisir une action $a_n \in A$. Il observe alors un résultat $H(a_n, b_n)$. Nous supposons que

- la suite $\{a_n, b_n\}_{n \geq 0}$ est un processus aléatoire défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et adapté à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$;
- sachant l'historique \mathcal{F}_n , le DM et la nature agissent indépendamment :

$$\mathbb{P}((a_n, b_n) \in da \times db \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(a_n \in da \mid \mathcal{F}_n) \mathbb{P}(b_n \in db \mid \mathcal{F}_n);$$

- le DM garde en mémoire la moyenne empirique de l'historique des résultats,

$$x_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(a_i, b_i),$$

- la décision du DM est basée uniquement sur x_n . C'est-à-dire

$$\mathbb{P}(a_n \in da \mid \mathcal{F}_n) = Q_{x_n}(da),$$

où $Q_x(\cdot)$ est une mesure de probabilité sur A pour tout $x \in E$, et $x \in E \mapsto Q_x(da) \in [0, 1]$ est mesurable pour tout ensemble mesurable $da \subset A$. La famille $Q = \{Q_x\}_{x \in E}$ est une stratégie pour le DM.

L'hypothèse (c) ci-dessus peut être justifiée en considérant une mémoire limitée et une rationalité bornée. La motivation de cet exemple vient, entre autres, des travaux de Smale concernant le dilemme du prisonnier (voir [89]), de la théorie de l'approchabilité de Blackwell [24] (voir aussi [91]), ou encore du "fictitious play" et du "stochastic fictitious play" en théorie des jeux (voir p.ex. [40]).

Pour chaque $x \in E$ définissons

$$C(x) = \left\{ \int_{A \times B} H(a, b) Q_x(da) \nu(db) : \nu \in \mathcal{P}(B) \right\}.$$

où $\mathcal{P}(B)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur B . Nous avons alors

$$\mathbb{E}(H(a_{n+1}, b_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \in C(x_n) \subset \overline{C}(x_n),$$

où \overline{C} représente une extension fermée (c.-à-d. son graphe est fermé) de C telle que $\overline{C}(x)$ est le plus petit ensemble convexe contenant $C(x)$.

Nous pouvons étendre \overline{C} à une fonction multivaluée (que nous noterons encore \overline{C}) définie sur \mathbb{R}^m tout entier (voir Remarque 1.2 dans [16]). Alors la fonction $F(x) = -x + \overline{C}(x)$ est standard et le processus (x_n) vérifie la récurrence

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1}(-x_n + H(a_{n+1}, b_{n+1})),$$

que nous pouvons écrire comme

$$x_{n+1} - x_n \in \gamma_{n+1}(F(x_n) + U_{n+1})$$

avec $\gamma_n = \frac{1}{n}$ et $U_{n+1} = H(a_{n+1}, b_{n+1}) - \int_A H(a, b_{n+1}) Q_{x_n}(da)$.

En s'inspirant des travaux de Benaïm et Hirsch présenté dans les sections précédentes, les auteurs de [16] relient le comportement asymptotique de la suite aléatoire $(x_n)_{n \geq 0}$ à celui des solutions de l'inclusion différentielle (8).

Sous l'hypothèse 0.18, l'inclusion différentielle (8) admet au moins une *solution* pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^m$ (c.-à-d. une fonction $\mathbf{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ absolument continue telle que $\dot{\mathbf{z}}(t) \in F(\mathbf{z}(t))$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et telle que $\mathbf{z}(0) = x$). Ainsi nous pouvons définir le système dynamique multivalué $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ par

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{z}(t) : \mathbf{z} \text{ est une solution de (1.7), } \mathbf{z}(0) = x\}.$$

Nous noterons S_Φ l'ensemble des solutions entières de Φ , c.-à-d. définies sur \mathbb{R} et S_Φ^+ l'ensemble des demi-solutions de Φ , c.-à-d. définies sur \mathbb{R}_+ (pour plus de détails, voir section 1.3.2).

Benaïm et al.[16] ont alors défini la notion de *pseudo-trajectoire asymptotique* pour un système dynamique multivalué.

Définition 0.20. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une pseudo-trajectoire asymptotique (PTA) pour Φ si pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \sup_{0 \leq h \leq T} \|X(t+h) - \mathbf{z}(h)\| = 0.$$

Nous noterons Θ , le *flot translation* sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ défini par

$$\Theta_t(f)(s) := f(t+s),$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, et D la distance sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ définie dans la section 1.1.5. La proposition suivante rend compte de l'importance du flot translation. En effet, au cours de ce travail, nous utiliserons souvent le lien (expliqué dans la section 1.3.2) entre le système dynamique Φ et la dynamique du flot translation sur l'ensemble des solutions de l'inclusion différentielle (8).

Proposition 0.21. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une PTA si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\Theta_t(X), S_\Phi) = 0,$$

avec la convention établie dans la remarque 1.26.

Benaïm et al. [16] ont adapté la notion de *réurrence par chaîne* de Conley aux systèmes dynamiques multivalués (cf. Section 1.3.2), dans le but d'obtenir un résultat similaire au Théorème 0.5. Ils ont alors prouvé la caractérisation suivante des ensembles limite d'une PTA :

Théorème 0.22 (Benaïm et al. [16]). Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ une PTA bornée de Φ . Alors $\mathcal{L}(\mathbf{z})$ est intérieurement transitif par chaîne.

La preuve du théorème précédent est calquée sur celle du Théorème 0.5 donnée par Benaïm et Hirsch [13]. L'idée est d'interpréter l'ensemble limite $\mathcal{L}(X)$ comme un ensemble ω -limite du flot translation restreint à l'ensemble des solutions entières du système dynamique Φ .

Le résultat suivant établit, à l'image du Théorème 0.6, le lien entre un algorithme d'approximation stochastique associé à (8) et une PTA.

Théorème 0.23 (Benaïm et al. [16]). Soit (x_n) un algorithme d'approximation stochastique associé à (8) satisfaisant la condition de Robbins-Monro. Supposons que (x_n) soit borné. Alors, sous les hypothèses (A) ou (B) du Théorème 0.6, le processus continu dans le temps \mathbf{X} associé à $(x_n)_{n \geq 0}$ est

une pseudo-trajectoire asymptotique du système dynamique multivalué induit par (8).

La partie probabiliste de la preuve est totalement calquée sur celle du théorème 0.6. En revanche, la partie déterministe n'est pas aussi directe. Il faut utiliser des théorèmes de compacité, via les hypothèses de semi-continuité supérieure de F et la convexité des valeurs de F . Il est important de souligner que dans le contexte EDO, la caractéristique lipschitzien du champ vectoriel permet, via le lemme de Grönwall, d'obtenir une borne supérieure de la vitesse de convergence du processus vers l'ensemble des solutions (au sens de (5)). Ici, sans hypothèse supplémentaire, la nature multivaluée de F ne permet pas d'utiliser le lemme de Grönwall et ne donne qu'un résultat qualitatif de convergence.

Présentation des résultats

Les résultats obtenus au cours de cette thèse se situent dans la continuité des travaux initiés par Benaïm, Hofbauer et Sorin [16] exposés dans la section précédente.

Convergence avec probabilité positive

Le Chapitre 2 est consacré à la généralisation aux inclusions différentielles du Théorème 0.10 et à son application aux algorithmes d'approximation stochastiques associés à (8). Il s'agit d'un travail en collaboration avec Mathieu Faure (Université de Neuchâtel).

Soit \mathbf{X} un processus stochastique continu dans le temps, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^m , et adapté à une certaine filtration (\mathcal{F}_t) . L'hypothèse 0.7 est adaptée pour les systèmes dynamiques multivalués :

Hypothèse 0.24. *Il existe une fonction $\omega: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $\delta > 0$ et tout $T > 0$,*

$$\omega(t, \delta, T) \downarrow_{t \rightarrow +\infty} 0,$$

et

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \inf_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}} \sup_{0 \leq h \leq T} \|\mathbf{z}(h) - \mathbf{X}(s+h)\| \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t \right) \leq \omega(t, \alpha, T), \quad (10)$$

presque sûrement.

Théorème 1 (Théorème 2.13). *Soient $A \subset \mathbb{R}^m$ un attracteur (définition 1.60) pour le système dynamique multivalué Φ induit par (8) et $(\mathbf{X}(t))_{t \geq 0}$ un processus adapté satisfaisant l'hypothèse 0.24. Alors, si $\text{Att}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$, nous avons*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{X}) \subset A) > 0.$$

Théorème 2 (Théorème 2.20). *Soit $(x_n)_n$ un algorithme d'approximation stochastique associé à (8) tel que $(U_n)_n$ satisfait des conditions appropriées (voir hypothèse 2.10). Alors, si A est un attracteur relatif à F et \mathbf{X} est le processus en temps continu associé à $(x_n)_n$, nous avons*

$$\text{Att}(\mathbf{X}) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{X}) \subset A) > 0.$$

L'hypothèse (2.10) est une condition technique (voir Chapitre 2) qui sera typiquement vérifiée pour des algorithmes de Robbins-Monro satisfaisant les hypothèses (A) ou (B) du Théorème 0.6.

Remarquons que le Théorème 2 généralise la Proposition 0.8. La complexité de ce résultat réside dans l'impossibilité d'utiliser le Lemme de Grönwall quand F est une fonction multivaluée standard. En effet, dans le cas de l'EDO, ce dernier permet de contrôler directement la distance entre le processus et l'ensemble des solutions du flot avec un terme dépendant uniquement du bruit $(U_n)_n$ et du pas $(\gamma_n)_n$ (cf. Remarque 0.11). Ici, nous n'avons pas un contrôle explicite. Nous utilisons un argument de type *point fixe* via un lemme technique (cf. Lemme 2.15) et obtenons ainsi un résultat qualitatif.

Applications : Dans la Section 2.3, nous appliquons ce résultat en théorie des jeux et, plus précisément, au modèle d'apprentissage appelé *Markovian fictitious play* (voir Benaïm et Raimond [21] et Benaïm et al. [17]). L'*information* des joueurs est la même que pour le modèle du *smooth fictitious play* (SFP) développé par Fudenberg et Levine (voir [39] et [40]). Dans

un SFP, les joueurs utilisent une stratégie de *meilleure réponse* contre la moyenne empirique des actions jouées par leurs adversaires, par rapport à une fonction de gain perturbée. Pour adopter une telle stratégie, les joueurs doivent être informés de leur propre fonction de gain, ainsi que de l'historique des actions jouées par leurs adversaires.

Dans le modèle du *Markovian fictitious play*, nous supposons que l'ensemble des actions qu'un joueur peut jouer à un certain instant est un sous-ensemble de l'ensemble des actions, qui dépend de la dernière action jouée.

Nous considérons un jeu à deux joueurs. Soit $I = \{1, \dots, m^1\}$ (resp. $J = \{1, \dots, m^2\}$) l'ensemble fini des actions du joueur 1 (resp. 2). Les fonctions de gain des deux joueurs seront notées respectivement $(U^1, U^2) : I \times J \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1 (resp. 2) est le simplexe Δ^{m^1-1} que nous noterons Δ_1 (resp. Δ^{m^2-1} noté Δ_2). Nous noterons $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$.

Nous utiliserons la convention pour $y \in \Delta_2$:

$$U^1(i, y) = \sum_{l \in J} U^1(i, l) y_l,$$

et de même pour $x \in \Delta_1$.

Pour $x \in \Delta_1$, $y \in \Delta_2$, nous appelons la fonction de *meilleure réponse* du joueur 1

$$br^1(y) := \operatorname{Argmax}_{x \in \Delta_1} U^1(x, y)$$

et celle du joueur 2

$$br^2(x) = \operatorname{Argmax}_{y \in \Delta_2} U^2(x, y).$$

Nous définissons alors la fonction multivaluée $F : \Delta \rightrightarrows \Delta$ par

$$F(x, y) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in br^1(y) - x, \beta \in br^2(x) - y\}.$$

Le jeu est répété et l'action choisie par le joueur 1 (resp. 2) à l'instant $n \in \mathbb{N}$ est notée X_n (resp. Y_n). La moyenne empirique des actions jouées par le joueur 1 (resp. 2) jusqu'au temps n est notée \bar{x}_n (resp. \bar{y}_n). Nous notons le couple des moyennes empiriques $v_n = (\bar{x}_n, \bar{y}_n)$.

Soit $\{M_n^1(i, j; \bar{y})\}_{n \geq 1}$ une famille de matrices stochastiques, contrôlées par un paramètre $\bar{y} \in \Delta_2$ (pour plus de détail concernant la définition de cette famille de matrices, voir la Section 2.3). On dit que le joueur 1 adopte

une *stratégie de Markovian fictitious play* relative à la famille $\{M_n^1\}_{n \geq 1}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n) = M_n^1(X_n, j; \bar{y}_n).$$

Nous supposons maintenant que les deux joueurs jouent une stratégie de *Markovian fictitious play*. En appliquant le Théorème 2 au processus (v_n) et à la fonction multivaluée F , nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3 (Théorème 2.25). *Si les familles de matrices $(M_n^i(\bar{y}))_{n \geq 1}$ ($i = 1, 2$) satisfont les hypothèses adéquates (voir Chapitre 2), alors*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}((v_n)_n) \subset A) > 0,$$

pour tout attracteur A du système dynamique multivalué induit par F .

Supposons que $U^1 = U^2 = U$ (ce que nous appellerons un *jeu potentiel*) et appelons Λ l'ensemble des maxima locaux de U :

$$\Lambda = \{u \in \Delta : \exists V_u \in \mathcal{N}_u : \forall v \in V_u, U(v) \leq U(u)\},$$

où \mathcal{N}_u est l'ensemble des voisinages ouverts de u . Un point $(x^*, y^*) \in \Delta$ est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout $x \in \Delta_1$ et pour tout $y \in \Delta_2$,

$$U(x^*, y^*) \geq U(x, y^*) \quad \text{et} \quad U(x^*, y^*) \geq U(x^*, y).$$

Remarquons que l'ensemble NE des équilibres de Nash contient Λ .

Corollaire 4 (Corollaire 2.27). *Supposons que C est une composante connexe fermée (dans Δ) de Λ et isolée, au sens où il existe un voisinage ouvert W de C tel que $W \cap \Lambda = C$. Alors C est un attracteur pour la dynamique de la meilleure réponse et ainsi, sous les hypothèses du Théorème 2.25, nous avons*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}((v_n)_n) \subset C) > 0.$$

Convergence faible des pseudo-trajectoires asymptotiques

La généralisation aux inclusions différentielles de la Proposition 0.13 et du Théorème 0.15 fait l'objet du Chapitre 3. Il s'agit d'une collaboration avec Mathieu Faure (Université de Neuchâtel).

La première étape consiste à définir proprement la notion de *mesure invariante* et de *centre de Birkhoff* pour un système dynamique multivalué Φ (c.f. Définition 1.42). A cette fin, nous nous inspirons du travail de Miller et Akin [71] dans lequel ils donnent plusieurs définitions équivalentes d'une mesure invariante pour un système dynamique à temps discret, induit par une fonction multivaluée fermée. Soit $M \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble compact et invariant pour Φ (c.f. Définition 1.52). Définissons la projection $\pi_0 : \mathcal{C}(\mathbb{R}, M) \rightarrow M$ par $\pi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(0)$. Nous donnons la définition suivante

Définition 1. *Une mesure μ sur M est dite invariante pour le système dynamique multivalué Φ s'il existe une mesure de probabilité ν sur S_Φ telle que*

- a) $\pi_0^*(\nu) = \mu$, c.-à-d. $\mu(A) = \nu(\pi_0^{-1}(A))$ pour tout borelien $A \subset M$,
- b) ν est Θ -invariante.

Nous justifions cette définition en prouvant (cf. Théorème 3.6) qu'une mesure est invariante pour Φ si et seulement si elle l'est (au sens de Miller et Akin) pour Φ_t , et ce, pour tout $t > 0$.

Aubin, Frankowska et Lasota [5] ont démontré le théorème de récurrence de Poincaré pour des systèmes dynamiques multivalués discrets. Nous donnons une version topologique de ce résultat dans le cas continu :

Théorème 5 (Théorème 3.10). *Soit μ une mesure invariante pour Φ , alors*

$$\mu(\text{BC}(\Phi)) = 1,$$

où $\text{BC}(\Phi) = \overline{\{x \in M \mid x \in \mathcal{L}(x)\}}$ et $\mathcal{L}(x) = \bigcup_{\mathbf{z} \in S_\Phi(x)} \mathcal{L}(\mathbf{z})$.

Ce résultat est une conséquence directe de la version topologique du théorème de récurrence de Poincaré pour un flot. En effet, par la définition ci-dessus, il suffit d'appliquer le théorème de Poincaré au flot translation sur l'espace des trajectoires.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous définissons une *pseudo-trajectoire asymptotique faible* (PTAF) pour un système dynamique multivalué et nous prouvons la généralisation du Théorème 0.15 :

Théorème 6 (Théorème 3.12). *Soit \mathbf{X} une PTAF pour un système dynamique multivalué Φ . Les valeurs d'adhérence, pour la topologie faible*

étoile, des mesures empiriques

$$\mu_t(\omega) := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s,\omega)} ds$$

sont presque sûrement des mesures invariantes pour Φ .

La preuve de ce théorème est guidée par la vérification des conditions données par la Définition 1. Nous utilisons des résultats classiques de compacité pour prouver l'existence d'un candidat ν , et un résultat de *convergence faible* des mesures empiriques d'occupation associées à la trajectoire d'un flot pour montrer la condition a). Une partie probabiliste, utilisant un résultat de convergence de Doob, montre la condition b).

Finalement, nous relierons la notion de PTAF avec les algorithmes d'approximation stochastiques.

Théorème 7. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ un algorithme d'approximation stochastique associé à (8). Supposons que*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E} (\|U_{n+1}\| \mathbf{1}_{\{\|U_{n+1}\| \geq R\}} | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Alors le processus \mathbf{X} en temps continu associé à (x_n) est une pseudo-trajectoire asymptotique faible pour Φ induit par l'inclusion différentielle (8).

Ce théorème est un corollaire d'un résultat plus général, le Théorème 3.19.

Algorithmes d'approximation stochastiques à pas constant

Dans le Chapitre 4, nous développons une approche dynamique des algorithmes d'approximation stochastiques à pas constant associés à une inclusion différentielle. Il s'agit d'un travail en commun avec William H. Sandholm (Université du Wisconsin, USA).

La motivation de cette partie provient de la théorie des jeux. Les théorèmes 0.16 et 0.17 ont une importance majeure dans l'étude des jeux évolutifs. Plus précisément, ils contribuent à la compréhension du comportement de populations (finies) d'agents, interagissant via un jeu répété et actualisant leur comportement en utilisant des règles de décision simples (voir Benaïm et Weibull [20], Sandholm [86, 88]). Néanmoins, ces résultats sont limités à

des situations où le champ de vecteurs moyen est lipschitzien. Cette restriction exclut les dynamiques de jeux pour lesquelles les joueurs basent leur prise de décision sur une optimisation exacte. Un exemple fondamental de dynamique de jeu évolutif est celle de la *meilleure réponse* (Gilboa et Matsui [42] et Hofbauer [47]). Or l'analyse des processus stochastiques qui y sont associés n'a été faite que pour des cas spéciaux (voir [43, 44]).

Le but de ce travail est donc d'établir les fondements d'une étude systématique des algorithmes d'approximation stochastiques à pas constant associés à une inclusion différentielle, en utilisant principalement la dynamique induite par cette dernière.

A l'image du travail effectué par Benaïm et al. [16] pour des pas décroissants, nous définissons une classe de familles de processus $\{(x_n^\varepsilon)_{n \geq 0}\}_{\varepsilon > 0}$ (cf. définition 4.2) qui seront dites familles de *processus stochastiques d'approximation généralisés* (PSAGs), satisfaisant la relation de récurrence

$$x_{n+1}^\varepsilon - x_n^\varepsilon - \varepsilon U_{n+1}^\varepsilon \in \varepsilon F(x_n^\varepsilon),$$

où F est une fonction multivaluée standard et $\{(U_n^\varepsilon)_{n \geq 0}\}_\varepsilon$ une famille de suite de variables aléatoires adaptées à la filtration \mathbb{F} .

Nous généralisons alors les Théorèmes 0.16 et 0.17 aux inclusions différentielles.

Soit $M \subset \mathbb{R}^m$ un sous-ensemble compact et positivement invariant (cf. définition 1.52) pour le système dynamique induit par (8). Considérons une famille $\{(x_n^\varepsilon)\}_\varepsilon$ de PSAGs associée à l'inclusion différentielle (8). Nous noterons $\mathbf{X}^\varepsilon(\cdot)$ le processus en temps continu associé à (x_n^ε) et Φ le système dynamique multivalué associé à (8).

Théorème 8 (Théorème 4.8). *Pour tout $T > 0$ et tout $\alpha > 0$, nous avons*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi^+} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\mathbf{X}^\varepsilon(s) - \mathbf{z}(s)\| \geq \alpha \mid \mathbf{X}^\varepsilon(0) = x \right) = 0.$$

uniformément en $x \in M$.

Le Théorème 8 est une conséquence de la Proposition 4.30 qui généralise ce résultat à une classe plus large de processus stochastiques appelés *solutions perturbées faibles*. En considérant un horizon de temps T fini, nous ne pouvons pas espérer la convergence de la famille de processus (\mathbf{X}^ε) vers

l'ensemble des solutions entières S_Φ . C'est pourquoi l'infimum est pris sur l'ensemble des demi-solutions S_Φ^+ et non sur l'ensemble S_Φ .

Le résultat de *convergence faible* est établi sous une hypothèse markovienne, c.-à-d. nous supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, le processus (x_n^ε) est une chaîne de Markov. Nous ne pouvons pas attendre que toute valeur d'adhérence μ , de la famille des mesures invariantes des chaînes de Markov (x_n^ε) , soit une mesure invariante pour Φ , au sens de la Définition 1. En effet, cette dernière nécessite l'existence d'une mesure ν sur l'ensemble des solutions entières S_Φ telle que son image par la projection π_0 soit μ or, au vu du Théorème 8, la famille des processus en temps continu $\mathbf{X}^\varepsilon(\cdot)$ converge vers l'ensemble des demi-solutions S_Φ^+ . Nous définissons alors la notion de *semi-invariance* (c.f. définition 4.10) qui, elle, nécessite l'existence d'une mesure $\tilde{\nu}$ sur l'ensemble S_Φ^+ . Par ailleurs, dans la Section 3.5.3, nous montrons que toute mesure invariante est semi-invariante mais la réciproque reste un problème ouvert.

Théorème 9 (Théorème 4.12). *Soient μ^ε une mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov (x_n^ε) et μ une valeur d'adhérence de la famille $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ pour la topologie faible étoile. Alors μ est une mesure semi-invariante pour Φ .*

La preuve du Théorème 9 utilise cruciallement la Définition 4.10. L'idée principale est, dans un premier temps, de transporter la mesure invariante μ^ε de la chaîne de Markov sur l'ensemble des trajectoires discrètes, via le Théorème de Daniell-Kolmogorov. Nous montrons alors une condition suffisante (cf. Proposition 4.11) sur la famille de mesures ainsi définies pour qu'une valeur d'adhérence de la famille $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ soit semi-invariante.

Applications : Dans la Section 4.4, nous appliquons les Théorèmes 8 et 9 à des modèles de jeux de population évolutifs. Un *jeu de population* décrit le comportement d'une population d'individus qui interagissent entre eux au travers d'un jeu. Considérons une population de $N \in \mathbb{N}$ *individus*, chacun d'eux choisissant une *stratégie* dans un ensemble fini $S = \{1, \dots, m\}$. Nous dirons qu'un individu est du *type* i s'il a choisi la stratégie i . La distribution des stratégies choisies par la population est représentée par un point dans le simplexe $\Delta^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^m : \sum_i x_i = 1\}$ que nous appelons l'*état de la population*. Le scalaire $x_i \in \mathbb{R}_+$ représente donc la proportion d'individus de

type i .

Formellement, un jeu de population est défini par une fonction continue $F: \Delta^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Le scalaire $F_i(x)$ représente le gain de la stratégie $i \in S$ quand l'état de la population est x . En d'autres termes, un individu de *type* $i \in S$ reçoit un gain égal à $F_i(x)$. Remarquons que la fonction F ne dépend pas de la taille de la population N , ainsi elle décrit aussi un jeu pour une population de taille infinie, c.-à-d. pour un continuum de joueurs. Ce type de jeux, où la stratégie d'un joueur n'influence en rien la gain des autres joueurs, est appelé *jeux non-atomiques*.

Le jeu est répété à chaque instant $n \in \mathbb{N}$. Afin de modéliser l'évolution du jeu, nous supposons que chaque joueur reçoit occasionnellement une opportunité de changer sa stratégie. Dans ce cas, l'état de la population évolue au cours du temps et est noté $x_n^N \in \Delta^{m-1}$ pour l'instant $n \in \mathbb{N}$. Les arrivées de ces opportunités sont telles que leur nombre espéré pour un joueur dans une unité de temps est 1. Nous considérons trois types d'arrivée :

- I. Chaque unité de temps est subdivisée en intervalles de longueur $\frac{1}{N}$. A la fin de chaque sous-intervalle, un des N joueurs est choisi au hasard et reçoit une opportunité de changer de stratégie.
- II. A la fin de chaque sous-intervalle, chaque joueur reçoit une opportunité de changer sa stratégie avec une probabilité de $\frac{1}{N}$ (de manière indépendante par rapport aux autres joueurs et par rapport au temps).
- III. Les arrivées des opportunités de chaque joueur sont données par des processus de Poisson de paramètre 1. Ce type d'arrivée débouchera sur un processus à temps continu.

Lorsqu'un joueur de type i reçoit une telle opportunité, son changement de stratégie est gouverné par un *protocole de révision* : il effectuera une révision avec une probabilité $r_i(x)$ dépendante de l'état de la population x ; s'il considère un changement, il choisit une stratégie $j \in S$ avec une probabilité $\sigma_{i,j}(x)$. Nous étudions trois types de protocole de révision : *meilleure réponse* (voir Exemple 4.21), *meilleure réponse tempérée* (voir Exemple 4.22) et *meilleure réponse échantillonnée* (voir Exemple 4.23). Nous montrons que, pour ces différents types d'arrivée et de protocole de révision, la famille de processus $\{(x_n^N)\}_{N \geq 1}$ est une famille de PSAGs associée à une dynamique multivaluée dépendante du protocole de révision. De plus pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$(x_n^N)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Ainsi les résultats énoncés ci-dessus permettent de comprendre le comportement à horizon fini et infini de ces processus quand la taille de la population tend vers l'infini, et ce, pour certaines classes de jeux. Une telle analyse a déjà été réalisée par Hofbauer et Sandholm [51] pour des processus basés sur le protocole de révision de la *meilleure réponse perturbée* qui conduit à une dynamique moyenne lisse, autorisant ainsi l'utilisation des résultats d'approximation stochastique dans un contexte univalué.

La notion d'équilibre que nous considérons est celle d'un jeu non-atomique : l'état $x \in \Delta^{m-1}$ est un *équilibre de Nash* de F si $x_i > 0$ implique que $F_i(x) \geq F_j(x)$ pour tout $j \in S$. Autrement dit, l'état de la population est un équilibre de Nash si aucun individu (infinitésimal) peut augmenter son propre gain en changeant de stratégie. Dans un contexte de jeux de congestion, la terminologie *équilibre de Wardrop* peut être utilisée. Les théorèmes 4.27 et 4.28 illustrent le fait qu'un jeu de "grande" population peut être approximé par un jeu non-atomique.

Notre analyse portera sur les jeux potentiels et les jeux stables. Dans un jeu potentiel, toute l'information concernant les gains qui est utile aux individus peut être regroupée dans une seule fonction à valeur réelle. L'existence de cette fonction, dite le *potentiel du jeu*, procure au jeu des propriétés intéressantes. En particulier, les équilibres de Nash satisfont les conditions du premier ordre de Kuhn-Tucker pour maximiser le potentiel.

Un jeu de population $F: \Delta^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un *jeu stable* si

$$(y - x)^T (F(y) - F(x)) \leq 0 \quad \forall x, y \in \Delta^{m-1},$$

où u^T représente le vecteur ligne associé à $u \in \Delta^{m-1}$. Cette classe de jeux contient, entre autres, les jeux à somme nulle et les jeux potentiels avec un potentiel concave. Une des propriétés intéressantes de ces jeux est que l'ensemble de leurs équilibres de Nash forme un sous-ensemble convexe de l'espace d'état Δ^{m-1} . Pour plus de détails concernant ces deux classes de jeux, le lecteur peut se référer à la Section 4.4.4 ou à l'ouvrage de Sandholm [88].

Nous introduisons deux notions de convergence : la famille de processus interpolés $\{X^N\}_{N \geq 1}$ (associée à la famille $\{(x_n^N)\}$) converge à *moyen terme* du sous-ensemble $A \subset \Delta^{m-1}$ (si $A = \Delta^{m-1}$, nous ne le précisons pas) vers

le sous-ensemble fermé $C \subset \Delta^{m-1}$ si, pour tout $x \in A$ et tout $\alpha > 0$, il existe un temps $T = T(x)$ tel que, pour tout $U \geq T$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T, U]} \inf_{c \in C} \|X^N(t) - c\| \geq \alpha \mid X_0^N = x \right) = 0.$$

La famille $\{X^N\}_{N \geq 1}$ converge à long terme vers le sous-ensemble fermé $C \subset \Delta^{m-1}$ si, pour toute suite de mesures invariantes $\{\mu^N\}_{N=N_0}^\infty$ des chaînes de Markov $\{(x_n^N)\}$ et tout sous-ensemble ouvert O contenant C , nous avons que $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N(O) = 1$.

Les résultats obtenus sont énoncés uniquement pour les types d'arrivée I et II afin d'en simplifier l'expression :

Théorème 10 (Théorème 4.27). *Considérons un jeu F soit potentiel ou stable. Pour les types d'arrivée I et II et pour les protocoles de la meilleure réponse et de la meilleure réponse tempérée, la famille de processus $\{X^N\}_{N=N_0}^\infty$ converge à moyen et à long terme vers l'ensemble des équilibres de Nash de F .*

Nous concluons le Chapitre 4 en donnant un résultat de convergence pour le protocole de révision de la meilleure réponse échantillonnée.

Théorème 12 (Théorème 4.28). *Supposons que la stratégie i est un équilibre p -dominant itéré d'un jeu F . Pour les types d'arrivée I et II et le protocole de la meilleure réponse échantillonnée, sous certaines hypothèses sur l'échantillonnage, la famille de processus $\{X^N\}_{N=N_0}^\infty$ converge à moyen terme de l'ensemble $\Delta_i^+ := \{x \in \Delta^{m-1} : x_i > 0\}$ vers le singleton $\{e_i\}$.*

Les concepts, introduits par Morris et al. [73] et Tercieux [95], de p -dominance et équilibre p -dominant itéré sont présentés dans la section 4.4.4.

Dans tout ce chapitre, nous considérons un espace métrique (E, d) et un entier naturel $m \geq 1$. Pour un sous-ensemble $A \subset E$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, nous noterons $N^\varepsilon(A) := \{x \in E \mid d(x, A) < \varepsilon\}$, le ε -voisinage de A . La norme usuelle sur \mathbb{R}^m sera notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ (resp. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m)$) l'ensemble des fonctions $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ continues (resp. continuellement différentiables).

1.1 Systèmes dynamiques

Cette section est dédiée aux rappels de notions, provenant de la théorie des systèmes dynamiques topologiques, qui seront utiles pour la compréhension du comportement asymptotique des algorithmes d'approximation stochastiques.

1.1.1 Flot et équation différentielle ordinaire

Commençons par définir l'objet principal de cette section.

Définition 1.1. *Un flot sur E est une fonction $\phi: E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ continue pour la topologie produit sur $E \times \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E$,*

(i) $\phi(x, 0) = x$,

(ii) pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$.

La fonction $\phi(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow E$ est l'orbite de x par ϕ . L'ensemble des orbites de ϕ est noté S_ϕ . Par la suite, nous pourrions noter $\phi_t(x)$ au lieu de $\phi(x, t)$.

Remplacer \mathbb{R} par \mathbb{R}_+ , définit un semi-flot.

La suite de cette section est consacrée au flot induit par l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

où $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un champ de vecteurs continu.

Géométriquement, une solution \mathbf{x} de (1.1) est une courbe dans \mathbb{R}^m qui épouse le champ de vecteurs en tout temps.

Définition 1.2. *La fonction $\mathbf{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution globale de l'EDO (1.1) si elle est différentiable et si pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t)).$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t F(\mathbf{x}(s)) ds.$$

Une solution globale \mathbf{x} telle que $\mathbf{x}(0) = x \in \mathbb{R}^m$ sera dite solution au point x .

Le lien entre les équations différentielles ordinaires et les flots est donné par les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, ainsi que par leur dépendance aux conditions initiales. Typiquement, un champ de vecteur globalement lipschitzien admettra une unique solution globale en tout point. Ainsi, le flot ϕ associé à l'EDO (1.1) est défini par

$$\phi(x, t) := \mathbf{x}(t),$$

où $\mathbf{x}(\cdot)$ est l'unique solution globale de (1.1) telle que $\mathbf{x}(0) = x$. Pour l'énoncé des théorèmes susmentionnés, le lecteur peut se référer au livre de Hirsch et al. [46].

Les champs de vecteurs considérés dans l'introduction de ce manuscrit et dans la suite de cette section sont supposés globalement lipschitziens. L'exemple suivant d'EDO est tiré du livre de Hirsch et al. ([46]).

Exemple 1.3 (Pendule physique). *Intéressons nous au comportement d'un pendule constitué d'une tige de longueur λ à laquelle est attachée une boule de masse m . Supposons que l'autre extrémité de la tige est accrochée à un mur de telle sorte que la structure puisse tourner librement. Ainsi la boule*

se déplace sur un cercle de rayon λ . La position de la boule au temps t est totalement décrite par l'angle $\theta(t)$ de la tige avec la droite perpendiculaire au sol passant par le point d'accroche du pendule (mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre). Ainsi la position de la masse m au temps t est donnée par : $(\lambda \sin \theta(t), -\lambda \cos \theta(t))$.

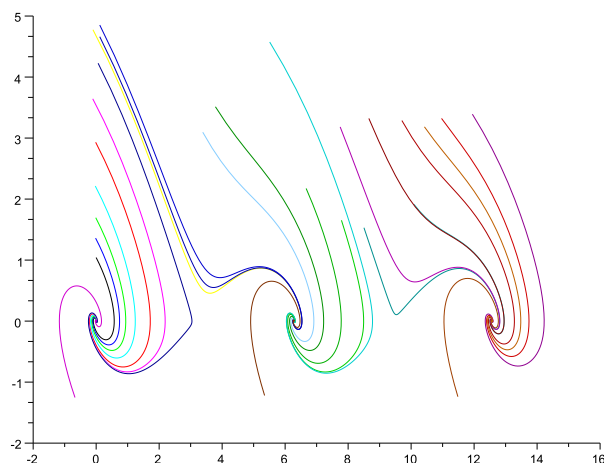
Nous supposons que les deux seules forces agissant sur le pendule sont la force de la gravité et la force de frottement. La première est une force constante égale à mg agissant perpendiculairement au sol. La force de frottement est proportionnelle à la vitesse de la boule et donc donnée par $-\epsilon \lambda \dot{\theta}(t)$ pour une certaine constante $\epsilon > 0$. Ainsi, d'après les lois de Newton, nous pouvons écrire l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m \lambda \ddot{\theta} = -\epsilon \lambda \dot{\theta} - mg \sin \theta. \quad (1.2)$$

Pour simplifier, nous supposons que $m = \lambda = g = 1$. En posant $v = \dot{\theta}$, (1.2) se réécrit comme l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\epsilon v - \sin \theta, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $(\theta, v) \in \mathbb{R}^2$. Le flot peut ainsi être représenté par le portrait de phase partiel suivant :



où l'abscisse représente θ et l'ordonnée v .

Nous définissons la notion d'invariance pour un flot ϕ .

Définition 1.4. *Un sous-ensemble $L \subset E$ est invariant (resp. positivement invariant) par ϕ si*

$$\phi_t(L) \subset L,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \geq 0$).

Au cours de ce travail, il sera utile de pouvoir restreindre le flot à un sous-ensemble. Afin que cette restriction ait un sens, le sous-ensemble en question doit être invariant par ϕ .

Définition 1.5. *Soit $L \subset E$ un sous-ensemble invariant par ϕ . Le flot restreint à L , noté ϕ^L , est défini par*

$$\phi^L(x, t) := \phi(x, t),$$

pour tout $x \in L$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

La fonction ϕ^L est clairement un flot pour L muni de la topologie induite.

1.1.2 Ensembles limite et notion de récurrence

Par la suite, ϕ désignera un flot sur E . Dans le but de comprendre le comportement asymptotique des orbites de ϕ , il est naturel de définir leurs ensembles limite.

Définition 1.6. *Soit $x \in A \subset E$. L'ensemble*

$$\omega_\phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_{[t, \infty[}(x)\}}$$

est l'ensemble ω -limite de x et de la même manière,

$$\omega_\phi(A) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi_{[t, \infty[}(A)\}}$$

est l'ensemble ω -limite de A .

En inversant le temps, nous obtenons l'ensemble α -limite de x , c'est-à-dire l'ensemble

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{\phi_{]-\infty, t]}(x)\}.$$

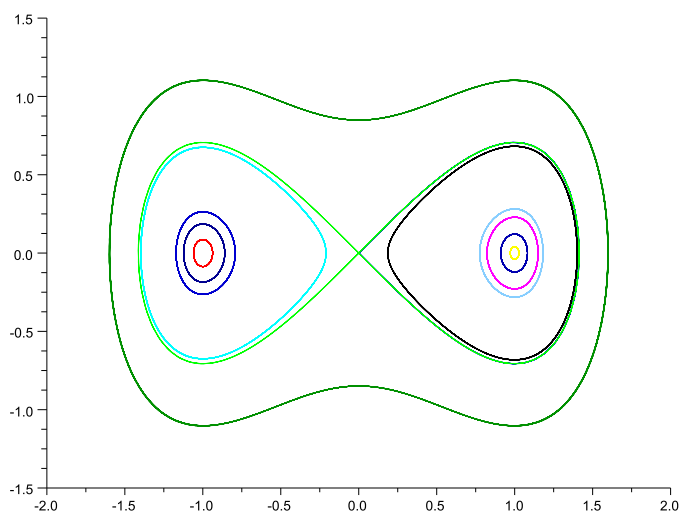
Remarque 1.7. Une conséquence de la définition ci-dessus est que l'ensemble $\omega_\phi(x)$ est l'ensemble maximal invariant dans $\overline{\{\phi_{[0,\infty[}(x)\}}$. Par ailleurs remarquons que l'ensemble $\omega_\phi(A)$ peut ne pas être égale à l'union

$$\bigcup_{x \in A} \omega_\phi(x).$$

En effet, considérons le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x - x^3). \end{aligned}$$

Le portrait de phase partiel de l'équation différentielle ordinaire associée au champ de vecteurs F est le suivant :



Remarquons que l'ensemble $\omega_\phi(x)$ est le singleton $\{0\}$ pour tout point x appartenant à l'une des deux courbes homoclines γ_1 et γ_2 (courbes vertes se recoupant en 0). Or l'ensemble ω -limite de la réunion de γ_1 et γ_2 est

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{0\}.$$

Plus généralement, définissons l'ensemble limite d'une fonction.

