Publié dans Travaux de logique 9, 123-169, 1994,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

George Boole et l'algèbre de la logique

Nadine Gessler

Travaux de logique , 9, 1994

Table des matières

Les lois que nous avons à examiner sont celles d'une des plus importantes de nos facultés intellectuelles. Les mathématiques qu'ils nous faut construire sont celles de l'esprit humain.
(The Mathematical Analysis of Logic: 7)

1. Préambule

En 1847, dans un petit essai intitulé *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (= MAL), le mathématicien anglais George Boole (1815-1864) donne à la logique sa première forme à la fois symbolique et mathématique en la reconstruisant sur le modèle d'une algèbre particulière à deux valeurs, 0 et 1.

Il s'y propose d'ériger la logique en discipline scientifique en lui appliquant le principe d'un calcul symbolique, c'est-à-dire «une méthode reposant sur l'emploi de symboles dont les lois de combinaisons sont connues et générales et dont les résultats admettent une interprétation cohérente» (MAL: 4).

> La logique, écrit-il, peut devenir une science exacte, mais, pour cela, nous ne devons plus associer logique et métaphysique mais logique et mathématiques. [...] Dans son ouvrage, on verra la logique reposer, comme la géométrie, sur des vérités axiomatiques, et ses théorèmes construits sur la doctrine générale des symboles qui constitue le fondement de l'analyse (MAL: 13).

Cette prise de position et le succès qui l'accompagne marquent une rupture décisive. D'une part, la logique formelle, basée jusque là sur le langage naturel, va définitivement faire place à une logique symbolique. D'autre part, Boole met fin à la suprématie d'une théorie déductive qui était toujours, en substance, telle que l'avait conçue Aristote plus de deux mille ans auparavant.

Bourbaki lui rend hommage en ces termes:

> George Boole doit être considéré comme le véritable créateur de la logique symbolique moderne. Son idée maîtresse consiste à se placer du point de vue de l'«extension», donc à calculer directement sur les ensembles, en notant xy l'intersection de deux ensembles, et x+y leur réunion lorsque x et y n'ont pas d'élément commun. Il introduit en outre un «univers» noté 1 (ensemble de tous les objets) et l'ensemble vide noté 0, et il note 1-x le complémentaire de x. Comme l'avait fait Leibniz, il interprète la relation d'inclusion par la relation xy = x (d'où il tire sans peine la justification des règles du syllogisme classique) et ses notations pour la réunion et le complémentaire donnent une souplesse à son système qui avait manqué à ses devanciers. En outre, en associant à chaque proposition l'ensemble des cas où elle est vérifiée, il interprète la relation d'implication comme une inclusion, et son calcul des classes lui donne de cette façon les règles du calcul propositionnel (Bourbaki: 18)[1].

L'importance de la découverte de Boole se mesure aujourd'hui en ses nombreuses applications. L'«algèbre de Boole» est à l'oeuvre dans de nombreuses branches des mathématiques, en logique et en informatique. Mais ces résultats sont le fruit d'un long processus de développement et d'axiomatisation des mathématiques et n'ont été acquis qu'un siècle environ après que Boole eut inventé son algèbre. Et si la structure mathématique qu'est une algèbre de Boole nous est devenue familière, en revanche nous connaissons moins bien l'oeuvre même dont elle est issue. C'est pourquoi, la mémoire n'étant pas chose négligeable, ce travail sera consacré à l'algèbre de la logique telle que la constitua Boole. Nous nous interrogerons tout d'abord sur le contexte mathématique et logique de la première moitié du XIXe siècle anglais au sein duquel elle s'inscrit. Ensuite, nous suivrons Boole dans la construction de son système déductif.

---

1 Le commentaire de Bourbaki se réfère à *The Mathematical Analysis of Logic*. Dans *The Laws of Thought*, le second ouvrage de Boole, 1 représente l'univers de discours et, dans l'interprétation propositionnelle, à chaque proposition est associé non pas l'ensemble des cas où elle est vérifiée, mais le temps durant laquelle elle est vraie.

2. Les deux ouvrages logiques: 1847 et 1854

The Mathematical Analysis of Logic est un petit travail de recherches (82 pages) que Boole rédigea en quelques semaines après qu'il en eut conçu l'idée. Dans la première partie, tel l'indique le titre, il procède à une véritable analyse mathématique de la logique classique. Suivant le modèle d'exposition traditionnel de la logique[2], il montre, à mesure que progresse son analyse, que sa traduction algébrique rend parfaitement compte des résultats traditionnels et que, de plus, elle en révèle les limites et le caractère arbitraire.

> Le but de ces recherches, écrit-il, s'était limité en premier lieu à l'expression de la logique reçue, et aux formes de la disposition aristotélicienne, mais il apparut vite visible qu'elle introduisait ainsi des distinctions purement arbitraires, et qui n'avaient pas de fondement dans la nature des choses (MAL: 7-8).

Il s'agit alors «d'abandonner toute considération de précédent ou d'autorité et d'interroger la méthode elle-même pour exprimer les justes limites de son application». Ayant noté que l'équation $x^n = x$, valide dans le domaine logique, n'a pas d'équivalent en algèbre ordinaire si ce n'est pour les nombres 0 et 1, Boole a alors l'idée, tout à fait créatrice à cette date, d'un calcul qui se restreint à ces deux seules valeurs. Les procédures de ce calcul sont exposées dans la deuxième partie.

L'importance des résultats présentés dans *The Mathematical Analysis of Logic* passa inaperçue auprès des philosophes qui, traditionnellement, s'occupaient de logique. Boole qui, par ailleurs, avouait n'avoir que peu de connaissances en matière de logique et ne pas mesurer l'importance de sa découverte, consacra plusieurs années à des lectures de philosophie, de logique et de psychologie afin d'approfondir et de justifier la discipline qu'il venait de fonder. Le résultat de ce long travail fut un second ouvrage publié en 1854 et intitulé *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical*

---

2 Soit concept, jugement, raisonnement. Les cinq premiers chapitres de *The Mathematical Analysis of Logic* sont: Premiers principes; De l'expression et de l'interprétation; De la conversion des propositions; Des syllogismes; Des hypothétiques.

Theories of Logic and Probabilities (=LT). Considéré comme l'oeuvre maîtresse de Boole, il eut, dès sa publication, un énorme succès. Si on y retrouve, pour l'essentiel, le système des lois fondamentales et les procédures de calcul exposées dans *The Mathematical Analysis of Logic*, cependant la démarche, «murie par des années d'examen et de réflexion», n'est plus la même. Boole y établit d'emblée sa «théorie générale du raisonnement déductif». Il s'attache particulièrement à montrer que les lois fondamentales sur lesquelles repose son calcul sont les lois mêmes de la pensée. La logique classique n'apparaît plus qu'à titre d'application particulière. Dans la seconde partie, dont nous ne parlerons pas ici, la méthode est étendue au domaine des probabilités.

3. Rencontres

Le projet de Boole est issu des travaux de l'école algébriste anglaise qui ont ouvert la voie, dans la première moitié du XIXe siècle, à une conception plus abstraite de l'algèbre. En 1833, le mathématicien Peacock, un des éléments moteurs de cette école, distingue l'algèbre arithmétique et l'algèbre symbolique. L'algèbre arithmétique, c'est l'arithmétique littérale ou *logistica speciosa,* courante depuis Viète. Quant à l'algèbre symbolique, c'est une science «pure» de symboles, soumis à des lois de combinaison définies *a priori* et susceptibles d'une multitude d'interprétations. La seule restriction, appelée *principe de permanence des formes équivalentes,* est que les lois de combinaison de ces symboles coïncident avec celles de l'algèbre arithmétique lorsque les symboles représentent eux-mêmes des quantités numériques. C'est sur le constat de ces résultats que Boole ouvre *The Mathematical Analysis of Logic*:

> Ceux qui sont au courant de l'état présent de l'algèbre symbolique savent que la validité des processus de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles mais des lois de leur combinaison. Tout système d'interprétation qui n'affecte pas la vérité des relations posées comme principe est également acceptable. C'est ainsi que le même procédé peut, selon tel schéma interprétatif, représenter la solu-

tion d'un problème portant sur la propriété des nombres, selon un autre, celle d'un problème géométrique, selon un troisième, celle d'un problème de dynamique. Ce principe est vraiment d'une importance fondamentale (MAL: 3).

En d'autres termes, les objets véritables des mathématiques se révèlent être, non pas comme on l'a cru jusque là, les notions de quantité, de géométrie ou de mécanique mais «des opérations considérées en elles mêmes, indépendamment des diverses matières auxquelles elles peuvent être appliquées» (MAL: 3). En tant que calcul symbolique, les mathématiques sont susceptibles d'une multitude d'interprétations dont l'arithmétique ne constitue qu'une parmi d'autres. Boole en tire la conclusion fondamentale que l'acception étroite de science de la grandeur ou de la quantité donnée aux mathématiques ne relève que de raisons circonstancielles et extérieures à cette science même. Comme il l'écrira en 1854, «Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper des idées de nombre et de quantité» (LT: 12). Rien ne s'oppose donc, *a priori*, à ce que le principe d'un calcul symbolique soit étendu à des objets dénués d'interprétation sensible tels que les opérations de l'esprit engagées dans le raisonnement. C'est ce qui est réalisé à travers l'algèbre de la logique.

Il faut aussi ajouter, aux éléments qui ont contribué à la réalisation du programme de Boole, la réforme que connut la logique aristotélicienne, à la même époque, sur les deux points essentiels que sont *la quantification du prédicat* et la notion d'*univers de discours*. Ces deux extensions allaient permettre d'«algébriser» la logique en substituant le signe de l'égalité à la copule traditionnelle. Le principe de la quantification du prédicat fut formulé simultanément par le philosophe Sir William Hamilton (1788-1856) et le mathématicien Augustus De Morgan (1806-1871)[3]. Hamilton, dans une polémique célèbre, en revendiqua la paternité. La querelle entre les deux hommes

3 La contribution de De Morgan au renouvellement que connut la logique, au XIXe siècle, est essentielle. L'année 1847 est aussi celle de la publication de son ouvrage *Formal Logic* dans lequel, entreprenant de réformer la vieille logique aristotélicienne, il introduit la notion fondamentale d'univers de discours et pose les bases d'une logique des relations qu'il développera par la suite.

eut le mérite d'attirer l'attention de Boole, ami de De Morgan, sur les progrès récents réalisés dans le domaine de la logique. Quant au concept fondamental d'univers de discours, il est dû à De Morgan.

La logique, pour Hamilton comme pour De Morgan, est une science formelle. Son objet d'étude est, non pas la matière de la connaissance, mais les lois d'action de la pensée. On doit donc lui permettre d'«énoncer explicitement dans le langage tout ce qui est contenu implicitement dans la pensée» (Liard 1878: 46). Que résulte-t-il de ce postulat?

Traditionnellement, la quantité de la proposition «S est P» est celle du seul sujet (les quatre formes catégoriques sont les propositions A ou «Tous les S sont P», I ou «Quelques S sont P», E ou «Aucun S n'est P», O ou «Quelques S ne sont pas P»). Mais, le sujet est-il le seul à être pensé avec une quantité déterminée? Pour répondre à cette question, considérons l'opération de conversion simple par laquelle nous inférons de la proposition affirmative universelle «Tous les hommes sont mortels», la particulière affirmative «Quelques mortels sont des hommes». A penser ensemble les deux propositions, il apparaît qu'affirmer «Tous les hommes sont mortels», c'est affirmer en réalité «Tous les hommes sont quelques mortels». De même, dire «Quelques S sont P», c'est dire «Quelques S sont quelques P». Le prédicat des propositions affirmatives est donc toujours pensé avec une quantité *égale* à celle du sujet.

Quant aux propositions négatives, il n'est possible d'égaler les quantités du sujet et du prédicat que si la négation porte, non pas sur la copule, mais sur le prédicat. Ainsi, la proposition particulière négative «Quelques animaux ne sont pas des hommes», par exemple, devient, en faisant porter la négation sur le prédicat et en quantifiant ce dernier, «Quelques animaux sont quelques non-hommes». Aristote excluait les termes négatifs, jugés indéterminés: non-homme pouvant désigner aussi bien des non-humains que des non-êtres. C'est cette indétermination que supprime précisément l'introduction de la notion d'univers de discours. L'usage des termes négatifs présuppose un *univers de discours* à l'intérieur duquel, un terme et son contraire, seuls objets de la pensée dans leur catégorie, en épuisent la totalité des êtres. Tout objet de pensée est donc défini. L'univers de De Morgan n'a aucune portée ontologique et relègue hors du domaine logique les questions liées aux entités inexistantes.

De Morgan notait U l'univers de discours, X le terme positif et x le négatif correspondant, c'est-à-dire U-X. La contribution fondamentale de Boole, sur cette question, sera d'utiliser le symbole 1 pour représenter l'univers, ce qui l'autorisera, si x représente la classe des hommes, à exprimer par 1-x celle des non-hommes.