Définition 1.8. Soit $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une fonction. L'ensemble

$$\mathcal{L}(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{X([t, \infty[)\}}$$

est l'ensemble limite de X .

Remarquons que cet ensemble peut être vide. Pour parer à cette éventualité, nous considérerons principalement des trajectoires précompactes :

Définition 1.9. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ est dite précompacte s'il existe $t > 0$ tel que

$$\overline{\{X(s) : s \geq t\}}$$

est compact dans E .

La deuxième notion de ce paragraphe est la *réurrence*. Naïvement, elle décrit le phénomène du retour perpétuel d'une orbite vers son point de départ. Dans la littérature, de nombreuses notions relèvent de ce phénomène (voir p.ex. [53]). Ici, un point sera dit récurrent si son orbite intersecte tout voisinage de ce dernier une infinité de fois.

Définition 1.10. • Un point $x \in E$ est dit récurrent par ϕ si

$$x \in \omega_\phi(x).$$

L'ensemble

$$Rec(\phi) = \{x \in E : x \in \omega_\phi(x)\}$$

est l'ensemble des points récurrents de ϕ .

- Un sous-ensemble $L \subset E$ invariant pour ϕ est dit récurrent si tout point $x \in L$ est récurrent pour le flot ϕ^L .

Exemple 1.11. Un point d'équilibre $x \in E$, pour ϕ (c.-à-d. $\phi_t(x) = x$, pour tout $t \in \mathbb{R}$), est clairement un point récurrent. Une orbite périodique (c.-à-d. il existe $T > 0$ tel que $\phi_T(x) = x$) est un ensemble récurrent.

Lorsque nous étudierons le comportement ergodique des orbites, il sera intéressant de considérer l'adhérence de l'ensemble des points récurrents.

Définition 1.12. L'ensemble

$$BC(\phi) = \overline{Rec(\phi)}$$

est le centre de Birkhoff de ϕ .

1.1.3 Attracteur

Définition 1.13. *Un sous-ensemble $L \subset E$ est un attracteur pour ϕ si*

- (i) *il est compact et invariant par ϕ ,*
- (ii) *il existe un voisinage V de L tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(x), A) = 0,$$

uniformément en $x \in V$.

Le voisinage V est appelé voisinage fondamental de A . L'ensemble

$$\mathcal{B}(A) = \{x \in E : \phi_{[0, \infty[}(x) \text{ borné et } \omega_\phi(x) \subset A\}$$

est le bassin d'attraction de A .

Si $A \neq E$, alors A est dit attracteur propre. Un attracteur global est un attracteur dont le bassin d'attraction est l'ensemble E tout entier.

Intuitivement, un attracteur est un sous-ensemble invariant qui “attire” toutes les solutions partant “près” de lui-même..

Proposition 1.14. *Un sous-ensemble $A \subset E$ est un attracteur pour ϕ si et seulement si il existe un voisinage $V \subset E$ de A tel que*

$$\omega_\phi(V) = A.$$

Exemple 1.15. *Dans l'exemple 1.3, les points d'équilibre $\{(2k\pi, 0)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont clairement des attracteurs pour le flot. Intuitivement, si le pendule est lâché (avec une petite vitesse initiale) avec un angle proche de zero, alors il va tendre à s'arrêter dans la position d'équilibre.*

Proposition 1.16. *Etant donné un attracteur A pour ϕ , le bassin d'attraction de A est l'union de tous ses voisinages fondamentaux.*

1.1.4 Récurrence par chaîne

Les orbites périodiques et les points d'équilibre sont tous des ensembles récurrents (voir exemple 1.11). Cependant, comme le montre l'exemple suivant, tout ensemble ω -limite n'est pas récurrent.

Exemple 1.17 (Hirsch et al. [46]). *Considérons le flot induit par l'équation différentielle ordinaire associée au champ de vecteur*

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\sin(x)(-\cos(x) - \cos(y)), \sin(y)(\cos(x) - \cos(y))).$$

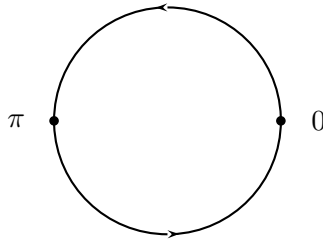
Les points $(0, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π) et $(\pi, 0)$ sont des points d'équilibre reliés entre eux par des courbes hétéroclines formant un carré. Le centre de celui-ci, le point $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, est un point source. Les trajectoires solutions émanant de ce dernier sont des spirales qui s'accroissent sur les quatre courbes hétéroclines. Ainsi l'ensemble ω -limite de tout point, se trouvant à l'intérieur du carré, est le bord du carré, mis à part le point d'équilibre $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dont l'ensemble ω -limite est lui-même. Par ailleurs, il est clair que le bord du carré n'est pas récurrent.

Qu'en est-il des ensembles limite de "solutions perturbées"? L'exemple suivant, tiré du cours de Benaïm ([11]), illustre cette question.

Exemple 1.18. *Considérons le flot ϕ sur le cercle unité $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induit par l'EDO*

$$\dot{\theta} = f(\theta),$$

où f est une fonction 2π -périodique, lisse et positive telle que $f^{-1}(0) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Le flot ainsi défini peut être représenté par le portrait de phase suivant :



De manière informelle, imaginons une trajectoire qui suit les orbites en s'autorisant de faire des petits sauts. Ainsi, son ensemble limite est le cercle tout entier qui n'est clairement pas récurrent.

La notion de *réurrence par chaîne*, introduite par Bowen ([25]) et Conley ([28]), s'adapte parfaitement à cette situation et permet, comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette thèse, de caractériser les ensembles limite de certains algorithmes d'approximation stochastiques.

Définition 1.19. • Soient $T > 0$, $\delta > 0$ et $y, z \in E$. Une (δ, T) -pseudo-orbite de y à z est la donnée d'un entier naturel $n > 0$, d'une suite finie de temps (t_0, \dots, t_{n-1}) et d'une suite finie de points $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ tels que

(i) $t_i > T$ pour $i = 0, \dots, n-1$;

(ii) $x_0 = y$ et $x_n = z$;

(iii) $d(\phi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \delta$ pour $j = 0, \dots, n-1$.

Nous noterons $y \hookrightarrow_{\delta, T} z$ s'il existe une (δ, T) -pseudo-orbite de y à z et $y \hookrightarrow z$ si $y \hookrightarrow_{\delta, T} z$ pour tout $\delta > 0$ et $T > 0$.

- Un point y est dit *récurrent par chaîne* si $y \hookrightarrow y$ pour le flot ϕ . Nous noterons $\mathcal{R}(\phi)$ l'ensemble des points récurrents par chaîne.
- Un sous-ensemble $L \subset E$ est dit *récurrent par chaîne* pour le flot ϕ si, pour tout $y \in L$, $y \hookrightarrow y$ pour le flot ϕ .
- Un sous-ensemble $L \subset E$ est dit *transitif par chaîne* pour le flot ϕ si, pour tout $x, y \in L$, $x \hookrightarrow y$ pour le flot ϕ .
- Un sous-ensemble $L \subset E$ compact, invariant par ϕ et transitif par chaîne pour le flot ϕ^L (resp. récurrent par chaîne) est dit *intérieurement transitif par chaîne (ITC)* (resp. *intérieurement récurrent par chaîne*).

Intuitivement, un point est récurrent par chaîne si on peut y revenir en suivant le flot durant des intervalles de temps arbitrairement long et en s'autorisant des sauts arbitrairement petits.

Exemple 1.20. Dans l'exemple 1.18, l'ensemble des points récurrents $\text{Rec}(\phi)$ est constitué uniquement des deux points d'équilibre 0 et π , alors que l'ensemble des points récurrents par chaîne est le cercle tout entier. Remarquons que le demi cercle $[0, \pi]$ est un compact invariant par ϕ mais n'est ni intérieurement récurrent par chaîne ni intérieurement transitif par chaîne. Par contre l'ensemble formé des deux points d'équilibre $\{0, \pi\}$ est intérieurement récurrent par chaîne mais pas intérieurement transitif par chaîne.

Au vu du Théorème 1.29, il est naturel de se demander quels ensembles sont des ITC. Le théorème suivant, dû à Bowen ([25]), relie les différentes notions définies ci-dessus et, par conséquent, répond à la question précédente.

Théorème 1.21. *Soit $L \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L est intérieurement transitif par chaîne,*
- (ii) *L est connexe et intérieurement récurrent par chaîne,*
- (iii) *L est un sous-ensemble compact, invariant par ϕ et ϕ^L n'admet aucun attracteur propre.*

Corollaire 1.22. *Si un sous-ensemble $L \subset E$ intérieurement transitif par chaîne rencontre le bassin d'attraction d'un attracteur $A \subset E$, alors $L \subset A$.*

Le théorème et le corollaire précédents illustrent le lien étroit entre les attracteurs et les ensembles ITC de la dynamique. Cette relation sera essentielle pour l'analyse du comportement asymptotique des algorithmes d'approximation.

Benaïm et Hirsch [12] caractérisent les ensembles intérieurement récurrent par chaîne pour des flots dans \mathbb{R}^2 avec des équilibres isolés. Un sous-ensemble $\Gamma \subset E$ est une *chaîne d'orbites* pour ϕ et pour un certain entier naturel $k \geq 2$, si Γ peut être écrit comme l'union

$$\Gamma = \{e_1, \dots, e_k\} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{k-1}$$

de points d'équilibre $\{e_1, \dots, e_k\}$ et d'orbites $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ les connectant (c.-à-d. $\alpha(\gamma_i) = \{e_i\}$ et $\omega(\gamma_i) = \{e_{i+1}\}$). Si $e_1 = e_k$, alors Γ est dit *chaîne d'orbites cyclique*.

Théorème 1.23. *Soit ϕ un flot défini sur \mathbb{R}^2 . Supposons que les points d'équilibre de ϕ sont isolés. Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble intérieurement récurrent par chaîne. Alors pour tout $p \in L$, une de ces assertions est vérifiée*

- (i) *p est un point d'équilibre*
- (ii) *p est périodique (c.-à-d. $\phi_T(p) = p$ pour un certain $T > 0$)*
- (iii) *Il existe une chaîne cyclique d'orbites $\Gamma \subset L$ contenant p .*

1.1.5 Pseudo-trajectoires asymptotiques

Définition 1.24. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est une pseudo-trajectoire asymptotique pour le flot ϕ si pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \phi_h(X(t))) = 0.$$

La notion de *pseudo-trajectoire asymptotique* fut introduite par Benaïm et Hirsch ([13]). Intuitivement, la courbe

$$\begin{aligned} [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\mapsto X(t+h) \end{aligned}$$

suit la trajectoire partant de $X(t)$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$ avec un écart arbitrairement petit pour un t suffisamment grand.

L'exemple suivant est présenté en détails dans [13].

Exemple 1.25 (Equations différentielles asymptotiquement autonomes). Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un champ de vecteurs suffisamment régulier et $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. L'EDO

$$\dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x}) \tag{1.4}$$

est dite asymptotiquement autonome à l'EDO limite

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

si pour tout $\delta > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t > T$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\|g(x, t) - f(x)\| < \delta.$$

Toute solution bornée de l'EDO non autonome (1.4) est une pseudo-trajectoire asymptotique du flot induit par l'EDO limite (1.5).

Rappelons que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ est l'espace des fonctions continues de \mathbb{R} dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts. Cet espace est métrisable. La fonction

$$D : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

définie, pour tout $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$, par

$$D(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min(1, d_k(f, g)),$$

où $d_k(f, g) = \sup_{t \in [-k, k]} d(f(t), g(t))$, est une distance sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$.

Remarque 1.26. Une fonction continue $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ pourra être considérée comme un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ en définissant $X(t) := X(0)$ pour tout $t < 0$.

Le flot translation $\Theta : \mathcal{C}(\mathbb{R}, E) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ est défini par

$$\Theta_t(f)(s) := f(t + s),$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

Soit ϕ un flot sur E . Le comportement du flot ϕ est intimement lié à celui du flot translation. Plus précisément ϕ est topologiquement conjugué à Θ^{S_ϕ} , le flot translation restreint à l'ensemble des orbites de ϕ , via l'homéomorphisme $\pi_0 : \mathcal{C}(\mathbb{R}, E) \longrightarrow E$ défini par

$$\pi_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}(0) \quad \text{et} \quad \pi_0^{-1}(x) : t \mapsto \phi_t(x).$$

Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\Theta_t^{S_\phi} \circ \pi_0^{-1} = \pi_0^{-1} \circ \phi_t.$$

Cette conjugaison permet de donner une définition équivalente d'une pseudo-trajectoire asymptotique.

Proposition 1.27. Une fonction continue $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est une pseudo-trajectoire asymptotique du flot ϕ si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\Theta_t(X), S_\phi) = 0.$$

Intuitivement, une pseudo-trajectoire asymptotique est un point dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ qui, sous l'action du flot translation, est attiré par le sous-ensemble S_ϕ . La caractérisation suivante est donnée par Benaïm et Hirsch :

Théorème 1.28 (Benaïm et Hirsch [15]). Soit $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow M$ une fonction continue et précompacte. Considérons les assertions suivantes

- (i) X est une pseudo-trajectoire asymptotique pour ϕ
- (ii) X est uniformément continue et toute valeur d'adhérence de $\{\Theta^t(X)\}_{t \geq 0}$ est dans S_ϕ ,
- (iii) La suite $\{\Theta^t(X)\}_{t \geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$.

Alors (i) et (ii) sont équivalents et impliquent (iii).

Un problème important et récurrent dans l'étude des systèmes dynamiques est de caractériser leurs ensembles ω -limites. Le même problème se pose donc naturellement pour des pseudo-trajectoires asymptotiques. Dans cette optique, Benaïm et Hirsch [15] ont relié le comportement à long terme des pseudo-trajectoires asymptotiques avec celui du flot. Un de leurs résultats principaux est la caractérisation des ensembles limite des PTA.

Théorème 1.29. (i) *Soit X une pseudo-trajectoire asymptotique précompacte pour le flot ϕ . Alors $\mathcal{L}(X)$ est intérieurement transitif par chaîne.*

(ii) *Soit $L \subset E$ un sous-ensemble intérieurement transitif par chaîne. Supposons que E soit localement connexe par arc. Alors il existe une pseudo-trajectoire asymptotique X telle que $\mathcal{L}(X) = L$.*

1.2 Théorie ergodique

Le but de cette section est de rappeler des notions et des résultats importants de théorie ergodique utiles à la compréhension des Chapitres 3 et 4.

Dans toute cette partie, nous munissons E de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ et nous considérons un flot ϕ sur E .

Définition 1.30. *Soient (E', d') un espace métrique, $f: E \rightarrow E'$ une fonction Borel mesurable et μ une mesure sur E . La mesure image de μ par f , notée $f^*(\mu)$, est définie par*

$$f^*(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)),$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(E')$.

Définition 1.31. *Une mesure μ sur $(E, \mathcal{B}(E))$ est dite ϕ -invariante si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,*

$$\mu(\phi_t(A)) = \mu(A).$$

La version topologique du théorème de récurrence de Poincaré dit que toute mesure de probabilité ϕ -invariante est supportée par la fermeture de l'ensemble des points récurrents.

Théorème 1.32 (Poincaré). *Supposons que (E, d) est séparable. Si μ est une mesure de probabilité ϕ -invariante, alors*

$$\mu(\text{BC}(\phi)) = 1,$$

où $\text{BC}(\phi)$ est le centre de Birkhoff (cf. définition 1.12).

La proposition suivante est la généralisation (dans le cas continu) du Théorème 6.9 dans [15].

Proposition 1.33. *Supposons que E est compact. Soit $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ une famille de mesures de probabilité sur E . Considérons la famille $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ de mesures de probabilité sur E , définie par*

$$\nu_t = \frac{1}{t} \int_0^t \phi_s^*(\mu_t) ds.$$

Alors toute valeur d'adhérence ν de $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ (pour la topologie faible étoile) est ϕ -invariante.

Remarque 1.34. *La mesure ν_t définie ci-dessus est l'unique mesure de Borel sur E telle que, pour toute fonction continue bornée f sur E ,*

$$\int_{x \in E} f(x) \nu_t(dx) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_{x \in E} f(\phi_s(x)) \mu_t(dx) \right) ds$$

Définition 1.35. *Soient $X : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction continue et $t > 0$. La mesure μ_t sur E définie par*

$$\mu_t := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{X(s)} ds,$$

est appelée mesure empirique d'occupation de X au temps t .

Remarque 1.36. *La mesure μ_t définie ci-dessus est l'unique mesure de Borel sur E telle que, pour toute fonction continue f sur E ,*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)) ds = \int_{x \in E} f(x) \mu_t(dx).$$

Au vu de la proposition 1.33, nous pouvons caractériser les valeurs d'adhérence de la famille des mesures empiriques d'occupation d'une orbite.

Corollaire 1.37. *Supposons que E est compact. Soit $x \in E$ et considérons la famille $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ des mesures empiriques de $\phi_t(x)$. Alors toute valeur d'adhérence μ (pour la topologie faible étoile) de $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ est une mesure ϕ -invariante.*

1.3 Systèmes dynamiques multivalués

Les *systèmes dynamiques multivalués*, souvent appelés systèmes généraux de contrôle ou systèmes dynamiques généraux, décrivent des équations différentielles multivaluées, des inclusions différentielles (voir p.ex. [23], [66], [16, 17] ou [75]) ou encore des systèmes de contrôle (voir [83] ou [57, 55]).

Cette section est principalement inspirée des ouvrages de Aubin et Cellina [3], de Aubin et Frankowska [4] et des articles de Roxin [83] et Kloeden [55].

1.3.1 Notions d'analyse multivaluée

La *distance de Hausdorff* entre deux sous-ensembles compacts A et B dans E est donnée par

$$D_H(A, B) := \max\{d_H(A, B), d_H(B, A)\},$$

où d_H est la *semi-distance de Hausdorff* :

$$d_H(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Soit (Y, d_Y) un espace métrique. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons d à la place de d_Y . L'ensemble des parties de Y est noté $\mathcal{P}(Y)$.

Une fonction $F : E \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ associant à chaque point de E un sous-ensemble de Y , est dite *multivaluée* et sera notée

$$F : E \rightrightarrows Y.$$

Les concepts de semi-continuité pour des fonctions multivalués ont été introduits en 1932 par Bouligand et Kuratowski. Dans ce travail nous nous restreindrons à la *semi-continuité supérieure* :

Définition 1.38. Une fonction multivaluée $F : E \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue supérieurement en $x_0 \in E$ si, pour tout voisinage V de $F(x_0)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B_E(x_0, \delta)$,

$$F(x) \subset V,$$

où $B_E(x_0, \delta)$ représente la boule de centre x_0 et de rayon δ . Elle est dite semi-continue supérieurement (*u.s.c.*) si elle l'est en tout point de E .

Cette définition est une généralisation de la notion de continuité aux fonctions multivaluées. Pourquoi parle-t-on alors de semi-continuité? L'une des raisons est que la caractérisation des fonctions continues (une fonction f est continue en x si et seulement si pour toute suite de points convergeant vers x , leurs images convergent vers $f(x)$) n'est plus vraie dans le cas multivalué.

Définition 1.39. *Le graphe d'une fonction multivaluée $F: E \rightrightarrows Y$ est le sous-ensemble de $E \times Y$*

$$\text{Gr}(F) := \{(x, y) \in E \times Y : y \in F(x)\}$$

Proposition 1.40. *Soit $F : E \rightrightarrows Y$ une fonction multivaluée avec des valeurs fermées (c.-à-d. pour tout $x \in E$, $F(x)$ est un sous-ensemble fermé de Y).*

- a) *Si F est u.s.c., alors son graphe $\text{Gr}(F)$ est un sous-ensemble fermé de $E \times Y$.*
- b) *Supposons que Y est compact. Alors F est u.s.c. si et seulement si son graphe $\text{Gr}(F)$ est un sous-ensemble fermé.*

Remarque 1.41. *Si Y n'est pas compact, alors le point b) de la proposition précédente n'est pas vrai. En effet, la fonction multivaluée $F: \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \{\frac{1}{x}, x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas u.s.c en zéro, alors que son graphe est fermé.

1.3.2 Systèmes dynamiques généraux

Barbashin [8] est le précurseur de l'étude des systèmes dynamiques généraux. En 1948, il a donné les axiomes définissant un tel objet en se basant sur les propriétés des ensembles atteignables d'une EDO sans unicité des solutions. La définition suivante est une version généralisée de celle de Barbashin et fut introduite par Kloeden [56].

Dans la suite de cette sous-section, nous supposons que (E, d) est un espace localement compact.

Définition 1.42. *Une fonction multivaluée $\Phi : \mathbb{R}_+ \times E \rightrightarrows E$ avec des valeurs non-vides est dite un système dynamique multivalué (SVDS) sur E si pour tout $x \in E$:*

- a) $\forall t > 0, \Phi_t(x)$ est un sous-ensemble fermé de E ,
- b) $\Phi_0(x) = \{x\}$,
- c) $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x)$,
- d) $t \mapsto \Phi_t(x)$ est une fonction continue pour la distance de Hausdorff,
- e) $\forall t \in \mathbb{R}_+,$ la fonction $x \mapsto \Phi_t(x)$ est u.s.c.

Remarque 1.43. Dans les travaux de Barbashin [8], la fonction Φ est définie sur $\mathbb{R} \times E$ et un axiome est ajouté afin de retrouver toutes les autres propriétés pour des temps négatifs. Par la suite, Roxin [83] généralise la définition de Barbashin en remplaçant son dernier axiome par : pour tout $y \in E, t > 0$, il existe $x \in E$ tel que $y \in \Phi_t(x)$. Ainsi le backward d'un point $x \in E$ par Φ au temps $t < 0$ est défini par l'ensemble des points qui peuvent atteindre x en un temps $-t$, c.-à-d. l'ensemble

$$\{y \in E \mid x \in \Phi_{-t}(y)\}.$$

Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement au comportement de Φ pour des temps positifs et nous n'avons donc pas besoin de définir un backward.

Il est important de souligner qu'à l'origine, Barbashin supposait que $\Phi_t(x)$ était un sous-ensemble non vide, compact et connexe, pour tout $t > 0$. Roxin montre [83, Théorème 4.2] que, si E est localement compact, les conditions a) et b) impliquent la compacité de $\Phi(x)$. De plus, dans son exemple 4.1, il montre que la connexité n'est pas garantie par les autres conditions.

Définition 1.44. Soient $a < b$ deux réels. Une fonction $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow E$ est une solution du système dynamique multivalué Φ si pour tout $s, t \in [a, b], s \leq t$,

$$\mathbf{z}(t) \in \Phi_{t-s}(\mathbf{z}(s)).$$

L'ensemble de telles solutions sera noté $S_{\Phi}^{[a,b]}$.

Une solution définie sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}_+) est appelée solution entière (resp. demi-solution) et l'ensemble de ces solutions est noté S_{Φ} (resp. S_{Φ}^+). Nous noterons $S_{\Phi}(A)$ (resp. $S_{\Phi}^+(A)$) l'ensemble des solutions entières (resp. demi-solutions) partant d'un sous-ensemble $A \subset E$.

Remarque 1.45. Soient \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 deux solutions de Φ définies respectivement sur $[a, b]$ et $[b, c]$ telles que $\mathbf{z}_1(b) = \mathbf{z}_2(b)$. Alors la concaténation \mathbf{z} de \mathbf{z}_1 avec

\mathbf{z}_2 définie par

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} \mathbf{z}_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \mathbf{z}_2(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$$

est une solution de Φ sur $[a, c]$. Ainsi toute solution partielle peut être prolongée en une solution sur \mathbb{R}_+ .

Remarquons aussi que la translation dans le temps d'une solution reste une solution, c.-à-d. si $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow E$ est une solution, alors $\tilde{\mathbf{z}} : [0, b-a] \rightarrow E$ définie par $\tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{z}(t+a)$ est aussi une solution.

Nous avons les résultats suivants (voir [83] et [57]) :

Théorème 1.46. *Toute solution relative à Φ est continue. De plus, soit $x \in E$, pour tout $s \leq t$ et pour tout $y \in \Phi_{t-s}(x)$, il existe une solution \mathbf{z} de Φ sur $[s, t]$ telle que $\mathbf{z}(s) = x$ et $\mathbf{z}(t) = y$.*

Corollaire 1.47. *L'ensemble $S_{\Phi}^+(x)$ est non-vide pour toute condition initiale $x \in E$.*

Théorème 1.48 (Barbashin). *Soit (\mathbf{z}_n) une suite de solutions appartenant à $S_{\Phi}^{[0, T]}$ pour un certain $T > 0$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n(0) = x_0 \in E$. Alors il existe une sous-suite \mathbf{z}_{n_i} et une solution \mathbf{z} telle que \mathbf{z}_{n_i} converge uniformément sur $[0, T]$ vers \mathbf{z} .*

Théorème 1.49. *Soit $A \subset E$ un sous-ensemble compact. L'ensemble de solution $S_{\Phi}(A)$ (resp. $S_{\Phi}^+(A)$) est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$).*

Corollaire 1.50. *Si l'ensemble E est compact, alors l'ensemble des solutions S_{Φ} est un sous-ensemble non-vide et compact de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$.*

Remarque 1.51. *La compacité de S_{Φ} est une conséquence du théorème de Barbashin et l'existence d'une solution entière est prouvée dans la sous-section 3.5.1.*

Notions d'invariance

Dans la littérature consacrée aux systèmes dynamiques multivalués, l'invariance d'un ensemble peut être décrite par différentes propriétés.

Définition 1.52. *Soit Φ un SVDS. Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit*

1) Positivement invariant si

$$\Phi_t(A) \subset A,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

2) Faiblement positivement invariant si

$$\Phi_t(A) \cap A \neq \emptyset$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3) Négativement invariant si

$$A \subset \Phi_t(A),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

4) Fortement invariant si

$$\Phi_t(A) = A,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

5) Invariant si pour tout $x \in A$, il existe une solution $\mathbf{z} \in S_\Phi(x)$ telle que

$$\mathbf{z}(\mathbb{R}) \subset A.$$

L'exemple 1.75 illustrera une partie des notions énoncées ci-dessus.

Le lien entre ces différentes définitions est donné par les résultats suivants (voir [8], [83] ou [65]).

Théorème 1.53. *Soit $A \subset E$ un sous-ensemble compact.*

- (i) *A est négativement invariant si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une solution \mathbf{z} de Φ sur $]-\infty, 0]$ telle que $\mathbf{z}(0) = x$ et $\mathbf{z}(\mathbb{R}_-) \subset A$.*
- (ii) *A est faiblement positivement invariant si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une solution $\mathbf{z} \in S_\Phi^+(x)$ telle que $\mathbf{z}(0) = x$ et $\mathbf{z}(\mathbb{R}_+) \subset A$.*

Corollaire 1.54. *Un sous-ensemble compact $A \subset E$ est invariant si et seulement si il est négativement invariant.*

Remarque 1.55. *Un sous-ensemble A négativement invariant est faiblement positivement invariant.*

La notion la plus faible d'invariance permet de définir la restriction d'un système dynamique multivalué à un sous-ensemble.

Définition 1.56. *Soit $A \subset E$ un sous-ensemble compact, faiblement positivement invariant par Φ . Le système dynamique multivalué restreint à A , noté Φ^A , est défini par*

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{z}(t) \mid \mathbf{z} \text{ solution de } \Phi, \mathbf{z}(0) = x \text{ et } \mathbf{z}(\mathbb{R}_+) \subset A\}.$$

Relation avec le flot translation

Dans cette section, Θ^+ représente le *semi flot translation* sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ qui est défini comme Θ (c.f. Section 1.1.5). Nous avons exhibé le lien entre un flot sur E et la restriction de Θ à l'ensemble de ses solutions. Dans le contexte multivalué, la fonction $h : S_\Phi^+ \rightarrow E$ définie par $h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}(0)$ n'est clairement plus un homéomorphisme. En effet, la réciproque de h est une fonction multivaluée $h^{-1} : E \rightrightarrows S_\Phi^+$ qui associe à chaque condition initiale l'ensemble de toutes les solutions partant de celle-ci, c.-à-d. $h^{-1}(x) = S_\Phi^+(x)$. Par contre, cette dernière conjugue $(\Theta^+)^{S_\Phi^+}$ avec Φ . Plus précisément, nous avons

$$\Theta_t^+ \circ h^{-1} = h^{-1} \circ \Phi_t, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Ensembles limites

De la même manière que pour l'étude des flots sur E , il est utile de définir l'ensemble ω -limite d'un point $x \in E$ pour Φ .

Définition 1.57. *L'ensemble*

$$\omega_\Phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi_{[t, \infty]}(x)}$$

est l'ensemble ω -limite du point $x \in E$ pour Φ .

Plus généralement, nous définissons

$$\omega_\Phi(A) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi_{[t, \infty]}(A)}$$

pour un sous-ensemble $A \subset E$.

Nous remarquons que $\omega_\Phi(x)$ contient tous les ensembles limite $\mathcal{L}(\mathbf{z})$ (voir définition 1.1.2) de toutes les solutions \mathbf{z} partant de x . Définissons alors l'ensemble limite de x par

$$\mathcal{L}(x) = \bigcup_{\mathbf{z} \in S_\Phi^+(x)} \mathcal{L}(\mathbf{z}).$$

Par la remarque ci-dessus, l'inclusion $\mathcal{L}(x) \subset \omega_\Phi(x)$ est claire. Montrons par un exemple simple qu'elle peut être stricte (cf. [16]).

Exemple 1.58. Soit la fonction multivaluée $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $F(x) = -x$ si $x < 0$, $F(0) = [0, 1]$ et $F(x) = 1 - x$ sinon. En considérant le système dynamique multivalué induit par l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$, nous avons

$$\omega_\Phi(0) = [0, 1] \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(0) = \{0, 1\}.$$

Pour plus de détails concernant les systèmes dynamiques multivalués induits par une inclusion différentielle, le lecteur peut se référer à la sous-section 1.3.4.

Le lemme suivant (Proposition 2.13 dans [65]) caractérise les ensembles ω -limites.

Lemme 1.59. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble.

1. L'ensemble $\omega_\Phi(A)$ est l'ensemble des points $x \in E$ tel que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n(t_n)$$

pour une suite $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $t_n \rightarrow \infty$ et une suite $\{\mathbf{z}_n\} \subset S_\Phi^+(A)$

2. S'il existe un temps $t > 0$ tel que $\overline{\Phi_{[t, \infty[}(A)}$ est compact, alors $\omega_\Phi(A)$ est un sous-ensemble non-vide, compact et invariant.

Attracteur

Définition 1.60. Un sous-ensemble $A \subset E$ non-vide et compact est dit un attracteur pour Φ s'il est invariant et s'il existe un voisinage U de A tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_\epsilon > 0$ tel que

$$\Phi_t(U) \subset N^\epsilon(A),$$

pour tout $t \geq t_\epsilon$.

Un ouvert U possédant cette propriété est appelé voisinage fondamental de A .

Définition 1.61. Soit $A \subset E$ un attracteur pour Φ . Le bassin d'attraction de A est l'ensemble

$$\mathcal{B}(A) := \{x \in E : \Phi_{[0, \infty[}(x) \text{ borné et } \omega_\Phi(x) \subset A\}.$$

De la même manière que pour les flots, nous dirons qu'un attracteur est propre pour un système dynamique Φ^L s'il est strictement inclus dans L .

Récurrence par chaîne

La notion de récurrence par chaîne introduite par Bowen [25] et Conley [28] (cf. section 1.1.4), se transcrit naturellement au cas multivalué. Nous suivons l'idée de Benaïm, Hofbauer et Sorin [16].

Définition 1.62. Soient un sous-ensemble $L \subset E$, $T > 0$, $\delta > 0$ et $y, z \in L$. Une (δ, T) -chaîne de y à z pour Φ (dans L) est la donnée d'un entier naturel $n > 0$, d'une suite finie de temps (t_0, \dots, t_{n-1}) plus grands que T et d'une suite finie de solutions de $(\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_n)$ tels que

- (a) $\mathbf{z}_i(s) \in L$ pour tout $0 \leq s \leq t_i$ et pour $i = 0, \dots, n-1$;
- (b) $d(\mathbf{z}_0(0), x) \leq \delta$ et $d(\mathbf{z}_n(t_n), y) \leq \delta$;
- (c) $d(\mathbf{z}_i(t_i), \mathbf{z}_{i+1}(0)) \leq \delta$ pour $i = 0, \dots, n-1$.

Nous noterons $y \hookrightarrow_L z$ s'il existe une (δ, T) -chaîne de y à z pour tout $\delta > 0$ et $T > 0$.

Définition 1.63. Un point $x \in E$ est dit récurrent par chaîne pour Φ si $x \hookrightarrow_E x$. Un sous-ensemble $L \subset E$ est dit récurrent par chaîne si, pour tout $x \in L$, $x \hookrightarrow_L x$.

Définition 1.64. Un sous-ensemble $L \subset E$ compact est dit intérieurement transitif par chaîne (ITC) si $x \hookrightarrow_L y$ pour tout $x, y \in L$.

Les propositions suivantes sont extraites de [16] et donnent certaines propriétés utiles des ensembles ITC.

Proposition 1.65. Un ensemble intérieurement transitif par chaîne est faiblement positivement invariant pour Φ .

Proposition 1.66. Soit $L \subset E$ un ensemble intérieurement transitif par chaîne. Alors L n'admet pas d'attracteur propre pour Φ^L .

1.3.3 Pseudo-trajectoire asymptotique

Définition 1.67. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est une pseudo-trajectoire asymptotique (PTA) pour Φ si, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \mathbf{z}(h)) = 0.$$

Remarque 1.68. En général, l'infimum pris sur S_Φ ne peut pas être remplacé par un infimum sur $S_\Phi(X(t))$. En effet, considérons la fonction multivaluée $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La courbe $\gamma(t) = e^{-t}$ est une PTA du système dynamique multivalué induit par l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$ car la fonction identiquement nulle est une solution. Par ailleurs, pour tout $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi(X(t))} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \mathbf{z}(h)) = T.$$

Proposition 1.69. Une fonction $X : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ est une PTA si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\Theta_t(X), S_\Phi) = 0,$$

avec la convention établie dans la remarque 1.26.

De la même manière que dans le Théorème 1.28, Benaïm et al. ([16]) donnent une caractérisation des PTA.

Théorème 1.70. Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ bornée. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) \mathbf{z} est une P.T.A. pour Φ ;
- (ii) \mathbf{z} est uniformément continue et tous les points limite de $\{\Theta_t(\mathbf{z})\}$ sont dans S_Φ .

Dans les deux cas l'ensemble $\{\Theta_t(\mathbf{z}) : t \geq 0\}$ est relativement compact.

Dans le cas d'un flot, le Théorème 1.29 décrit l'ensemble limite d'une PTA. Benaïm et al. ([16]) ont généralisé ce résultat au cas d'un système dynamique multivalué.

Théorème 1.71 (Benaïm et al. Théorème 4.3 [16]). Soit $\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ une P.T.A. bornée de Φ . Alors $\mathcal{L}(\mathbf{z})$ est intérieurement transitif par chaîne.

1.3.4 Inclusions différentielles

Dans cette sous-section E est l'espace euclidien \mathbb{R}^m .

L'objet de cette section est l'étude d'une *inclusion différentielle* de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

où $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ est une fonction multivaluée.

Afin de donner un sens à ce problème, il faut, tout d'abord, définir ce qu'est une solution et dans un deuxième temps donner les conditions appropriées pour avoir un résultat d'existence.

Dans le cas particulier où F est univaluée, le problème (1.6) est équivalent au problème (1.1) traité dans la Section 1.1.1. Nous avons vu qu'en supposant F continue, l'ensemble comprenant les solutions est contenu dans l'ensemble des fonctions continument différentiables. Remarquons, au travers d'un exemple simple (voir [3]) sur \mathbb{R} , que l'ensemble contenant les solutions de (1.6) doit être plus grand. Soit $F(x) = \{-1, 1\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et considérons l'ensemble des solutions partant de 0. Il est évident que $\mathbf{x}_1(t) = t$ et $\mathbf{x}_2(t) = -t$ sont de telles solutions. Mais qu'en est-il de la trajectoire

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in]-\infty, 1] \\ 2-t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il serait raisonnable de pouvoir prendre en compte ce type de solution, c.-à-d. des solutions pour lesquelles la dérivée n'existe pas en un nombre fini de points. Qu'en est-il des solutions dont la dérivée n'existe pas sur un ensemble dénombrable ou sur un ensemble de mesure nulle? Naturellement, nous aimerions garder (dans un certain sens) l'équation intégrale obtenue dans le cas d'une EDO, c.-à-d.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t F(\mathbf{x}(s)) ds.$$

Ainsi, nous considérerons uniquement les fonctions pouvant s'écrire sous cette forme, c'est-à-dire les fonctions absolument continues. Rappelons qu'une fonction $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *absolument continue* si et seulement si elle est continue et elle est l'intégrale de sa dérivée, c.-à-d.

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s) = \int_s^t \dot{\mathbf{x}}(u) du.$$

Définition 1.72. Une solution de (1.6) est une fonction $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ absolument continue telle que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}(t)),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Les solutions étant définies, il faut pouvoir assurer l'existence de telles fonctions. Pour une inclusion différentielle, les conditions imposées sur F pour avoir des solutions sont de deux types : conditions de régularité sur la fonction (notion de continuité ou de semi-continuité) et des conditions topologiques ou géométriques sur les valeurs de la fonction (pour plus de détails voir [3]). Le cadre qui nous intéressera tout au long de ce travail est le suivant :

Définition 1.73. Une fonction multivaluée $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ est dite standard si elle satisfait les hypothèses suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $F(x)$ est un sous-ensemble de \mathbb{R}^m , non-vide, compact et convexe ;
- F est semi-continue supérieurement ;
- Il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{z \in F(x)} \|z\| \leq c(1 + \|x\|).$$

Exemple 1.74. a) La fonction multivaluée $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est standard.

b) La fonction multivaluée $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ [-1, 1] & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas standard car elle n'est pas u.s.c.

c) La fonction multivaluée $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \{-1, 1\}$ n'est pas standard car ses valeurs ne sont pas convexe.