Ainsi, avec la quantification du prédicat et la notion d'univers de discours, la distinction entre les propositions affirmatives et les propositions négatives de la logique classique disparaît. Il est dès lors possible de considérer toute proposition comme une équation entre deux classes de même extension et de remplacer la copule traditionnelle de la proposition canonique «S est P» par le signe algébrique de l'égalité.

La réforme logique avait jeté le pont nécessaire entre la logique et l'algèbre symbolique. Il ne restait plus qu'à organiser leur rencontre. C'est ce que fit Boole, en construisant un véritable calcul, une algèbre particulière à deux valeurs, 0 et 1, susceptible de recevoir deux interprétations logiques, soit comme calcul des classes, soit comme calcul propositionnel.

Nous allons maintenant examiner les différentes étapes de la construction de ce calcul logique tel qu'il est exposé dans *The Laws of Thought* où Boole avance le projet suivant:

> Etudier les lois fondamentales des opérations de l'esprit par lesquelles s'effectue le raisonnement; les exprimer dans le langage symbolique d'un calcul, puis sur un tel fondement, établir la science de la logique et constituer sa méthode; [...][4] en dernière analyse, dégager des différents éléments de vérité qui seront apparus au cours de ces enquêtes, des conjectures probables concernant la nature et la constitution de l'esprit humain (LT: 1).

4 «faire de cette méthode elle-même la base d'une méthode générale que l'on puisse appliquer à la théorie mathématique des probabilités».

4. Les symboles logiques et leurs lois. L'expression symbolique des propositions primaires

Distinguons les deux étapes de la construction de la «science de la logique» dont les mathématiques, «les meilleurs exemples de démarche méthodique connus», fournissent le modèle (LT: 10)[5].

Dans un premier temps, comme la méthode l'exige, on cherchera à atteindre les opérations mentales élémentaires et à en formuler le système de lois qui les gouverne. Or,

> le syllogisme, la conversion ne sont pas les procédures logiques ultimes. Elles sont fondées sur des opérations plus fondamentales et plus simples, auxquelles ils peuvent être ramenés, et qui constituent les vrais éléments d'une méthode en logique (LT: 11).

Ensuite, il faut que la méthode assume sa plus haute fonction: «diriger la succession de ces opérations» (LT: 11). C'est la raison pour laquelle, sur la base logique précédemment établie, on construira un calcul doté de méthodes générales et qui sera développé en fonction de sa cohérence propre. Ce calcul devra répondre au problème général de la logique:

> [...] étant donné un ensemble de prémisses exprimant des relations entre des éléments donnés, qu'il s'agisse de choses ou de propositions, on demande d'expliciter la totalité des relations que l'on en déduit pour *n'importe quels* éléments, dans des conditions et sous une forme quelconques préalablement fixées (LT: 10).

Venons en à la première étape et aux opérations élémentaires dont Boole va distinguer les deux aspects sous lesquels on peut envisager leurs lois: soit comme lois du langage, soit comme lois de la pensée. Dans *The Mathematical Analysis of Logic,* il écrivait:

---

5 «Le caractère complet et véritablement fondamental d'un système de lois logiques données doit pouvoir se manifester en partie dans la perfection des méthodes auxquelles elles conduisent» (LT: 7).

> Ce qui rend la logique possible, c'est l'existence en nos esprits de conceptions générales, — notre faculté de concevoir une classe et d'en désigner les individus qu'elle représente par un même nom. La théorie de la logique est donc étroitement liée à celle du langage (MAL: 4).

L'opération de conception est l'opération mentale simple qu'il considère comme *la plus importante de nos facultés intellectuelles* . Il en formule, en 1847, les lois de combinaison et de succession qui la dirigent. La première opération est la conception de l'univers de discours. Chaque nouvelle opération consiste à sélectionner dans cet univers une classe d'objets. Dans son premier essai, Boole était revenu dans un post-scriptum sur l'affirmation de ce lien consubstantiel entre logique et langage en déclarant que «le langage est un instrument du raisonnement, mais non un instrument essentiel» (MAL: 81). Mais, en 1854, délimitant l'usage du langage en tant qu'instrument du raisonnement, il en propose une reconstruction symbolique[6]. Dès lors, lorsque nous étudierons les lois des signes du langage, ce seront les lois mêmes de la pensée que nous étudierons. Par l'observation des faits linguistiques, on accèdera aux lois des symboles logiques; et, puisque les opérations de l'esprit se manifestent dans les raisonnements conduits avec l'aide du langage, ces lois pourront être réinterprétées comme les lois de la pensée. Boole donne une première application du principe selon lequel un même système symbolique peut recevoir des interprétations distinctes. L'idée qui le guide dans sa reconstruction symbolique est celle de l'arbitraire du signe linguistique. Ainsi, il n'est rien dans la nature du langage qui s'oppose à ce que d'autres symboles soient employés à la place des mots (LT: 26). Boole légitimait ainsi la présentation de la logique sous la forme d'un calcul. Si la logique devient calcul, écrit-il, ce n'est pas par pure fantaisie de mathématicien.

6 «it cannot be said that the main ideas are presented more lucidly than in the earlier work» (Kneale & Kneale 1962: 406). Il y a cependant, entre autres, un élément nouveau: précisément cette reconstruction symbolique du langage. Sans doute, Boole ne réussit-il qu'à moitié: l'analyse logique de la proposition reste celle de la logique traditionnelle. Cependant, tenter de formaliser, dans le langage naturel, les éléments qui permettent de rendre compte de sa fonction en tant qu'instrument du raisonnement était, à cette date, une tâche spécifiquement nouvelle.

C'est que les lois de la pensée rendent effectivement possible ce genre d'exposition (LT: 11).

Quant à la question de savoir pourquoi les lois ultimes de la pensée sont mathématiques dans leur forme, il répond que «l'esprit peut parvenir à la connaissance des lois auxquelles il est lui-même soumis, sans qu'il lui soit également donné de comprendre leur fondement et leur origine» (LT: 11). Il est important de souligner que Boole situe clairement sa démarche à l'écart de toute spéculation métaphysique. La science ayant pour rôle, nous dit-il, de dégager des lois, il n'a pas à s'interroger sur la nature réelle des opérations de l'esprit ni à répondre à la fameuse question de savoir si le langage est un instrument essentiel du raisonnement (LT: 2).

4.1. La classification des signes

> Toutes les opérations du raisonnement en tant qu'instrument du raisonnement se peuvent conduire dans un système de signes composé des éléments suivants:
> 1) Des symboles littéraux tels que x,y etc., représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.
> 2) Des signes d'opérations tels que +, -, x, qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.
> 3) Le signe d'identité =.
>
> Et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans l'algèbre (LT: 27).

A la première classe sont rattachés les noms, propres ou communs, les adjectifs, les expressions descriptives; à la seconde les conjonctions *ou, et, excepté*; à la troisième tous les verbes qui peuvent être ramenés à la copule *est* qui se traduit par le signe de l'égalité =.

Les symboles littéraux sont en réalité les symboles des opérations de conception[7]. Le symbole x représente l'opération qui consiste à sélectionner au sein de l'univers de discours tous les Xs pour en former la classe X, soit 1x = x. On remarque donc que Boole a fait correspondre à l'opération mentale simple une opération symbolique. Dans son premier ouvrage, il fait clairement la distinction entre l'opération x et son résultat X. Il écrit: «C'est la tâche du symbole électif x *(elective symbole)* de sélectionner les individus compris dans la classe X» (MAL: 17, note*). Ce n'est plus le cas dans *The Laws of Thought.* En pratique, on pourra parler de la classe x, en tenant compte qu'il s'agit là d'un abus de langage.

xy représente, en termes modernes, l'intersection des classes x et y (produit logique), c'est-à-dire la succession de deux opérations de conception: celle qui consiste à sélectionner tous les Xs pour en former la classe X, puis celle qui consiste à choisir, dans cette classe X, tous les Ys qu'elle contient. A cette opération mentale, représentée par la juxtaposition des symboles logiques, correspond dans le langage «l'accumulation des épithètes pour obtenir une définition»[8].

x+y traduit la réunion des classes x et y *lorsque les classes x et y n'ont aucun élément en commun* ou, en termes booléens, l'opération mentale par laquelle «nous réunissons des parties en un tout». D'un point de vue linguistique, l'addition traduit les

---

7 Notons que ce terme «conception» a en anglais un sens fortement actif. En français, on pourra aussi parler d'opération de choix ou d'opération de sélection, ce que fait Boole dans son essai de 1847.

8 Elle correspond à l'opération que la logique classique appelait division métaphysique et logique et qui a été systématisée par Porphyre sous cette forme:

Substance < immatérielle / matérielle
matérielle < inanimé / animé
animé < insensible / sensible
sensible < non raisonnable / raisonnable
raisonnable — Socrate

Boole met donc ce type de division en relation avec une opération à la fois mentale, linguistique et mathématique. D'un point de vue mental, il s'agit d'un processus dichotomique, une succession de choix binaires; linguistiquement, d'une juxtaposition d'épithètes au concept d'une classe, ici la classe des substances qui en augmente la compréhension et en diminue l'extension; mathématiquement, l'opération assignée à un tel processus est une multiplication xyz, etc.

conjonctions «ou» et «et», par exemple: «les hommes et les femmes» ou «les hommes ou les femmes»[9].

L'addition est une des difficultés majeures auxquelles s'est heurté Boole pour avoir voulu, à tout prix, établir une analogie formelle entre les lois de son système logique et celle de l'algèbre ordinaire. En effet, s'il n'admet l'addition qu'entre des classes disjointes[10], c'est qu'il veut conserver la dualité entre les deux opérations + et -. En adoptant un sens exclusif pour le «ou» («et»), il peut passer de $x = y+z$ à $z = x-y$. Dans le cas contraire, $x-y$ est indéterminé. Il est évident que l'analyse des opérations l'emporte ici largement sur l'analyse logique et linguistique. Boole admet cependant que les *jus et norma loquendi* semblent plutôt pencher en faveur de l'interprétation non exclusive de l'addition et que l'on comprend généralement l'expression «les choses qui sont x ou y» comme incluant les choses qui sont en même temps x et y.

Il est possible, nous dit-il, de respecter la condition d'interprétation liée à l'addition en décomposant tout énoncé en des parties réellement séparées dans l'esprit et réunir ensuite leurs expressions respectives par le symbole «+» (LT: 56).

Par conséquent, la proposition «les choses qui sont x ou y» aura deux expressions symboliques:

> $x(1-y)+(1-x)y$ pour signifier les choses qui sont x mais pas y, ou les choses qui sont des y mais pas x. Dans ce cas $xy = 0$
>
> $xy+x(1-y)+(1-x)y$ pour représenter les choses qui sont x mais pas y, ou les choses qui sont y mais pas x, ou les deux à la fois.

Il ne sera correct d'écrire $x +y$ que si l'on sait que $xy = 0$.

9 Ce «et» du langage courant correspond de fait à l'usage du «ou», alors que la conjontion «et» correspond aujourd'hui au produit logique.

10 «A parler strictement, «et», «ou» placés entre des termes décrivant deux ou plusieurs classes d'objets supposent que ces classes sont tout à fait distinctes, de sorte qu'aucun élément de l'une ne soit contenu dans l'autre» (LT: 32-33).

4.2. Les lois des signes

Après avoir défini son alphabet logique de base, Boole pose les lois suivantes qui peuvent toutes être interprétées comme lois du langage ou comme lois de la pensée.

1) $xy = yx$
2) $x+y = y+x$
3) $z(x+y) = zx+zy$
4) $x-y = -y+x$ [11]
5) $z(x-y) = zx-zy$
6) Si $x = y+z$ alors $x-y = z$ [12]
7) Si $x = y$ alors $zx = zy$; si $x = y$ alors $x-z = y-z$
8) $x^2 = x$ ou $x^n = x$.

Les lois des opérations de l'esprit par lesquelles s'effectuent le raisonnement ont été exprimées dans le langage symbolique d'un calcul. Il s'agit maintenant d'en donner une interprétation mathématique dans le but de constituer un calcul logique. Observons tout d'abord de quelle manière ces lois se distinguent de celles de l'algèbre numérique.

Les sept premières lois sont formellement identiques à celles qui valent pour les symboles quantitatifs de l'algèbre. En revanche, la dernière loi, $\mathbf{x^2 = x}$, qui exprime qu'une opération de sélection, par réitération, donne toujours la même classe, n'est pas valide dans le domaine algébrique. Cette loi, propre au domaine logique et appelée *index law*, est la loi fondamentale du système de Boole. Dans le champ de l'algèbre ordinaire, l'équation $x^2 = x$ admet deux solutions, 0 et 1, qui sont les idempotents parmi les nombres.