Dans la suite de ce travail, nous considérerons l'inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}(t)), \quad (1.7)$$

où F est une fonction multivaluée standard. Sous ces hypothèses, des résultats classiques (voir p.ex. [3]) impliquent que pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^m$, l'inclusion différentielle (1.7) admet au moins une solution \mathbf{z} telle que $\mathbf{z}(0) = x$. Nous pouvons ainsi associer à tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $t \in \mathbb{R}$, le sous-ensemble non vide

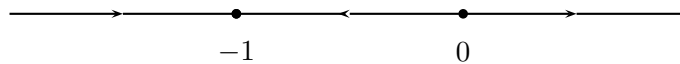
$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{x}(t) : \mathbf{x} \text{ est une solution de (1.7), } \mathbf{x}(0) = x\}.$$

Nous pouvons vérifier que $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un système dynamique multivalué (voir p.ex. [16]). Ainsi toutes les définitions et les concepts définis ci-dessus pour des SVDS peuvent être étendues aux inclusions différentielles.

Exemple 1.75. *Considérons la fonction $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, \infty[\\ [-1, 1] & \text{si } x \in \{-1, 0\} \\ -1 & \text{si } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

Le portrait de phase de l'inclusion différentielle lui étant associée est représenté par le schéma ci-dessous :



Remarquons que $\{-1\}$ et $\{0\}$ sont invariants mais que seul $\{-1\}$ est fortement invariant. En effet, la courbe $\gamma_T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T] \\ t & \text{si } t > T \end{cases}$$

étant solution pour tout $T > 0$, $\{0\}$ ne peut pas être positivement invariant.

Remarquons aussi que $\{-1\}$ est un attracteur mais que tout intervalle de la forme $[-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon]$ avec $0 < \varepsilon < 1$ n'est pas un attracteur car il n'est pas invariant.

STOCHASTIC APPROXIMATIONS OF SET-VALUED
DYNAMICAL SYSTEMS : CONVERGENCE WITH
POSITIVE PROBABILITY TO AN ATTRACTOR

Ce texte a déjà été publié dans Mathematics of Operations Research, voir [36]. Il s'agit d'un travail en commun avec Mathieu Faure.

Abstract. A successful method to describe the asymptotic behavior of a discrete time stochastic process governed by some recursive formula is to relate it to the limit sets of a well chosen mean differential equation. Under an attainability condition, Benaïm proved that convergence to a given attractor of the flow induced by this dynamical system occurs with positive probability, for a class of Robbins Monro algorithms. Benaïm, Hofbauer and Sorin generalised this approach for stochastic approximation algorithms whose average behavior is related to a differential inclusion instead. We pursue the analogy by extending to this setting the result of convergence with positive probability to an attractor.

Key words. Stochastic approximations ; set-valued dynamical systems ; attractor ; game theory ; Markovian fictitious play.

MSC2000 subject classification. 62L20, 34A60, 34B40, 34B41, 91A25, 91A26.

2.1 Introduction

2.1.1 Settings and bibliography.

Stochastic approximation algorithms were born in the early 50s through the work of Robbins and Monro [80] and Kiefer and Wolfowitz [54]. Consider a discrete time stochastic process $(x_n)_{n \geq 0}$ defined by the following recursive formula :

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1} (F(x_n) + U_{n+1}), \quad (2.1)$$

where $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a Lipschitz function, $(\gamma_n)_n$ is a positive decreasing sequence and $(U_n)_n$ a sequence of \mathbb{R}^m -valued random variables defined on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) , adapted to some filtration $(\mathcal{F}_n)_n \subset \mathcal{F}$. In order to describe the limit behavior of the sample paths $(x_n(\omega))_n$, a natural idea is to compare them to the solution curves of the dynamical system induced by the ordinary differential equation

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (2.2)$$

This is the celebrated method of ordinary differential equation (ODE) which was introduced by Ljung in [67]. Heuristically, one can think of (2.1) as a kind of Cauchy-Euler approximation scheme for numerically solving (2.2) with step size $(\gamma_n)_n$ and an added noise $(U_n)_n$. We could reasonably expect that, under appropriate assumptions on $(\gamma_n)_n$ and if the noise $(U_n)_n$ vanishes, the asymptotic behaviors of $(x_n)_n$ and the ODE are closely related.

Thereafter, the method was studied and developed by many people (see Kushner and Clark [60], Benveniste et al. [22], Duflo [31] or Kushner and Yin [61]). Originally, only simple dynamics were considered, for example the negative of the gradient of a cost function. However, it appears in several situations, for example, learning models or game theory, that the corresponding vector field may be more complex.

Benaïm and Hirsch have conducted, in a series of papers (essentially Benaïm [9], Benaïm and Hirsch [13]), a thorough study of this method. They proved that the asymptotic behavior of stochastic approximation process can be described with a great deal of generality through the study of the asymptotics of the ODE . One of the main results is the characterization of limit sets $(x_n(\omega))_n$ via the flow induced by F , in the sense that, almost surely, these sets are compact, invariant and contain no proper attractor for

the deterministic flow (this is the notion of *internal chain recurrence* in the sense of Conley [28], see also Bowen [25]).

Now, let $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be a sufficiently regular set-valued map and consider some discrete time stochastic processes $(x_n)_{n \geq 0}$ satisfying the following recursive formula :

$$x_{n+1} - x_n - \gamma_{n+1}U_{n+1} \in \gamma_{n+1}F(x_n), \quad (2.3)$$

where $(\gamma_n)_n$ is a positive decreasing sequence and $(U_n)_n$ a sequence of \mathbb{R}^m -valued random variables defined on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) .

In [16], Benaïm, Hofbauer and Sorin have generalized the ODE method to the algorithms given by (2.3) and extended the characterization of limits set in the sense that they are again, under certain assumptions on the step size and the noise, connected and attractor free for the set-valued dynamical system induced by the differential inclusion

$$\frac{dx}{dt} \in F(x). \quad (2.4)$$

This generalization allows us to extend this technique to a much wider class of problems arising, for example, in economics or game theory (see Benaïm, Hofbauer and Sorin [17]).

In this paper, we pursue the analogy between the ODE method and the differential inclusion method. The aim is to extend to the case of differential inclusions, the result of Benaïm (see [11, Theorem 7.3]) which guarantees that, under certain assumptions on the step size and the noise, the stochastic approximation process converges with positive probability to a given attractor of the set-valued dynamical system induced by F .

The organization of the paper is as follows. In sub-section 2.1.2, we define a standard set-valued map and introduce the crucial notion of attainability so as to state a simple version of the main result. In section 2.2, we introduce the different notions of internal chain transitivity, asymptotic pseudotrajectories and perturbed solutions. Our main assumption (assumption 2.12) is given, the convergence result is stated in full generality and we define a generalised stochastic approximation process which satisfies the above assumption. An example of adaptive learning process to which our results may be applied is given in section 2.3. Finally, the proof of a crucial result needed in our study is postponed to section 2.4.

2.1.2 The main result, a simple version.

In the following, $M \subset \mathbb{R}^m$ is a compact set.

Definition 2.1. [Standard set-valued map] A correspondance

$F: \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is said to be standard if it satisfies the following assumptions :

- for any $x \in \mathbb{R}^m$, $F(x)$ is a non empty, compact and convex set of \mathbb{R}^m ,
- F is closed, which means that its graph

$$Gr(F) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid y \in F(x)\}$$

is closed,

- there exists $c > 0$ such that

$$\sup_{z \in F(x)} \|z\| \leq c(1 + \|x\|).$$

Under the above assumptions, it is well known (see Aubin and Cellina [3]) that (2.4) admits at least one solution (i.e. an absolutely continuous mapping $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}(t))$ for almost every t) through any initial point.

We call S_x the set of solutions with initial condition $\mathbf{x}(0) = x$. The set-valued dynamical system induced by the differential inclusion will be denoted $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$. To any $x \in \mathbb{R}^m$, it associates the non empty set

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x} \in S_x\}.$$

Finally, $S_\Phi := \cup_x S_x$ is the set of all solution curves. In order to understand the main result, recall some classical definitions about the set-valued dynamics.

Definition 2.2. A non empty compact set $A \subset \mathbb{R}^m$ is called an attractor for Φ , provided it is invariant (i.e. for all $x \in A$, there exists a solution \mathbf{x} to (2.4) with $\mathbf{x}(0) = x$ and such that $\mathbf{x}(\mathbb{R}) \subset A$) and that there is a neighborhood U of A with the property that, for every $\epsilon > 0$, there exists $t_\epsilon > 0$ such that

$$\Phi_t(U) \subset N^\epsilon(A)$$

for all $t \geq t_\epsilon$, where $N^\epsilon(A)$ is the ϵ -neighborhood of A . An open set U with this property is called a fundamental neighborhood of A .

Definition 2.3. Let $A \subset \mathbb{R}^m$ be an attractor for the set-valued dynamical system. The basin of attraction of A is the set

$$\mathcal{B}(A) := \{x \in \mathbb{R}^m : \Phi_{[0,+\infty[}(x) \text{ bounded and } \omega_\Phi(x) \subset A\},$$

where $\omega_\Phi(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi_{[t, \infty[}(x)}$ is the omega limit set of the point x .

Now consider a discrete time stochastic process $(x_n)_n$ in M defined by (2.3), and satisfying the following assumptions :

(i) For all $c > 0$,

$$\sum_n e^{-c/\gamma_n} < \infty,$$

(ii) $(U_n)_n$ is uniformly bounded and

$$\mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0,$$

(iii) F is a standard set-valued map.

Set $\tau_n := \sum_{i=1}^n \gamma_i$ and $m(t) := \sup\{j \mid \tau_j \leq t\}$. We call X the continuous time affine interpolated process induced by $(x_n)_n$ and $\bar{\gamma}$ the piecewise constant deterministic process induced by $(\gamma_n)_n$:

$$X(\tau_i + s) = x_i + s \frac{x_{i+1} - x_i}{\gamma_{i+1}}, \text{ for } s \in [0, \gamma_{i+1}]$$

and

$$\bar{\gamma}(\tau_i + s) := \gamma_{i+1} \text{ for } s \in [0, \gamma_{i+1}[,$$

and consider its limit set

$$\mathcal{L}(X) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{X(s) : s \geq t\}}.$$

The following attainability condition is crucial to show that X converges with positive probability to a given attractor.

Definition 2.4. A point $p \in M$ is attainable if, for any $t > 0$ and any neighborhood U of p ,

$$\mathbb{P}(\exists s \geq t : X(s) \in U) > 0.$$

We call $Att(X)$ the set of attainable points by X . The following statement is a special case of our main result, Theorem 2.20.

Theorem 2.5. *Let $A \subset M$ be an attractor for Φ with basin of attraction $\mathcal{B}(A)$. If $\text{Att}(X) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$ then*

$$P(\mathcal{L}(X) \subset A) > 0.$$

Heuristically, this means that if the set of attainable points of the process meets the basin of attraction of a given attractor A , then there is convergence with positive probability toward A .

2.2 Convergence with positive probability

2.2.1 Set-valued dynamical systems relative to a differential inclusion.

We recall here some definitions and results due to Benaïm et al. [16].

Let $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be a standard set-valued map and Φ be the set-valued dynamical system associated to the differential inclusion

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \in F(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

The notion of *internally chain transitive set* (ICT set) was introduced by Benaïm and Hirsch [13] to analyse certain perturbations of the flow relative to an ODE. This is an extension of the notion of chain recurrence due to Conley [28]. The concept of ICT sets was extended to differential inclusions by Benaïm et al. [16].

We refer to this last reference for an accurate description of ICT sets. Here, we only need the following property (Benaïm and al. [16, Proposition 3.20]) : an internally chain transitive set L is invariant, compact and the restricted set-valued dynamical system $\Phi|_L$ admits no proper attractor (i.e. no attractor distinct from L). The following result is proved in Benaïm and al. [16, Theorem 3.23].

Theorem 2.6. *Let L be an internally chain transitive set and A be an attractor for Φ with basin of attraction $\mathcal{B}(A)$. Then*

$$\mathcal{B}(A) \cap L \neq \emptyset \Rightarrow L \subset A.$$

The space $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ of continuous paths, endowed with the metric

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min \left(\sup_{u \in [0, k]} \|\mathbf{x}(u) - \mathbf{x}'(u)\|, 1 \right)$$

is complete. A continuous map $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ is an *asymptotic pseudotrajectory* (APT) of the set-valued dynamical system $(\Phi_t)_{t \geq 0}$ if, for any $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \|X(t + \cdot) - \mathbf{z}(\cdot)\|_{[0, T]} = 0,$$

where $\|\cdot\|_{[0, T]}$ denotes the uniform norm on $[0, T]$. Heuristically this means that, for any $T > 0$, the curve joining $X(t)$ to $X(t+T)$ shadows the trajectory of some solution with arbitrary accuracy, provided t is large enough.

A fundamental property of asymptotic pseudotrajectories is that, if X is a bounded APT, then its limit set $\mathcal{L}(X)$ is internally chain transitive (Benaïm and al. [16, Theorem 4.3]). Consequently, by Theorem 2.6, we have

Corollary 2.7. *Let X be an asymptotic pseudotrajectory of the set-valued dynamical system and A an attractor for Φ . If $\mathcal{L}(X)$ meets the basin of attraction of A , then it belongs to A .*

Let δ be a positive real number. Then F^δ is the set-valued map defined by

$$F^\delta(x) := \{y \mid \exists z \in B(x, \delta) \text{ such that } d(y, F(z)) < \delta\}. \quad (2.6)$$

Definition 2.8. *Let $\delta : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ and $\bar{U} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$. A continuous function $\mathbf{y} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ is a $(\delta(\cdot), \bar{U}(\cdot))$ -perturbed solution of the differential inclusion (2.5) if*

- (i) \mathbf{y} is absolutely continuous,
- (ii) $\delta(t) \downarrow_{t \rightarrow +\infty} 0$ and, for almost every $t > 0$,

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} - \bar{U}(t) \in F^{\delta(t)}(\mathbf{y}(t)),$$

- (iii) \bar{U} is locally integrable and such that, for any $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq v \leq T} \left\| \int_t^{t+v} \bar{U}(s) ds \right\| = 0. \quad (2.7)$$

We recall the following theorem due to Benaïm et al. [16, Theorem 4.2].

Theorem 2.9. *Any bounded perturbed solution of the differential inclusion (2.5) is an asymptotic pseudotrajectory of the set-valued dynamical system Φ .*

2.2.2 A deterministic result.

For any application $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ and $T > 0$, we define the quantity

$$d_X(T) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \|\mathbf{z}(\cdot) - X(kT + \cdot)\|_{[0, T]}.$$

The following characterization of the basin of attraction will be useful.

Lemma 2.10. *Given an attractor A , the basin of attraction of A is the union of all fundamental neighborhoods of A .*

Proof. Any fundamental neighborhood is trivially included into $\mathcal{B}(A)$. Conversely, let $x \in \mathcal{B}(A)$ and U_0 be a given fundamental neighborhood of A : for any $\varepsilon > 0$, there exists $t_\varepsilon^0 > 0$ such that

$$\Phi_t(U_0) \subset N^\varepsilon(A), \quad \forall t \geq t_\varepsilon^0.$$

Pick $\gamma > 0$ such that $N^{2\gamma}(A) \subset U_0$. There exists $T > 0$ such that $\Phi_T(x) \subset N^\gamma(A)$. Otherwise, there would exist sequences $(\mathbf{z}_n)_n \subset S_x$ and $t_n \uparrow +\infty$ such that $\mathbf{z}_n(t_n) \in (N^\gamma(A))^c$, which contradicts the fact that $\omega_\Phi(x)$ is bounded and contained in A .

Finally, by closedness of the set-valued map $x \mapsto \Phi_T(x)$ ¹, there exists $r > 0$ such that $\Phi_T(B(x, r)) \subset N^{2\gamma}(A) \subset U_0$. The set $U := U_0 \cup B(x, r)$ is a fundamental neighborhood of A since, for any $\varepsilon > 0$,

$$\Phi_t(B(x, r)) \subset N^\varepsilon(A), \quad \forall t \geq t_\varepsilon^0 + T,$$

and the proof is complete. ■

Assume now that X is an APT of the set-valued dynamical system $(\Phi_t)_{t \geq 0}$. The following lemma is the extension to differential inclusions of Benaïm [11, Lemma 6.8].

Lemma 2.11. *Let $A \subset \mathbb{R}^m$ be an attractor for the set-valued dynamical system Φ , with basin of attraction $\mathcal{B}(A)$. Then, for any compact set $K \subset \mathcal{B}(A)$, there exist positive real numbers $\alpha(K)$ and $T(K)$ such that*

$$(X(0) \in K \text{ and } d_X(T(K)) < \alpha(K)) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subset A.$$

¹This is an easy consequence of Definition 2.1.

Proof. Let W be an open set with compact closure such that

$$A \cup K \subset W \subset \overline{W} \subset \mathcal{B}(A).$$

There exists $\alpha > 0$ such that $N^{3\alpha}(A) \subset W$ and $N^\alpha(K) \subset W$. Since \overline{W} is included in the basin of attraction of A , there exists a fundamental neighborhood which contains W ; hence we can find a positive number T (which depends on α and W) such that

$$\Phi_{[T, +\infty[}(W) \subset N^\alpha(A).$$

Assume now that $X(0) \in K$ and $d_X(T) < \alpha$. There exists a solution \mathbf{z}^1 which shadows X on $[0, T]$; in particular,

$$\mathbf{z}^1(0) \in N^\alpha(X(0)) \subset W \quad \text{and} \quad X(T) \in N^\alpha(\mathbf{z}^1(T)).$$

By definition of T , $\mathbf{z}^1(T) \in N^\alpha(A)$, which means that $X(T) \in N^{2\alpha}(A) \subset W$. By a recursive argument, we show that the sequence $(X(kT))_{k \geq 1}$ belongs to the set $N^{2\alpha}(A)$. Assume that $X(kT) \in N^{2\alpha}(A)$. Then, there exists a solution $\mathbf{z}^{\mathbf{k}+1}(\cdot)$ which is α -close of $X(kT + \cdot)$ on $[0, T]$: in particular,

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}+1}(0) \in N^\alpha(X(kT)) \subset N^{3\alpha}(A) \subset W$$

and

$$X(kT + T) \in N^\alpha(\mathbf{z}^{\mathbf{k}+1}(T)) \subset N^{2\alpha}(A).$$

Consequently, the limit set $\mathcal{L}(X)$ is contained in $W \subset \mathcal{B}(A)$. Hence, $\mathcal{L}(X) \subset A$ by Corollary 2.7. ■

2.2.3 Stochastic processes.

In the following, $(X(t))_{t \geq 0}$ will be a continuous time \mathbb{R}^m -valued stochastic process, adapted to some non decreasing sequence $(\mathcal{F}_t)_t$ of sub sigma algebras of \mathcal{F} .

Hypothesis 2.12. *There exists a map $\omega : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that, for any $\alpha > 0$ and $T > 0$,*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \|\mathbf{z}(\cdot) - X(s + \cdot)\|_{[0, T]} \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t \right) \leq \omega(t, \alpha, T) \downarrow_{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{almost surely.} \quad (2.8)$$

Assumption 2.12 is a technical assumption, slightly stronger than supposing that X is almost surely an APT. Recall that $\text{Att}(X)$ is the set of attainable points by X .

Theorem 2.13. *Let A be an attractor and $(X(t))_{t \geq 0}$ be an adapted process satisfying assumption 2.12. Then, if $\text{Att}(X) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$, we have*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(X) \subset A) > 0.$$

Proof. We adapt the proof of Benaim [11, Theorem 7.3]. Let U be an open set included in $\mathcal{B}(A)$ and call $K = \overline{U}$. By Lemma 2.11 there exist $\alpha(K)$ and $T(K)$ such that

$$(X(0) \in K \text{ and } d_X(T(K)) < \alpha(K)) \Rightarrow \mathcal{L}(X) \subset A.$$

Let t be a positive irrational number such that $\omega(t, \alpha, T) < 1$ and denote $t_n(k) = \frac{k}{2^n}$ for n and k in \mathbb{N} . We define the stopping time

$$\tau_n := \inf_{k \in \mathbb{N}} \{t_n(k) \mid X(t_n(k)) \in U, t_n(k) \geq t\}.$$

On the intersection of the events

$$\{\tau_n < \infty\} \text{ and } \left\{ \sup_{s \geq \tau_n} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \|\mathbf{z}(\cdot) - X(s + \cdot)\|_{[0, T]} \leq \alpha \right\}$$

the set $\mathcal{L}(X)$ is included in A . Consequently, we have

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathcal{L}(X) \subset A) \\ & \geq \sum_{k \geq [2^n t] + 1} \mathbb{E} \left(\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq \tau_n} \inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \|\mathbf{z}(\cdot) - X(s + \cdot)\|_{[0, T]} \leq \alpha \mid \mathcal{F}_{t_n(k)} \right) \mathbb{I}_{\tau_n = t_n(k)} \right) \\ & \geq \sum_{k \geq [2^n t] + 1} (1 - \omega(t_n(k), \alpha, T)) \mathbb{P}(\tau_n = t_n(k)) \\ & \geq (1 - \omega(t, \alpha, T)) \mathbb{P}(\tau_n < +\infty), \end{aligned}$$

since $\omega(t_n(k), \alpha, T) \leq \omega(t, \alpha, T)$, $\forall k \geq [2^n t] + 1$. On the other hand, the sequence of events $\{\tau_n < +\infty\}$ is increasing and we have

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \{\tau_n < +\infty\} = \cup_n \{\tau_n < +\infty\} = \{\exists s \geq t \mid X(s) \in U\}.$$

Now take an attainable point $p \in \mathcal{B}(A)$ and U a neighborhood of p , such that $\overline{U} \subset \mathcal{B}(A)$. We have

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(X) \subset A) \geq (1 - \omega(t, \alpha, T)) \mathbb{P}(\exists s \geq t \mid X(s) \in U) > 0,$$

and the proof is complete. ■

Now, we consider a compact set $M \subset \mathbb{R}^m$ and a standard set-valued map $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$. Let $T > 0$. Denote $\Phi^T(M) := \overline{\bigcup_{s \in [0, T]} \Phi_s(M)}$, $\|F\| = \sup_{x \in \Phi^T(M)} \sup_{y \in F(x)} \|y\|$ and let us define the compact set

$$K_C := K_{(\|F\|, C)} = \{\mathbf{y} \in Lip([0, T], \mathbb{R}^m) \mid Lip(\mathbf{y}) \leq \|F\| + C + 1, \mathbf{y}(0) \in M\},$$

where C is a positive constant and $Lip([0, T], \mathbb{R}^m)$ is the set of Lipschitz functions from $[0, T]$ to \mathbb{R}^m .

Remark 2.14. K_C is appropriate to our situation since it contains every solution curve, restricted to an interval of length T and any $(\delta(\cdot), \overline{U}(\cdot))$ -perturbed solution of the differential inclusion, with $\sup_{t \in [0, T]} \overline{U}(t) \leq C$ and $\delta \leq 1$.

For $\delta \in [0, 1]$, let us define the set-valued application (with the convention $\Lambda^0 = \Lambda$):

$$\Lambda^\delta : K_C \rightrightarrows K_C, \mathbf{z} \mapsto \Lambda^\delta(\mathbf{z}), \quad (2.9)$$

where $\mathbf{y} \in \Lambda^\delta(\mathbf{z})$ if and only if there exists an integrable $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $h(u) \in F^\delta(\mathbf{z}(u)) \forall u \in [0, T]$ and

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{z}(0) + \int_0^\tau h(u) du, \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Remark that $Fix(\Lambda) := \{\mathbf{z} \in K_C \mid \mathbf{z} \in \Lambda(\mathbf{z})\}$ is the set of the restrictions on $[0, T]$ of the solutions curves starting from M , which we denote $S_{[0, T]}$ from now on. Additionally, we call $d_{[0, T]}$ the distance associated to the uniform norm on $[0, T]$. The following lemma is an immediate consequence of Corollary 2.50, proved in the last section.

Lemma 2.15. *Let $C > 0$ and $\alpha > 0$. There exist $\varepsilon > 0$ and $\delta_0 > 0$ such that, for any $\delta < \delta_0$*

$$d_{[0, T]}(\mathbf{z}, \Lambda^\delta(\mathbf{z})) < \varepsilon \Rightarrow d_{[0, T]}(\mathbf{z}, S_{[0, T]}) < \alpha.$$

As a consequence, we obtain the following crucial result.

Proposition 2.16. *Assume that there exist a function $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ converging to zero and a uniformly bounded random process $(\overline{U}(t))_{t \geq 0}$ such that*

$(X(t))_{t \geq 0}$ is almost surely a bounded (δ, \bar{U}) -perturbed solution of the differential inclusion (3.8) and such that $X(0) \in M$. If \bar{U} satisfies the following property

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \left\| \int_s^{s+\cdot} \bar{U}(u) du \right\|_{[0, T]} \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_t \right) \leq \omega(t, \varepsilon, T) \downarrow_{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.10)$$

almost surely, then assumption 2.12 holds and Theorem 2.13 may be applied.

Proof. First, $X(\cdot)$ is almost surely an asymptotic pseudotrajectory of the set-valued dynamical system by Theorem 2.9. For Lipschitz (classical) dynamical systems, assumption 2.12 holds by an application of Gronwall lemma (see Benaïm [11, section 7]). However, this does not adapt to our situation and this is the reason why we need Lemma 2.15. By assumption, we have almost surely

$$\frac{dX(t)}{dt} - \bar{U}(t) \in F^{\delta(t)}(X(t)), \quad \text{for almost every } t > 0.$$

Let $T > 0$. For any $\tau \in [0, T]$,

$$X(s + \tau) - \int_s^{s+\tau} \bar{U}(u) du \in X(s) + \int_0^\tau F^{\delta(s)}(X(s + u)) du.$$

Hence, $d_{[0, T]}(X(s + \cdot), \Lambda^{\delta(s)}(X(s + \cdot))) \leq \left\| \int_s^{s+\cdot} \bar{U}(u) du \right\|_{[0, T]}$ and

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} d_{[0, T]}(X(s + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(X(s + \cdot))) \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_t \right) \\ \leq \mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \left\| \int_s^{s+\cdot} \bar{U}(u) du \right\|_{[0, T]} \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_t \right) \\ \leq \omega(t, \varepsilon, T). \end{aligned}$$

Now let $\alpha > 0$. By Lemma 2.15 there exists $\varepsilon > 0$ (which depends on T and α) such that, for t large enough and $s \geq t$,

$$d_{[0, T]}(X(s + \cdot), S_{[0, T]}) \geq \alpha \Rightarrow d_{[0, T]}(X(s + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(X(s + \cdot))) \geq \varepsilon.$$

Consequently, for these choices of t and ε ,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} d_{[0, T]}(X(s + \cdot), S_{[0, T]}) \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} d_{[0,T]} \left(X(s + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(X(s + \cdot)) \right) \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_t \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{s \geq t} \left\| \int_s^{s+\cdot} \bar{U}(u) du \right\|_{[0,T]} \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_t \right) \\
&\leq \omega(t, \varepsilon(\alpha, T), T),
\end{aligned}$$

and the proof is complete. ■

Recall that a perturbed solution is an APT. The last proposition is a stochastic version of this result in the sense that the process $X(\cdot)$ is almost surely a perturbed solution, hence almost surely an APT. However, to yield the stronger property (2.12), we reinforce the assumption on U and assume (2.10) instead of (2.7).

2.2.4 Convergence of Stochastic approximation algorithms.

We introduce here a class of stochastic approximation processes which generalize the Robbins-Monro algorithms. Under some assumptions on the step size and the noise, we prove that assumption 2.12 is verified and that the conclusion of Theorem 2.13 holds.

Definition 2.17 (Generalised stochastic approximation process). *Let $(U_n)_n$ be an uniformly bounded \mathbb{R}^m -valued random process, $(\gamma_n)_n$ a deterministic positive real sequence and $(F_n)_n$ a sequence of set-valued maps on \mathbb{R}^m . We say that $(x_n)_n$ is a generalised stochastic approximation process relative to the standard set-valued map F if the following assumptions are satisfied :*

(i) *we have the recursive formula*

$$x_{n+1} - x_n - \gamma_{n+1} U_{n+1} \in \gamma_{n+1} F_n(x_n),$$

(ii) *the step size satisfies*

$$\sum_n \gamma_n = +\infty, \quad \lim_n \gamma_n = 0,$$

(iii) *for all $T > 0$, we have almost surely*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| \mid k \text{ such that } \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_i \leq T \right\} = 0,$$

(iv) *for all $n \geq 0$, $x_n \in M$,*

(v) for any $\delta > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\forall n \geq n_0, F_n(x_n) \subset F^\delta(x_n).$$

In the following we will call $X = (X(t))_t$ the continuous time affine interpolated process induced by a given generalised stochastic approximation process $(x_n)_n$ (see section 2.1.2).

Proposition 2.18. *The process X is almost surely a (δ, \bar{U}) -perturbed solution, for some deterministic function δ , and \bar{U} the piecewise constant continuous time process associated to $(U_n)_n$:*

$$\bar{U}(t) := U_{n+1}, \quad \forall t \in [\tau_n, \tau_{n+1}[.$$

Proof. By straightforward computations (see the proof of Benaïm et al. [16, Proposition 1.3]), it is not difficult to see that almost surely, $(X(t))_t$ is a perturbed solution associated to \bar{U} and

$$\delta(t) := \inf \left\{ \delta > 0 \mid \tau_n \geq t \Rightarrow F_n(x_n) \subset F^\delta(x_n) \right\} + \bar{\gamma}(t) \left(\bar{U}(t) + c \left(1 + \sup_{x \in M} F(x) \right) \right),$$

which obviously converges to 0. ■

Remark 2.19. *Recall that $m(t) = \sup\{j \mid \tau_j \leq t\}$. The condition (2.10) is equivalent to*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{m \geq n} \sup_{m < k \leq m(\tau_m + T)} \left\| \sum_{i=m}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n \right) \leq \omega(n, \varepsilon, T) \downarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{almost surely.} \quad (2.11)$$

and we use the notation $\Delta(n, T) := \sup_{n < k \leq m(\tau_n + T)} \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\|$ in the sequel.

Our main result is now stated in full generality.

Theorem 2.20. *Let $(x_n)_n$ be a stochastic approximation algorithm such that $(U_n)_n$ satisfies (2.11). Then, if A is an attractor relative to F , we have*

$$\text{Att}(X) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(X) \subset A) > 0.$$

Proof. By Proposition 2.18, the conditions requested to apply Proposition 2.16 are satisfied. Hence, assumption 2.12 is checked and the result follows directly from Theorem 2.13. ■

In the particular case where $(U_n)_n$ is a martingale difference : $\mathbb{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$, (2.11) is satisfied under simple assumptions on the noise and step size.

Proposition 2.21. *Let $(U_n^0)_n$ be a martingale difference noise (not necessarily bounded) and assume that one of the following assumptions is satisfied :*

1) *There exists some $q \geq 2$ such that*

$$\sum \gamma_n^{1+q/2} < +\infty \text{ and } \sup_n \mathbb{E} (\|U_n^0\|^q) < +\infty.$$

2) *There exists a deterministic sequence $(M_n)_n$ such that $M_n^2 = o((\gamma_n \log n)^{-1})$ and, for any $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^m, \mathbb{E} (\exp (\langle \theta, U_{n+1}^0 \rangle) | \mathcal{F}_n) \leq \exp \left(\frac{M_n^2}{2} \|\theta\|^2 \right),$$

then (2.11) is checked.

Proof. For the first point, we refer the reader to Benaïm [11]. Now for the second, let $\theta \in \mathbb{R}^m$ and consider the process $(Z_n(\theta))_n$ defined by

$$Z_n(\theta) := \exp \left(\sum_{i=1}^n \langle \theta, \gamma_i U_i^0 \rangle - \frac{\|\theta\|^2}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 M_i^2 \right).$$

$(Z_n(\theta))_n$ is a supermartingale by assumption. Hence, if we denote $S_n := \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1}^2 M_{i+1}^2$ and $m_n := m(\tau_n + T)$, for any $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \left\langle \theta, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \beta \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \frac{Z_k(\theta)}{Z_n(\theta)} \exp \left(\frac{\|\theta\|^2}{2} \sum_{i=1}^k \gamma_i^2 M_i^2 \right) \geq e^\beta \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} Z_k(\theta) \geq Z_n(\theta) \exp \left(\beta - \frac{\|\theta\|^2}{2} S_n \right) \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{\|\theta\|^2}{2} S_n - \beta \right). \end{aligned}$$

Let $e \in \{e_1, \dots, e_m, -e_1, \dots, -e_m\}$. We have

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \left\langle e, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \left\langle \frac{\delta e}{S_n}, \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\rangle \geq \frac{\varepsilon^2}{S_n} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{-\varepsilon^2}{2S_n} \right). \end{aligned}$$

Then we have

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n \right) \leq 2m \exp \left(\frac{-\varepsilon^2}{2S_n} \right).$$

Let us introduce $\varepsilon_n := \gamma_n M_n^2 \log n$. Then, since $\sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} \leq T$, we have

$$\mathbb{P} \left(\sup_{n < k \leq m_n} \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n \right) \leq 2m \exp \left(\frac{-\varepsilon^2 \log n}{2T \sup_{k \geq n} \varepsilon_k} \right).$$

Since $\sup_{k \geq n} \varepsilon_k \rightarrow 0$, the application $(n, \varepsilon, T) \mapsto \omega(n, \varepsilon, T) := 2d \sum_{m \geq n} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 \log n}{2T \sup_{k \geq n} \varepsilon_k}\right)$ converges to 0 as n tends to infinity and the proof is complete. ■

Simple examples satisfying the assumptions of Proposition 2.21 are $\gamma_n = 1/n$ and $(U_n^0)_n$ a martingale difference with uniformly bounded moment of order 2 (for 1)) or $\gamma_n = (1/\log(n))^2$ and $(U_n^0)_n$ a uniformly bounded martingale difference (for 2)).

The following is a useful consequence of this statement.

Corollary 2.22. *Assume that U_n can be written $U_n = U_n^0 + U_n^1$, where*

- $(U_n^0)_n$ a martingale difference noise satisfying one of the assumptions in the Proposition 2.21,
- (2.11) is satisfied for $(U_n^1)_n$.

Then (2.11) is satisfied for $(U_n)_n$

Proof. The sum of two random sequences satisfying (2.11) enjoys the same property. ■

2.3 Application to the Markovian fictitious play learning model.

We discuss here a Markovian strategy in a two-person game and study the induced dynamics. The model is studied by Benaïm and Raimond in [21] and was inspired by a so-called *pairwise comparison dynamics* introduced in Benaïm et al. [17].

2.3.1 The model.

The motivation is the following. We assume, in the initial model, that the *information situation* is the same as in the smooth fictitious play developed by Fudenberg and Levine (see [39] and [40]) where the considered player uses a best response strategy against the empirical moves of his opponent, with respect to a smooth perturbation of the payoff function. A player adopting a smooth fictitious play strategy needs to be informed of his payoff function as well as the moves of his opponents up to this stage.

For some reason (for instance if his set of actions is too large, if he has computational limitations or, more simply, if he is not allowed to play every action at each stage), we consider here that the set of moves he can play at some instant is a subset of his action set, which depends on the last action taken.

More formally, we consider a two players game in normal form. Let I and L be the (finite) sets of moves of respectively player 1 and player 2. These sets are of the form

$$I = \{1, \dots, m^1\}, \quad L = \{1, \dots, m^2\};$$

The maps $(U^1, U^2) : I \times L \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ denote the payoff (or utility) functions of players. The sets of mixed strategies available to players are denoted $\mathcal{X} = \Delta(I)$ and $\mathcal{Y} = \Delta(L)$, where

$$\Delta(I) := \left\{ x = (x_1, \dots, x_{m^1}) \in \mathbb{R}_+^{m^1} \mid \sum_{i=1, \dots, m^1} x_i = 1 \right\},$$

and analogously for $\Delta(L)$. The product $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ is denoted Δ . We will use the classical abuse of language for $y \in \mathcal{Y}$:

$$U^1(i, y) = \sum_{l \in L} U^1(i, l) y_l.$$

For $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, we call $br^1(y) := \text{Argmax}_{x \in \mathcal{X}} U^1(x, y)$ and $br^2(x) = \text{Argmax}_{y \in \mathcal{Y}} U^2(x, y)$. We define the set-valued map $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightrightarrows \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ by

$$F(x, y) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in br^1(y) - x, \beta \in br^2(x) - y\}.$$

We assume that a given game is played repeatedly and call X_n (resp. Y_n) the move of player 1 (resp. player 2) at stage n . The empirical distribution of moves up to stage n is denoted \bar{x}_n (resp. \bar{y}_n).

Let M_0^1 be an irreducible matrix, reversible with respect to its invariant probability distribution π_0^1 , which means that

$$(\pi_0^1)_i M_0^1(i, j) = (\pi_0^1)_j M_0^1(j, i).$$

The matrix M_0^1 represents the possibility or not to play an action depending on the last move : player 1 will be able to play action j after having played i if and only if $M_0^1(i, j) > 0$. For $n \in \mathbb{N}$ and $y \in \mathcal{Y}$, let us define the Markov matrix

$$M_n^1(i, j; y) = \begin{cases} M_0^1(i, j) \exp\left(-\beta_n^1 (U^1(i, y) - U^1(j, y))^+\right) & \text{if } i \neq j, \\ 1 - \sum_{k \neq i} M_n^1(i, k; y) & \text{if } i = j, \end{cases}$$

where $(\beta_n^1)_n$ is some positive deterministic sequence.

Definition 2.23. A Markovian fictitious play (MFP) strategy for player 1, associated with $(\beta_n^1)_n$ and (M_0^1, π_0^1) is a strategy σ such that, for any $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_\sigma(X_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n) = M_n^1(X_n, j; \bar{y}_n).$$

From now, we assume that both players use a Markovian fictitious play strategy, associated to M_0^p and $(\beta_n^p)_n$ ($p = 1, 2$). Let us introduce the random sequences

$$V_n := (\delta_{X_n}, \delta_{Y_n}) \quad \text{and} \quad v_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = (\bar{x}_n, \bar{y}_n).$$

We call $Att(v)$ the attainability set of the discrete process $(v_n)_n$. Recall that $p \in Att(v)$ if and only if, for any neighborhood N of p and any $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\exists n \geq n_0 : v_n \in N) > 0.$$

Proposition 2.24. *Assume that the matrices M_0^p ($p = 1, 2$) have positive diagonal entries. Then $Att(v)$ is equal to the whole state space Δ .*

Proof. By irreducibility, from any instant n , given any player i , any move a_j^i and any positive integer p , player i will play action a_j^i p times in a row with positive probability. ■

Theorem 2.25. *Assume that the matrices M_0^p ($p = 1, 2$) have positive diagonal entries. There exist positive values \tilde{A}^p , $p = 1, 2$ (which depend only on the payoff functions and M_0^p , $p = 1, 2$) such that, if agent p plays accordingly to a MFP strategy with $\beta_n^p = A^p \log n$ and $A^p < \tilde{A}^p$, then*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}((v_n)_n) \subset A) > 0,$$

for any attractor A for the set-valued dynamical system induced by F .

In particular, a strict Nash equilibrium is always an attractor for the best response dynamics. Hence

Corollary 2.26. *Let $\hat{v} = (\hat{x}, \hat{y})$ be a strict Nash equilibrium. Then, under the assumptions of Theorem 2.25,*

$$\mathbb{P}(v_n \rightarrow \hat{v}) > 0.$$

Another consequence of Theorem 2.25 is the following. Assume that $U^1 = U^2 = U$ (we will call such a game a *potential game*) and call Λ the set of local maximizers of U :

$$\Lambda = \{u \in \Delta : \exists V_u \in \mathcal{N}_u : \forall v \in V_u, U(v) \leq U(u)\},$$

where \mathcal{N}_u is the set of open neighborhoods of u . The set of Nash equilibria is denoted by NE .

Corollary 2.27. *Assume that L is a closed (in Δ) connected component of Λ , which is isolated in the sense that there exists an open neighborhood W of L such that $W \cap \Lambda = L$. Then L is an attractor for the best-response dynamics and therefore, under the assumptions of Theorem 2.25,*

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}((v_n)_n) \subset L) > 0.$$

Proof. The fact that L is an attractor for the best response dynamics is proved in greater generality in section 2.3.3, Proposition 2.39. ■

Remark 2.28. Notice that the closedness Λ is essential. Consider a simple example where both players have two actions and the common payoff matrix is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A direct computation shows that

$$NE = \{((1, 0), (1 - t, t)) : t \in [0, 1/2]\} \cup \{((0, 1), (0, 1))\}.$$

Let us call the first set L_1 and the second L_2 . We easily see that L_2 is an attractor for the best response dynamics. On the other hand, L_1 is a closed connected component of NE but not of Λ since the Nash equilibrium $(x, y) = ((1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ is not a local maximizer. Thus the connected component $L_1 \setminus \{(x, y)\}$ of Λ is not isolated in NE and Corollary 2.27 can not be applied as it will be made clear in its proof.

2.3.2 Proof of Theorem 2.25.

Notice that the Markov matrix $M_n^1(\cdot, \cdot; y)$ defined in the previous section is reversible with respect to its invariant distribution $\pi_n^1[y]$:

$$(\pi_n^1[y])_i \propto (\pi_0^1)_i \exp(\beta_n U^1(i, y)).$$

Also, considering an irreducible Markovian matrix M and its invariant probability measure π , one can define the pseudo inverse Q of M , characterized by

$$Q(I - M) = (I - M)Q = I - \Pi, \quad Q\mathbf{1} = 0,$$

where Π is the matrix defined by $\Pi(i, j) = \pi(j)$. Let us call π_n^1 and Q_n^1 (respectively π_n^2 and Q_n^2) the invariant probability and the pseudo inverse of the matrix $M_n^1 := M_n^1(\cdot, \cdot; \bar{y}_n)$ (resp. $M_n^2 := M_n^2(\cdot, \cdot; \bar{x}_n)$). We now define the *energy barrier* of M_0^1 with respect to the payoff function U^1 . Let $\Gamma_{i,j}$ be the set of admissible paths from i to j in the graph associated to M_0^1 : $\gamma = (i = i_0, i_1, \dots, i_n = j)$ is admissible if $M_0^1(i_k, i_{k+1}) > 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Then, denoting for $y \in \mathcal{Y}$,

$$Elev(i, j; y) := \min \{ \max \{ -U^1(k, y) \mid k \in \gamma \}, \gamma \in \Gamma_{i,j} \}.$$

We call

$$U^{1,\#}(y) := \max \{ Elev(i, j; y) + U^1(i, y) + U^1(j, y) - \max U^1(\cdot, y) \},$$

and

$$U^{1,\#} := \max_{y \in \mathcal{Y}} U^{1,\#}(y).$$

Obviously, the quantity $U^{2,\#}$ is defined analogously.

For $v = (x, y) \in \Delta$, we call $\theta_n(v)$ the random variable

$$\theta_n(v) := (\pi_n^1[y], \pi_n^2[x]).$$

The stochastic process $(v_n)_n$ satisfies the recursive formula

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} (-v_n + V_{n+1}) = \frac{1}{n+1} (-v_n + \theta_n(v_n) + U_{n+1}),$$

with

$$U_{n+1} = V_{n+1} - \theta_n = (\delta_{X_{n+1}} - \pi_n^1[\bar{y}_n], \delta_{Y_{n+1}} - \pi_n^2[\bar{x}_n]).$$

Benaïm and Raimond ([21, Theorem 4.15]) proved that, if $\beta_n^p = A^p \log n$ with $A^p < \tilde{A}^p := 1/2U^{p,\#}$, then $(v_n)_n$ is a generalised stochastic approximation process, taking values in Δ , with step size $\gamma_n = 1/n$, relatively to the maps $F_n(v) = -v + \theta_n[v]$ and F . Note that the corresponding differential inclusion is the best response dynamics :

$$(\dot{x}, \dot{y}) \in (br^1(y), br^2(x)) - (x, y)$$

However, this is not sufficient to prove Theorem 2.25 and we need to state the stronger property (2.11) on $(U_n)_n$.

The following proposition can be easily derived from the proof of Benaïm and Raimond [21, Proposition 4.4].

Proposition 2.29. *Assume that $\beta_n^1 = A^1 \log n$ for some $0 < A^1 < \tilde{A}^1$. Then there exists a positive deterministic sequence $(u_n)_n \rightarrow 0$ such that*

- a) $\frac{|Q_n^1|^2 \log n}{n} \leq u_n$,
- b) $|\Pi_{n+1}^1 - \Pi_n^1| \leq u_n$,
- c) $|Q_{n+1}^1 - Q_n^1| \leq u_n$.

Lemma 2.30. *Assume that the sequences $(\beta_n^p)_n$ ($p = 1, 2$) satisfy the assumption of Proposition 2.29. Then (2.11) is satisfied for $(1/n)_n$ and $(U_n)_n$.*

Proof. We call ζ_{n+1} the term $\delta_{X_{n+1}} - \pi_n^1[\bar{y}_n]$. We only need to prove that property (2.11) holds for $1/n$ and $(\zeta_n)_n$. We therefore denote $\Delta(n, T) := \sup_{n < k < m(\tau_n + T)} \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i+1} \zeta_{i+1} \right\|$.

First of all, ζ_{n+1} can be written

$$\zeta_{n+1} = \delta_{X_{n+1}} (Id - \Pi_n) = \delta_{X_{n+1}} (Q_n - M_n Q_n).$$

There is then a natural decomposition :

$$\zeta_{n+1} = (\delta_{X_{n+1}} Q_n - \delta_{X_n} M_n Q_n) + (\delta_{X_n} M_n Q_n - \delta_{X_{n+1}} M_n Q_n).$$

The first term is a martingale difference, bounded by $|Q_n|$ (up to a constant). Hence it satisfies the assumption 2) of Proposition 2.21, with $M_n = \sqrt{\frac{nu_n}{\log n}}$.

Now, for the second term, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i+1} (\delta_{X_i} M_i Q_i - \delta_{X_{i+1}} M_i Q_i) \\ & \leq \sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i+1} (\delta_{X_{i+1}} M_{i+1} Q_{i+1} - \delta_{X_{i+1}} M_i Q_i) \\ & \quad + \sum_{i=n}^{k-1} \left(\frac{1}{i} \delta_{X_i} M_i Q_i - \frac{1}{i+1} \delta_{X_{i+1}} M_{i+1} Q_{i+1} \right) + T \sup_{n \leq i \leq k-1} \frac{|Q_i|}{i}, \end{aligned}$$

since $\left\| \sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i(i+1)} \delta_{X_i} M_i Q_i \right\| \leq \sup \{|Q_i|/i \mid n \leq i \leq k-1\} \sum_{i=n, \dots, k-1} 1/i$.

The first term on the right side can be written

$$\sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i+1} \delta_{X_{i+1}} (Q_{i+1} - Q_i + \Pi_{i+1} - \Pi_i),$$

and is bounded by the quantity $T \sup \{|Q_{i+1} - Q_i| + |\Pi_{i+1} - \Pi_i| \mid i = n, \dots, k-1\}$.

The telescopic term is bounded by $2 \sup_{n \leq i \leq k-1} \frac{|Q_i|}{i}$. Consequently,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{i+1} (\delta_{X_i} M_i Q_i - \delta_{X_{i+1}} M_i Q_i) \right\| \\ & \leq 2(T+1) \sup_{i \geq n} \left\{ \frac{|Q_i|}{i} + |Q_{i+1} - Q_i| + |\Pi_{i+1} - \Pi_i| \right\}. \end{aligned}$$

By Proposition 2.29, the term on the right is decreasing to zero and

$$\mathbb{P} \left(\sup_{m \geq n} \Delta(m, T) \geq \varepsilon \mid \mathcal{F}_n \right) \leq \omega(n, \varepsilon, T) \downarrow_n 0.$$

This concludes the proof. ■

2.3.3 Potential Games and Proof of Corollary 2.27.

In this sub-section, we prove that any closed isolated connected component of Λ , the set of local maximizers, is an attractor for the best response dynamics in any given finite N -players potential game. Let $(m^i)_{i=1}^N$ be N natural numbers and assume that the set of pure action for player i is $\{1, \dots, m^i\}$. We call Δ^{m^i} the $m^i - 1$ -dimensional simplex corresponding to its mixed strategies space and U the common n -linear payoff function on $\Delta = \times_{i=1}^N \Delta^{m^i}$ (see section 3.1). We use the notation (x^i, x^{-i}) for $x = (x^1, \dots, x^n) \in \Delta$.

Remark 2.31. *The set Δ can be written as a finite union of the relative interiors $(F_k)_{k=1..K}$ of its faces (this is also true for more general convex sets, see R. Tyrrell Rockafellar [81, Theorem 18.2]). Additionally, any F_k is equal to a product $F_k^1 \times \dots \times F_k^N$, where F_k^i is the relative interior of one of Δ^{m^i} 's faces. The restriction of U to F_k can therefore be seen as a smooth function defined on an open set of \mathbb{R}^{n_k} , for some natural number n_k .*

The best response map $BR(x) = (BR^1(x), \dots, BR^n(x))$, where $BR^i(x) = \operatorname{Argmax}_{z \in \Delta^{m^i}} U(z, x^{-i})$, has nonempty compact convex values and is upper semicontinuous. Therefore consider the best response dynamics

$$\dot{x} \in Br(x) - x.$$

Benaïm, Hofbauer and Sorin, in [16], proved that U is a Lyapunov function for NE . Namely, U verifies the following two properties

- (i) $U(x) < U(y)$ for all $x \in \Delta \setminus NE$, $y \in \Phi_t(x)$, $t > 0$,
- (ii) $U(x) \leq U(y)$ for all $x \in NE$, $y \in \Phi_t(x)$, $t \geq 0$.

Lemma 2.32. *Let Λ be the set of local maximizers of U . Then we have*

$$\Lambda \subset NE.$$

Proof. Let x be a local maximizer of U . Since $U(\cdot, x^{-i})$ is linear for all i , we easily derive that x^i is a global maximizer for $U(\cdot, x^{-i})$. ■

Proposition 2.33. *For any finite game Γ , the set of Nash equilibria consists of finitely many connected components.*

For a proof of the above result see Kohlberg and Mertens [58].

Lemma 2.34. *Let $k \in \{1, \dots, K\}$. Then*

$$NE \cap F_k \subset \Sigma_{U|_{F_k}},$$

where $\Sigma_{U|_{F_k}}$ is the set of critical points of $U|_{F_k}$, the restriction of U to F_k .

Proof. Let \tilde{x} be an element of $NE \cap F_k$. By definition of Nash equilibria, we know that, for all $i \in \{1, \dots, N\}$, the point \tilde{x}^i is a global maximizer in F_k^i for the function $U|_{F_k}(\cdot, \tilde{x}^{-i})$. In particular, \tilde{x} is a critical point for $U|_{F_k}$. ■

Lemma 2.35. *The potential function U is constant on every connected component C of NE .*

Proof. Let C be a connected component of NE in Δ . First, we write $C = \cup_{k=1..K} C_k$, where, for any k , $C_k = C \cap F_k$. Pick $k \in \{1, \dots, K\}$. Since $U|_{F_k}$ is smooth, the image of its critical set has null Lebesgue measure by Sard's Lemma. Hence, by Lemma 2.34, this is also true for the image of C_k . In particular, $U(C)$ has null Lebesgue measure, which means that it contains no interval. The result follows by connectedness of C and continuity of U . ■

Remark 2.36. *This result still holds for the more general class of potential games studied in [16], where the strategy spaces are convex compact subsets of euclidean spaces, with countably many faces and the common payoff function is just assumed to be N -concave and smooth. However, Proposition 2.33 is not, a priori, true anymore.*

Lemma 2.37. *Assume that L is a closed (in Δ) isolated connected component of Λ . Then it is also an isolated connected component of NE .*

Proof. By Lemma 2.35, there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that $U(L) = \{c\}$. Assume that there exists a sequence $(x_n) \subset NE \setminus L$ and $x \in L$ such that (x_n) converges to x . By Proposition 2.33, there exists a connected component of Nash equilibria C which contains L and such that, for n large enough, $x_n \in C$. In particular, $U(x_n) = c$ by Lemma 2.35. Moreover, since x is a local maximizer, there is a neighborhood V of x such that for all $y \in V$, $U(y) \leq c$. For n large enough, $x_n \in V$ and it is also a local maximizer which is a contradiction. Therefore L is isolated in the set of Nash equilibria and $L = C$. ■

The following proposition is a simplified version of Benaïm and al. [16, Proposition 3.25].

Proposition 2.38. *Let M be an Euclidean space, $K \in M$ be a compact set, $V \subset M$ be a bounded open neighborhood of K and $U : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}_-$. Let the following hold :*

- a) *For all $t \geq 0$, $\Phi_t(V) \subset V$ (i.e., V is strongly positively invariant);*
- b) *$U^{-1}(0) = K$;*
- c) *U is continuous and for all $u \in V \setminus K$, $t > 0$ and $v \in \Phi_t(u)$, $U(v) > U(u)$.*

Then there exists an attractor contained in K whose basin contains V , and with $U^{-1}(] - r, 0])$ as a fundamental neighborhood for $r > 0$ small enough.

Proposition 2.39. *If L is a closed (in Δ) isolated connected component of Λ , then it is an attractor for the best response dynamics.*

Proof. By Lemma 2.35, there exists a number $c \in \mathbb{R}$ such that $L \subset U^{-1}(c)$. Without loss of generality we assume that $c = 0$. In order to use Proposition 2.38, we construct an appropriate open neighborhood V_r of L . First, by Lemma 2.37, there exists an open neighborhood W of L such that

$$W \cap NE = L. \quad (2.12)$$

Moreover there exists another open neighborhood V of L such that $\bar{V} \subset W$ and, for all $u \in \bar{V} \setminus L$, $U(u) < 0$. Indeed, assume by contradiction that there exists a sequence $(u_n)_n \subset W \setminus L$ which converges to $u \in L$ and such that $U(u_n) \geq 0$ for all $n \geq 0$. There exists a neighborhood V_u of u such that for all $v \in V_u$, $U(v) \leq 0$. For n large enough, V_u is also a neighborhood of u_n , hence $U(u_n) = 0$ and u_n belongs to Λ , which contradicts (2.12).

By continuity of U , there exists a real number r such that $U^{-1}(]-r, +\infty]) \cap \bar{V} \subset V$. Pick $V_r = U^{-1}(]-r, +\infty]) \cap \bar{V}$ (notice that V_r is an open set, included in V) and consider the function $\tilde{U} : \bar{V}_r \rightarrow \mathbb{R}$ which is the restriction of the function U to \bar{V}_r .

By construction of V_r , we clearly have $\tilde{U}^{-1}(0) = L$ and point b is therefore checked. Now let $t > 0$, $u \in V_r \setminus L$ and $v \in \Phi_t(u)$. By Property (i) of a Lyapunov function (see p.16), $U(v) > U(u) > -r$ and point c is satisfied. Now assume that $v \notin V_r$. Then, since $v \in U^{-1}(]-r, +\infty[)$, $v \notin \bar{V}$ and there exists some $0 < t' < t$ and $w \in \Phi_{t'}(u) \cap (\bar{V} \setminus V_r)$, which implies that $U(u) < U(w) \leq -r < U(u)$, a contradiction. Consequently $v \in V_r$. This proves that points a) is checked and Proposition 2.38 applies : there exists an attractor included in L and whose basin of attraction contains V_r . The proposition is proved since L clearly admits no proper attractor. ■

2.4 Proof of Lemma 2.15.

In the following, $L^1([0, T])$ is the set of all Lebesgue-integrable functions from $[0, T]$ to \mathbb{R}^m . Let $H : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ be a set-valued map, such that, for any $u \in [0, T]$, $H(u)$ is a nonempty subset of \mathbb{R}^m .

Definition 2.40. We call $\mathcal{S}(H)$ the set of integrable selections from $[0, T]$ to \mathbb{R}^m :

$$\mathcal{S}(H) := \left\{ h \in L^1([0, T]) \text{ such that } \forall u \in [0, T], h(u) \in H(u) \right\}.$$

With such a definition, we introduce the set-valued integral of H on $[0, T]$:

$$\int_{[0, T]} H(u) du := \left\{ \int_{[0, T]} h(u) du \mid h \in \mathcal{S}(H) \right\}.$$

H is said to be *measurable* if its graph $\{(t, x) \mid x \in H(t)\}$ is measurable and *integrally bounded* if there exists an integrable function $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$\sup_{x \in H(t)} \|x\| \leq h(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Let $h \in \mathcal{S}(H)$. We call Ψ_h the map defined by $\tau \in [0, T] \mapsto \int_0^\tau h(u) du$.

The following theorem is due to Aumann [6]

Theorem 2.41. Let H be a set-valued map on $[0, T]$ with nonempty images. Then

- * $\int_{[0, T]} H(u) du$ is convex,
- * If H is measurable and integrally bounded then $\int_{[0, T]} H(u) du$ is nonempty.
- * If H has closed images then $\int_{[0, T]} H(u) du$ is compact.
- * If $(H_k)_k$ is a sequence of uniformly integrally bounded set-valued functions then

$$\limsup_k \int_{[0, T]} H_k(u) du \subset \int_{[0, T]} \limsup_k H_k(u) du,$$

where $x \in \limsup_k A_k$ if and only if every neighborhood of x intersects infinitely many A_k .

The next proposition is not a direct consequence of these results. However, the proofs of the third and fourth points can be adapted to derive it :

Proposition 2.42. *Let (H_n) be a sequence of set-valued maps from $[0, T]$ to \mathbb{R}^m uniformly integrally bounded and H be a set-valued map with non empty images. We assume that, for any $\tau \in [0, T]$, $\limsup_n H_n(\tau) \subset H(\tau)$. For any $n \in \mathbb{N}$, let $h_n \in \mathcal{S}(H_n)$. Then,*

- (i) *If, for any u , $H(u)$ is convex, there exists $h \in \mathcal{S}(H)$ such that h_n converges weakly in $L^1([0, T])$ to h (up to a subsequence). In particular, Ψ_{h_n} converges simply to Ψ_h .*
- (ii) *Without the convexity assumption, there exists a function h on $[0, T]$ with the property that, for any $u \in [0, T]$, $h(u) \in \text{co}(H(u))$, the convex hull of $H(u)$ (i.e. the smallest convex set containing A) and such that h_n converges weakly in $L^1([0, T])$ to h . In particular, Ψ_{h_n} converges simply to Ψ_h .*

Proof. Since the sequence (H_n) is uniformly integrally bounded, the h_n are all bounded by an integrable function $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$. Then there is a subsequence of (h_n) with a weak limit $h \in L^1([0, T])$ (see Dunford and Schwartz [33, Theorem IV.8.9]). We may assume without loss of generality that (h_n) actually converges weakly to h . We now prove that h belongs to the set $\mathcal{S}(H)$.

For $A \subset L^1([0, T])$, we call $\overline{\text{co}}(A)$ the smallest closed (for the L^1 norm) convex set containing A .

Recall that, by Mazur's theorem, a convex subset of $L^1([0, T])$ is closed if and only if it is weakly closed. Consequently, let $k \in \mathbb{N}$. the set $\overline{\text{co}}((h_n)_{n \geq k})$ is closed and convex and therefore weakly closed. Hence it contains h , which belongs to the weakly closed convex hull of $(h_n)_{n \geq k}$. hence,

$$h \in \overline{\text{co}}((h_n)_{n \geq k}) = \overline{\text{co}((h_n)_{n \geq k})},$$

which means that there exists $g_k \in \text{co}((h_n)_{n \geq k})$ such that $\|h - g_k\|_{L^1} \leq 1/k$. Finally, (g_k) converges to h in L^1 and we may assume without loss of generality that $(g_k)_k$ converges to h almost everywhere on $[0, T]$.

From Caratheodory's theorem, the convex hull of a set A is the set of all barycenters of families of $m + 1$ elements of A . Consequently, for any k and $u \in [0, T]$, since $(h_n(u))_{n \geq k}$ is a set of points in \mathbb{R}^m , we have

$$g_k(u) = \sum_{j=0}^m \lambda_k^j(u) e_k^j(u),$$

where $\lambda_k^j(u) \geq 0$, $\sum_{j=0}^m \lambda_k^j(u) = 1$ and $e_k^j(u) \in \{h_n(u) \mid n \geq k\} \subset B(0, g(u))$. By compactness, we may assume that, for any j , $(e_k^j(u))_k$ converges to some $e^j(u)$ and

$(\lambda_k^j(u))_k$ converges to $\lambda^j(u)$, such that $\lambda_j(u) \geq 0$ and $\sum_{j=0}^m \lambda^j(u) = 1$. Finally,

$$h(u) = \lim_k g_k(u) = \sum_{j=0}^m \lambda^j(u) e^j(u).$$

For any j , since $e^j(u)$ belongs to the limit set of the sequence $(h_n(u))_n$, it belongs to $H(u)$. Hence, $h(u)$ belongs to $\text{co}(H(u))$ and, if $H(u)$ is convex, $h(u) \in H(u)$. The proof is complete. ■

Lemma 2.43. *Let (K, d) be a compact metric space and $(\Lambda_n)_n$, $\Lambda : K \rightrightarrows K$ be set-valued maps such that Λ is standard and $\text{Fix}(\Lambda) = \{x \in K \mid x \in \Lambda(x)\} \neq \emptyset$. Assume that, for any $x \in K$,*

- * $\Lambda_{n+1}(x) \subset \Lambda_n(x)$,
- * $\lim_n x_n = x \Rightarrow \limsup_n \Lambda_n(x_n) \subset \Lambda(x)$.

Then, for all $\delta > 0$, there exist $\epsilon > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n > n_0$

$$d(x, \Lambda_n(x)) \leq \epsilon \Rightarrow d(x, \text{Fix}(\Lambda)) \leq \delta.$$

Proof. First notice that, since $\text{Fix}(\Lambda)$ is non empty and $\Lambda_{n+1}(x) \subset \Lambda_n(x)$, there exists $x \in K$ such that $x \in \Lambda_n(x)$ for all n . Assume that there are $\delta > 0$, a strictly increasing sequence of integers $(n_k)_{k \geq 1}$ and a sequence $(x_k)_{k \geq 1}$ in K such that

$$d(x_k, \Lambda_{n_k}(x_k)) \leq \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad d(x_k, \text{Fix}(\Lambda)) > \delta.$$

Then, there exists a sequence $(y_k)_{k \geq 1}$ such that $y_k \in \Lambda_{n_k}(x_k)$ and

$$d(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad d(x_k, \text{Fix}(\Lambda)) > \delta.$$

Without loss of generality, we may assume that $x_k \rightarrow x \in K$ and $y_k \rightarrow y$. Consequently, $d(x, \text{Fix}(\Lambda)) \geq \delta > 0$ and $x = y$. On the other hand,

$$y \in \limsup_k \Lambda_{n_k}(x_k) \subset \limsup_k \Lambda_k(x_k) \subset \Lambda(x),$$

which means that $x \in \Lambda(x)$, a contradiction. ■

Remark 2.44. *If the Λ_n are closed, then it is sufficient to assume that $\bigcap_n \Lambda_n(x) = \Lambda(x)$, $\forall x$. Indeed, by monotonicity and the fact that Λ_{n_k} is closed, $y \in \Lambda_{n_k}(x)$, $\forall k$.*

From now, we consider a bounded standard set-valued map $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ and $T > 0$. Let δ be a positive real number. Then F^δ is the set-valued map defined by (2.6) and Λ^δ is the set-valued map defined by (2.9), extended to $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m)$. Note that, with our current notations, the definition of the set-valued map Λ^δ can be written, for $\delta \geq 0$:

$$\Lambda^\delta : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m) \rightrightarrows \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m), \quad \mathbf{z} \mapsto \{\mathbf{z}(0) + \Psi_h \mid h \in \mathcal{S}(F^\delta(\mathbf{z}))\}.$$

Proposition 2.45. Λ is a closed set-valued map with non empty images.

Proof. First, Λ has non empty images since $\int_0^T F(\mathbf{z})$ is non empty, for any \mathbf{z} (see Theorem 2.41).

Let $(\mathbf{z}_n)_n$ be a sequence of $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m)$, which converges to some \mathbf{z} in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m)$ and let $(\mathbf{y}_n)_n$ be a sequence converging to \mathbf{y} such that, for all $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}_n \in \Lambda(\mathbf{z}_n)$. This implies that,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists h_n \in \mathcal{S}(F(\mathbf{z}_n)) \text{ such that } \mathbf{y}_n(\tau) = \mathbf{z}_n(0) + \Psi_{h_n}(\tau).$$

We call $H_n := F(\mathbf{z}_n)$ and $H := F(\mathbf{z})$. By assumptions we made on F , H_n and H have compact, convex and nonempty values. For $\tau \in [0, T]$, $\mathbf{z}_n(\tau)$ converges to $\mathbf{z}(\tau)$ and, since the graph of F is closed,

$$\limsup_n H_n(\tau) = \limsup_n F(\mathbf{z}_n(\tau)) \subset F(\mathbf{z}(\tau)) = H(\tau).$$

The assumptions of Proposition 2.42 are satisfied. Hence, there exists $h \in \mathcal{S}(F(\mathbf{z}))$ such that $\mathbf{y} = \mathbf{z}(0) + \Psi_h$. ■

Lemma 2.46. For any $\delta > 0$, F^δ is a closed set-valued map with non empty images.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}^m$. $F(x)$ is contained in F^δ . Hence, it is not empty. Let $x_n \rightarrow x$ and $(y_n)_n$ be a sequence of $F^\delta(x_n)$ converging to some y . Then there exists a sequence $(z_n)_n$ such that

$$d(z_n, x_n) < \delta \text{ and } d(y_n, F(z_n)) < \delta.$$

hence there exists a sequence $(\alpha_n)_n$ such that $\alpha_n \in F(z_n)$ and $d(y_n, \alpha_n) < \delta$. Without loss of generality, we may assume that $z_n \rightarrow z$ and $\alpha_n \rightarrow \alpha$. By closeness of the graph of F , we obtain

$$d(z, x) < \delta, \alpha \in F(z) \text{ and } d(y, \alpha) < \delta,$$

and F^δ is closed (and, in particular, has closed images). ■

Remark 2.47. Note that the images are, a priori, not convex.

Lemma 2.48. Let $(x_n)_n$ be a sequence of \mathbb{R}^m , converging to x and $(\delta_n)_n$ be a positive, vanishing sequence. Then we have

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F^{\delta_n}(x_n) \subset F(x).$$

Proof. Let $y \in \limsup_n F^{\delta_n}(x_n)$. By definition, there exists a sequence (y_n) which converges to y and such that $y_n \in F^{\delta_n}(x_n)$ (actually it is a subsequence but there

is no loss of generality to keep the initial indexation). Hence there exists a sequence (z_n) such that

$$d(z_n, x_n) < \delta_n, \quad d(y_n, F(z_n)) < \delta_n,$$

which means that $d(x_n, \alpha_n) < \delta_n$ for some sequence $(\alpha_n)_n$ satisfying $\alpha_n \in F(z_n)$. Without loss of generality we may assume that $\alpha_n \rightarrow \alpha$ and $z_n \rightarrow z$. Hence we have $y = \alpha \in F(z) = F(x)$. ■

Corollary 2.49. *Let $(\mathbf{z}_n)_n$ be a sequence converging to \mathbf{z} in $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m)$. Then we have, for any positive, vanishing sequence $(\delta_n)_n$,*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Lambda^{\delta_n}(\mathbf{z}_n) \subset \Lambda(\mathbf{z}).$$

Proof. Let $\mathbf{y} \in \limsup_n \Lambda^{\delta_n}(\mathbf{z}_n)$. This means that there exists a sequence $\mathbf{y}_n \in \Lambda^{\delta_n}(\mathbf{z}_n)$ which converges to \mathbf{y} . Hence, for all $n \in \mathbb{N}$, there exists $h_n \in \mathcal{S}(F^{\delta_n}(\mathbf{z}_n))$ such that

$$\forall \tau \in [0, T], \quad \mathbf{y}_n(\tau) = \mathbf{z}_n(0) + \int_0^\tau h_n(u) du$$

By Corollary 2.42 and Lemma 2.48, there exists a function h on $[0, T]$ such that

$$\int_0^\tau h_n(u) du \rightarrow_n \int_0^\tau h(u) du, \quad \forall \tau \in [0, T]$$

and $h \in \mathcal{S}(F(\mathbf{z}))$, which completes the proof. ■

Corollary 2.50. *Let $\Lambda_n := \Lambda^{\delta_n}$. Suppose there exists a compact $K \subset \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m)$ such that $\Lambda_n : K \rightrightarrows K$ for all n . Then, for all $\delta > 0$, there exists $\epsilon > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that, for all $n > n_0$,*

$$d(\mathbf{z}, \Lambda_n(\mathbf{z})) \leq \epsilon \Rightarrow d(\mathbf{z}, \text{Fix}(\Lambda)) \leq \delta.$$

Proof. This result follows from Lemma 2.43 and Corollary 2.49 ■

Acknowledgements The authors would like to thank Michel Benaïm for useful advices and discussions. They are also grateful to three anonymous referees as well as Eilon Solan for interesting remarks, in particular for suggesting the addition of Corollary 2.27. They acknowledge financial support from the Swiss National Science Foundation Grant 200021-103625/1.

ERGODIC PROPERTIES OF WEAK ASYMPTOTIC
PSEUDOTRAJECTORIES FOR SET-VALUED DYNAMICAL
SYSTEMS

Ce texte a déjà été soumis pour publication. Il s'agit d'un travail en commun avec Mathieu Faure.

Abstract. A successful method to describe the asymptotic behavior of various deterministic and stochastic processes such as asymptotically autonomous differential equations or stochastic approximation processes is to relate it to an appropriately chosen limit semiflow. Benaïm and Schreiber (2000) define a general class of such stochastic processes, which they call weak asymptotic pseudotrajectories and study their ergodic behavior. In particular, they prove that the weak* limit points of the empirical measures associated to such processes are almost surely invariant for the associated deterministic semiflow. Continuing a program started by Benaïm, Hofbauer and Sorin (2005), we generalise the ergodic results mentioned above to weak asymptotic pseudotrajectories relative to set-valued dynamical systems.

Key words. Set-valued dynamical systems ; ergodic theory ; invariant measures ; stochastic approximations.

MSC2000 subject classification. 34A60, 37L40, 37C50, 62L20, 37B55.

3.1 Introduction

Let (E, d) be a complete metric space and consider a flow ϕ on E , namely $\phi : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ is continuous and satisfies the following properties :

- (i) for any $x \in E$, $\phi(x, 0) = x$,
- (ii) for any $t, s \in \mathbb{R}$ and $x \in E$, $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$.

In the sequel, we will prefer the notation $\phi_t(x)$ instead of $\phi(x, t)$. A continuous function $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ is an asymptotic pseudotrajectory (APT) for the flow ϕ if

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, T]} d(X(t + s), \phi_s(X(t))) = 0, \quad (3.1)$$

for any $T > 0$. Heuristically this means that, for any $T > 0$, the curve joining $X(t)$ to $X(t + T)$ shadows the trajectory of the solution starting from $X(t)$ with arbitrary accuracy, provided t is large enough. This concept has initially been introduced in [9] and [13], where the authors proved that the asymptotic behaviors of an APT can be described with a great deal of generality through the study of the asymptotics of the flow ϕ . One of their main results is the characterization of the limit set of an APT, in the sense that it is *internally chain transitive*, i.e. compact, invariant and contains no proper attractor for the restricted flow (the terminology comes from the notion of *chain recurrence* introduced by [28], see also [25]).

Consequently, this result turns out to be a particularly useful tool for analyzing the long term behavior of a large class of "perturbed" systems, whose solutions are APTs relative to some "unperturbed" flow. For instance, given an asymptotically autonomous differential equation, its solution trajectories are APTs relative to the flow induced by its limit autonomous differential equation (see [13]). Also, under the right assumptions, the paths of a stochastic approximation process with decreasing step size are almost surely APTs for the flow induced by the mean ODE (see e.g. [11] or [78] for comprehensive overviews on the topic).

In [18], the authors investigate the ergodic or statistical behavior of APTs for a flow. In fact, they prove their main result for a more general class of stochastic processes that they call *weak asymptotic pseudotrajectories* (WAPT). Given a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and a nondecreasing family of sub- σ -algebras $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, a process

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow E,$$

is called a *weak asymptotic pseudotrajectory* (WAPT) for ϕ provided that

- (i) It is progressively measurable : $\mathbf{X}|_{[0, T] \times \Omega}$ is $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}_T$ measurable for all $T > 0$,
- (ii) for each $\alpha > 0$ and $T > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, T]} d(\mathbf{X}(t + s), \phi_s(\mathbf{X}(t))) \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$$

almost surely.

Notice that, if a random process \mathbf{X} is almost surely an APT, namely for almost every $\omega \in \Omega$, (3.1) holds, then \mathbf{X} is a weak asymptotic pseudotrajectory. One should

be aware that the characterization of limit sets no longer holds for a WAPT. By this we mean that they are not almost surely internally chain transitive in general. One of the main result of the paper quoted above is the following

Theorem A ([18], Theorem 1) *Given a WAPT \mathbf{X} for a flow ϕ , the weak* limit points of the empirical measures*

$$\mu_t(\omega) := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s,\omega)} ds$$

(where δ_p is a Dirac measure at the point p) are almost surely invariant measures for ϕ . In particular, if the family of measures $\{\frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s)} ds\}_{t \geq 0}$ is tight, this implies that, with probability one, the process $\mathbf{X}(t)$ spends most of its time in any arbitrarily small neighborhood of the Birkhoff center of ϕ .

In [16], the authors generalized the notion of asymptotic pseudotrajectory to set-valued dynamical systems Φ (induced for instance by a differential inclusion, see Section 2 for a general definition of set-valued dynamical systems and section 4 for the particular case of differential inclusions) and extended the characterization of limit sets. In this paper, we generalize the notion of WAPT to set-valued dynamical systems and extend Theorem A to these more general settings.

The paper is organized as follows. The first step (see Section 2) consists in defining properly the notions of invariant measure and Birkhoff center for set-valued dynamical systems. To this end, we heavily rely on [71]. In this paper, the authors prove the equivalence between various definitions of an invariant measure for discrete time set-valued dynamical systems induced by closed relations. We give two equivalent definitions in the continuous time case (see Theorem 3.6). In the same framework, [5] prove a Poincaré recurrence Theorem. We give a topological version of this result in the continuous time case (see Theorem 3.10). In Section 3, we prove the main result about the ergodic behavior of WAPTs (Theorem 3.12). We then give some examples of WAPTs in Section 4, in particular stochastic approximation algorithms relative to a differential inclusion. The proofs of several technical results are postponed to the Section 3.5 to ease the reading.

3.2 Ergodic theory for set-valued dynamical systems

Set-valued dynamical systems, which are often referred to as general control systems or general dynamical systems, are generally used to describe multi-valued differential equations, including differential inclusions (see [23], [66], [16, 17] or [75]) and control systems (see [83] or [57, 55]). The literature on the subject is abundant and the terminology sometimes differs among authors.

3.2.1 Generalities

Let us first recall some classical notions. The *Hausdorff distance* between two nonempty closed sets A and B in E is given by

$$D_H(A, B) := \max \{d_H(A, B), d_H(B, A)\},$$

where d_H is the *Hausdorff semidistance* :

$$d_H(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B).$$

Let $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E)$ denote the space of continuous E -valued applications, endowed with the topology of uniform convergence on compacts. This topological space is metrizable with the distance D , given by

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min \{1, \sup_{t \in [-k, k]} d(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))\},$$

which makes it complete (since E is complete).

Definition 3.1. A set-valued map $\Phi : \mathbb{R}_+ \times E \rightrightarrows E^1$ with nonempty and closed values is called a set-valued dynamical system (SVDS) on E provided that

- a) $\forall x \in E, \Phi_0(x) = \{x\}$,
- b) $\forall x \in E, \forall s, t \in \mathbb{R}^+, \Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x)$,
- c) for any $x \in E, t \mapsto \Phi_t(x)$ is a continuous map for the Hausdorff distance,
- d) for any $t \in \mathbb{R}_+$, the map $x \mapsto \Phi_t(x)$ is upper semicontinuous, i.e. for any $x_0 \in E$, for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $d_H(\Phi_t(x), \Phi_t(x_0)) < \varepsilon$ for any $x \in B(x_0, \delta)$.

Definition 3.2. A function $\mathbf{z} : [0, T] \rightarrow E$ is a partial solution relative to the set-valued dynamical system Φ if it satisfies $\mathbf{z}(t) \in \Phi_{t-s}(\mathbf{z}(s))$ for $s, t \in [0, T]$, $s \leq t$. The set of such solutions is called $S_\Phi^{[0, T]}$. We call $S_\Phi^{[0, T]}(A)$ the set of partial solutions on $[0, T]$, starting in A . We denote by S_Φ^+ the set of half solutions $S_\Phi^{[0, \infty)}$.