> Imaginons alors une algèbre dans laquelle les symboles x, y, z,... admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seulement. Les lois, les axiomes et les opérations d'une telle algèbre seront alors identiques, dans toute leur étendue aux lois, aux axiomes et aux pro-

11 Boole justifie cette identité en déclarant que, par rapport à la finalité essentielle du raisonnement, peu importe l'ordre dans lequel nous exprimons les cas exceptés (LT: 34).

12 Ecrire x-y implique que la classe dénotée par y est contenue dans celle dénotée par x.

cédés d'une algèbre de la logique. Seule les séparera une différence d'interprétation (LT: 37-38).

Cependant, pour que cette algèbre puisse être considérée comme une algèbre de la logique, il faut justifier l'introduction des symboles 0 et 1 parmi les symboles logiques et leur assigner une signification logique. En d'autres termes, il s'agit d'expliciter les conceptions qui leur correspondent.

Chacun de ces symboles est aussi soumis à une loi qui lui est particulière dans le système de l'algèbre numérique:

$0x = 0$

$1x = x$

quel que soit le nombre x.

Pour que ces deux lois soient valides dans le système logique, il faut assigner aux symboles 0 et 1 une interprétation telle que la classe représentée par 0x soit identique à 0 et celle représentée par 1x à x.

0 représentera le rien ou la classe vide

1 représentera l'univers de discours.

Les classes 0 et 1 sont introduites comme «les deux limites de l'extension d'une classe», c'est-à-dire «les limites des interprétations possibles des noms communs» (LT: 47)[13].

On peut, dès lors, exprimer les noms contraires: 1-x signifiera le contraire de x, c'est-à-dire non-x.

Et, de la loi $x^2 = x$, il vient xx-x = 0, soit **x(1-x) = 0** ou *loi de dualité*.

Cette dernière équation exprime que la classe dont les éléments sont, en même temps, des x et des non-x n'existe pas. C'est-là, écrit Boole, l'expression symbolique du principe de contradiction qu'Aristote a qualifié d'«axiome fondamental de toute la philosophie»[14].

13 Dans *The Mathematical Analysis of Logic*, Boole se donne d'entrée de jeu le 1 pour représenter l'univers en tant qu'ensemble de tous les objets concevables. Le 0 apparaît au détour d'une équation: après avoir exprimé la proposition «Tous les Xs sont Ys» par l'équation xy = y, Boole en tire x(1-y) = 0.

14 «Il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps au même sujet et sous le même rapport» Boole, ici, ne dissimule pas sa satisfaction et la confiance que lui inspire l'outil symbolique pour neutraliser les erreurs de toute une tradition philosophique. Il écrit: «L'interprétation ci-dessus a été introduite, non pas pour sa valeur immédiate dans le présent système, mais pour illustrer un fait significatif dans la philosophie des facultés intellectuelles, à savoir que ce que l'on s'est accordé à considérer

4.3. L'expression symbolique des propositions primaires

Boole distingue deux sortes de propositions: les propositions primaires, énoncés exprimant une relation entre des choses, par exemple, l'énoncé «la neige est blanche»[15] et les propositions secondaires, énoncés exprimant des relations entre des propositions primaires, par exemple, «Si le soleil brille, la terre se réchauffe», ou bien «il est vrai que le soleil brille».

En termes modernes, cette distinction recouvre plus ou moins celle entre le calcul des classes et le calcul des propositions.

a) Les propositions de la logique classique

Dans *The Mathematical Analysis of Logic,* les quatre propositions catégoriques prennent les formes suivantes:

(A)	Tous les Xs sont des Ys:	$x(1-y) = 0$
(E)	Aucun X n'est Y:	$xy = 0$
(I)	Quelques X s sont des Ys:	$xy = v$
(O)	Quelques Xs ne sont pas des Ys:	$x(1-y) = v$.

Le symbole auxiliaire v est un symbole électif de classe indéterminée. L'équation $xy = v$, par exemple, signifie que l'intersection des classes X et Y n'est pas vide. Le symbole v correspond à l'opération de sélection de la classe V, c'est-à-dire des éléments communs aux classes X et Y. Et, puisque v comprend tous les éléments communs aux classes X et Y, il peut être interprété comme «Quelques Xs» ou «Quelques Ys» (MAL: 22).

La quantification du prédicat introduit quatre nouvelles formes de propositions: deux affirmatives et deux négatives. Dans *The Laws of Thought,* Boole donne la traduction suivante de ce qu'il nomme les «huit types fondamentaux de proposition»:

1)	Tous les Ys sont des Xs	$y = v\,x$
2)	Aucun Y n'est X	$y = v\,(1-x)$

comme l'axiome fondamental de la métaphysique n'est que la conséquence d'une loi de la pensée, mathématique dans sa forme» (LT: 49).

15 Cet énoncé se ramène à une relation d'appartenance de la neige à la classe des choses blanches.

3) Quelques Ys sont des Xs	$v\,y = v\,x$
4) Quelques Ys sont des non-Xs	$v\,y = v\,(1\text{-}x)$
5) Tous les non-Ys sont des Xs	$1\text{-}y = v\,x$
6) Aucun non-Y n'est X	$1\text{-}y = v\,(1\text{-}x)$
7) Quelques non-Ys sont des Xs	$v\,(1\text{-}y) = v\,x$
8) Quelques non-Ys sont des non-Xs	$v\,(1\text{-}y) = v\,(1\text{-}x)$.

On retrouve le symbole auxiliaire v mais considéré comme représentatif de «Quelques» uniquement par rapport à la classe à laquelle il est préfixé. Dans l'équation $y = vx$, par exemple, qui exprime la proposition «Tous les Ys sont des Xs», vx traduit le prédicat «Quelques Xs». «v représente une classe indéfinie sous tout rapport, excepté que certains de ses éléments sont des Xs» (LT: 61).
Remarque: le symbole v obéit à la loi fondamentale de dualité $v(1\text{-}v) = 0$.

b) Les propositions aux termes «composés»

Bien entendu, avec l'introduction de la notation mathématique, le sujet et le prédicat d'une proposition peuvent contenir autant de «et», «ou», «excepté» que l'on veut. A titre d'illustration, traduisons la définition suivante de la richesse:

> «La richesse consiste en des choses susceptibles d'échange, limitées en quantité, et qui produisent le plaisir ou préviennent la douleur».

Si, w = richesse;
t = choses susceptibles d'échange;
s = limitées en quantité;
p = qui produisent du plaisir;
r = qui préviennent la douleur.