The partial solutions are continuous functions and, given $0 \leq t$ and two points $x, y \in E$ such that $y \in \Phi_t(x)$, there exists at least one partial solution \mathbf{z} on $[0, t]$ such that $\mathbf{z}(0) = x$ and $\mathbf{z}(t) = y$ (see [83]). By the above remark, for all $x \in E$, $S_\Phi^{[0, t]}(x) \neq \emptyset$ which implies that $S_\Phi^+(x) \neq \emptyset$. A function $\mathbf{z} : \mathbb{R} \rightarrow E$ which satisfies $\mathbf{z}(t) \in \Phi_{t-s}(\mathbf{z}(s))$, $\forall s, t \in \mathbb{R}, s \leq t$, is called an *entire solution* of Φ . S_Φ is the set of all entire solutions, $S_\Phi(A)$ the subset of entire solutions starting from A . We will say that the set-valued dynamical system Φ is *complete* if, for any $x \in E$, there exists an entire solution with initial condition x , i.e., if $S_\Phi(x) \neq \emptyset, \forall x \in E$. For

¹this means that Φ is a map from $\mathbb{R}_+ \times E$ to 2^E . Set-valued maps are also called *relations* in the sequel.

example, we will see in Section 3.4 that the SVDS induced by a standard differential inclusion is complete.

From now, let us assume that E is compact and call it M to avoid confusions. Therefore, we consider a SVDS Φ defined on M .

Proposition 3.3. *The set of solutions S_Φ is a nonempty compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$.*

The compactness is a well-known consequence of Barbashin's Theorem² (see for instance [8] or [3]). We prove the existence of at least one entire solution in the Subsection 3.5.1.

Remark 3.4. *Points c) and d) in Definition 3.1 imply that the map $(t, x) \mapsto \Phi_t(x)$ is jointly upper semicontinuous. Since M is compact, upper semicontinuity is equivalent to saying that the graph of Φ :*

$$Gr(\Phi) := \{(t, x, y) : y \in \Phi_t(x)\}$$

is closed : if $(t_n, x_n, y_n) \rightarrow (t, x, y)$ and $y_n \in \Phi_{t_n}(x_n)$ then $y \in \Phi_t(x)$.

For our purpose, we need to give a proper definition of an invariant measure relative to set-valued dynamical systems. Recall that, if $\theta = \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ (resp. $\theta = \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$) is a continuous flow (resp. semiflow) on a metric space \mathcal{X} , a measure μ on \mathcal{X} is called θ -invariant if $\mu(\theta_t^{-1}(A)) = \mu(A)$ for all Borel set $A \in \mathcal{X}$ and $t \in \mathbb{R}$ (resp. $t \in \mathbb{R}_+$).

Let \mathcal{X} and \mathcal{X}' be two metric spaces and f be a Borel measurable map from \mathcal{X} to \mathcal{X}' . We denote by $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ the set of probability measures on \mathcal{X} . Then we can define the map $f^* : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}')$ by

$$f^*(\mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')),$$

for any $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ and any Borel set A' in \mathcal{X}' . The *support* of $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, i.e. the smallest closed set $S \subset \mathcal{X}$ satisfying $\mu(S) = 1$, is denoted by $\text{supp}(\mu)$. In the sequel, given a closed subset S of \mathcal{X} , we will sometimes assimilate a probability measure with support in S to its restriction to the metric space (S, d) .

3.2.2 Invariant measures for a closed relation

Let $F : M \rightrightarrows M$ be a closed relation with nonempty values, which means that the graph of F ,

$$Gr(F) := \{(x, y) \in M \times M \mid y \in F(x)\}$$

²Which states that, for any $t \geq 0$, the set $S_\Phi^{[0, t]}(A)$ is compact in $\mathcal{C}([0, t], \mathbb{R})$

is closed. Let $M^{\mathbb{Z}}$ be the set of bi-infinite sequences in M . The relation F induces a discrete time set-valued dynamical system on M , whose set of solutions is the nonempty set

$$S_F := \{\mathbf{x} \in M^{\mathbb{Z}} : \mathbf{x}_{i+1} \in F(\mathbf{x}_i) \ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

In order to define invariant measures in this discrete case, we follow [71]. The shift homeomorphism $\tilde{\Theta} : M^{\mathbb{Z}} \rightarrow M^{\mathbb{Z}}$ is defined by $(\tilde{\Theta}(\mathbf{x}))_i = \mathbf{x}_{i+1}$, for $i \in \mathbb{Z}$. Notice that $M^{\mathbb{Z}}$, equipped with the product topology is metrizable via the following distance :

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \min \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), 1/|k|\}$$

The following theorem is due to Akin and Miller (see [71], Theorem 3.2).

Theorem 3.5. *A probability measure $\mu \in \mathcal{P}(M)$ is called an invariant measure for F if it satisfies the following equivalent conditions.*

1. For every Borel set $A \subset M$

$$\mu(A) \leq \mu(F^{-1}(A)).$$

2. There exists a Markov kernel $\kappa : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ satisfying

$$x \in \text{supp}(\mu) \Rightarrow \text{supp}(\kappa(x, \cdot)) \subset F(x)$$

and

$$\mu(\cdot) = \kappa^*(\mu)(\cdot) := \int_M \kappa(x, \cdot) \mu(dx).$$

3. There exists $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(M \times M)$ the space of probability measures on $M \times M$ such that

$$\text{supp}(\tilde{\mu}) \subset \text{Graph}(F)$$

and

$$\mu = \pi_1^*(\tilde{\mu}) = \pi_2^*(\tilde{\mu}),$$

where $\pi_i : M \times M \rightarrow M$ is the i th projection.

4. There exists a probability measure ν on $M^{\mathbb{Z}}$ which is invariant with respect to the shift homeomorphism $\tilde{\Theta}$, satisfying

$$\text{supp}(\nu) \subset S_F$$

and

$$\mu = \tilde{\pi}_0^*(\nu),$$

where $\tilde{\pi}_0 : \mathbf{x} \in M^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathbf{x}_0 \in M$.

The set $\mathcal{P}_F(M)$ of F -invariant measures is nonempty, compact and convex in $\mathcal{P}(M)$. In general, if $\mu \in \mathcal{P}_F(M)$ then

$$\text{supp}(\mu) \subset \tilde{\pi}_0^*(S_F).$$

3.2.3 Invariant measures for set-valued dynamical systems

For a set-valued dynamical system Φ , we now give two equivalent definitions of an invariant measure. Notice that, by definition, for any $t \in \mathbb{R}_+$, the set-valued map $\Phi_t : M \rightrightarrows M$ is a closed relation with nonempty images (hence its set of solutions S_{Φ_t} is nonempty). Let us introduce the Lipschitz map $\pi_0 : \mathcal{C}(\mathbb{R}, M) \rightarrow M$ defined by $\pi_0(\mathbf{y}) = \mathbf{y}(0)$ and the translation flow $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R}, M) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$, which associates to a real number t and $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ the translated map $\Theta_t(\mathbf{y})$, defined by

$$\Theta_t(\mathbf{y})(s) = \mathbf{y}(t + s).$$

Theorem 3.6. *Given a probability measure $\mu \in \mathcal{P}(M)$, the two following statements are equivalent :*

(i) *for any $t \geq 0$, there exists a probability measure ν_t on S_{Φ_t} such that*

1. $\tilde{\pi}_0^*(\nu_t) = \mu$,

2. ν_t is $\tilde{\Theta}$ -invariant,

(ii) *there exists a probability measure ν on S_{Φ} such that*

- a) $\pi_0^*(\nu) = \mu$,

- b) ν is Θ -invariant.

Such a probability measure will be called an invariant measure for the set-valued dynamical system Φ . We call $\mathcal{P}_{\Phi}(M)$ (or \mathcal{P}_{Φ}) the set of invariant measures for Φ . It is a nonempty compact convex subset of $\mathcal{P}(M)$.

Proof. In order to prove (i) \Rightarrow (ii), we define, for all $t > 0$, a new relation

$$K_t : Gr(\Phi_t) \rightrightarrows S_{\Phi}^{[0,t]}$$

which associates, to $(x, y) \in Gr(\Phi_t)$, the set

$$K_t(x, y) = \{\mathbf{z} \in S_{\Phi}^{[0,t]} : \mathbf{z}(0) = x ; \mathbf{z}(t) = y\}.$$

Notice that $K_t(x, y)$ is nonempty and K_t is a closed relation for all $t > 0$. Indeed, assume that the sequence $(x_n, y_n)_n$ converges to $(x, y) \in Gr(\Phi_t)$ and that, for all n , $\mathbf{z}^n \in K_t(x_n, y_n)$ and $\mathbf{z}^n \rightarrow \mathbf{z} \in S_{\Phi}^{[0,t]}$. We easily have $\mathbf{z}(0) = x$ and $\mathbf{z}(t) = y$ and so $\mathbf{z} \in K_t(x, y)$.

Since $S_{\Phi}^{[0,t]}$ is compact, closedness of K_t is equivalent to upper semicontinuity, which can also be stated : for any A closed in $S_{\Phi}^{[0,t]}$, $K_t^{-1}(A)$ is closed in $M \times M$. In particular, K_t is measurable : for any closed $A \subset S_{\Phi}^{[0,t]}$, $K_t^{-1}(A)$ is a Borel set. By Theorem 8.1.3 of [4] we can therefore choose, for all $t > 0$, a measurable selection of K_t ,

$$\kappa_t : Gr(\Phi_t) \rightarrow S_{\Phi}^{[0,t]}.$$

Let $t > 0$ be fixed for now. We claim that there exists a measurable application $h_t : S_{\Phi_t} \rightarrow S_{\Phi}$ which conjugates the shift operators $\tilde{\Theta}$ and Θ_t :

$$h_t \circ \tilde{\Theta} = \Theta_t \circ h_t. \quad (3.2)$$

In order to prove (3.2), we now define two sets :

$$A_t := \{(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in Gr(\Phi_t)^{\mathbb{Z}} \mid y_n = x_{n+1} \text{ for all } n\};$$

and

$$B_t := \{(\mathbf{z}^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (S_{\Phi}^{[0,t]})^{\mathbb{Z}} \mid \mathbf{z}^{n+1}(0) = \mathbf{z}^n(t)\}.$$

Notice that S_{Φ_t} , endowed with the metric δ (see previous section) is topologically equivalent to A_t , seen as a subset of the product space $Gr(\Phi_t)^{\mathbb{Z}}$, equipped with the induced product topology. Similarly, (S_{Φ}, D) is topologically equivalent to the set B_t , understood as a subset of the product space $(S_{\Phi}^{[0,t]})^{\mathbb{Z}}$, equipped with the product of the uniform convergence topology on $[0, t]$. We now construct a measurable function \tilde{h}_t from A_t to B_t (to which can be associated a measurable function h_t from S_{Φ_t} to S_{Φ}) the following way : let $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_n, y_n)_n$ be in A_t . Then $\tilde{h}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ is given by $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^n)_n$, where

$$\mathbf{z}^n(s) = \kappa_t(x_n, y_n)(s), \quad \forall s \in [0, t].$$

In other terms, \tilde{h}_t is the countable product of the measurable map κ_t and therefore is measurable.

Now the corresponding map $h_t : S_{\Phi_t} \rightarrow S_{\Phi}$ is also measurable. To understand why the conjugacy (3.2) holds, let us give some insights on the map h_t : given $(x_n)_n \in S_{\Phi_t}$, we consider, for each couple (x_n, x_{n+1}) its image by κ_t (which is a partial solution curve of length t) and then build a solution $\mathbf{z} \in S_{\Phi}$ by joining together these partial solution curves. The conjugacy is a clear consequence of this construction.

By assumption, for any $t \geq 0$, there exists a probability measure ν_t on S_{Φ_t} such that

1. $\tilde{\pi}_0^*(\nu_t) = \mu$
2. ν_t is invariant for $\tilde{\Theta}$.

Let $(t_n)_n$ be a strictly decreasing sequence, converging to 0 and ν be a limit point of $(h_{t_n}^*(\nu_{t_n}))_n$ (such a point exists since the considered sequence is tight). Notice that ν sits on S_{Φ} . We can assume, without loss of generality, that $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{t_n}^*(\nu_{t_n})$. Since $\pi_0 \circ h_t = \tilde{\pi}_0$, we have $\pi_0^*(\nu) = \mu$. There remains to prove that ν is Θ -invariant. Let f be a continuous function on S_{Φ} and $T \geq 0$. It is sufficient to prove

$$\int_{S_{\Phi}} f(\mathbf{z}) \nu(d\mathbf{z}) = \int_{S_{\Phi}} f(\Theta_T(\mathbf{z})) \nu(d\mathbf{z}). \quad (3.3)$$

We call

$$\xi_n = \int f(\mathbf{z})(h_{t_n}^*(\nu_{t_n}))(d\mathbf{z}) \text{ and } \xi'_n = \int f \circ \Theta_T(\mathbf{z})(h_{t_n}^*(\nu_{t_n}))(d\mathbf{z}).$$

The two members of equation (3.3) can be rewritten in the form

$$\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \text{ and } \xi' := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi'_n.$$

Recall that $\Theta_t \circ h_t = h_t \circ \tilde{\Theta}$ for all $t \geq 0$. Call $s_n = T - [\frac{T}{t_n}]t_n$. Then

$$\begin{aligned} \Theta_T \circ h_{t_n} &= \Theta_{s_n} \circ (\Theta_{t_n})^{[\frac{T}{t_n}]} \circ h_{t_n} \\ &= \Theta_{s_n} \circ h_{t_n} \circ \tilde{\Theta}^{[\frac{T}{t_n}]}. \end{aligned}$$

Since ν_{t_n} is $\tilde{\Theta}$ -invariant, we get :

$$\xi'_n = \int f \circ \Theta_{s_n}(\mathbf{z})(h_{t_n}^*(\nu_{t_n}))(d\mathbf{z}).$$

Now we prove that $|\xi_n - \xi'_n|$ converges to zero. Pick $\varepsilon > 0$. Since S_Φ is compact, $(t, \mathbf{z}) \mapsto \Theta_t(\mathbf{z})$ is continuous and $s_n \rightarrow 0$, there exists N large enough so that

$$|f \circ \Theta_{s_n}(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z})| < \varepsilon,$$

for all $n \geq N$ and $\mathbf{z} \in S_\Phi$. Since ν_{t_n} is a probability measure for all n , we get the equation (3.3).

Conversely, assume that (ii) holds. There exists a probability measure ν which satisfies a) and b). For any $t \geq 0$ we define the application $g_t : S_\Phi \rightarrow S_{\Phi_t}$ which associates to \mathbf{z} , $g_t(\mathbf{z}) = (\mathbf{z}(kt))_{k \in \mathbb{Z}}$ and another probability measure

$$\nu_t := g_t^*(\nu).$$

Since $\tilde{\pi}_0 \circ g_t = \pi_0$, we have $\tilde{\pi}_0^*(\nu_t) = \tilde{\pi}_0^*(g_t^*(\nu))$. Now we show that ν_t is $\tilde{\Theta}$ -invariant. Since $\tilde{\Theta} \circ g_t = g_t \circ \Theta_t$, we have

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}^*(\nu_t) &= \tilde{\Theta}^*(g_t^*(\nu)) = (\tilde{\Theta} \circ g_t)^* \\ &= (g_t \circ \Theta_t)^*(\nu) = g_t^*((\Theta_t)^*(\nu)) \\ &= g_t^*(\nu) \\ &= \nu_t \end{aligned}$$

The set $\mathcal{P}_{\Theta|_{S_\Phi}}$ of $\Theta|_{S_\Phi}$ -invariant probability measures is a convex and compact nonempty set (by Krylov-Bogolubov Theorem). Since \mathcal{P}_Φ is the image of $\mathcal{P}_{\Theta|_{S_\Phi}}$ under π_0^* , we easily check that it enjoys the same properties. ■

Remark 3.7. *If $\Phi = \phi$ is a flow on M then π_0 restricts to an homeomorphism of S_ϕ to M . Consequently, μ is ϕ -invariant if and only if it is the image of a Θ -invariant measure (with its support in S_ϕ) under π_0 .*

Remark 3.8. Another natural way to define invariant measures relative to a SVDS is to consider the set of half solutions S_{Φ}^+ instead of S_{Φ} . Let us define the map $\Theta^+ : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ as the shift semi-flow defined similarly to Θ . A probability measure μ on M is then said to be a semi-invariant measure for the set-valued dynamical system Φ if there exists a probability measure ν^+ on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ such that

- (i) $\text{supp}(\nu^+) \subset S_{\Phi}^+$,
- (ii) ν^+ is Θ^+ -invariant, and
- (iii) $(\pi_0^+)^*(\nu^+) = \mu$, where $\pi_0^+ : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M) \rightarrow M$, $\pi_0^+(\tilde{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{y}}(0)$.

Semi-invariance is, a priori, very similar to invariance (as defined in Theorem 3.6). We discuss the relationship between these two definitions in the Subsection 3.5.3.

3.2.4 Poincaré recurrence theorem for set-valued dynamical systems

As an application of the definition of an invariant measure, we shall state a topological version of the Poincaré recurrence theorem for set-valued dynamical systems. Roughly speaking, this theorem says that invariant measures sit on the closure of the set of recurrent points of the dynamic. The concept of recurrent point is closely related to the notion of ω -limit set of a point $x \in M$, defined by

$$\omega_{\Phi}(x) := \bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi_{[t, \infty)}(x)}$$

It is characterized by the following : $y \in \omega_{\Phi}(x)$ if and only if there exists $(t_n)_n \uparrow \infty$, $(\mathbf{z}^n)_n \subset S_{\Phi}(x)$ such that $\mathbf{z}^n(t_n) \rightarrow y$ (see [16]). Notice that $\omega_{\Phi}(x)$ contains the limit sets $L(\mathbf{z}) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\mathbf{z}([t, \infty))}$ of all solutions \mathbf{z} with $\mathbf{z}(0) = x$ but is in general larger than

$$L(x) := \bigcup_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}(x)} L(\mathbf{z}).$$

(See [16])

In the classical framework of a flow, a point is recurrent provided it belongs to its own ω -limit set and the topological version of Poincaré recurrence theorem is stated as follows

Theorem 3.9 (Poincaré). *Let (\mathcal{X}, d) be a separable metric space and $\theta = \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ a flow on \mathcal{X} . Let μ be an invariant measure for θ . The closure of the set of all recurrent points,*

$$R_{\theta}^{\omega} := \{x \in \mathcal{X} : x \in \omega_{\theta}(x)\},$$

is called the Birkhoff center of θ and denoted $\text{BC}(\theta)$. Then

$$\mu(\text{BC}(\theta)) = 1.$$

3.3 Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories 95

The same definition of recurrence does not seem to fit in the set-valued framework. Intuitively, a point x is recurrent if there exists an entire solution starting from x , whose limit set contains x . Thus it is more natural to define the set of recurrent points of Φ by

$$R_\Phi := \{x \in M \mid x \in L(x)\}.$$

Clearly we have $R_\Phi \subset R_\Phi^\omega := \{x \in M \mid x \in \omega_\Phi(x)\}$. The closure of R_Φ will be called the *Birkhoff center* of Φ and will be noted $\text{BC}(\Phi)$. Notice that, if Φ is actually a flow, then $L(x) = \omega(x)$ and consequently $R_\Phi^\omega = R_\Phi$. The following statement is a Poincaré recurrence theorem for set-valued dynamical system.

Theorem 3.10. *Let μ be an invariant measure for Φ , then*

$$\mu(\text{BC}(\Phi)) = 1.$$

Proof. Let μ be an invariant measure for Φ and ν be an invariant measure for $\Theta|_{S_\Phi}$ such that $\pi_0^*(\nu) = \mu$. First of all, notice that

$$\pi_0(\text{BC}(\Theta)) \subset \text{BC}(\Phi).$$

Indeed, pick $\mathbf{z} \in R_{\Theta|_{S_\Phi}}^\omega$. There exists a sequence $t_n \uparrow +\infty$ such that $\Theta_{t_n}(\mathbf{z}) \rightarrow_n \mathbf{z}$. In particular, $\pi_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}(0) = \lim_n \mathbf{z}(t_n)$, which means that $\pi_0(\mathbf{z}) \in L(\mathbf{z}(0))$. Using the last inclusion, we get

$$\begin{aligned} \mu(\text{BC}(\Phi)) &\geq \mu(\pi_0(\text{BC}(\Theta))) \\ &= \nu(\pi_0^{-1} \circ \pi_0(\text{BC}(\Theta))) \\ &\geq \nu(\text{BC}(\Theta)). \end{aligned}$$

The last quantity is equal to one by Theorem 3.9. ■

3.3 Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories

3.3.1 Definition

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ a nondecreasing family of sub- σ -algebras. We define a process

$$\mathbf{X} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow M,$$

to be a *weak asymptotic pseudotrajectory* (WAPT) for the SVDS Φ if it enjoys the following properties

- (i) for almost every ω , the path $\mathbf{X}(\cdot, \omega)$ is uniformly continuous;
- (ii) it is progressively measurable : $\mathbf{X}_{|[0, T] \times \Omega}$ is $\mathcal{B}_{[0, T]} \times \mathcal{F}_T$ measurable for all $T > 0$;
- (iii) for each $\alpha > 0$ and $T > 0$, we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \sup_{s \in [0, T]} d(\mathbf{X}(t+s), \mathbf{z}(s)) \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t \right) = 0$$

almost surely.

3.3.2 Ergodic behavior

Given a weak asymptotic pseudotrajectory \mathbf{X} for Φ and $\omega \in \Omega$, let $\mu_t(\omega)$ denote the *empirical occupation measure* of $\mathbf{X}(\cdot, \omega)$:

$$\mu_t(\omega) := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\mathbf{X}(s, \omega)} ds.$$

Remark 3.11. $\mu_t(\omega)$ is defined as the unique Borel measure on M such that, for all continuous function f on M ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\mathbf{X}(s, \omega)) ds = \int_{x \in M} f(x) \mu_t(\omega)(dx).$$

Let $\mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)} \subset \mathcal{P}(M)$ denote the set of weak* limit points of $\{\mu_t(\omega)\}_{t \geq 0}$. Notice that, since M is compact, $\mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)}$ is nonempty and compact. We now state the main result of this section :

Theorem 3.12. *Let \mathbf{X} be a weak asymptotic pseudotrajectory for the set-valued dynamical system Φ . Then*

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)} \subset \mathcal{P}_\Phi, \text{ almost surely.}$$

In particular,

$$\bigcup_{\mu \in \mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)}} \text{supp}(\mu) \subset \text{BC}(\Phi), \text{ almost surely.}$$

Before proving this theorem, we state some useful lemmas. First we introduce a family of probability measures $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ on $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ related to the family $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$: given $\omega \in \Omega$,

$$\nu_t(\omega) := \frac{1}{t} \int_0^t \delta_{\Theta_s(\mathbf{X}(\cdot, \omega))} ds,$$

where we use the convention that an element $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ can also be seen as an element of $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ with $X(t) = X(0)$ for all $t < 0$.

Lemma 3.13. *The set $\{\Theta_t(\mathbf{X}(\cdot, \omega)) : t \geq 0\}$ is almost surely relatively compact.*

3.3 Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories 97

Proof. Hypothesis (i) in the definition of a WAPT guarantees that the set of functions $\{\Theta_t(\mathbf{X}(\cdot, \omega)) : t \geq 0\}$ is almost surely equicontinuous. Since $\mathbf{X}(\mathbb{R}, \omega) \subset M$ (which is compact), we can apply Ascoli-Arzelà's theorem to conclude. ■

Lemma 3.14. *The family $\{\nu_t(\omega)\}_{t \geq 0}$ is almost surely tight.*

Proof. By Lemma 3.13, we know that $\{\Theta_t(\mathbf{X}(\cdot, \omega)) : t \geq 0\}$ is almost surely relatively compact. The tightness follows since the support of ν_t is included in $\overline{\{\Theta_t(\mathbf{X}(\cdot, \omega)) : t \geq 0\}}$, for any $t \geq 0$. ■

The last lemma is a generalization (in the continuous case) of Theorem 6.9 in [97]. A short proof is provided in the Subsection 3.5.2 for convenience.

Lemma 3.15. *Let (\mathcal{X}, d) be a compact metric space, $\theta = (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ be a flow on \mathcal{X} and $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ be a collection of probability measures on \mathcal{X} . Consider the family $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ of probability measures on \mathcal{X} , defined by*

$$\nu_t = \frac{1}{t} \int_0^t \theta_s^*(\sigma_t) ds.$$

Then any limit point ν of $\{\nu_t\}_{t \geq 0}$ is θ -invariant.

We are now ready to prove our main result.

Proof of Theorem 3.12.

For all $\omega \in \Omega$ and for all $\mu \in \mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)}$, there exist $(t_j)_{j \geq 0}$ going to infinity and a probability measure ν on $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ such that

1. $\mu_{t_j} \rightarrow \mu$ and $\nu_{t_j} \rightarrow \nu$,
2. ν is Θ -invariant,
3. $\pi_0^*(\nu) = \mu$.

The first point is a direct consequence of the definition of μ and the tightness of $\{\nu_t\}_t$ (see Lemma 3.14), the second point is a consequence of Lemma 3.15 and the last point follows from the continuity of the map π_0 and the fact that $\pi_0^*(\nu_t) = \mu_t$, for all $t \in \mathbb{R}_+$. The set of all such ν will be called $A(\omega, \mu)$:

$$A(\omega, \mu) = \{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)) : \exists t_j \uparrow \infty \text{ such that 1., 2. and 3. hold}\}$$

Let $A(\omega) = \cup_{\mu \in \mathcal{P}_{(\mathbf{X}, \omega)}} A(\omega, \mu)$. We have $A(\omega) \subset \mathcal{P}_{\Theta}(\mathcal{C}(\mathbb{R}, M))$, the set of Θ -invariant probability measures on $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$. We now exhibit a set $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ of full measure such that for all $\omega \in \tilde{\Omega}$ and for all $\nu \in A(\omega)$, $\text{supp}(\nu) \subset S_{\Phi}$. Let $\{C_k\}$ be the family of closed neighborhoods of S_{Φ} defined by

$$C_k = \{\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M) : D(\mathbf{z}, S_{\Phi}) \leq \frac{1}{k}\}.$$

It is sufficient to find, for all $k \geq 0$, a set $\Omega_k \subset \Omega$ of full measure such that for all $\omega \in \Omega_k$,

$$\bigcup_{\nu \in A(\omega)} \text{supp}(\nu) \subset C_k.$$

Let $k \in \mathbb{N}$ and $N \in \mathbb{N}$ (large) be fixed. First of all we choose $T > 0$ such that $T/N \in \mathbb{N}$ and $\sum_{j=T/N}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2k}$. Let $\delta > 0$ be small enough such that $\delta \sum_{j=0}^{T/N} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2k}$. With these choices of T and δ , we have for all $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ and $s \geq 0$,

$$\sup_{u \in [-T/N, T/N]} d(\Theta_s(\mathbf{X})(u), \mathbf{y}(u)) \leq \delta \Rightarrow D(\Theta_s(\mathbf{X}), \mathbf{y}) \leq \frac{1}{k}.$$

Therefore we have for all $i \geq 1$,

$$\sup_{u \in [0, T]} d(\Theta_{(i-1)T}(\mathbf{X})(u), \mathbf{y}(u)) \leq \delta \Rightarrow D(\Theta_s(\mathbf{X}), \Theta_{s-(i-1)T}(\mathbf{y})) \leq \frac{1}{k}, \quad (3.4)$$

for all $s \in [(i-1 + 1/N)T, (i - 1/N)T]$. Since S_{Φ} is invariant for Θ , (3.4) implies that the event

$$\left\{ \inf_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}} \sup_{u \in [0, T]} d(\Theta_{(i-1)T}(\mathbf{X})(u), \mathbf{z}(u)) \leq \delta \right\}$$

is contained in the event

$$\left\{ \inf_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}} D(\Theta_s(\mathbf{X}), \mathbf{z}) \leq \frac{1}{k}, \forall s \in [(i-1 + \frac{1}{N})T, (i - \frac{1}{N})T] \right\}. \quad (3.5)$$

For $n \geq 1$ set

$$U_n = \mathbb{I}_{\{\inf_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}} \sup_{u \in [0, T]} d(\Theta_{(i-1)T}(\mathbf{X})(u), \mathbf{z}(u)) > \delta\}}$$

and

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (U_i - \mathbb{E}(U_i | \mathcal{F}_{(i-1)T})).$$

Since M_n is a martingale and $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) \leq 4 \sum \frac{1}{i^2}$, Doob's convergence theorem implies that (M_n) converges almost surely. Hence, by Kronecker lemma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - \mathbb{E}(U_i | \mathcal{F}_{(i-1)T})) = 0 \quad (3.6)$$

almost surely. In others terms, there exists $\Omega_{k,N} \subset \Omega$ (a subset of full measure) such that for all $\omega \in \Omega_{k,N}$, (3.6) holds. Now pick $\omega \in \Omega_{k,N}$ and $\nu \in A(\omega)$. Let

3.3 Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories 99

$n_j = \lfloor t_j/T \rfloor$. Then

$$\begin{aligned}
\nu(C_k) &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j T} \sum_{i=1}^{n_j} \int_{(i-1+1/N)T}^{(i-1/N)T} \delta_{\Theta_s(X)}(C_k) ds \\
&\geq (1 - 2/N) \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{T(1 - 2/N)} \int_{(i-1+1/N)T}^{(i-1/N)T} \delta_{\Theta_s(X)}(C_k) ds \\
&\geq (1 - 2/N) \lim_j \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \mathbb{I}_{\{\inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} D(\Theta_s(\mathbf{X}), \mathbf{z}) \leq \frac{1}{k}, \forall s \in [(i-1+1/N)T, (i-1/N)T]\}} \\
&\geq (1 - 2/N) \left(1 - \lim_j \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} U_i \right) \\
&\geq (1 - 2/N) \left(1 - \lim_j \left(\frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (U_i - \mathbb{E}(U_i | \mathcal{F}_{(i-1)T})) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n_j T} \sum_{i=1}^{n_j} \mathbb{E}(U_i | \mathcal{F}_{(i-1)T}) \right).
\end{aligned}$$

The first term in the last equality is equal to zero. Additionally, by definition of a WAPT, we may assume without loss of generality that, on $\Omega_{k,N}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi} \sup_{u \in [0, T]} d(\mathbf{X}(t+u), \mathbf{z}(u)) \geq \delta \mid \mathcal{F}_t \right) = 0. \quad (3.7)$$

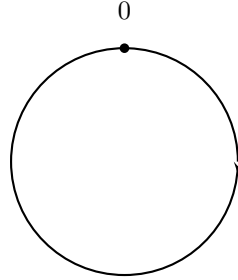
Consequently, $\nu(C_k) \geq 1 - 2/N$ for all $\nu \in \cup_{\omega \in \Omega_{k,N}} A(\omega)$, which means that $\nu(C_k) = 1$ for all $\nu \in \cup_{\omega \in \Omega_k} A(\omega)$, with $\Omega_k := \cap_N \Omega_{k,N}$. We conclude the proof by setting $\tilde{\Omega} = \cap_k \Omega_k$. ■

3.3.3 A simple deterministic example

Notice that the main result of previous section is not useless in the case of APTs. To understand why, let us consider a set-valued dynamical system on the circle S^1 , defined by the differential inclusion $\frac{dx}{dt} \in F(x)$ with

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{if } x = 0 \\ 1 - x & \text{if } 0 < x < 1. \end{cases}$$

The dynamics have the following portrait



We easily check that the only two *internally chain transitive* sets are $\{0\}$ and S^1 . Let X be a bounded APT of this dynamics. Then by Theorem 4.3 of [16] we know that $L(X)$ is either $\{0\}$ or S^1 . Moreover the only invariant measure for the dynamic is the Dirac measure on 0. Therefore by Theorem 3.12 we know that any limit point of the empirical measure of X is δ_0 . In particular, this means that X spends most of its time near 0.

3.4 Weak perturbed solution of a differential inclusion

In this section, we give some examples of WAPTs relative to a particular case of SVDS : the set-valued dynamical systems induced by a differential inclusion. In the whole section, we are in the particular case where E is the Euclidian space \mathbb{R}^m .

Definition 3.16. A set-valued map $F : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is said to be standard if it satisfies the following assumptions :

- (i) for any $x \in \mathbb{R}^m$, $F(x)$ is a nonempty, compact and convex subset of \mathbb{R}^m ,
- (ii) F is upper semicontinuous (see Definition 3.1),
- (iii) there exists $c > 0$ such that

$$\sup_{z \in F(x)} \|z\| \leq c(1 + \|x\|).$$

Under the above assumptions (Definition 3.16), it is well known (see [3]) that the differential inclusion

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} \in F(\mathbf{z}) \tag{3.8}$$

admits at least one solution (i.e. an absolutely continuous mapping $\mathbf{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $\dot{\mathbf{z}}(t) \in F(\mathbf{z}(t))$ for almost every t) through any initial point. To any $x \in \mathbb{R}^m$ and $t \in \mathbb{R}_+$, we can therefore associate the nonempty set

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{z}(t) \mid \mathbf{z} \text{ is a solution of (3.8), } \mathbf{z}(0) = x\}.$$

It is not hard to check that $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ is a complete set-valued dynamical system (see e.g. [16]).

Definition 3.17. *A set $M \subset \mathbb{R}^m$ is invariant for Φ if, for every $x \in A$, there exists an entire solution curve \mathbf{z} such that $\mathbf{z}(\mathbb{R}) \subset M$.*

Let $M \subset \mathbb{R}^m$ be a compact and invariant subset (for Φ). In the following we will consider the complete SVDS restricted to M , that we will also write Φ and that is defined, for all $x \in M$ and $t \in \mathbb{R}_+$, by

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{z}(t) \mid \mathbf{z} \text{ is a solution of (3.8), } \mathbf{z}(0) = x, \mathbf{z}(\mathbb{R}) \subset M\}.$$

Given a positive number δ , let F^δ be the set-valued map defined by

$$F^\delta(x) := \{y \mid \exists z \in B(x, \delta) \text{ such that } d(y, F(z)) < \delta\}. \quad (3.9)$$

Definition 3.18. *Given a function $\delta :]0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ decreasing to zero as t goes to infinity and a locally integrable process $\bar{\mathbf{U}} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, we say that a process $\mathbf{Y} : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow M$ is a $(\delta, \bar{\mathbf{U}})$ -weak perturbed solution of the differential inclusion (3.8) provided*

- (i) \mathbf{Y} is absolutely continuous for all ω ,
- (ii) for almost every $t > 0$,

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \bar{\mathbf{U}}(t) \in F^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t)),$$

- (iii) for any $T > 0$ and any $\gamma > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, T]} \left\| \int_t^{t+s} \bar{\mathbf{U}}(u) du \right\| \geq \gamma | \mathcal{F}_t \right) = 0,$$

almost surely.

Theorem 3.19. *Assume that \mathbf{Y} is a $(\delta, \bar{\mathbf{U}})$ -weak perturbed solution of the differential inclusion (3.8) and that $\bar{\mathbf{U}}$ is uniformly bounded by a positive constant $C : \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in [0, T]} \bar{\mathbf{U}}(t, \omega) \leq C$. Then \mathbf{Y} is a weak asymptotic pseudotrajectory of Φ .*

Proof. Let $T > 0$ and define $\|F\| := \sup_{x \in M} \sup_{y \in F(x)} \|y\| < \infty$. Consider the compact set

$$K := \{\mathbf{y} \in Lip([0, T], \mathbb{R}^m) \mid Lip(\mathbf{y}) \leq \|F\| + C + 1, \mathbf{y}(0) \in M\},$$

where $Lip([0, T], \mathbb{R}^m)$ denotes the set of Lipschitz functions on $[0, T]$ and $Lip(\mathbf{y})$ is the Lipschitz constant of \mathbf{y} . The set K is well adapted to our problem because it contains every solution curve of (3.8), restricted to an interval of length T and every realization of any $(\delta, \bar{\mathbf{U}})$ -weak perturbed solution of the differential inclusion.

For $\delta \in [0, 1]$, let us define the set-valued application (with the convention $\Lambda^0 = \Lambda$) :

$$\Lambda^\delta : K \rightrightarrows K, \mathbf{z} \mapsto \Lambda^\delta(\mathbf{z}), \quad (3.10)$$

where $\mathbf{y} \in \Lambda^\delta(\mathbf{z})$ if and only if there exists an integrable function $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $h(u) \in F^\delta(\mathbf{z}(u)) \forall u \in [0, T]$ and

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{z}(0) + \int_0^\tau h(u)du, \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Notice that $Fix(\Lambda) := \{\mathbf{z} \in K \mid \mathbf{z} \in \Lambda(\mathbf{z})\}$ is equal to $S_\Phi^{[0, T]}$, the set of partial solutions of Φ on $[0, T]$.

By (ii), we have

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \bar{\mathbf{U}}(t) \in F^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t)), \quad \text{for almost every } t > 0.$$

There exists an integrable function $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that $h(u) \in F^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t + u)) \forall u \in [0, T]$ and, for any $\tau \in [0, T]$,

$$\mathbf{Y}(t + \tau) - \int_t^{t+\tau} \bar{\mathbf{U}}(u)du = \mathbf{Y}(t) + \int_0^\tau h(u)du,$$

Hence³, $d_{[0, T]}(\mathbf{Y}(t + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t + \cdot))) \leq \sup_{s \in [0, T]} \left\| \int_t^{t+s} \bar{\mathbf{U}}(u)du \right\|$.

Let $\alpha > 0$. The following statement is an immediate consequence of Corollary 4.11 in [36] : there exists $\gamma > 0$ (which depends on T and α) and $\delta_0 > 0$ such that, for any $\delta < \delta_0$

$$d_{[0, T]}(\mathbf{z}, \Lambda^\delta(\mathbf{z})) < \gamma \Rightarrow d_{[0, T]}(\mathbf{z}, S_\Phi) < \alpha.$$

Consequently, for t large enough,

$$d_{[0, T]}(\mathbf{Y}(t + \cdot), S_\Phi) \geq \alpha \Rightarrow d_{[0, T]}(\mathbf{Y}(t + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t + \cdot))) \geq \gamma.$$

For these choices of t and γ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_{[0, T]}(\mathbf{Y}(t + \cdot), S_\Phi) \geq \alpha \mid \mathcal{F}_t) &\leq \mathbb{P}\left(d_{[0, T]}(\mathbf{Y}(t + \cdot), \Lambda^{\delta(t)}(\mathbf{Y}(t + \cdot))) \geq \gamma \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, T]} \left\| \int_t^{t+s} \bar{\mathbf{U}}(u)du \right\| \geq \gamma \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

By (iii), the last term tends to zero when t goes to infinity and the proof is complete. ■

³we call $d_{[0, T]}$ the uniform distance on $[0, T]$

3.4.1 Stochastic approximation algorithms

Stochastic approximation algorithms were born in the early 50s through the work of [80] and [54]. Let $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a standard set-valued map and $M \subset \mathbb{R}^m$ be a compact subset invariant for the set-valued dynamical system induced by the differential inclusion (3.8).