Il y aura deux expressions symboliques de la proposition eu égard à la double traduction de l'addition:

1) Dans le cas où les classes représentées par p et r s'excluent mutuellement:
$w = st\,\{pr+p(1\text{-}r)+r(1\text{-}p)\}$ ou $w = st\,\{p+r(1\text{-}p)\}$.

2) Dans le cas où elles ne s'excluent pas:
$w = st\,\{p(1-r)+r(1-p)\}$.

Le sujet et le prédicat sont tous deux universels car la proposition est une définition. Le symbole v n'apparaît donc pas (LT: 59-60).

5. Le syllogisme revisité

Avant d'en venir à la présentation des procédures du calcul logique, revenons au moment décisif de l'analyse mathématique du syllogisme qu'effectue Boole dans son premier ouvrage.

Considérons le syllogisme en Barbara suivant:

Tous les hommes sont mortels
Tous les grecs sont des hommes
Donc Tous les grecs sont mortels.

Si x représente «les hommes», y «les mortels» et z «les grecs», la traduction mathématique des prémisses donne:

$x(1-y) = 0$ ou $(1-y)x = 0$
$z(1-x) = 0$ ou $z-zx = 0$.

D'un point de vue algèbrique, inférer la conclusion consiste à éliminer x du système des deux équations correspondant aux prémisses. Le résultat de l'élimination de x des équations:

$$ax+b = 0$$
$$a'x+b' = 0$$

est l'équation $ab'-a'b = 0$.
Dans l'exemple cité: $a = 1-y$; $b = 0$; $a' = z$; $b' = -z$. On a donc l'équation: $z(1-y) = 0$ qui s'interprète «Tous les grecs sont mortels.

A travers cet exemple, nous voyons bien comment Boole a été conduit à dépasser les limites de la syllogistique. En effet, une fois le syllogisme conçu comme un système de deux équations à une inconnue, tout incite le mathématicien qu'il est à généraliser le problème de l'élimination aux cas où le nombre d'équations et de variables n'est plus limité. Car, «si en algèbre nous pouvons éliminer n-1 symboles de n équations», dans le système logique

> d'une équation unique, on peut éliminer un nombre indéfini de symboles et d'un nombre indéfini d'équations un seul symbole de classe. C'est là une conséquence de cette remarquable loi de dualité à laquelle sont soumis les symboles logiques (LT: 100).

L'objectif à atteindre, sur le modèle du syllogisme, est donc fixé: éliminer un nombre quelconque de symboles dans un nombre quelconque d'équations logiques, et déterminer toutes les relations implicites impliquées par les prémisses entre les éléments que l'on désire retenir.

6. La méthode générale

La division

Dès son point de départ, le calcul logique va se heurter au problème de l'opération inverse de la multiplication, la division. En effet, l'«axiome des algébristes selon lequel on peut diviser par la même quantité les deux membres d'une équation» n'est pas valide pour les symboles logiques. De l'équation zx = zy, on ne peut conclure que x = y.

Cela entraîne qu'il n'existe, pour les symboles logiques, aucun *équivalent formel* de l'axiome algébriste[16] (LT: 36-37). Par conséquent, la division ne peut pas être admise parmi les opérateurs logiques.

La difficulté est alors la suivante. Supposons que d'une proposition donnée, exprimée par l'équation z = xy, nous voulions exprimer x comme une fonction interprétable de z et y. Nous

16 Boole voudrait cependant faire correspondre à l'«opération mentale qui est représentée par la suppression d'un symbole logique z dans l'expression zx» l'opération mentale d'abstraction. Il contourne la difficulté en ajoutant que même en algèbre, cet axiome n'a pas la même généralité que les autres. L'équation zx = zy n'implique x = y que si z est différent de 0. Donc, si l'on admet que z peut être égal à 0, l'axiome cesse d'être applicable (LT: 36).

pourrons écrire x = z/y[17] mais cette expression sera ininterprétable (LT: 86). Nous pourrons donc *exprimer* l'opération, mais nous ne pourrons pas *effectuer* la division (LT: 89).

Nous verrons plus loin que la procédure de développement permet de transformer une telle expression en une expression équivalente et interprétable.

Le principe fondamental du calcul logique

La généralité d'une méthode en logique, nous dit Boole, dépend de la généralité de ses procédures et de ses lois élémentaires. Or, l'expression x+y est soumise à une condition d'interprétation qui semble condamner le projet d'un calcul logique si cette condition doit y être maintenue. S'appuyant sur cet exemple, Boole formule alors la question générale suivante:

> Est-il nécessaire de restreindre l'application de ces lois et de ces procédures symboliques en les soumettant aux mêmes conditions que sous lesquelles on les a connues? Si une telle restriction est nécessaire, alors une méthode générale en logique est impossible. Mais, d'autre part, si une telle condition n'est pas nécessaire, comment considérer des procédures qui n'ont aucune signification dans le domaine de la pensée où elles sont sensées être employées? (LT: 67)

Généralement, poursuit-il, on exige que chaque étape d'un raisonnement formel soit intelligible. On pourrait penser devoir étendre ce principe à l'usage d'un langage symbolique comme instrument du raisonnement. Mais, déclare-t-il:

> C'est un fait indiscutable que la validité d'une conclusion obtenue par une procédure symbolique quelconque de raisonnement ne dépend pas de notre capacité à interpréter les résultats formels qui en sont présentés aux différentes étapes de la démarche (LT: 67-68).

Cette affirmation constitue le fondement de sa méthode générale en logique. En termes concrets, il en découle le principe suivant:

---

17 Que signifie z/y? Puisque z est l'intersection de x et y, il est contenu dans y, donc, yz = z. Donc x, qui contient z, contient yz et, tout autre élément de x qui n'est pas dans z ne peut pas être dans y. Donc: z/y = yz + une portion indéfinie (1-x)(1-y).
On retrouvera ce résultat avec la méthode de développement.

> Nous pouvons laisser de côté l'interprétation logique des symboles entrant dans une équation donnée; les convertir en symboles quantitatifs ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1; effectuer avec ces symboles ainsi convertis toutes les procédures que demande la solution et les rétablir finalement dans leur interprétation logique (LT: 70).

Le principe fondamental de la méthode générale entraîne donc une distinction entre les formules interprétables et les formules ininterpétables. Seules les prémisses et la conclusion d'un raisonnement peuvent recevoir une interprétation logique. Entre les deux se déroulent les procédures mécaniques de l'algèbre qui, d'un point de vue strictement logique, n'ont aucun sens. La seule signification des énoncés mathématiques, des étapes intermédiaires, réside dans le rôle qu'ils jouent à l'intérieur de la théorie mathématique à laquelle ils appartiennent.