Definition 3.20 (Weak generalized stochastic approximation process). *Let $(U_n)_n$ be an uniformly bounded \mathbb{R}^m -valued random process and $(F_n)_n$ a sequence of set-valued maps on \mathbb{R}^m . We say that $(x_n)_n$ is a generalized stochastic approximation process relative to the standard set-valued map F on M if the following assumptions are satisfied :*

(i) *we have the recursive formula*

$$x_{n+1} - x_n - \gamma_{n+1}U_{n+1} \in \gamma_{n+1}F_n(x_n),$$

(ii) *the step size $(\gamma_n)_n$ is deterministic and satisfies*

$$\sum_n \gamma_n = +\infty, \quad \lim_n \gamma_n = 0,$$

(iii) *for all $n \geq 0$, $x_n \in M$,*

(iv) *for all $T > 0$ and all $\gamma > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup \left\{ \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| \mid k \text{ such that } \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_i \leq T \right\} \geq \gamma \mid \mathcal{F}_n \right) = 0 \quad (3.11)$$

(v) *for any $\delta > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that*

$$\forall n \geq n_0, \quad F_n(x_n) \subset F^\delta(x_n).$$

Remark 3.21. *Let $(U_n)_n$ be a \mathbb{R}^m -valued random process adapted to the filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ such that*

(i) $\mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$;

(ii) *for all $T > 0$, we have*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_n \mathbb{E} (\|U_{n+1}\| \mathbf{1}_{\{\|U_{n+1}\| \geq R\}} | \mathcal{F}_n) = 0.$$

Then for all $T > 0$ and all $\gamma > 0$, Property (3.11) is satisfied (see [18]).

Consider a weak generalized stochastic approximation process $(x_n)_n$. Set $\tau_n := \sum_{i=1}^n \gamma_i$ and $m(t) := \sup\{j \mid \tau_j \leq t\}$. We call \mathbf{X} the continuous time affine interpolated process induced by $(x_n)_n$, $\bar{\gamma}$ the piecewise constant deterministic process induced by $(\gamma_n)_n$ and $\bar{\mathbf{U}}$ is the piecewise constant continuous time process associated to $(U_n)_n$:

$$\mathbf{X}(\tau_i + s) = x_i + s \frac{x_{i+1} - x_i}{\gamma_{i+1}}, \text{ for } s \in [0, \gamma_{i+1}] \quad \bar{\gamma}(\tau_i + s) := \gamma_{i+1} \text{ for } s \in [0, \gamma_{i+1}[,$$

$$\text{and } \bar{\mathbf{U}}(t) := U_{n+1}, \text{ for } t \in [\tau_n, \tau_{n+1}].$$

Theorem 3.22. *The interpolated process \mathbf{X} is a WAPT. Hence the conclusions of Theorem 3.12 hold.*

Proof. By straightforward computations (see the proof of proposition 1.3 in Benaïm et al. [16]), it is not difficult to see that $(\mathbf{X}(t))_t$ is a weak perturbed solution associated to $\bar{\mathbf{U}}$ and

$$\delta(t) := \inf \left\{ \delta > 0 \mid \tau_n \geq t \Rightarrow F_n(x_n) \subset F^\delta(x_n) \right\} + \bar{\gamma}(t) \left(\bar{\mathbf{U}}(t) + c \left(1 + \sup_{x \in M} F(x) \right) \right),$$

which converges to 0. Consequently \mathbf{X} is a WAPT relative to the SVDS induced by F and the proof is complete. ■

3.5 Appendix

3.5.1 Proof of Proposition 3.3

Recall that an element $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ can also be seen as an element of $\mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$, with the convention $\tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{z}}(0)$ for all $t < 0$. Since $S_\Phi^+ \neq \emptyset$, the existence of at least one entire solution is a direct consequence of the following Proposition.

Proposition 3.23. *Let $(t_n) \uparrow \infty$ be a sequence of positive real numbers converging to infinity and $\tilde{\mathbf{z}} \in S_\Phi^+$ be a solution. Then there exists a subsequence $(t_{n_k})_{k \geq 0}$ and an entire solution $\mathbf{z} \in S_\Phi$ such that*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_{t_{n_k}}(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{z}.$$

Proof. Pick some positive integer N . By Barbashin Theorem, the set $S_\Phi^{[-N, N]}$ is compact and, for $n \in \mathbb{N}$ large enough, $\Theta_{t_n}(\tilde{\mathbf{z}}) \in S_\Phi^{[-N, N]}$. Therefore there exist an increasing sequence $\psi^N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ and $\mathbf{z}^N \in S_\Phi^{[-N, N]}$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{t_{\psi^N(n)}}(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{z}^N,$$

By the same arguments, there exist an extraction ψ and $\mathbf{z}^{N+1} \in S_\Phi^{[-N-1, N+1]}$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{t_{\psi \circ \psi^N(n)}}(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{z}^{N+1},$$

and then, in particular, $\mathbf{z}_{|[-N,N]}^{N+1} = \mathbf{z}^N$. We set $\psi^{N+1} := \psi \circ \psi^N$ and we iterate the process. In this way we construct an entire solution $\mathbf{z} \in S_\Phi$ such that $\mathbf{z}_{|[-N,N]} = \mathbf{z}^N \forall N$.

Let $(\delta_k) \downarrow 0$ be a decreasing sequence of positive real numbers. There exists a natural number m_1 such that for all $m \geq m_1$,

$$\sup_{s \in [-1,1]} d(\Theta_{t_{\psi^1(m)}}(\tilde{\mathbf{z}})(s), \mathbf{z}(s)) < \delta_1,$$

We set $n_1 := \psi^1(m_1)$. Now we define n_k by induction. Fix $k > 1$. There exists a natural number $m_k \geq m_{k-1}$ such that for all $m \geq m_k$,

$$\sup_{s \in [-k,k]} d(\Theta_{t_{\psi^k(m)}}(\tilde{\mathbf{z}})(s), \mathbf{z}(s)) < \delta_k,$$

We set $n_k := \psi^k(m_k)$. Therefore, by construction, we have $\lim_{k \rightarrow \infty} \Theta_{t_{n_k}}(\tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{z}$. ■

3.5.2 Proof of Lemma 3.15

Let μ be a limit point of $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$: there exists a sequence $(t_n)_n \uparrow +\infty$ such that $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{t_n}$. We have to prove that, for any T and any continuous function f ,

$$\int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}} f(\theta_T(x)) d\mu(x). \quad (3.12)$$

We have

$$\int_{\mathbf{X}} f(x) d\mu(x) = \lim_n \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \int_{\mathbf{X}} f(\theta_s(x)) d\sigma_{t_n}(x) ds$$

and

$$\int_{\mathbf{X}} f(\theta_T(x)) d\mu(x) = \lim_n \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \int_{\mathbf{X}} f(\theta_{s+T}(x)) d\sigma_{t_n}(x) ds.$$

By Fubini's Theorem we can exchange the integral operators in both expressions. Consequently,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \int_{\mathbf{X}} f(\theta_s(x)) ds d\sigma_{t_n}(x) - \int_0^{t_n} \int_{\mathbf{X}} f(\theta_{s+T}(x)) ds d\sigma_{t_n}(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{t_n} \left| \int_{\mathbf{X}} \int_0^{t_n} f(\theta_s(x)) ds d\sigma_{t_n}(x) - \int_{\mathbf{X}} \int_0^{t_n} f(\theta_{s+T}(x)) ds d\sigma_{t_n}(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{t_n} \int_{\mathbf{X}} \left(\left| \int_0^{t_n} f(\theta_s(x)) ds \right| + \left| \int_T^{t_n+T} f(\theta_s(x)) ds \right| \right) d\sigma_{t_n}(x) \\ & \leq \frac{2T \|f\|_\infty}{t_n}. \end{aligned}$$

Finally, taking the limit as n goes to infinity, we obtain (3.12). ■

3.5.3 Some remarks on semi-invariance

In this section we show (Proposition 3.24) that every invariant measure for a SVDS Φ is a semi-invariant measure for Φ . To do this, we start by proving two technical lemmas. Let us define the projection \mathbf{y}^+ on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ of an element $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$ by

$$\mathbf{y}^+(t) = \mathbf{y}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

and, in the same way, $A^+ := \{\mathbf{y}^+ : \mathbf{y} \in A\}$ for a subset $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, M)$. Be aware that the set $(S_\Phi)^+$ is contained in the set S_Φ^+ of partial solutions, but not equal in general.

Proposition 3.24. *An invariant measure μ on M for the set-valued dynamical system Φ is a semi-invariant measure for Φ .*

Proof. There exists a probability measure ν on S_Φ such that

- a) $\pi_0^*(\nu) = \mu$,
- b) ν is Θ -invariant.

We need to construct a probability measure ν^+ on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M)$ which satisfies conditions (i), (ii) and (iii) of the definition of a semi-invariant measure given in Remark 3.8. A natural way to do this is to define ν^+ as

$$\nu^+(A) := \nu(B_A), \quad \text{for all Borel sets } A \text{ of } \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, M),$$

where $B_A := \{\mathbf{z} \in S_\Phi : \mathbf{z}^+ \in A\}$. First, we have

$$\begin{aligned} \nu^+(S_\Phi^+) &= \nu(\{\mathbf{z} \in S_\Phi : \mathbf{z}^+ \in S_\Phi^+\}) \\ &= \nu(S_\Phi) = 1. \end{aligned}$$

which gives condition (i). Let $T > 0$ and $A \subset S_\Phi^+$ a Borel set. Since, for any $\mathbf{z} \in S_\Phi$, we have $\Theta_T^+(\mathbf{z}^+) = (\Theta_T(\mathbf{z}))^+$,

$$\begin{aligned} B_{(\Theta_T^+)^{-1}(A)} &= \{\mathbf{z} \in S_\Phi : \mathbf{z}^+ \in (\Theta_T^+)^{-1}(A)\} \\ &= \{\mathbf{z} \in S_\Phi : (\Theta_T(\mathbf{z}))^+ \in A\} \\ &= \Theta_T^{-1}(B_A). \end{aligned}$$

Therefore, as ν sits on S_Φ and is Θ -invariant, we have

$$\nu^+((\Theta_T^+)^{-1}(A)) = \nu(B_{(\Theta_T^+)^{-1}(A)}) = \nu(\Theta_T^{-1}(B_A)) = \nu(B_A) = \nu^+(A),$$

which gives condition (ii).

Let D be a Borel subset of M . Notice that $B_{(\pi_0^+)^{-1}(D)} = \pi_0^{-1}(D) \cap S_\Phi = S_\Phi(D)$. Consequently

$$(\pi_0^+)^*(\nu^+)(D) = \nu^+((\pi_0^+)^{-1}(D)) = \nu(S_\Phi(D)) = \nu(\pi_0^{-1}(D)) = \mu(D)$$

and the result holds. ■

Whether the converse statement is also true is an open question.

Acknowledgements The authors thank Michel Benaïm for useful advices and discussions. They also acknowledge financial support from the Swiss National Science Foundation Grant 200020 130574.

STOCHASTIC APPROXIMATIONS WITH CONSTANT STEP SIZE AND DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Ce texte a déjà été soumis pour publication. Il s'agit d'un travail en commun avec William H. Sandholm.

Abstract. We consider stochastic approximation processes with constant step size whose associated deterministic system is an upper hemicontinuous differential inclusion. We prove that over any finite time span, the sample paths of the stochastic process are closely approximated by a solution of the differential inclusion with high probability. We then analyze infinite horizon behavior, showing that stationary measures of the stochastic process must become concentrated on the Birkhoff center of the deterministic system. Our results extend those of Benaïm for settings in which the deterministic system is Lipschitz continuous, and build on the work of Benaïm, Hofbauer, and Sorin for the case of decreasing step sizes. We apply our results to the models of population dynamics in games, obtaining new conclusions about the medium and long run behavior of myopic optimizing agents.

Key words. Set-valued dynamical systems; invariant measures; stochastic approximations; differential inclusions, evolutionary game theory; best response dynamics.

AMS subject classification. 62L20, 34A60, 34G25, 37C50, 91A22, 93E35.

4.1 Introduction

Stochastic approximation theory, whose origins lie in the analysis of stochastic optimization algorithms, links the behavior of certain recursively-defined stochastic

processes with that of associated deterministic dynamical systems. Much of the theory addresses the behavior of processes with decreasing step sizes $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, which arise naturally when the state represents a time-averaged quantity. Early work focused on cases in which the approximating dynamical system is linear or a gradient system ([67, 31, 62]). A series of papers of Benaïm [10, 11] and Benaïm and Hirsch [13, 14] considered the case of Lipschitz continuous dynamical systems, including a model from game theory known as stochastic fictitious play ([39], [40], [48]). Their main results show that the stochastic process converges almost surely to an internally chain transitive set of the deterministic flow.

More recently, Benaïm et al. [16] develop the theory for the case in which the deterministic dynamic is not a differential equation, but a upper hemicontinuous differential inclusion. This level of generality is important in game-theoretic applications in which choices are determined by exact maximization, as the maximizer correspondence is neither single-valued nor continuous, but rather multi-valued and upper hemicontinuous. An important application of these results is to the original fictitious play process, defined in the early days of game theory by Brown [26, 27]. Indeed, Benaïm et al. [16] analysis provides a simple proof that the fictitious play process must converge to a connected set of Nash equilibria in any two-player zero-sum game and in any potential game.

While the discussion above concerns stochastic approximation processes with decreasing step-size, a distinct branch of the theory has considered processes with constant step size. Such processes are parameterized by a constant $\varepsilon > 0$, which represents both the step size of the process and the inverse of the step rate of the process, so that the expected increment per time unit can remain fixed as ε varies. The analysis concerns the behavior of the processes as ε approaches zero.

While the decreasing step-size theory leads naturally to one basic limit theorem, the constant step-size theory leads to two. Kurtz [59] (also see [35], [22], and Benaïm [10]) shows that over finite time horizons, the sample paths of the stochastic process are well-approximated by a solution trajectory of the deterministic system with probability approaching one. To describe infinite horizon behavior, [10] shows that the stationary measures of the stochastic process must become concentrated on the Birkhoff center of the deterministic system.

Existing analyses of stochastic approximation with constant step size focus on cases in which the deterministic system is Lipschitz continuous. Building on the work of Benaïm et al. [16] for the decreasing step size case, we develop the dynamical systems approach to stochastic approximation with constant step size when the deterministic system is an upper hemicontinuous differential inclusion. Our two main results parallel those of Benaïm [10] for the Lipschitz case. We prove a finite-horizon deterministic approximation theorem, and we prove that stationary

measures of the stochastic process must become concentrated on the Birkhoff center of the deterministic system.

Stochastic approximation theory with constant step size is of basic importance in evolutionary game theory, where it is used to understand the dynamics of behavior in large populations of strategically interacting agents whose decisions are based on simple myopic rules ([20], [86, 88]). Much research in this field focuses on deterministic continuous-time dynamics, which provide an idealized description of the population's aggregate behavior. Stochastic approximation methods connect the properties of these ideal systems with those of processes describing the stochastic evolution of play in large but finite populations. Existing results have drawn these connections for cases in which the deterministic system is Lipschitz continuous. But many interesting deterministic dynamics from game theory, particularly those reflecting exact optimization by individual agents, take the form of differential inclusions. These include the best response dynamics of [42] and [47], which (along with the replicator dynamic of Taylor and Jonker [94]) represent one of the two leading dynamics studied in the field. More recent optimization-based models, including the refined best response dynamics of Balkenborg et al. [7], the tempered best response dynamics of Zusai [100], and the sampling best response dynamics of Oyama et al. [76], also yield differential inclusions. By combining the main results in this paper with existing analyses of the relevant deterministic dynamics, we obtain a variety of new results on medium and long run behavior under optimization-based decision protocols.

A few recent papers have obtained results for special cases of the model considered here. Gorodeisky [43, 44] supposes that the deterministic dynamic is piecewise Lipschitz continuous with unique solution from each initial condition, and uses his analysis to study the behavior of myopic optimizers in the Matching Pennies game. Gast and Gaujal [41] consider a Markovian model whose mean field is arbitrary, and obtain finite-horizon deterministic approximation results stated in terms of a regularized mean field that takes the form of a differential inclusion.

The rest of the paper proceeds as follows. Section 4.2 provides background on differential inclusions and introduces the stochastic approximation processes. Section 4.3 presents our main results. Section 4.4 offers applications to evolutionary game dynamics. Section 4.5 contains all proofs.

4.2 Definitions

4.2.1 Differential inclusions

A correspondence $V: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ defines a differential inclusion on \mathbb{R}^n via

$$\dot{x} \in V(x). \quad (\text{DI})$$

Definition 4.1. We call (DI) a good upperhemicontinuous (or good UHC) differential inclusion if V is

- (i) *Nonempty* : $V(x) \neq \emptyset$ for all $x \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) *Convex valued* : $V(x)$ is convex for all $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) *Bounded* : There exists a $K \in \mathbb{R}$ such that $\sup\{|y| : y \in V(x)\} \leq K$ for all $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iv) *Upper hemicontinuous* : The graph of V , $\text{Gr}(V) = \{(x, y) : y \in V(x)\}$, is closed.

Let X be a compact convex subset of \mathbb{R}^n , and let

$$TX(x) = \text{cl}(\{z \in \mathbb{R}^n : z = \alpha(y - x) \text{ for some } y \in X \text{ and some } \alpha \geq 0\})$$

be the tangent cone of X at $x \in \mathbb{R}^n$. Suppose that

$$V(x) \in TX(x) \text{ for all } x \in X. \quad (4.1)$$

Then standard results (see [3] or [90]) imply that from any initial point $x \in X$, the differential inclusion (DI) admits at least one *positive Carathéodory solution* : that is, an absolutely continuous mapping $\mathbf{x}: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ with $\mathbf{x}(0) = x$ satisfying $\dot{\mathbf{x}}(t) \in V(\mathbf{x}(t))$ for almost every $t \in \mathbb{R}_+$. In the following, we will suppose that (DI) is a good UHC differential inclusion that satisfies (4.1).

Let $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ denote the space of continuous X -valued maps, endowed with the topology of uniform convergence on compact sets. This topological space is metrizable with the distance D given by

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\{1, \sup_{t \in [0, k]} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|\}, \quad (4.2)$$

under which the space is complete.

Denote by $S_x^+ \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ the set of solutions of (DI) with initial condition $\mathbf{x}(0) = x$. The set-valued dynamical system induced by the differential inclusion will be denoted $\Phi: \mathbb{R}_+ \times X \rightrightarrows X$, defined by

$$\Phi_t(x) := \{\mathbf{x}(t) : \mathbf{x} \in S_x^+\}.$$

Finally, $S_\Phi^+ := \cup_{x \in X} S_x^+$ is the set of all solution curves of (DI). Since X is compact, [8] theorem implies that S_Φ^+ is a compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$.

The *translation semi-flow* $\Theta^+ : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ assigns each time $t \in \mathbb{R}_+$ and trajectory $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ the translated trajectory $\Theta_t^+(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ defined by

$$\Theta_t^+(\mathbf{x})(s) = \mathbf{x}(t + s).$$

S_Φ^+ is *invariant* under Θ^+ , meaning that $\Theta_t^+(S_\Phi^+) = S_\Phi^+$ for all $t \geq 0$.

Finally, let the map $\pi_0 : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow X$ be the time 0 projection, defined by $\pi_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}(0)$. Evidently, π_0 is Lipschitz continuous.

4.2.2 Stochastic approximation processes with constant step size

The discrete-time case

We now introduce a class of stochastic approximation processes with constant step size defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. The processes we define here arise naturally in the context of stochastic evolutionary game dynamics. We present this application in detail in Section 4.4. Some readers may prefer to read Section 4.4.1 along with the present section before proceeding to our main results in Section 4.3.

Let $\delta > 0$ be a positive real number. Then $\tilde{V}^\delta : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is the set-valued map defined by

$$\tilde{V}^\delta(x) := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in B(x, \delta) \text{ such that } \text{dist}(z, V(y)) < \delta\}.$$

Definition 4.2. For a sequence of values of ε approaching 0, let $\mathbf{U}^\varepsilon = \{\mathbf{U}_k^\varepsilon\}_{k=0}^\infty$ be a sequence of \mathbb{R}^n -valued random variables and $\{V_\varepsilon\}$ be a family of set-valued maps on \mathbb{R}^n . Let $\dot{x} \in V(x)$ be a good UHC differential inclusion. We say that $\{\{\mathbf{X}_k^\varepsilon\}_{k=0}^\infty\}_{\varepsilon>0}$ is a family of generalized stochastic approximation processes (or a family of GSAPs) for the differential inclusion $\dot{x} \in V(x)$ if the following assumptions are satisfied :

- (i) for all $k \geq 0$, we have $\mathbf{X}_k^\varepsilon \in X$,
- (ii) we have the recursive formula

$$\mathbf{X}_{k+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_k^\varepsilon - \varepsilon \mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon \in \varepsilon V_\varepsilon(\mathbf{X}_k^\varepsilon),$$

- (iii) for any $\delta > 0$, there exists an $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ and $x \in X$,

$$V_\varepsilon(x) \subset \tilde{V}^\delta(x),$$

- (iv) for all $T > 0$ and for all $\alpha > 0$, we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\max_{k \leq \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \right\| > \alpha \mid \mathbf{X}_0^\varepsilon = x \right) = 0$$

uniformly in $x \in X$, where $\lfloor s \rfloor$ denotes the integer part of s .

The first three conditions of Definition 4.2 are basic, and the following propositions, proved in Sections 4.5.1 and 4.5.2, describe two standard settings in which the fourth condition holds.

Proposition 4.3. *For a sequence of values of ε approaching 0, let $\mathbf{U}^\varepsilon = \{\mathbf{U}_k^\varepsilon\}_{k=0}^\infty$ be a martingale difference sequence, i.e. a sequence of \mathbb{R}^n -valued random variables such that $\mathbb{E}(\mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon | \mathcal{F}_k) = 0$ for all $k \geq 0$. Suppose that for some $q \geq 2$,*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_k \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon\|^q) < \infty.$$

Then \mathbf{U}^ε satisfies condition (iv) of Definition 4.2.

Proposition 4.4. *For a sequence of values of ε approaching 0, let $\mathbf{U}^\varepsilon = \{\mathbf{U}_k^\varepsilon\}_{k=0}^\infty$ be a sequence of \mathbb{R}^n -valued random variables. Suppose there exists $\varepsilon_0 > 0$ and $\Gamma > 0$ such that for all $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, \mathbf{U}^ε is sub-Gaussian, in the sense that for all $\theta \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{E}(\exp(\langle \theta, \mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon \rangle) | \mathcal{F}_k) \leq \exp(\frac{1}{2}\Gamma \|\theta\|^2). \quad (4.3)$$

Then \mathbf{U}^ε satisfies condition (iv) of Definition 4.2.

Remark 4.5. *One can show that the sub-Gaussian condition (4.3) implies that \mathbf{U}^ε is a martingale difference sequence. Thus the requirements of Proposition 4.4 are stronger than those of Proposition 4.3. The sub-Gaussian condition provides stronger control of the rate of convergence of the probability toward zero in the condition (iv) of Definition 4.2; see Section 4.5.2 for details.*

In applications to game theory and other population models, it is natural to suppose that the process \mathbf{X}^ε undergoes ε^{-1} increments per unit of clock time. This feature is captured in the following definition of the interpolated process $\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon$, which runs in continuous time. Let $\mathcal{A}^\varepsilon: X^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ be a map that assigns each sequence $\mathbf{x} \in X^{\mathbb{N}}$ its time-rescaled affine interpolation $\mathcal{A}^\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$, defined by

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\mathbf{x})(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_{\ell(t)} + (t - \varepsilon\ell(t)) \frac{\mathbf{x}_{\ell(t)+1} - \mathbf{x}_{\ell(t)}}{\varepsilon}, \text{ where } \ell(t) = \left\lfloor \frac{t}{\varepsilon} \right\rfloor. \quad (4.4)$$

Applying this map to each sample path of the discrete-time process \mathbf{X}^ε generates the interpolated process $\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon$, whose sample paths are in $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$.

The continuous-time case

In this section we present a continuous-time version of a generalized stochastic approximation process. More precisely we adapted the technique used in the previous section to analyze a class of Markov processes defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 4.6. For a sequence of values of ε approaching 0, let $\{L^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a family of operators acting on bounded functions $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ according to the formula

$$L^\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x + \varepsilon z) - f(x)) \mu_x^\varepsilon(dz), \quad (4.5)$$

where $\{\mu_x^\varepsilon\}_{x \in X}^{\varepsilon>0}$ is a family of positive measures on \mathbb{R}^n such that

- (i) The function $x \mapsto \mu_x^\varepsilon(A)$ is measurable for each Borel set $A \subset \mathbb{R}^n$;
- (ii) The support of μ_x^ε is contained in the set $\{z \in \mathbb{R}^n: x + \varepsilon z \in X\}$ as well as in some compact set independent of x and ε .
- (iii) For any $\delta > 0$, there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ and for all $x \in X$,

$$v^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} z \mu_x^\varepsilon(dz) \in \tilde{V}^\delta(x).$$

Let the Markov processes $\{\mathbf{Y}^\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}^{\varepsilon>0}$ solve the martingale problems for $\{L^\varepsilon\}$ (see [35]). We call this collection of processes a family of Markov continuous-time generalized stochastic approximation processes for the differential inclusion $\dot{x} \in V(x)$.

Remark 4.7. The following standard construction of the process $\{\mathbf{Y}^\varepsilon\}$ will prove useful in the proof of Theorem 4.9 and in Example 4.20. Let $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ be a sequence of independent exponential random variables with rate ε^{-1} . Define $T_0 = 0$ and $T_k = \tau_1 + \dots + \tau_k$ for $k \geq 1$, and let $\kappa(s) = \max\{k: T_k \leq s\}$ for $s \geq 0$. Then define the Markov chain $\{\mathbf{X}_k^\varepsilon\}_{k \geq 1}$ on X with transition function

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{k+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_k^\varepsilon \in \varepsilon A \mid \mathbf{X}_k^\varepsilon = x) = \mu_x^\varepsilon(A)$$

for each Borel set $A \subset \mathbb{R}^n$. Then the Markov process $\{\mathbf{Y}^\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ defined by

$$\mathbf{Y}^\varepsilon(t) = \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon.$$

is a solution to the martingale problem for L^ε .

4.3 Results

4.3.1 Finite horizon deterministic approximation

Our first main result shows that over any finite-time span, the interpolated process $\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon$ closely mirrors a solution trajectory of the differential inclusion $\dot{x} \in V(x)$ with high probability.

Theorem 4.8. Suppose that $\{\mathbf{X}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is a family of GASPs. Then for any $T > 0$ and any $\alpha > 0$, we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\inf_{\mathbf{x} \in S_{\mathbf{x}}^+} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon(s) - \mathbf{x}(s)\| \geq \alpha \mid \bar{\mathbf{X}}^\varepsilon(0) = x \right) = 0.$$

uniformly in $x \in X$.

Kurtz [59] and Benaïm and Weibull [20] prove similar results for Lipschitz (classical) dynamical systems. In their analyses, the key tool used to control the distance between the process and the flow is Grönwall's lemma. This approach does not adapt to our setting. Here the mean set-valued map V may provides a multitude of directions in which the flow can proceed at each point in time. In particular, two solutions from the same initial condition can move away from each other. Instead of relying on Grönwall's lemma, we instead make use of Lemma 4.31, due to Faure and Roth [36], which approximates solutions of the differential inclusion by approximate fixed points of a certain set-valued operator ; see Section 4.5.3 for details.

In the continuous-time framework, the direct analogue of Theorem 4.8 is true :

Theorem 4.9. *Suppose that $\{\mathbf{Y}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is a family of Markov continuous-time GASPs. Then for any $T > 0$ and any $\alpha > 0$, we have*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\inf_{\mathbf{z} \in S_{\Phi}^+} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\mathbf{Y}^\varepsilon(s) - \mathbf{z}(s)\| \geq \alpha \mid \mathbf{Y}^\varepsilon(0) = x \right) = 0$$

uniformly in $x \in X$.

Theorem 4.8 is an immediate consequence of a more general result, Proposition 4.30, that we prove in Section 4.5.3. Theorem 4.9 is proved in Section 4.5.4.

4.3.2 Limiting stationary distributions and invariant measures

In this section, we assume not only that $\{\{\mathbf{X}_k^\varepsilon\}_{k=0}^\infty\}_{\varepsilon>0}$ is a family of GSAPs for the differential inclusion $\dot{x} \in V(x)$, but also that for each $\varepsilon > 0$, $\{\mathbf{X}_k^\varepsilon\}_{k=0}$ is a Markov chain defined on probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. We study the asymptotic behavior of a continuous family of probability measures associated with the resulting family of Markov chains. The main result of this section shows us that any weak limit as ε approaches zero of a collection of invariant probability measures $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ of the Markov chains $\{\mathbf{X}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ is itself an semi-invariant measure of the set-valued dynamical system Φ induced by $\dot{x} \in V(x)$.

We recall some useful definitions and notations. Let M be a metric space, and let $\mathcal{P}(M)$ be the space of Borel probability measures on M . The support of a measure ν in $\mathcal{P}(M)$, denoted $\text{supp}(\nu)$, is the smallest closed subset of measure 1. If M' is also a metric space and $f: M \rightarrow M'$ is Borel measurable, then the induced map $f^*: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M')$ associates with $\nu \in \mathcal{P}(M)$ the measure $f^*(\nu) \in \mathcal{P}(M')$ defined by

$$f^*(\nu)(B) = \nu(f^{-1}(B))$$

for all Borel sets B in M' . If $\theta: \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow M$ is a semi-flow on M , a measure $\nu \in \mathcal{P}(M)$ is called θ -invariant if $\nu((\theta_t)^{-1}(A)) = \nu(A)$ for all Borel sets $A \in M$ and

$t \in \mathbb{R}_+$. In the following we will use this equivalent definition (see e.g. Theorem 6.8 in [96]) : ν is θ -invariant if for all bounded continuous functions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ and all $t > 0$,

$$\int_M f(x) d\nu(x) = \int_M f \circ \theta_t(x) d\nu(x). \quad (4.6)$$

We now state the definition of semi-invariant measures for set-valued dynamical systems which uses the translation semi-flow Θ^+ introduced in Section 4.2.1.

Definition 4.10. *A probability measure μ on X is an semi-invariant measure for the set-valued dynamical system Φ if there exists a probability measure ν on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ such that*

- (i) $\text{supp}(\nu) \subset S_\Phi^+$,
- (ii) ν is Θ^+ -invariant, and
- (iii) $\pi_0^*(\nu) = \mu$.

In words, condition (iii) requires that ν have time 0 marginal distribution μ . We use the prefix “semi” because the measure ν places its mass on the set S_Φ^+ of forward solutions, rather than on the smaller set of entire solutions (i.e., solutions defined on all \mathbb{R}) as in the definition of *invariant measure* from Faure and Roth [37]. Every invariant measure is an semi-invariant measure (see Proposition 3.24), but whether the converse statement is also true is an open question.

While the definition of an semi-invariant measure on X for a set-valued dynamical system Φ is specified in terms of shift-invariant measures on the space $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ of continuous-time trajectories through X , the stochastic approximation processes introduced in Section 4.2.2 run in discrete time. It is therefore useful to have a sufficient condition for invariance on X that is stated in terms of shift-invariant measures on the sequence space $X^{\mathbb{N}}$. Proposition 4.11 provides such a condition. To state it, we let $\tilde{\Theta}$ be the left shift on $X^{\mathbb{N}}$, and let $\tilde{\pi}_0$ be the map which associates with each sequence in $X^{\mathbb{N}}$ its first coordinate. In addition, let $\mathcal{N}^\delta(A)$ denote the δ -neighborhood of a subset $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ for the distance D defined in (4.2).

Proposition 4.11. *Let μ be a probability measure on X . If there exist a vanishing sequence $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$ of real numbers and a sequence $\{\tilde{\nu}_n\}_n$ of probability measures on $X^{\mathbb{N}}$ satisfying*

$$(IM1) \quad \text{for every } \delta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+)) = 1, \text{ where } \nu_n = (\mathcal{A}^{\varepsilon_n})^*(\tilde{\nu}_n),$$

$$(IM2) \quad \tilde{\nu}_n \text{ is } \tilde{\Theta}\text{-invariant, and}$$

$$(IM3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\pi}_0^*(\tilde{\nu}_n) = \mu \text{ (in the sense of weak convergence),}$$

then μ is semi-invariant for the set-valued dynamical system Φ .

We present the proof of Proposition 4.11 in Section 4.5.5.

The following result shows us that the invariant measures of the Markov chains $\{\mathbf{X}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ tend to an semi-invariant measure of the set-valued dynamical system

Φ . The corresponding result was proved by Benaïm [10] for the case of classical dynamical systems. We follow a different line of proof here, since the definition of an semi-invariant measure of a set-valued dynamical system forces us to work in a larger space.

Theorem 4.12. *For each $\varepsilon > 0$, let μ^ε be an invariant probability measure of the Markov chain \mathbf{X}^ε . Let μ be a limit point of $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ in the topology of weak convergence, and let Φ be the set-valued dynamical system induced by (DI). Then μ is an semi-invariant measure of the set-valued dynamical system Φ .*

We present the proof of Theorem 4.9 in Section 4.5.6.

In the continuous-time framework, the invariant measures of the Markov jump process \mathbf{Y}^ε are the invariant measures of the Markov chain \mathbf{X}^ε defined in Remark 4.7. Since this Markov chain satisfies the conditions of Theorem 4.12, the following result is immediate.

Theorem 4.13. *Let $\{\mathbf{Y}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ be a family of Markov continuous-time GSAPs. Let μ^ε be an invariant probability measure of \mathbf{Y}^ε , and let μ be a limit point of $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ in the topology of weak convergence. Then μ is an semi-invariant measure of the set-valued dynamical system Φ .*

It is generally difficult to compute the collection of semi-invariant measures of a set-valued dynamical system Φ . It is therefore of interest to derive restrictions on the limit measure μ that are easier to evaluate than those from Theorems 4.12 and 4.13. In order to do so, we now introduce the notion of the Birkhoff center of Φ .

Recall that the *limit set* $L(\mathbf{z})$ of a solution \mathbf{z} of (DI) is defined by

$$L(\mathbf{z}) = \bigcap_{t \geq 0} \text{cl}(\mathbf{z}([t, \infty[)),$$

and the limit set $L(x)$ of a point $x \in X$ is defined by

$$L(x) = \bigcup_{\mathbf{z} \in S_x^\pm} L(\mathbf{z}).$$

We define the set of *recurrent points* of Φ by

$$R_\Phi^L = \{x \in X : x \in L(x)\}.$$

The closure $\text{cl}(R_\Phi^L)$ of the set of recurrent points is called the *Birkhoff center* of Φ and is denoted by $BC(\Phi)$.

Remark 4.14. *The limit set $L(x)$ may be equal to or strictly contained in the ω -limit set of the point x , defined by*

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \bigcap_{t \geq 0} \text{cl}(\Phi_{[t, \infty[}) \\ &= \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}^n(t_n) = y \text{ for some } \{t_n\} \uparrow \infty \text{ and } \{\mathbf{z}^n\} \subset S_\Phi^+ \text{ with } \mathbf{z}^n(0) = x\}. \end{aligned}$$

Unlike the definition of $L(x)$, the definition of $\omega(x)$ allows one to move between different solution trajectories starting from x as one considers later moments in time. For instance, if $V: [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ is defined by $V(0) = [0, 1]$ and $V(x) = 1 - x$ for $x \in (0, 1]$, then $L(0) = \{0, 1\}$ but $\omega(0) = [0, 1]$. Under our definition of recurrence based on $L(x)$, point x is recurrent if there exists at least one solution curve starting from x whose limit set contains x .

The following theorem is a version of the Poincaré recurrence theorem for standard set-valued dynamical systems for semi-invariant measures.

Theorem 4.15. *Let μ be an semi-invariant measure for Φ , then*

$$\mu(BC(\Phi)) = 1.$$

The proof of Theorem 4.15, which is directly inspired by the one of Faure and Roth [37] for invariant measures, is presented in Section 4.5.7.

The following result follows immediately from the previous theorems.

Corollary 4.16. *Under the conditions Theorem 4.12 or Theorem 4.13, the support of μ is contained in the Birkhoff center of Φ .*

4.4 Applications to game theory

We now define classes of Markov process from game theory that fit within the framework introduced above. Convergence results for these stochastic evolutionary game dynamics are presented in Section 4.4.4. For background on the material presented here, see [88].

4.4.1 Population games and stochastic evolutionary game dynamics

Population games

Consider a population of $N \in \mathbb{N}$ agents, each of whom chooses a strategy from the set $S = \{1, \dots, n\}$. The distribution of strategies chosen by the members of this population is represented by a point in the simplex $X = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_i x_i = 1\}$, or, more precisely, in the uniform grid $x^N = X \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$. We typically refer to such a point as a *population state*.

A *population game* is defined by a continuous function $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Here $F_i(x)$ represents the payoff to strategy $i \in S$ when the population state is x . One could allow payoffs to depend directly on the population size N , but to keep the notation manageable we do not do so here.

Since we are concerned with behavior in large populations, the relevant notion of equilibrium for F is that for the large N limit. We therefore call state $x \in X$ a *Nash equilibrium* of F if $x_i > 0$ implies that $F_i(x) \geq F_j(x)$ for all $j \in S$. In other words, at a Nash equilibrium, no (infinitesimal) agent could improve his payoffs by switching strategies.

Revision protocols

In our model of game dynamics, each of the N agents occasionally receives opportunities to switch strategies. The arrivals of these opportunities across agents are such that the expected number of revision opportunities that each agent receives in a unit of clock time is 1. Three specifications of the arrival process are introduced below. Each variant of the model generates a Markov process on the grid x^N ; for a more general extension, see Remark 4.24.

The behavior of an agent playing game F after receiving a revision opportunity is governed by a *revision protocol*, a pair of functions $(r^{F,N}, \sigma^{F,N})$ with $r^{F,N}: X^N \rightarrow [0, 1]^n$ and $\sigma^{F,N}: X^N \rightarrow X^n$. When a current i player receives a revision opportunity, he considers switching strategies with probability $r_i^{F,N}(x)$; if he does consider a switch, he chooses strategy j with probability $\sigma_{i,j}^{F,N}(x)$. (To be clear, the choice probabilities of an i player at state x are given by the probability vector $\sigma_i^{F,N}(x) \in X$.)