Trois procédures algébriques entrent en jeu:

1. Le développement qui transforme une équation en une expression équivalente.
2. L'élimination qui permet d'éliminer un nombre quelconque de termes dans une équation.
3. La réduction par laquelle un système d'un nombre quelconque d'équations est réduit à une seule équation qui peut ensuite être analysée à l'aide des procédures de développement et d'élimination.

6.1. Le développement d'une fonction logique

Toute expression algébrique contenant un symbole x est appelé une fonction de x et est noté f(x); toute expression contenant x et y, f(x,y), et ainsi de suite.

Développer une fonction f(x), où x est un symbole logique ou un symbole ne pouvant prendre que les valeurs 0 et 1, c'est la mettre sous la forme $f(x) = ax+b(1-x)$.

Les expressions x et 1-x sont appelées les constituants du développement, et a et b les coefficients numériques des constituants.

Dans ce cas, $f(1) = a$ et $f(0) = b$.

Le résultat du développement est donc:

$$f(x) = f(1)x+f(0)(1-x).$$

De manière analogue nous avons:

$$f(x,y) = f(1,1)xy + f(1,0)x(1-y) + f(0,1)(1-x)y + f(0,0)(1-x)(1-y)$$ [18]

$$f(x,y,z) = f(1,1,1)xyz + f(1,1,0)xy(1-z) + f(1,0,1)x(1-y)z + f(1,0,0)x(1-y)(1-z) + f(0,1,1)(1-x)yz + f(0,1,0)(1-x)y(1-z) + f(0,0,1)(1-x)(1-y)z + f(0,0,0)(1-x)(1-y)(1-z).$$

Dans un développement donné, tout constituant t satisfait à la loi de dualité $t(1-t) = 0$. D'autre part, le produit de deux constituants distincts s'annule tandis que la somme de tous les constituants est égale à 1.

6.2. L'interprétation générale des équations logiques

Il s'agit maintenant d'interpréter ces résultats. Comme tout développement d'une fonction fait apparaître deux catégories d'éléments, les constituants et les coefficients, la question doit être divisée. On cherchera tout d'abord à interpréter les constituants, puis à se demander comment les coefficients qui leur sont préfixés en «modifient» l'interprétation.

Considérons une fonction logique ne comportant que les symboles logiques x et y. Le développement fait apparaître les constituants suivants:

$$xy;\ x(1-y);\ (1-x)y;\ (1-x)(1-y).$$

18 On considère tout d'abord f(x,y) comme une fonction de x, et en développant on obtient: $(x,y) = f(1,y)\ x+f(0,y)\ (1-x)$. (1) Puis, on développe le coefficient f(1,y) comme une fonction de y, ce qui donne:
$f(1,y) = f(1,1)\ y+f(1,0)\ (1-y)$. De même, le développement du coefficient f(0,y) donne:
$f(0,y) = f(0,1)\ y+f(0,0)\ (1-y)$. En substituant dans (1) à f(1,y) et f(0,y) les valeurs obtenues, il vient:
$f(x,y) = f(1,1)\ xy+f(1,0)\ x\ (1-y)+f(0,1)\ (1-x)\ y+f(0,0)\ (1-x)(1-y)$.

Ces *constituants* sont *interprétables* et représentent les quatre classes que l'on peut former en affirmant et en niant les propriétés exprimées par x et y. Ces classes sont disjointes les unes des autres et, prises ensemble, elles forment l'univers. De manière générale,

> les constituants du développement d'une fonction logique quelconque des symboles x,y, etc. sont interprétables et représentent les diverses partitions mutuellement exclusives de l'univers de discours, formées par l'attribution et la non-attribution, de toutes les manières possibles, des qualités désignées par les symboles x,y, etc. (LT: 81).

Cette analyse repose sur un résultat obtenu à partir des propriétés formelles des symboles. Elle peut également reposer sur des «raisons purement logiques». Prenons une classe quelconque d'objets que nous considérons par rapport à la possession ou la non-possession d'une propriété x. Elle peut être divisée en deux sous-classes: l'une dont les membres possèdent la propriété x, l'autre dont les membres ne la possèdent pas. Supposons maintenant que les membres qui possèdent la propriété x possèdent également la propriété u et que ceux qui ne possèdent pas la propriété x possèdent par ailleurs la propriété v, et que ces deux conditions respectives suffisent à les définir. La classe de départ, dans sa totalité, sera représentée par l'expression $ux+v(1-x)$ «qui peut être considérée comme une forme générale développée pour l'expression d'une classe quelconque d'objets considérée par rapport à la possession ou l'absence d'une propriété donnée x» (LT: 71). La procédure de développement pourra donc être appliquée à une fonction logique quelconque et les constituants seront dans tous les cas interprétables. La raison est que nous ne faisons qu'appliquer le procédé de dichotomie qui découle de la loi fondamentale de la pensée $x^2 = x$ soit $x(1-x) = 0$.

Si les constituants renvoient à la possibilité de diviser une classe ou l'univers de discours en 2^n parties, n étant le nombre de propriétés considérées, qu'en est-il des coefficients?

Soit la fonction f(x,y) = 1-x / 1-y. Nous avons:

$$f(1,1) = 0/0;\ f(1,0) = 0/1;\ f(0,1) = 1/0;\ f(0,0) = 1.$$

Le résultat du développement est donc:

$$0/0\ xy + 0/1\ x(1-y) + 1/0\ (1-x)y + 1\ (1-x)(1-y).$$

De quelle manière ces coefficients, 0/0, 0/1, 1/0, 1, modifient-ils l'interprétation des constituants auxquels ils se trouvent attachés? Boole précisera cette idée de «modification», peu développée dans l'ouvrage de 1854, dans des manuscrits ultérieurs consacrés à «la philosophie du développement».

Prenons, par exemple, les trois conceptions «hommes», «animaux», «êtres rationnels». Nous pouvons formuler la proposition suivante:

> «Les hommes sont ou des animaux rationnels
> ou des êtres rationnels mais pas des animaux
> ou des êtres non rationnels mais des animaux
> ou ni des êtres rationnels et ni des animaux».