The dependence of $r^{F,N}$ and $\sigma^{F,N}$ on N allows for vanishing finite-population effects—for instance, the effects of sampling without replacement. We ensure that any such effects are small by requiring the existence of a limit protocol (r^F, σ^F) with $r^F: X \rightarrow [0, 1]^n$ and $\sigma^F: X \rightarrow X^n$ that satisfies

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in X^N} |r^{F,N}(x) - r^F(x)| = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in X^N} |\sigma^{F,N}(x) - \sigma^F(x)| = 0.$$

Mean dynamics

The *mean dynamic* (or *mean field*) $v: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ induced by the population game F and revision protocol (r^F, σ^F) represents the expected increment per time unit in the proportions of agents playing each strategy. The mean dynamic is defined by

$$v_i(x) = \sum_{j \in S} x_j r_j^F(x) \sigma_{j,i}^F(x) - x_i r_i^F(x). \quad (4.7)$$

The initial sum in (4.7) represents the expected inflow to strategy i from other strategies, while the second term represents the expected outflow from strategy i to other strategies.

It is easy to verify that $v(x) \in TX(x)$ for all $x \in X$ for any choice of game and revision protocol. While earlier papers (e.g., [20], [86]) focus on revision protocols

under which the mean dynamic v is Lipschitz continuous, the examples introduced in Section 4.4.2 lead to mean dynamics that are discontinuous selections from a good UHC differential inclusion.

Arrivals of revision opportunities and stochastic approximation processes

We now introduce three distinct models of the arrivals of revision opportunities :

- I. A simple discrete-time model : Each unit of clock time is divided into sub-intervals of length $\frac{1}{N}$. At the end of each subinterval, one of the N agents is chosen at random to receive a revision opportunity, with these choices being independent over time.
- II. An alternative discrete-time model : Each unit of clock time is again divided into subintervals of length $\frac{1}{N}$. At the end of each subinterval, each of the N agents receives a revision opportunity with probability $\frac{1}{N}$, with these draws being independent across agents and over time. Thus, the number of opportunities arriving at the end of each subinterval follows a *binomial* $(N, \frac{1}{N})$ distribution.
- III. A continuous-time model : Each agent receives revision opportunities according to independent, rate 1 Poisson processes.

Each of these models leads to a distinct collection of stochastic approximation processes.

Example 4.17 (Discrete-time process, one revision opportunity per period). *To define the Markov chain $\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty$ on x^N corresponding to Model I, let e_i denote the i th standard basis vector in \mathbb{R}^n , and define on an arbitrary probability space the auxiliary random variables $\zeta^{N,x}$ with distributions*

$$\mathbb{P}(\zeta^{N,x} = z) = \begin{cases} x_i r_i^{F,N}(x) \sigma_{i,j}^{F,N}(x) & \text{if } z = \frac{1}{N}(e_j - e_i), \\ \sum_{j \in S} x_j \left(1 - r_j^{F,N}(x) + r_j^{F,N}(x) \sigma_{j,j}^{F,N}(x)\right) & \text{if } z = \mathbf{0}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.8)$$

Then define the transition law of the Markov chain \mathbf{X}^N as

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{k+1}^N = \mathbf{X}_k^N + z \mid \mathbf{X}_k^N = x) = \mathbb{P}(\zeta^{N,x} = z).$$

Since there are N periods per unit of clock time, the expected increment per

time unit of Markov chain \mathbf{X}^N is given by

$$\begin{aligned} v^N(x) &= N \mathbb{E}(\mathbf{X}_{k+1}^N - \mathbf{X}_k^N | \mathbf{X}_k^N = x) \\ &= N \mathbb{E}_{\zeta}^{N,x} \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_i r_i^{F,N}(x) \sigma_{i,j}^{F,N}(x) (e_j - e_i) \\ &= \sum_{i \in S} e_i \left(\sum_{j \in S} x_j r_j^{F,N}(x) \sigma_{j,i}^{F,N}(x) - x_i r_i^{F,N}(x) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Thus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in X^N} |v^N(x) - v(x)| = 0, \quad (4.10)$$

where $v: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ is defined by (4.7).

Now suppose that v is a selection from $V: X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, a good UHC differential inclusion. If we let $\varepsilon = \frac{1}{N}$, then conditions (i) and (ii) of Definition 4.2 are clearly satisfied with

$$\mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon = \mathbf{U}_{k+1}^N = N (\mathbf{X}_{k+1}^N - \mathbf{X}_k^N - \mathbb{E}(\mathbf{X}_{k+1}^N - \mathbf{X}_k^N | \mathcal{F}_k)), \quad (4.11)$$

and the uniform convergence in (4.10) implies condition (iii). Finally, since each \mathbf{U}^N is a martingale difference sequence, and since the collection $\{\mathbf{U}^N\}_{N=N_0}^\infty$ is uniformly bounded, Proposition 4.3 implies that condition (iv) of Definition 4.2 is satisfied as well. Thus, the collection $\{\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty\}_{N=N_0}^\infty$ is a family of GSAPs.

Example 4.18 (Discrete-time process, random number of revision opportunities per period). To define the Markov chain corresponding to Model II, first define on an arbitrary probability space the auxiliary random variables $\xi_{i,\ell}^{N,x}$, $\ell \in \{1, \dots, Nx_i\}$, with distributions

$$\mathbb{P}(\xi_{i,\ell}^{N,x} = z) = \begin{cases} r_i^{F,N}(x) \sigma_{i,j}^{F,N}(x) & \text{if } z = \frac{1}{N}(e_j - e_i), \\ \sum_{j \in S} \left(1 - r_j^{F,N}(x) + r_j^{F,N}(x) \sigma_{j,j}^{F,N}(x)\right) & \text{if } z = \mathbf{0}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

On the same probability space, define $R_i^{N,x}$ to be a binomial($Nx_i, \frac{1}{N}$) random variable, and define all of the random variables so that they are mutually independent. Then define the random variables $\xi^{N,x}$ by

$$\xi^{N,x} = \sum_{i \in S} \sum_{\ell=1}^{R_i^{N,x}} \xi_{i,\ell}^{N,x}.$$

Now define the transition law of the Markov chain \mathbf{X}^N by

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{k+1}^N = \mathbf{X}_k^N + z | \mathbf{X}_k^N = x) = \mathbb{P}(\xi^{N,x} = z).$$

The expected increment per time unit of this Markov chain is

$$\begin{aligned}
w^N(x) &= N \mathbb{E}(\mathbf{X}_{k+1}^N - \mathbf{X}_k^N \mid \mathbf{X}_k^N = x) & (4.12) \\
&= N \mathbb{E}\xi^{N,x} \\
&= \sum_{i \in S} \mathbb{E}R_i^{N,x} \mathbb{E}\xi_{i,1}^{N,x} \\
&= \sum_{i \in S} x_i \sum_{j \in S} r_i^{F,N}(x) \sigma_{i,j}^{F,N}(x) (e_j - e_i) \\
&= v^N(x).
\end{aligned}$$

So as before,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{x \in X^N} |w^N(x) - v(x)| = 0,$$

where $v: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ is again defined by (4.7).

Suppose again that v is a selection from a good UHC differential inclusion. If we define \mathbf{U}^N as in (4.11), then conditions (i), (ii), and (iii) of Definition 4.2 are clearly satisfied, so to prove that the collection $\{\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty\}_{N=N_0}^\infty$ is a family of GSAPs, we need only verify condition (iv). Doing so requires the following lemma, which we prove in Section 4.5.8 :

Lemma 4.19. *There exists a constant $M > 0$ such that $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_{k+1}^N\|^2) \leq M < \infty$.*

It follows from this lemma and Proposition 4.3 that the collection $\{\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty\}_{N=N_0}^\infty$ is a family of GSAPs.

Example 4.20 (Continuous-time process). *We now define the continuous-time Markov chains $\{\mathbf{Y}_t^N\}_{t \geq 0}$ on x^N corresponding to Model III. To do so, we let the Markov chain $\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty$ be defined as in Example 4.17, and we define $\mathbf{Y}^N(t) = \mathbf{X}_{\kappa(t)}^N$ as in Remark 4.7. If we let $Z = \{e_i - e_j : 0 \leq i, j \leq n\}$, then the generator L^N of the Markov process \mathbf{Y}^N acts on bounded functions $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ according to*

$$L^N f(x) = N \sum_{z \in Z} (f(x + \frac{1}{N}z) - f(x)) \mu_x^N(z),$$

where $\mu_x^N(z) = \mathbb{P}(\zeta^{N,x} = \frac{1}{N}z)$ for the random variable $\zeta^{N,x}$ defined in equation (4.8).

Conditions (i) and (ii) of Definition 4.6 follow immediately from the definition of μ_x^N . Moreover, it is easy to see that $v^N(x) = \int_Z z \mu_x^N(dz)$ is given by the last expression in display (4.9), and so (4.10) implies that v^N converges uniformly to the function v defined in (4.7). Thus, if v is a selection from a good UHC differential inclusion, then condition (iii) of Definition 4.6 holds, and so the collection $\{\mathbf{Y}^N\}_{N \geq 1}$ is a family of Markov continuous-time GSAPs.

4.4.2 Examples of revision protocols and their mean dynamics

We now present three examples of revision protocols whose mean fields are described by differential inclusions. In all of the examples, a central role is played by the *maximizer correspondence* $M: \mathbb{R}^n \rightrightarrows X$ and the *best response correspondence* $B^F: X \rightrightarrows X$, defined by

$$M(\pi) = \operatorname{argmax}_{y \in X} \langle y, \pi \rangle \quad \text{and} \quad B^F = M \circ F.$$

Because M is convex-valued and upper hemicontinuous, the mean dynamics in the next three examples are all selections from good UHC differential inclusions.

To simplify the presentation, we suppose below that the revision protocol $(r^{F,N}, \sigma^{F,N}) \equiv (r^F, \sigma^F)$ does not depend on the population size. Examples 4.17, 4.18, and 4.20 show that our results for the examples coming next remain valid without this assumption, so long as the protocol converges uniformly to its limit.

Example 4.21 (The best response dynamic). *Suppose that an agent who receives a revision opportunity only chooses a strategy with positive probability if it is optimal at the current population state. This corresponds to revision protocols with $r_i^F \equiv 1$ and $\sigma_i^F(x) \in B^F(x)$. Note that by allowing revision probabilities to depend on the agent's current strategy i , one can allow players of different strategies to break ties in different ways; for instance, one can suppose that an agent currently playing a best response does not switch to an alternate best response. For a further generalization, see Remark 4.24 below, and for the implications for stochastic approximation, see the examples in Section 4.4.3.*

For any revision protocol of the form described above, the mean field v is a selection from the differential inclusion

$$\dot{x} \in V(x) = B^F(x) - x. \tag{4.13}$$

Equation (4.13) is the best response dynamic of Gilboa and Matsui [42] and Hofbauer [47].¹

Example 4.22 (Tempered best response dynamics). *It may be more realistic to assume that an agent who receives a revision opportunity becomes less likely to bother*

¹In some games, the best response protocol may be seen as too permissive, as it allows agents to switch to strategies that are optimal at the current state, but that fail to be optimal at any nearby states. To remedy this, Balkenborg et al. [7] suppose that players only switch to strategies that are not only best responses to the current state, but also unique best responses at certain states arbitrarily close to the current state. This refinement of the best response correspondence leads to a refinement of (4.13) called the *refined best response dynamic*. See [7] for further discussion and analysis.

to revise as his current payoff becomes closer to the optimal payoff. This is achieved by letting $r_i^F(x) = \rho(\hat{F}_i(x))$, where $\hat{F}_i(x) = \max_j F_j(x) - F_i(x)$ is the payoff deficit of strategy i at population state x , and $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ is a nondecreasing, Lipschitz continuous function satisfying $\rho(0) = 0$ and $\rho(s) > 0$ when $s > 0$. If we then assume maximization by again letting $\sigma_i^F(x) \in B^F(x)$, then the mean field v is a selection from the differential inclusion

$$\dot{x} \in V(x) = \sum_{i \in S} x_i \rho(\hat{F}_i(x)) (B^F(x) - e_i), \quad (4.14)$$

Equation (4.14) defines the tempered best response dynamic of Zusai [100].

Example 4.23 (Sampling best response dynamics). *If agents cannot directly observe the population state, they can estimate this state by taking a finite sample from the population, and using the empirical distribution of strategies in the sample as an estimate of the actual population state. Dynamics based on this idea are introduced by Oyama et al. [76].*

Let $\mathbb{Z}_+^{n,k} = \{z \in \mathbb{Z}_+^n : \sum_{i \in S} z_i = k\}$ be the set of possible outcomes of samples of size k , and define the k -sampling best response correspondence $B^{F,k}: X \rightrightarrows X$ by

$$B^{F,k}(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_+^{n,k}} \binom{k}{z_1 \dots z_n} (x_1^{z_1} \dots x_n^{z_n}) B^F\left(\frac{1}{k}z\right). \quad (4.15)$$

If an agent who receives a revision opportunity takes a sample of size k from the population and switches to a best response to its empirical distribution, we obtain a revision protocol with $r_i^F \equiv 1$ and $\sigma_i^F(x) \in B^{F,k}(x)$. The resulting mean field is a selection from the differential inclusion

$$\dot{x} \in V(x) \in B^{F,k}(x) - x, \quad (4.16)$$

which is known as the k -sampling best response dynamic.

More generally, one can allow the size of a revising agent's sample to itself be random. If the sample size is determined by the probability distribution $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ on \mathbb{N} , so that $r_i^F \equiv 1$ and $\sigma_i^F(x) \in \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k B^{F,k}(x)$ the mean dynamic is a selection from the λ -sampling response dynamic,

$$\dot{x} \in V(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k B^{F,k}(x) - x. \quad (4.17)$$

Remark 4.24. *Since the processes introduced in Section 4.4.1 are Markov processes, the maps (4.9) and (4.12) describing the expected increment per time unit as a function of the state x are single-valued. Thus the mean fields in Examples 4.21–4.23 are (single-valued) selections from good UHC differential inclusions.*

Since our discrete-time deterministic approximation result, Theorem 4.8, does not require the underlying processes to be Markov, it can also be applied to more

general processes. Let $(R^{F,N}, \Sigma^{F,N})$ with $R^{F,N}: X^N \rightrightarrows [0,1]^n$ and $\sigma^{F,N}: X^N \rightrightarrows X^n$ be nonempty, convex-valued, and upper hemicontinuous correspondences. When a current i player receives a revision opportunity, he considers switching strategies with probability given by a random variable $r_i^{F,N}(x)$ that takes values in $R^{F,N}(x)$; if he does consider a switch, his choice probabilities are given by a random variable $\sigma_i^{F,N}(x)$ that takes values in $\Sigma^{F,N}(x)$. We make no assumptions about the dependence of these random variables on the history of the process.

Let \mathbf{X}^N be the resulting stochastic process, with revision opportunities arriving as in Example 4.17 or 4.18, and suppose that $R^{F,N}$ and $\Sigma^{F,N}$ converge to $R^F: X \rightrightarrows [0,1]^n$ and $\Sigma^F: X \rightrightarrows X^n$ uniformly in the Hausdorff topology. If

$$\dot{x} \in V(x) = \sum_{i \in S} e_i \left(\sum_{j \in S} x_j R_j^F(x) \Sigma_{j,i}^F(x) - x_i R_i^F(x) \right). \quad (4.18)$$

is a good UHC differential inclusion, as is true under the protocols from Examples 4.21–4.23, then it is easy to verify that $\{\{\mathbf{X}_k^N\}_{k=0}^\infty\}_{N=N_0}^\infty$ is a family of GSAPs for $\dot{x} = V(x)$.

4.4.3 Which solution trajectories approximate sample paths?

When the mean field is Lipschitz, it admits a unique solution trajectory from every initial condition, but when it is a differential inclusion, there may be multiple solutions. While sometimes more than one such solution can approximate sample paths of the stochastic process, it need not be the case that all solutions do so. Thus, if the differential inclusion is understood as an approximation of the underlying stochastic process, not all solutions are relevant. We show in the following examples that solutions sometimes can be ruled out by basic considerations about the stochastic processes. For definiteness, we assume below that revision opportunities arrive in discrete time as specified in Example 4.17 or 4.18.

Example 4.25. When considering two-strategy games, it is convenient to let the strategy set be $S = \{0, 1\}$, to let $\chi = x_1$ denote the mass of agents using strategy 1, and to abuse notation by using this $\chi \in x = [0, 1]$ as our state variable. Doing so now, we define the coordination game $F: x \rightarrow \mathbb{R}^2$ by

$$F(\chi) = \begin{pmatrix} \chi^* & 0 \\ 0 & 1 - \chi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \chi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \chi) \chi^* \\ \chi (1 - \chi^*) \end{pmatrix}.$$

where $\chi^* \in (0, 1)$. This game has three Nash equilibria, $\chi = 0$, $\chi = 1$, and $\chi = \chi^*$.

Suppose that agents follow a best response protocol as introduced in Example 4.21, and let \mathbf{X}^N denote the resulting N -agent stochastic process. By Theorem 4.8,

finite horizon behavior of sample paths must be approximated by solutions to the best response dynamic for F , here given by the differential inclusion

$$\dot{x} = B^F(x) - x = \begin{cases} \{-x\} & \text{if } x < x^*, \\ [-x, 1-x] & \text{if } x = x^*, \\ \{1-x\} & \text{if } x > x^*. \end{cases} \quad (4.19)$$

From each initial condition $x \neq x^*$, this differential inclusion admits a unique solution, which converges to state 0 or state 1 according to whether x is less than or greater than x^* :

$$x < x^* \text{ implies that } \mathbf{x}(t) = e^{-t}x, \quad (4.20)$$

$$x > x^* \text{ implies that } \mathbf{x}(t) = 1 - e^{-t}(1-x). \quad (4.21)$$

From initial condition x^* itself, (4.19) admits many solutions : there is the stationary solution $\mathbf{x}(t) \equiv x^*$, solutions of forms (4.20) and (4.21) that proceed directly to a pure equilibrium, and solutions that stay at x^* for a finite amount of time before proceeding to a pure equilibrium.

Which solutions of (4.19) approximate sample paths of the process \mathbf{X}^N ? If x^* is not a state in the set $x^N = \{0, \frac{1}{N}, \dots, 1\}$ where the process \mathbf{X}^N runs, the only solutions of (4.19) are relevant for stochastic approximation are those of forms (4.20) and (4.21). Of course, this is necessarily the case whenever x^* is irrational.

If instead x^* is in x and is the initial condition of \mathbf{X}^N , then which solutions of (4.19) are relevant depends on just how \mathbf{X}^N is specified. If one assumes that indifferent agents do not switch strategies, then \mathbf{X}^N never leaves state x^* , so only the stationary solution of (4.19) is relevant. If any other Markovian specification is used, so that there is a positive probability that the initial increment of \mathbf{X}^N is not null, then for large N only the solutions of (4.19) that immediately leave x^* can approximate sample paths of \mathbf{X}^N . Thus, the solutions of (4.19) that leave x^* after some delay are only relevant if a non-Markovian specification of \mathbf{X}^N is followed, as described in Remark 4.24.²

Example 4.26. Now suppose that agents follow a best response protocol when playing the following game ([99], [47]) :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

²If the population game is intended to model random matching in a normal form game, then adjustments should be made to F and σ to account for the absence of self-matching. If this is done, then the only solutions of (4.19) starting from x^* that are relevant for stochastic approximation are those that immediately leave x^* . See [88], Sec. 11.4 and 12.5.3 for related observations.

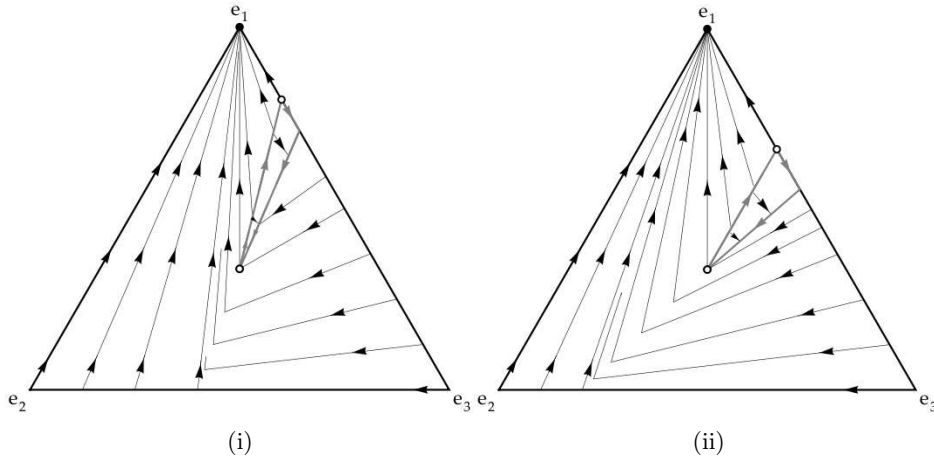


FIG. 4.1: The best response dynamic in two variations on Zeeman's game.

The phase diagram for the best response dynamic in this game is presented in Figure Figure 4.1(i). Solution trajectories from most initial conditions are unique and converge to the Nash equilibrium e_1 . However, from Nash equilibrium $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, there is a stationary solution at x^* , as well as solutions that head toward e_1 , possibly after some delay. Other solutions head toward the Nash equilibrium $y^* = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$. Some of these converge to y^* ; others leave segment x^*y^* before reaching y^* . Of those that leave, some head to e_1 , while others head toward e_3 and then return to x^* . If x^* is revisited, any of the behaviors just described can occur again.

Suppose that the initial state of the process \mathbf{X}^N is from some state x in the interior of segment x^*y^* . The possible increments in the state are of the form $\frac{1}{N}(e_j - e_i)$. In terms of the figure, the direction of any such increment is parallel to a face of the simplex, and in particular is not parallel to segment x^*y^* . Therefore, any non-null transition must take the state off of the segment. This implies that the only solutions to the best response dynamic starting in the interior of segment x^*y^* that can be relevant for stochastic approximation are those that immediately leave the segment.

The game

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -9 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

has a similar incentive structure to F , but in this game the segment between the Nash equilibria $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, and $y^* = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$ is parallel to the e_2e_1 face of the simplex (Figure 4.1(ii)). Now suppose that the process \mathbf{X}^N begins at some state x

in the interior this segment. (Such a state is in x^N if and only if N is a multiple of 3). If one assumes that agents playing an optimal strategy do not switch, and that strategy 2 players who are indifferent between strategies 1 and 3 always switch to strategy 1, then the process \mathbf{X}^N will stay on segment x^*y^* , sometimes remaining in place and sometimes moving toward y^* . So in this case, the only approximating solution of the best response dynamic for G is the unique one that starts at state x and converges to equilibrium y^* .

4.4.4 Convergence of stochastic evolutionary game dynamics

We now use our main results to understand the finite-horizon and infinite-horizon behavior of the processes introduced in Section 4.4.2 in certain classes of well-behaved games. Analyses of this sort were performed by Hofbauer and Sandholm [49] for processes based on perturbed best responses, under which agents choose optimally after the payoffs to each of their strategies is subject to a random perturbation. These random perturbations ensure that the relevant mean dynamics are smooth, allowing results on stochastic approximation in classical contexts to be applied. The main results in the present paper allow us to understand the behavior of processes based on exact best responses.

Stable games and potential games

Stable games and potential games are classes of games in which a variety of evolutionary processes are known to converge to equilibrium. To introduce these classes of games, we define $\Phi = I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ to be the orthogonal projection of \mathbb{R}^n onto $TX = \{z \in \mathbb{R}^n : z'\mathbf{1} = 0\}$, the tangent space of the simplex X .

The population game $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a *potential game* ([72], [85, 87]) if it admits a C^1 *potential function* $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, meaning that

$$\Phi F(x) = \nabla f(x) \quad \text{for all } x \in X. \quad (4.22)$$

Applications of potential games include models of genetic competition, firm competition, network congestion, externality pricing, evolutionary implementation.

The population game $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a *stable game* ([50]) if

$$(y - x)'(F(y) - F(x)) \leq 0 \quad \text{for all } x, y \in X. \quad (4.23)$$

Stable games include zero-sum games, games with an interior ESS ([70]), wars of attrition, and perturbed concave potential games as instances.

In games from either of these classes, the set of Nash equilibria has desirable properties. The Nash equilibria of a potential game are the states that (along with

appropriate multipliers) satisfy the Kuhn-Tucker first order conditions for maximizing the potential function f on the set X ([85]). And in any stable game, the set of Nash equilibria is convex ([50]).

The standard game-theoretic interpretations of conditions (4.22) and (4.23) are obtained by expressing these conditions in differential form, as the references above show. But it is also possible to provide direct geometric interpretations of these conditions. To do so, we introduce the differential equation

$$\dot{x} = \Phi F(x) \text{ for } x \in \text{int}(X) \quad (4.24)$$

By applying the projection Φ to the game $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, we convert the game into a vector field $\Phi F: X \rightarrow TX$ on the simplex. Thus the solutions of equation (4.24), known in game theory as the *projection dynamic*, “follow the payoff vectors” to the greatest possible extent while maintaining a population mass of 1.³

Suppose that we run the projection dynamic from two initial conditions, x_0 and y_0 . Then as long as the solutions remain well-defined,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |y_t - x_t|^2 = (y - x)'(F(y) - F(x)) \quad (4.25)$$

Comparing (4.23) and (4.25), we see that F is a stable game if and only if the projection dynamic for F defines a (weak) contraction. Similarly, comparing conditions (4.22) and (4.24) shows that in a potential game, the projection dynamic proceeds “straight uphill” on the landscape defined by the potential function f .

Our goal in this section is to obtain convergence results for the best response processes from Examples 4.21 and 4.22 in potential games and stable games. To do so, we must show that the good behavior of the projection dynamic (4.25) in these games carries over to the relevant mean dynamics, (4.13) and (4.14). For potential games, this is accomplished by showing that the potential function f defines a strict Lyapunov function ([47], [88], [100]). In the case of stable games, no single function serves as a Lyapunov function for all dynamics, but for the best response and tempered best response dynamics, one can verify that the functions

$$\Lambda(x) = \max_{y \in X} (y - x)' F(x) \quad \text{and} \quad \Lambda^p(x) = \sum_{i \in S} x_i \int_0^{\hat{F}_i(x)} (\hat{F}_i(x) - r) d\rho(r)$$

are strict Lyapunov functions for (4.13) and (4.14), respectively, and that both of these functions are minimized on the convex set of Nash equilibria of F ([47], [50], [100]).

³The projection dynamic can be derived from revision protocols based on “revision driven by insecurity”, under which the rate at which an agent receives revision opportunities depends inversely on the number of other agents choosing his current strategy. See [63] for details.

By combining the existence of these Lyapunov functions with our results from Section 4.3, we can obtain convergence results for stochastic best response processes. For convenience, we focus on the discrete time processes \mathbf{X}^N from Examples 4.17 and 4.18. The results are stated in terms of the continuous-time interpolated process $\{\bar{\mathbf{X}}^N\}_{N=N_0}^\infty$ defined in Section 4.2.2.

Following Hofbauer and Sandholm [49], we now introduce two notions of convergence for these families of processes. We say that the interpolated processes $\bar{\mathbf{X}}^N$ converge in the medium run from initial conditions in A to the closed set $C \subset X$ if for each $x \in A$ and $\alpha > 0$, there is a time $T = T(x)$ such that for all $U \geq T$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T, U]} \text{dist}(\bar{\mathbf{X}}_t^N, C) \geq \alpha \mid \bar{\mathbf{X}}_0^N = x \right) = 0.$$

If the set of initial conditions is not specified, it is understood to be the entire simplex X . We say that these processes $\bar{\mathbf{X}}^N$ converge in the long run to the closed set $C \subset X$ if for any sequence of invariant measures $\{\mu^N\}_{N=N_0}^\infty$ of these processes, and for each open set O containing C , we have that $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N(O) = 1$.

Theorem 4.27. *Consider evolution under any best response protocol or under any tempered best response protocol for game F , and assume that F is either a potential game or a stable game. Then the processes $\{\bar{\mathbf{X}}^N\}_{N=N_0}^\infty$ converge in the medium run and in the long run to the set of Nash equilibria of F .*

p -dominance and iterated p -dominance

We conclude the paper by presenting a convergence result for sampling best response processes. To do so, we must present some solution concepts for games due to Morris et al. [73] and Tercieux [95].

We say that strategy i is p -dominant in game F if i is the unique best response whenever it is used by at least fraction p of the population :

$$B^F(x) = \{e_i\} \text{ for all } x \in X \text{ with } x_i \geq p.$$

Evidently, lowering the value of p strengthens the p -dominance criterion, and in any population game F , at most one strategy can be p -dominant with $p \geq \frac{1}{2}$.

One can use the idea of p -dominance to obtain solution concepts of broader applicability. A nonempty set of strategies $S^* \subset S$ is a p -best response set of F if

$$B^F(x) \subset S^* \text{ for all } x \in X \text{ with } \sum_{i \in S^*} x_i \geq p.$$

Thus S^* is a p -best response set if whenever at least fraction p of the population plays actions in S^* , all best responses are themselves in S^* . We call a nonempty set of strategies $S^* \subset S$ an iterated p -best response set of F if there exists a sequence

S^0, S^1, \dots, S^m with $S = S^0 \supset S^1 \supset \dots \supset S^m = S^*$ such that S^ℓ is a p -best response set in $F|_{S^{\ell-1}}$, the restricted version of F in which only strategies in $S^{\ell-1}$ are allowed, for each $\ell = 1, \dots, m$. Strategy $i \in S$ is an *iterated p -dominant equilibrium* of F if $\{i\}$ is an iterated p -best response set of F .

To link these concepts with sampling best response processes, we say that the probability distribution $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ on \mathbb{N} is $\frac{1}{k}$ -good if

$$\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \left(1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^\ell\right) > \frac{1}{k}.$$

Oyama et al. [76] show that if distribution λ is $\frac{1}{k}$ -good, and if strategy i is an iterated $\frac{1}{k}$ -dominant equilibrium that is initially played by a positive mass of agents, then the λ -sampling best response dynamic converges to state e_i . Combining this fact with our results from Section 4.3, we obtain

Theorem 4.28. *Suppose that strategy i is an iterated $\frac{1}{k}$ -dominant equilibrium of F , and that λ is $\frac{1}{k}$ -good. Consider evolution under the λ -sampling best response protocol in F . Then the processes $\{\bar{\mathbf{X}}^N\}_{N=N_0}^\infty$ converge in the medium run from the set $X_i^+ = \{x \in X : x_i > 0\}$ to the singleton $\{e_i\}$.*

Analogous results can be stated for iterated $\frac{1}{k}$ -best response sets that are not singletons. See [76] for further discussion.

Theorem 4.28 ensures that starting from most initial conditions, the λ -sampling best response process proceeds to a neighborhood of the equilibrium e_i and remains in this neighborhood for a long period of time. Unlike many of the processes studied in stochastic evolutionary game theory (e.g., those in [49]), sampling best response processes are not irreducible: if the process reaches a state at which all agents choose the same strategy, it remains in that state forever. This suggests the possibility of strengthening the conclusion of Theorem 4.28 to that of convergence to state e_i with probability approaching 1. For work in this direction, see [84].

4.5 Proofs

4.5.1 Proof of Proposition 4.3

To simplify the proof, we suppose $q = 2$. Using the familiar Hölder inequality, the proof of the general case is almost the same.

Let us set $T > 0$. By the assumption on the second moment of \mathbf{U}^ε , there exists a constant $M > 0$ such that $\mathbb{E} \left(\|\mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon\|^2 \right) < M$, for all $i \geq 1$. Since \mathbf{U}^ε is a martingale

difference sequence, Burkholder's inequality (see, e.g., [92]) yields

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\max_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \right\|^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor - 1} \varepsilon^2 \|\mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon\|^2 \right) \\ &\leq \left\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \right\rfloor M c \varepsilon^2 \\ &\leq C(T) \varepsilon, \end{aligned}$$

where $c > 0$ is a constant given by Burkholder's inequality and $C(T) = T(cM + 1)$.

Markov's inequality then implies that

$$\mathbb{P} \left(\max_{k \leq \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \right\| > \alpha \right) \leq \frac{C(T) \varepsilon}{\alpha^2},$$

so we conclude the proof by taking the limit as ε goes to zero. ■

4.5.2 Proof of Proposition 4.4

For $k \in \mathbb{N}$ and $\theta \in \mathbb{R}^n$, let

$$Z_k(\theta) = \exp \left(\sum_{i=0}^{k-1} \langle \theta, \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \rangle - \frac{\Gamma}{2} k \varepsilon^2 \|\theta\|^2 \right).$$

According to (4.3), $(Z_k(\theta))_k$ is a supermartingale. Thus, for any $\beta > 0$ and any $n \in \mathbb{N}$, Doob's supermartingale inequality implies that

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \langle \theta, \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \rangle \geq \beta \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} Z_k(\theta) \geq \exp(\beta - \frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2 n \varepsilon^2) \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2 n \varepsilon^2 - \beta \right). \end{aligned}$$

Let e_1, \dots, e_m be the canonical basis of \mathbb{R}^n , $\delta > 0$, and $e = \pm e_i$ for some i . Set $\beta = \frac{\delta^2}{\Gamma n \varepsilon^2}$ and $\theta = \frac{\beta}{\delta} e$. Then

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \langle e, \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \rangle \geq \delta \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} \langle \theta, \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \rangle \geq \beta \right) \\ &\leq \exp \left(\frac{-\delta^2}{2\Gamma n \varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

Fixing $\gamma > 0$, and using the previous inequality with $\delta = \frac{\gamma}{m}$ and $n = \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor$, we conclude that

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{T}{\varepsilon} \rfloor} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \right\| \geq \gamma \right) &\leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{e=\pm e_i} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \langle e, \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \mathbf{U}_{i+1}^\varepsilon \rangle \geq \frac{\gamma}{m} \right\} \right) \\ &\leq 2m \exp \left(\frac{-\gamma^2}{2\Gamma \varepsilon T m^2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.5.3 Proof of Theorem 4.8

We introduce the notations $\|\mathbf{x}\|_{[0,T]} := \sup_{s \in [0,T]} \|\mathbf{x}(s)\|$, $d_{[0,T]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{[0,T]}$ and $d_{[0,T]}(\mathbf{x}, A) := \inf_{\mathbf{a} \in A} d_{[0,T]}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ and $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$. In addition we let $S_{[0,T]}$ denote the set of all solution curves of (DI) restricted to time interval $[0, T]$.

To prove Theorem 4.8, we first demonstrate a similar result for so-called perturbed solutions of the differential inclusion (DI). We then show that a family of GSAPs is a perturbed solution of (DI).

Definition 4.29. Let $\boldsymbol{\delta} = \{\boldsymbol{\delta}_T(\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0, T > 0}$ be a family of real random variables and $\underline{\mathbf{U}} = \{\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t)\}_{\varepsilon > 0}$ a family of stochastic process $\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. A family $\{\mathbf{y}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ of continuous functions $\mathbf{y}_\varepsilon: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a $(\boldsymbol{\delta}, \underline{\mathbf{U}})$ -perturbed solution of the differential inclusion (DI) if

- (i) \mathbf{y}_ε is absolutely continuous for all $\varepsilon > 0$,
- (ii) for any $T > 0$ and any $\alpha > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\boldsymbol{\delta}_T(\varepsilon) > \alpha) = 0$,
- (iii) for any $T > 0$ and for almost every $0 < t < T$,

$$\frac{d\mathbf{y}_\varepsilon(t)}{dt} - \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) \in \tilde{V}^{\boldsymbol{\delta}_T(\varepsilon)}(\mathbf{y}_\varepsilon(t)),$$

- (iv) for every $\varepsilon > 0$, $\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon$ is almost surely locally integrable,
- (v) for any $T > 0$ and any $\alpha > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq v \leq T} \left\| \int_0^v \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(s) ds \right\| \geq \alpha\right) = 0. \quad (4.26)$$

Theorem 4.8 is a corollary of the following proposition, which generalizes the theorem to $(\boldsymbol{\delta}, \underline{\mathbf{U}})$ -perturbed solutions.

Proposition 4.30. Let $\{\mathbf{y}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ be a $(\boldsymbol{\delta}, \underline{\mathbf{U}})$ -perturbed solution of the differential inclusion (DI). Then for any $\alpha > 0$ and any $T > 0$, we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(d_{[0,T]}(\mathbf{y}_\varepsilon, S_\Phi^+) \geq \alpha) = 0,$$

Before starting the proof, we introduce a useful technical lemma due to Faure and Roth [36]. Let $T > 0$, define $\|V\| = \sup_{x \in X} \sup_{y \in V(x)} |y|$, and consider the compact set

$$K_V := \{\mathbf{y} \in Lip([0, T], X) : Lip(\mathbf{y}) \leq \|V\| + 1\},$$

where $Lip([0, T], X)$ is the set of Lipschitz functions from $[0, T]$ to X and $Lip(\mathbf{y})$ is the Lipschitz constant of the function \mathbf{y} . Note that K_V contains every solution curve of (DI), restricted to $[0, T]$.

For $\gamma \in [0, 1]$, we define the set-valued map $\Lambda^\gamma: K_V \rightrightarrows K_V$ by letting $\mathbf{y} \in \Lambda^\gamma(\mathbf{z})$ if and only if there exists an integrable $\mathbf{h}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(u) &\in \tilde{V}^\gamma(\mathbf{z}(u)) \text{ for all } u \in [0, T], \text{ and} \\ \mathbf{y}(\tau) &= \mathbf{z}(0) + \int_0^\tau \mathbf{h}(u) \, du \text{ for all } \tau \in [0, T]. \end{aligned}$$

We adopt the convention that $\Lambda^0 = \Lambda$. Observe that $\text{Fix}(\Lambda) := \{\mathbf{z} \in K_V: \mathbf{z} \in \Lambda(\mathbf{z})\} = S_{[0, T]}$. The following lemma of Faure and Roth [36] says that if \mathbf{z} is almost a fixed point of Λ^γ for some small enough γ , then it is almost a solution of $\dot{x} \in V(x)$.

Lemma 4.31. *Let $\alpha > 0$. There exist $\beta > 0$ and $\gamma_0 > 0$ such that for any $\gamma < \gamma_0$*

$$d_{[0, T]}(\mathbf{z}, \Lambda^\gamma(\mathbf{z})) < \beta \Rightarrow d_{[0, T]}(\mathbf{z}, S_{[0, T]}) < \alpha$$

for all $\mathbf{z} \in K_V$.

Proof of Proposition 4.30. Let $\{\mathbf{y}_\varepsilon\}$ be a (δ, \mathbf{U}) -perturbed solution of the differential inclusion (DI). Fix $T > 0$ and $\alpha > 0$. For $0 \leq t \leq T$, set

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\varepsilon(t) &:= \dot{\mathbf{y}}_\varepsilon(t) - \mathbf{U}^\varepsilon(t) \in \tilde{V}^{\delta_T(\varepsilon)}(\mathbf{y}_\varepsilon(t)) \text{ and} \\ \mathbf{z}_\varepsilon(t) &:= \mathbf{y}_\varepsilon(0) + \int_0^t \mathbf{v}_\varepsilon(s) \, ds. \end{aligned}$$

Then

$$\mathbf{y}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(0) = \mathbf{z}_\varepsilon(t) - \mathbf{y}_\varepsilon(0) + \int_0^t \mathbf{U}^\varepsilon(s) \, ds. \quad (4.27)$$

Thus $\Delta(\varepsilon, T) := d_{[0, T]}(\mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{y}_\varepsilon) = \sup_{0 \leq s \leq T} \left\| \int_0^s \mathbf{U}^\varepsilon(u) \, du \right\|$, and in addition, the definitions of \mathbf{v}_ε and of Λ^γ imply that

$$\mathbf{z}_\varepsilon \in \Lambda^{\Delta(\varepsilon, T) + \delta_T(\varepsilon)}(\mathbf{z}_\varepsilon).$$

By Lemma 4.31, there exists a γ_0 such that for all $\varepsilon > 0$,

$$\Delta(\varepsilon, T) + \delta_T(\varepsilon) < \gamma_0 \Rightarrow d_{[0, T]}(\mathbf{z}_\varepsilon, S_{[0, T]}) < \frac{\alpha}{2}.$$

Furthermore, equality (4.27) implies that

$$d_{[0, T]}(\mathbf{y}_\varepsilon, S_{[0, T]}) \leq d_{[0, T]}(\mathbf{z}_\varepsilon, S_{[0, T]}) + \Delta(\varepsilon, T).$$

We therefore have

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_{[0, T]}(\mathbf{y}_\varepsilon, S_{[0, T]}) > \alpha) &\leq \mathbb{P}(d_{[0, T]}(\mathbf{z}_\varepsilon, S_{[0, T]}) + \Delta(\varepsilon, T) > \alpha) \\ &\leq \mathbb{P}(d_{[0, T]}(\mathbf{z}_\varepsilon, S_{[0, T]}) > \frac{\alpha}{2}) + \mathbb{P}(\Delta(\varepsilon, T) > \frac{\alpha}{2}) \\ &\leq \mathbb{P}(\Delta(\varepsilon, T) > \frac{\gamma_0}{2}) + \mathbb{P}(\delta_T(\varepsilon) > \frac{\gamma_0}{2}) + \mathbb{P}(\Delta(\varepsilon, T) > \frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$

We conclude the proof by taking the limit in ε and using hypotheses (ii) and (v) on \mathbf{y}_ε . ■

The last step in the proof of Theorem 4.8 is to show that the family of interpolated processes $\{\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ induced by a family of GSAPs is a $(\delta, \underline{\mathbf{U}})$ -perturbed solution of the differential inclusion (DI), where

$$\delta_T(\varepsilon) := \inf\{\delta: V_\varepsilon(x) \subset \tilde{V}^\delta(x) \ \forall x \in X\} + \varepsilon \max_{k \leq \lceil \frac{T}{\varepsilon} \rceil} (\|\mathbf{U}_k^\varepsilon\| + \|V\| + 1),$$

and where $\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon$ is the piecewise constant process induced by the sequence of random variables \mathbf{U}^ε from Definition 4.2 :

$$\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) = \mathbf{U}_{\ell(t)+1}^\varepsilon \text{ for } t \geq 0, \text{ where } \ell(t) = \left\lfloor \frac{t}{\varepsilon} \right\rfloor.$$

To do this, we must verify the five conditions of Definition 4.29. Conditions (i), (ii), (iv) and (v) are direct consequence of the definitions of $\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon$ and $\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon$, so we need only consider condition (iii).

Fix $T > 0$. By the definition of $\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon$ and by assumption (ii) of Definition 4.2, we have for any $0 \leq t \leq T$ that

$$\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon(t) \in \mathbf{X}_{\ell(t)}^\varepsilon + (t - \varepsilon\ell(t)) \left(\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + V_\varepsilon(\mathbf{X}_{\ell(t)}^\varepsilon) \right). \quad (4.28)$$

Using assumption (iii) of Definition 4.2, the last inclusion implies that, for $\varepsilon > 0$ small enough,

$$\left\| \bar{\mathbf{X}}^\varepsilon(t) - \mathbf{X}_{\ell(t)}^\varepsilon \right\| \leq \varepsilon \max_{k \leq \lceil \frac{T}{\varepsilon} \rceil} (\|\mathbf{U}_k^\varepsilon\| + \|V\| + 1)$$

and then, using this assumption once more, that

$$V_\varepsilon(\mathbf{X}_{\ell(t)}^\varepsilon) \subset \tilde{V}^{\delta_T(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon(t)). \quad (4.29)$$

Condition (iii) of Definition 4.29 follows from expressions (4.28) and (4.29). This completes the proof of Theorem 4.8.

4.5.4 Proof of Theorem 4.9

Denote by $\{\mathbf{X}_k^\varepsilon\}_{k \geq 1}$ the Markov chain associated with the process \mathbf{Y}^ε as defined in Remark 4.7. The continuous time affine interpolated process $\bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon(\cdot)$ induced by \mathbf{Y}^ε can be defined as

$$\bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon(t) = \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon + (t - T_{\kappa(t)}) \frac{\mathbf{X}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon}{T_{\kappa(t)+1}}. \quad (4.30)$$

Fix $T > 0$. By assumption (ii) on the measure μ_x^ε , there is a constant $M > 0$ such that

$$\|\mathbf{X}_{n+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_n^\varepsilon\| \leq M\varepsilon \quad \text{a.s.}, \quad (4.31)$$

which implies that

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{Y}^\varepsilon(t) - \bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon(t)\| \leq M\varepsilon \quad \text{a.s.} \quad (4.32)$$

For each $n \in \mathbb{N}$, define $\mathbf{U}_{n+1}^\varepsilon$ by

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1}^\varepsilon &= \frac{1}{\tau_{n+1}} (\mathbf{Y}^\varepsilon(T_{n+1}) - \mathbf{Y}^\varepsilon(T_n)) - v^\varepsilon(\mathbf{Y}^\varepsilon(T_n)) \\ &= \frac{1}{\tau_{n+1}} (\mathbf{X}_{n+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_n^\varepsilon) - v^\varepsilon(\mathbf{X}_n^\varepsilon), \end{aligned}$$

where v^ε is the vector field introduced in assumption (iii) of Definition 4.6. Let $\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t)$ be the piecewise constant process induced by the sequence of random variables $\{\mathbf{U}_n^\varepsilon\}$:

$$\underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) = \mathbf{U}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon \quad \text{for } t \geq 0.$$

We claim that $\{\bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon\}$ is a $(\delta, \underline{\mathbf{U}})$ -perturbed solution of the differential inclusion (DI) for

$$\delta_T(\varepsilon) := \inf\{\delta: v^\varepsilon(x) \in \tilde{V}^\delta(x) \quad \forall x \in X\} + M\varepsilon.$$

If this claim is true, then the theorem follows from Proposition 4.30 and inequality (4.32).

To prove the claim, we check the five conditions of Definition 4.29. Conditions (i), (ii) and (iv) are direct consequences of the definition of $\{\bar{\mathbf{X}}^\varepsilon\}$. Moreover, by deriving (4.30) and using the definition of \mathbf{U}_n^ε , we have almost surely for almost all $t \geq 0$ that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon(t) &= \frac{1}{\tau_{\kappa(t)+1}} (\mathbf{X}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon) \\ &= \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + v^\varepsilon(\mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon) \\ &\in \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + \tilde{V}^\gamma(\mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon) \\ &\subset \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(t) + \tilde{V}^{\delta_T(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{Y}}^\varepsilon(t)). \end{aligned}$$

where $\gamma = \inf\{\gamma: v^\varepsilon(x) \in \tilde{V}^\gamma(x) \text{ for all } x \in X\}$; the second step is a consequence of assumption (iii) of Definition 4.6, and the last inclusion is a consequence of (4.31) and the definition of $\delta_T(\varepsilon)$. This establishes condition (iii). Finally, condition (v) is a consequence of the following lemma.

Lemma 4.32. *Under the hypotheses of Theorem 4.9, we have*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(s) ds \right\| \geq \alpha \mid \mathbf{X}_0^\varepsilon = x \right) = 0,$$

uniformly in $x \in X$.

Proof. Note first that for all $t \leq T$,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \underline{\mathbf{U}}^\varepsilon(s) ds \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\kappa(t)} \tau_{k+1} \mathbf{U}_{k+1}^\varepsilon - (T_{\kappa(t)+1} - t) \mathbf{U}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon \right\| \\
&= \left\| \mathbf{X}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_0^\varepsilon - \sum_{k=0}^{\kappa(t)} \tau_{k+1} v^\varepsilon(\mathbf{X}_k^\varepsilon) \right. \\
&\quad \left. + (T_{\kappa(t)+1} - t) v^\varepsilon(\mathbf{X}_{\kappa(t)}) - \frac{T_{\kappa(t)+1} - t}{\tau_{\kappa(t)+1}} (\mathbf{X}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon) \right\| \\
&= \left\| \mathbf{Y}^\varepsilon(t) - \mathbf{X}_0^\varepsilon - \int_0^t v^\varepsilon(\mathbf{Y}^\varepsilon(s)) ds + \frac{t - T_{\kappa(t)+1}}{\tau_{\kappa(t)+1}} (\mathbf{X}_{\kappa(t)+1}^\varepsilon - \mathbf{X}_{\kappa(t)}^\varepsilon) \right\| \\
&\leq \left\| \mathbf{Y}^\varepsilon(t) - \mathbf{X}_0^\varepsilon - \int_0^t v^\varepsilon(\mathbf{Y}^\varepsilon(s)) ds \right\| + \varepsilon M.
\end{aligned}$$

Fix $\theta \in \mathbb{R}^n$, $x \in X$ and $T > 0$. Let $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ be the map defined by $f(y) = \exp(\langle \theta, y - x \rangle)$. By standard results (see Lemma 4.3.2 of Ethier and Kurtz [35]),

$$f(\mathbf{Y}^\varepsilon(t)) \exp\left(-\int_0^t \frac{L^\varepsilon f(\mathbf{Y}^\varepsilon(s))}{f(\mathbf{Y}^\varepsilon(s))} ds\right)$$

is a martingale for the natural filtration. Moreover, if we set $g(u) = e^u - u - 1$, then it follows from the definition of L^ε that

$$\frac{L^\varepsilon f(y)}{f(y)} = \langle \theta, v^\varepsilon(y) \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon \langle \theta, z \rangle) \mu_y^\varepsilon(dz).$$

From this expression we deduce that there exists a constant $\Gamma > 0$ such that for all $\theta \in \mathbb{R}^n$ with $\|\theta\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\frac{L^\varepsilon f(y)}{f(y)} - \langle \theta, v^\varepsilon(y) \rangle \leq \varepsilon \Gamma \|\theta\|^2.$$

It follows that the process

$$Z_\theta(t) = \exp\left(\left\langle \theta, \mathbf{Y}^\varepsilon(t) - x - \int_0^t v^\varepsilon(\mathbf{Y}^\varepsilon(s)) ds \right\rangle - t \varepsilon \Gamma \|\theta\|^2\right)$$

is a supermartingale.

Now fix $\alpha > 0$ small enough. Using Doob's inequality as in the proof of Proposition 4.4, we obtain

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \mathbf{Y}^\varepsilon(t) - x - \int_0^t v^\varepsilon(\mathbf{Y}^\varepsilon(s)) ds \right\| \geq \alpha \mid \mathbf{Y}^\varepsilon(0) = x\right) < C \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\varepsilon 4 \Gamma T}\right)$$

for some constant $C > 0$. This concludes the proof of the lemma. ■

4.5.5 Proof of Proposition 4.11

Let the probability measure μ be given, and let the vanishing sequence $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ and the sequence of probability measures $\{\tilde{\nu}_n\}_{n=1}^\infty$ satisfy (IM1), (IM2) and (IM3). Our aim is to show that μ is semi-invariant for the set-valued dynamical system Φ . We begin by introducing a candidate measure ν on $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ such that μ and ν satisfy the requirements of Definition 4.10.

As in hypothesis (IM1) we write ν_n for $(\mathcal{A}^{t_n})^*(\tilde{\nu}_n)$. We first establish

Lemma 4.33. $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ admits a tight subsequence.

Proof. By hypothesis (IM1) there is an increasing sequence $\{N_k\}_{k \geq 0}$ of positive integers such that

$$\nu_n \left(\mathcal{N}^{1/k}(S_\Phi^+) \right) > 1 - \frac{1}{k}$$

for every $k \geq 1$ and $n \geq N_k$. We now show that the subsequence $\{\nu_{N_k}\}_{k \geq 1}$ is tight, i.e., for all $m \geq 1$, there exists a compact subset K_m of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ such that $\nu_{N_k}(K_m) > 1 - \frac{1}{m}$ for all $k \geq 1$. Let K be the subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ defined by

$$K := S_\Phi^+ \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} \left(\mathcal{N}^{1/k}(S_\Phi^+) \cap \mathcal{A}^{\varepsilon_{N_k}}(X^\mathbb{N}) \right) \right).$$

One can prove that K is a compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ by showing that every sequence in K has a convergent subsequence.

Now fix $m \geq 1$, and let K_m be the compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ defined by

$$K_m := \bigcup_{k=1}^{m-1} \mathcal{A}^{\varepsilon_{N_k}}(X^\mathbb{N}) \cup K. \quad (4.33)$$

For all $k \leq m$, the definition of λ_{N_k} implies directly that $\lambda_{N_k}(K_m) = 1$. Moreover, for all $k > m$ we have that

$$\begin{aligned} \nu_{N_k}(K_m) &\geq \nu_{N_k} \left(\mathcal{N}^{1/k}(S_\Phi^+) \cap \mathcal{A}^{\varepsilon_{N_k}}(X^\mathbb{N}) \right) \\ &= \nu_{N_k} \left(\mathcal{N}^{1/k}(S_\Phi^+) \right) \\ &> 1 - \frac{1}{k} \geq 1 - \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

This proves that $\{\nu_{N_k}\}_{k \geq 1}$ is tight. \blacksquare

Lemma 4.33 implies that the sequence $\{\nu_n\}$ admits a weak limit point ν . Without loss of generality we henceforth write $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n$.

We now verify conditions (i), (ii), and (iii) of Definition 4.10. By construction, we have that $\pi_0 \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n} = \tilde{\pi}_0$ for all $n \geq 0$, which implies that $\pi_0^*(\nu_n) = \tilde{\pi}_0^*(\tilde{\nu}_n)$. Since π_0 is continuous, we conclude from hypothesis (IM3) that $\pi_0^*(\nu) = \mu$. This is condition (iii). Moreover, hypothesis (IM1) implies that

$$\nu \left(\mathcal{N}^{1/k}(S_\Phi^+) \right) = 1$$

for all $k \geq 1$. By taking the limit as k goes to infinity, we conclude that $\text{supp}(\nu) \subset S_\Phi$. This is condition (i).

To complete the proof of the proposition, we show that ν is invariant under the shift operator Θ^+ , which is condition (ii) of Definition 4.10. Let $f: S_\Phi^+ \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function and let $T \geq 0$; by equation (4.6), it is sufficient to prove that

$$\int_{S_\Phi^+} f(\mathbf{z}) \, d\nu(\mathbf{z}) = \int_{S_\Phi^+} f(\Theta_T^+(\mathbf{z})) \, d\nu(\mathbf{z}). \quad (4.35)$$

Since S_Φ^+ is closed, the Tietze extension theorem implies that f can be extended to a continuous function defined on all of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ with $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} |f(\mathbf{z})| < \infty$. We write

$$\xi_n = \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} f(\mathbf{z}) \, d\nu_n(\mathbf{z}) \quad \text{and} \quad \xi_n^T = \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} f \circ \Theta_T^+(\mathbf{z}) \, d\nu_n(\mathbf{z}),$$

so that the two sides of equation (4.35) can be expressed as

$$\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \quad \text{and} \quad \xi^T := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^T.$$

The definition of \mathcal{A}^t implies that $\Theta_t^+ \circ \mathcal{A}^t = \mathcal{A}^t \circ \tilde{\Theta}$ for all $t > 0$. Thus if $\beta_n = T - [\frac{T}{\varepsilon_n}] \varepsilon_n$, then

$$\begin{aligned} \Theta_T^+ \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n} &= \Theta_{\beta_n}^+ \circ (\Theta_{\varepsilon_n}^+)^{[\frac{T}{\varepsilon_n}]} \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n} \\ &= \Theta_{\beta_n}^+ \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n} \circ \tilde{\Theta}^{[\frac{T}{\varepsilon_n}]}. \end{aligned}$$

This observation and the $\tilde{\Theta}$ -invariance of ν_n (from hypothesis (IM2)) imply that

$$\begin{aligned} \xi_n^T &= \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} f \circ \Theta_T^+(\mathbf{z}) \, d(\mathcal{A}^{\varepsilon_n})^*(\tilde{\nu}_n)(\mathbf{z}) \\ &= \int_{X^\mathbb{N}} f \circ \Theta_T^+ \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) \, d\tilde{\nu}_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{X^\mathbb{N}} f \circ \Theta_{\beta_n}^+ \circ \mathcal{A}^{\varepsilon_n}(\mathbf{x}) \, d\tilde{\nu}_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} f \circ \Theta_{\beta_n}^+(\mathbf{z}) \, d(\mathcal{A}^{\varepsilon_n})^*(\tilde{\nu}_n)(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)} f \circ \Theta_{\beta_n}^+(\mathbf{z}) \, d\nu_n(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

We now show that $|\xi_n - \xi_n^T|$ converges to zero. Fix $m > 0$, and let K_m be the compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ defined in (4.33). Since $\Theta^+ : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ is continuous, one can prove that the set

$$K^* := \bigcup_{n \geq 1} \Theta_{\beta_n}^+(K_m) \cup K_m$$

is a compact subset of $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ by showing that every sequence in K has a convergent subsequence. Since $\Theta^+ : [0, 1] \times K_m \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X)$ is uniformly continuous with $\Theta_0^+(\cdot)$ the identity function on K_m , β_n vanishes, and f is uniformly continuous on K^* , there exists an $N_0 \in \mathbb{N}$ large enough that

$$\left| f \circ \Theta_{\beta_n}^+(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) \right| < \frac{1}{m}$$

for all $n \geq N_0$ and all $\mathbf{z} \in K_m$. Using this fact and inequality (4.34), we see that

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi_n^T| &\leq \int_{K_m} \left| f \circ \Theta_{\beta_n}^+(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) \right| d\nu_n(\mathbf{z}) + \int_{K_m^c} \left| f \circ \Theta_{\beta_n}^+(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) \right| d\nu_n(\mathbf{z}) \\ &\leq \frac{1}{m} + 2 \|f\|_\infty \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Taking the limit as m grows large yields equation (4.35). This completes the proof of the theorem.

4.5.6 Proof of Theorem 4.12

For each $\varepsilon > 0$, let μ^ε be an invariant probability measure of the Markov chain \mathbf{X}^ε , and let μ be a weak limit point of $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Then there is a vanishing sequence $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ of positive real numbers such that μ^{α_k} converges to $\mu \in \mathcal{P}(X)$. In addition, let ν_k be the measure on the path space $X^{\mathbb{N}}$ induced by the Markov chain $\{\mathbf{X}^{\alpha_k}\}$ when it is run from initial distribution μ^{α_k} : that is, $\nu_k(A) := \mathbb{P}_{\mu^{\alpha_k}}(\mathbf{X}^{\alpha_k} \in A)$ for each Borel set $A \subset X^{\mathbb{N}}$.

To show that μ is semi-invariant for the set-valued dynamical system Φ , we apply Proposition 4.11 to the sequences $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ and $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$. Because μ^{α_k} is an invariant probability measure for $\{\mathbf{X}^{\alpha_k}\}$, the measure ν_k is $\tilde{\Theta}$ -invariant, establishing condition (IM2). Moreover, $\tilde{\pi}_0^*(\nu_k) = \mu^{\alpha_k}$ by construction, and so $\{\tilde{\pi}_0^*(\nu_k)\}_{k=1}^\infty$ converges to μ , establishing condition (IM3).

It remains to verify condition (IM1). Fix $\delta > 0$, and then choose $T > 0$ and $\gamma > 0$ such that $\sum_{i=[T]}^\infty \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2}\delta$ and $\gamma \sum_{i=0}^{[T]} \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2}\delta$. These choices imply that

$$\left\{ \mathbf{z} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, X) : \inf_{\mathbf{y} \in S_\Phi^+} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{y}(s)\| \leq \gamma \right\} \subset \mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+).$$

It follows that

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_k(\mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+)) &= \nu_k((\mathcal{A}^{\alpha_k})^{-1}(\mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+))) \\ &= \mathbb{P}_{\mu^{\alpha_k}}(\mathbf{X}^{\alpha_k} \in (\mathcal{A}^{\alpha_k})^{-1}(\mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+))) \\ &= \int_X \mathbb{P}_x(\mathbf{X}^{\alpha_k} \in (\mathcal{A}^{\alpha_k})^{-1}(\mathcal{N}^\delta(S_\Phi^+))) d\mu^{\alpha_k}(x) \\ &\geq \int_X \mathbb{P}_x \left(\inf_{\mathbf{z} \in S_\Phi^+} \sup_{0 \leq s \leq T} \|\bar{\mathbf{X}}^{\alpha_k}(s) - \mathbf{z}(s)\| \leq \gamma \right) d\mu^{\alpha_k}(x). \end{aligned}$$

This inequality and Theorem 4.8 imply condition (IM1), completing the proof of the theorem.

4.5.7 Proof of Theorem 4.15

In the classical framework of a semi-flow on a separable metric space, the Poincaré recurrence theorem is stated as follows.

Theorem 4.34 (Poincaré). *Let (\mathcal{X}, d) be a separable metric space and $\theta = \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ a semi-flow on \mathcal{X} . Define the ω -limit set of $x \in \mathcal{X}$ by $\omega_\theta(x) = \bigcap_{t > 0} \text{cl}(\theta_{[t, \infty)}(x))$, the set of recurrent points by $R_\theta^\omega = \{x \in \mathcal{X} : x \in \omega_\theta(x)\}$, and the Birkhoff center of θ and denoted $BC(\theta) = \text{cl}(R_\theta^\omega)$. If μ is an invariant measure for θ , then $\mu(BC(\theta)) = 1$.*

See [69] for further discussion.

We now show that Theorem 4.15 is a corollary of the above Poincaré theorem. Let μ be a semi-invariant measure for Φ and ν be an invariant measure for $\Theta_{\mathcal{S}_\Phi^+}^+$ (henceforth written as Θ^+) such that $\pi_0^*(\nu) = \mu$. First of all, notice that

$$\pi_0(BC(\Theta^+)) \subset BC(\Phi).$$

Indeed, let \mathbf{z} be a recurrent point of Θ^+ . Then there exists a sequence of positive real numbers t_n approaching infinity such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{t_n}^+(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. In particular, $\pi_0(\mathbf{z}) = \mathbf{z}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t_n)$, which means that $\mathbf{z}(0) \in L(\mathbf{z}(0))$. Since π_0 is continuous, we obtain the inclusion. The inclusion implies that

$$\begin{aligned} \mu(BC(\Phi)) &\geq \mu(\pi_0(BC(\Theta^+))) \\ &= \nu(\pi_0^{-1} \circ \pi_0(BC(\Theta^+))) \\ &\geq \nu(BC(\Theta^+)), \end{aligned}$$

and the last quantity is equal to 1 by Theorem 4.34 applied to semi-flow Θ^+ . ■

4.5.8 Proof of Lemma 4.19

Observe that

$$\mathbb{E} \left(\|\mathbf{U}_{k+1}^N\|^2 \right) = N^2 \sum_{i \in S} \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^{R_i^{N, X_k}} \xi_{i,r}^{N, X_k} - \mathbb{E} \left(\sum_{r=0}^{R_i^{N, X_k}} \xi_{i,r}^{N, X_k} \right) \right\|^2 \right). \quad (4.36)$$

We therefore evaluate the conditional expectation

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^{R_i^{N, \mathbf{X}_k^N}} \xi_{i,r}^{N, \mathbf{X}_k^N} - \mathbb{E} \left(\sum_{r=0}^{R_i^{N, \mathbf{X}_k^N}} \xi_{i,r}^{N, \mathbf{X}_k^N} \right) \right\|^2 \middle| \mathbf{X}_k^N = x \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^{R_i^{N,x}} \xi_{i,r}^{N,x} - \mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right) \mathbb{E} \left(\xi_{i,r}^{N,x} \right) \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

To do so, we compute the conditional expectation of the right hand side of (4.36) given that $R_i^{N,x} = R$, taking advantage of the fact that $\|\xi_{i,r}^{N,x}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{N}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^{R_i^{N,x}} \xi_{i,r}^{N,x} - \mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right) \mathbb{E} \left(\xi_{i,r}^{N,x} \right) \right\|^2 \middle| R_i^{N,x} = R \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^R \xi_{i,r}^{N,x} - \mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right) \mathbb{E} \left(\xi_{i,r}^{N,x} \right) \right\|^2 \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\left(\sum_{r=0}^R \|\xi_{i,r}^{N,x}\| + \mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right) \|\mathbb{E} \left(\xi_{i,r}^{N,x} \right)\| \right)^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{N^2} \left((R + \mathbb{E} R_i^{N,x})^2 \right). \end{aligned}$$

Since $\mathbb{E} R_i^{N,x} = x_i \leq 1$ and $\mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right)^2 = \left(\mathbb{E} R_i^{N,x} \right)^2 + \text{Var} \left(R_i^{N,x} \right) = x_i^2 + \frac{N-1}{N} x_i \leq 2$, we find that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left\| \sum_{r=0}^{R_i^{N, \mathbf{X}_k^N}} \xi_{i,r}^{N, \mathbf{X}_k^N} - \mathbb{E} \left(\sum_{r=0}^{R_i^{N, \mathbf{X}_k^N}} \xi_{i,r}^{N, \mathbf{X}_k^N} \right) \right\|^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{R=0}^{N x_i} \mathbb{P} \left(R_i^{N,x} = R \right) \left((R + \mathbb{E} R_i^{N,x})^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{N^2} \left(\mathbb{E} \left(R_i^{N,x} \right)^2 + 2 \left(\mathbb{E} R_i^{N,x} \right)^2 + \left(\mathbb{E} R_i^{N,x} \right)^2 \right) \\ &= \frac{10}{N^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

We therefore conclude from (4.36), (4.5.8), and (4.38) that $\mathbb{E} \left(\|\mathbf{U}_{k+1}^N\|^2 \right) \leq 10|S|$.

■

Acknowledgements We thank Michel Benaïm, Mathieu Faure, and Tom Kurtz for helpful discussions and comments. Financial support from Swiss NSF Grant 200020-130574 and U.S. NSF Grant SES-0851580 are gratefully acknowledged.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. B. Arthur. On designing economic agents that behave like human agents. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 3(1) :1–22, 1993.
- [2] V. B. Artur, Yu. M. Ermol'ev, and Yu. M. Kaniovskii. *A generalized urn problem and its applicatinos*, volume 19 of *Cybernetics*. Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Kibernet., Kiev, 1983.
- [3] J.-P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer, Berlin, 1984.
- [4] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1990 edition [MR1048347].
- [5] J.-P. Aubin, H. Frankowska, and A. Lasota. Poincaré's recurrence theorem for set-valued dynamical systems. *Ann. Polon. Math*, 54(1) :85–91, 1991.
- [6] R. J. Aumann. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl*, 12(1) :1–12, 1965.
- [7] D. Balkenborg, J. Hofbauer, and C. Kuzmics. Refined best-response correspondence and dynamics. Unpublished manuscript, 2011.
- [8] E. A. Barbashin. On the theory of generalized dynamical systems. *Moskov. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.*, 2 :110–133, 1948.
- [9] M. Benaïm. A Dynamical System Approach to Stochastic Approximations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34 :437, 1996.
- [10] M. Benaïm. Recursive algorithms, urn processes, and the chaining number of chain recurrent sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 18 :53–87, 1998.
- [11] M. Benaïm. Dynamics of stochastic approximation algorithms. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 33 :1–68, 1999.
- [12] M. Benaïm and M. Hirsch. Dynamics of Morse-Smale urn processes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15 :1005–1030, 1995.

- [13] M. Benaïm and M. W. Hirsch. Asymptotic pseudotrajectories and chain recurrent flows, with applications. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 8 :141–176, 1996.
- [14] M. Benaïm and M. W. Hirsch. Mixed equilibria and dynamical systems arising from fictitious play in perturbed games. *Games and Economic Behavior*, 29 :36–72, 1999.
- [15] M. Benaïm and M.W. Hirsch. Adaptive processes, Mixed equilibria and dynamical systems arising from repeated games. *Technical reports, University of California, Berkeley*, 1994.
- [16] M. Benaïm, J. Hofbauer, and S. Sorin. Stochastic approximations and differential inclusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44 :328–348, 2005.
- [17] M. Benaïm, J. Hofbauer, and S. Sorin. Stochastic approximations and differential inclusions II : Applications. *Mathematics of Operations Research*, 31 :673–695, 2006.
- [18] M. Benaïm and S.J. Schreiber. Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories for semiflows. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 12(3) :579–598, 2000.
- [19] M. Benaïm, S.J. Schreiber, and P. Tarres. Generalized urn models of evolutionary processes. *Annals of Applied Probability*, 14(3) :1455–1478, 2004.
- [20] M. Benaïm and J. W. Weibull. Deterministic approximation of stochastic evolution in games. *Econometrica*, 71 :873–903, 2003.
- [21] Michel Benaïm and Olivier Raimond. A class of self-interacting processes with applications to games and reinforced random walks. *SIAM J. Control Optim.*, 48(7) :4707–4730, 2010.
- [22] A. Benveniste, M. Métivier, , and P. Priouret. *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*. Springer, Berlin, 1990.
- [23] R. M. Bianchini and P. Zecca. Attainable Set at Time T for Multivalued Differential Equations. *Nonlinear Analy. Theory, Methods & Applic.*, 5(10) :1053–1059, 1981.
- [24] D. Blackwell. An analog of the minimax theorem for vector payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 6 :1–8, 1956.
- [25] R. Bowen. Omega limit sets of Axiom A diffeomorphisms. *Journal of differential equations*, 18 :333–339, 1975.
- [26] G. W. Brown. Some notes on computation of games solutions. Report P-78, The Rand Corporation, 1949.

-
- [27] G. W. Brown. Iterative solutions of games by fictitious play. In *Activity Analysis of Production and Allocation*, pages 374–376. Wiley, New York, 1951.
- [28] C. Conley. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.
- [29] D. P. Derevitskii and A. L. Fradkov. Two models for analyzing the dynamics of adaptation algorithms. *Avtomat. i Telemekh.*, (1) :67–75, 1974.
- [30] M. Duflo. *Méthodes récursives aléatoires*. Techniques Stochastiques. [Stochastic Techniques]. Masson, Paris, 1990.
- [31] M. Duflo. *Algorithmes Stochastiques*. Springer, New York, 1996.
- [32] M. Duflo. *Random Iterative Models*. Springer, Berlin, 1997.
- [33] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators. Part 1 : General theory*. New York, 1958.
- [34] I. Erev and Alvin E. Roth. Predicting how people play games : Reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria. *American Economic Review*, 88 :848–881, 1998.
- [35] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. Wiley, New York, 1986.
- [36] M. Faure and G. Roth. Stochastic approximations of set-valued dynamical systems : Convergence with positive probability to an attractor. *Mathematics of Operations Research*, 35 :624–640, 2010.
- [37] M. Faure and G. Roth. Ergodic properties of weak asymptotic pseudotrajectories for set-valued dynamical systems. *arXiv :1101.2154v3*, 2011.
- [38] J.C. Fort and G. Pages. Réseaux de neurones : des méthodes connexionnistes d'apprentissage. *Matapli*, (37) :31–48, 1994.
- [39] D. Fudenberg and D. M. Kreps. Learning mixed equilibria. *Games and Economic Behavior*, 5 :320–367, 1993.
- [40] Drew Fudenberg and David K. Levine. *The Theory of Learning in Games*. MIT Press, Cambridge, 1998.
- [41] N. Gast and B. Gaujal. Mean-field limit of non-smooth systems and differential inclusions. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 38 :30–32, 2010.
- [42] I. Gilboa and A. Matsui. Social stability and equilibrium. *Econometrica*, 59 :859–867, 1991.
- [43] Z. Gorodeisky. Stochastic approximation of discontinuous dynamics. Unpublished manuscript, Hebrew University, 2008.

- [44] Z. Gorodeisky. Deterministic approximation of best-response dynamics for the Matching Pennies game. *Games and Economic Behavior*, 66 :191–201, 2009.
- [45] B.M. Hill, D. Lane, and W. Sudderth. A strong law for some generalized urn processes. *Ann. Probab*, 8(2) :214–226, 1980.
- [46] M. W. Hirsch, S. Smale., and R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [47] J. Hofbauer. Stability for the best response dynamics. Unpublished manuscript, University of Vienna, 1995.
- [48] J. Hofbauer and W. H. Sandholm. On the global convergence of stochastic fictitious play. *Econometrica*, 70 :2265–2294, 2002.
- [49] J. Hofbauer and W. H. Sandholm. Evolution in games with randomly disturbed payoffs. *Journal of Economic Theory*, 132 :47–69, 2007.
- [50] J. Hofbauer and W. H. Sandholm. Stable games and their dynamics. *Journal of Economic Theory*, 144 :1665–1693, 2009.
- [51] J. Hofbauer and W.H. Sandholm. Evolution in games with randomly disturbed payoffs. *Journal of Economic Theory*, 132(1) :47–69, 2007.
- [52] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Dynamical Systems and the Theory of Evolution*, 1988.
- [53] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [54] J. Kiefer and J. Wolfowitz. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *Annals of Mathematical Statistics*, 23(3) :462–466, 1952.
- [55] P. Kloeden. General control systems. *Mathematical Control Theory*, pages 119–137, 1978.
- [56] P. E. Kloeden. General control systems without backwards extension. In *Differential games and control theory*, pages 49–58. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 10. Dekker, New York, 1974.
- [57] P. E. Kloeden. Asymptotic invariance and limit sets of general control systems. *Journal of Differential Equations*, 19(1) :91–105, 1975.
- [58] E. Kohlberg and J.-F. Mertens. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 54(5) :1003–1037, 1986.
- [59] T. G. Kurtz. Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes. *Journal of Applied Probability*, 7 :49–58, 1970.
- [60] H. J. Kushner and D. S. Clark. *Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems*. Springer-Verlag, 1978.

-
- [61] H. J. Kushner and G. Yin. *Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications*. Springer, 2003.
- [62] H. J. Kushner and G. G. Yin. *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Springer, New York, 1997.
- [63] R. Lahkar and W. H. Sandholm. The projection dynamic and the geometry of population games. *Games and Economic Behavior*, 64 :565–590, 2008.
- [64] D. S. Leslie and EJ Collins. Generalised weakened fictitious play. *Games and Economic Behavior*, 56(2) :285–298, 2006.
- [65] D. Li. On dynamical stability in general dynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263(2) :455–478, 2001.
- [66] D. S. Li and XX Zhang. On the stability in general dynamical systems and differential inclusions. *J. Math. Anal. Appl*, 274 :705–724, 2002.
- [67] L. Ljung. Analysis of recursive stochastic algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22 :551–575, 1977.
- [68] L. Ljung and T. Söderström. *Theory and practice of recursive identification*. MIT Press Series in Signal Processing, Optimization, and Control, 4. MIT Press, Cambridge, Mass., 1983.
- [69] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [70] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246 :15–18, 1973.
- [71] W. Miller and E. Akin. Invariant measures for set-valued dynamical systems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(3) :1203–1225, 1999.
- [72] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14 :124–143, 1996.
- [73] S. Morris, R. Rob, and H.S. Shin. p -dominance and belief potential. *Econometrica*, 63 :145–157, 1995.
- [74] M. B. Nevelson and R. Z. Hasminskii. *Stochastic approximation and recursive estimation*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1973.
- [75] J. W. Nieuwenhuis. Some remarks on set-valued dynamical systems. *The ANZIAM Journal*, 22(03) :308–313, 2009.
- [76] D. Oyama, W. H. Sandholm, and O. Tercieux. Sampling best response dynamics and deterministic equilibrium selection. Unpublished manuscript, 2011.
- [77] R. Pemantle. Nonconvergence to unstable points in urn models and stochastic approximations. *ANN. PROB.*, 18(2) :698–712, 1990.
- [78] R. Pemantle. A survey of random processes with reinforcement. *Probability Surveys*, 4 :1–79, 2007.

- [79] M. Posch. Cycling in a stochastic learning algorithm for normal form games. *Journal of Evolutionary Economics*, 7(2) :193–207, 1997.
- [80] H. Robbins and S. Monro. A Stochastic Approximation Method. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 400–407, 1951.
- [81] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.
- [82] A. E. Roth and I. Erev. Learning in extensive-form games : Experimental data and simple dynamic models in the intermediate term. *Games and Economic Behavior*, 8(1) :164–212, 1995.
- [83] E. Roxin. Stability in general control systems. *J. Differ. Equations*, 1 :115–150, 1965.
- [84] W. H. Sandholm. Almost global convergence to p -dominant equilibrium. *International Journal of Game Theory*, 30 :107–116, 2001.
- [85] W. H. Sandholm. Potential games with continuous player sets. *Journal of Economic Theory*, 97 :81–108, 2001.
- [86] W. H. Sandholm. Evolution and equilibrium under inexact information. *Games and Economic Behavior*, 44 :343–378, 2003.
- [87] W. H. Sandholm. Large population potential games. *Journal of Economic Theory*, 144 :1710–1725, 2009.
- [88] W. H. Sandholm. *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press, Cambridge, 2010.
- [89] S. Smale. The prisoner’s dilemma and dynamical systems associated to non-cooperative games. *Econometrica*, 48(7) :1617–1634, 1980.
- [90] G. V. Smirnov. *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [91] S. Sorin. *A first course on zero-sum repeated games*, volume 37 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [92] D. W. Stroock. *Probability Theory : An Analytic View*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [93] P. Tarrès. *Pièges des algorithmes stochastiques et marches aléatoires renforcées par sommets*. PhD thesis, ENS Cachan, 2001.
- [94] Peter D. Taylor and Leo Jonker. Evolutionarily stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, 40 :145–156, 1978.
- [95] O. Tercieux. p -best response set. *Journal of Economic Theory*, 131 :45–70, 2006.

- [96] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [97] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Springer Verlag, 2000.
- [98] H. White. *Artificial Neural Networks : Approximation and Learning Theory*. Blackwell, Cambridge, Massachussets, 1992.
- [99] E. C. Zeeman. Population dynamics from game theory. In *Global Theory of Dynamical Systems (Evanston, 1979)*, number 819 in Lecture Notes in Mathematics, pages 472–497, Berlin, 1980. Springer.
- [100] D. Zusai. The tempered best response dynamic. Unpublished manuscript, University of Wisconsin, 2011.