Il s'agit là, écrit Boole, d'une «forme nécessaire et a priori du jugement» exprimant la nécessité pour tout être humain d'appartenir à l'une des quatre classes qui forment le prédicat (Boole 1954: 219). En identifiant les propositions vraies seulement en raison de leur forme, Boole esquisse la notion de tautologie. S'il ne semble pas voir l'intérêt de les utiliser dans ses déductions, c'est qu'il s'est fixé sur un but bien précis: déduire les conséquences de prémisses données sur le modèle de l'algèbre, c'est-à-dire trouver des solutions à des équations. C'est ici qu'apparaît le second aspect du développement. Chaque prémisse particulière du raisonnement qui contient ces conceptions apporte une «information» qui vient modifier la proposition nécessaire. Ces informations sont exprimées, dans le développement, par les coefficients préfixés aux constituants.

Boole va maintenant examiner les trois formes d'équation auxquelles peut conduire la méthode de développement et montrer qu'elles peuvent toutes recevoir une interprétation logique. Si V représente une fonction logique des symboles électifs x,y, etc. et w un symbole logique, ces trois formes sont:

$$V = 0; V = 1; V = w.$$

a) Interprétation de l'équation V = 0

Pour des raisons de commodité, prenons une fonction V qui ne comporte que deux symboles x et y. Le développement donne:

$$a\,xy + b\,x(1-y) + c\,(1-x)y + d\,(1-x)(1-y)$$

a,b,c et *d* sont les coefficients numériques que fait apparaître le développement.

Supposons qu'un coefficient quelconque, *a* par exemple, ne s'annule pas et multiplions chaque membre de l'équation par le constituant qui lui est préfixé, c'est-à-dire xy. Nous obtenons:

$$a\,xy = 0.$$

Puisque a est différent de 0, xy = 0.

Ce résultat est indépendant de la nature des autres coefficients. Son interprétation est: «Les individus appartenant à la fois à la classe x et y n'existent pas». De la même manière si le coefficient *b* ne s'annule pas, on obtient x(1-y) = 0 c'est-à-dire: «Il n'existe aucun individu qui appartienne à la classe x et n'appartienne pas à la classe y ».

Si le coefficient *a* s'annule, le terme *a* xy n'apparaît pas dans le développement et, par conséquent, l'équation xy = 0 ne peut s'en déduire.

Boole énonce alors la règle suivante:

> Développer la fonction V et égaler à 0 tout constituant dont le coefficient ne s'annule pas. Les interprétations des résultats ainsi obtenus, prises dans leur ensemble, constitueront l'interprétation de l'équation proposée (LT: 83).

Illustrons cette règle par la définition suivante: «Les hommes sont les animaux raisonnables».
Si x représente «les hommes», y «les animaux» et z «les êtres raisonnables», la proposition s'exprime par:

$$x = yz$$

et peut être mise sous la forme:

$$x - yz = 0.$$

En développant complètement le premier membre, on obtient:

$$0\,xyz + xy(1-z) + x(1-y)z + x(1-y)(1-z) + (-1)(1-x)yz + 0(1-x)y(1-z) + 0(1-x)(1-y)z + 0(1-x)(1-y)(1-z).$$

Les termes dont les coefficients ne s'annulent pas donnent les équations suivantes:

$$xy(1-z) = 0;\ x(1-y)z = 0;\ x(1-y)(1-z) = 0;\ (1-x)yz = 0.$$

Ces quatre équations affirment l'inexistence de certaines classes d'objets, à savoir:
— celle des hommes qui sont des animaux mais ne sont pas raisonnables;
— celle des hommes qui ne sont pas des animaux mais sont raisonnables;
— celle des hommes qui ne sont ni des animaux, ni raisonnables;
— celle des êtres qui sont des animaux raisonnables mais ne sont pas des hommes.

La forme à laquelle on aboutit par cette méthode constitue ce que Boole appelle une «négation conjointe» *(conjoint denial)*, c'est-à-dire la négation conjointe de l'existence des classes représentées par les constituants dont les coefficients ne s'annulent pas (LT: 85).

b) Interprétation de la forme V = 1

Puisque la forme V = 1 est la forme duale de V = 0, son interprétation découle de celle donnée précédemment.

De l'équation x-yz = 0, nous avons conclu à l'inexistence de certaines classes. Par conséquent, la somme logique des autres constituants dont le coefficient ne s'annule pas représente l'univers de discours et peut être égalée à 1.

On a donc:

$$xyz + (1-x)y(1-z) + (1-x)(1-y)z + (1-x)(1-y)(1-z) = 1.$$

On affirme ainsi que toutes les choses existantes appartiennent à l'une ou l'autre des quatre classes suivantes:

— celle des hommes qui sont des animaux raisonnables;
— celle des choses qui ne sont pas des hommes mais qui sont des animaux et ne sont pas raisonnables;
— celle des choses qui ne sont pas des hommes, ni des animaux mais raisonnables;
— celle des choses qui ne sont ni des hommes, ni des animaux, ni raisonnables.

Cette forme est appelée une «affirmation simple» lorsqu'un seul constituant apparaît dans la conclusion; et une «affirmation disjonctive» *(disjunctive affirmation)* lorsque plus d'un constituant y apparaît (LT: 86).

c) Interprétation de la forme V = w

Supposons que de «les hommes sont des animaux raisonnables», nous cherchons à exprimer les choses raisonnables en termes d'hommes et d'animaux,. Il s'agit donc, partant de x = yz, de déterminer z comme une fonction interprétable de x er y, c'est-à-dire z = x/y.

Mais, comme nous l'avons vu précédemment, l'équation x/y n'a aucune signification logique. Il faut donc la ramener à une forme interprétable.

En développant le second membre, on obtient:

$$z = xy + 1/0\ x(1-y) + 0(1-x)y + 0/0(1-x)(1-y).$$

Quelle interprétation donner à cette expression?

Le problème peut être formulé de manière générale:

> Etant donné une équation logique quelconque liant les symboles x,y,z,w, on demande d'exprimer sous une forme interprétable la relation entre la classe représentée par w et les classes représentées par les autres symboles x,y,z, etc. (LT: 87).

Si nous développons l'équation donnée, quelle qu'en soit la forme par rapport à w, nous pouvons la mettre sous la forme:

$$E\, w + E' \,(1-w) = 0,$$

E et E' étant des fonctions des symboles logiques autres que w.

Nous avons donc:

$$E' = (E'-E)\, w$$

d'où $w = E'/\,(E'-E)$.

Si les expressions E' et E'-E ont des termes communs en facteur, nous n'avons pas le droit de simplifier à moins qu'il ne s'agisse de symboles numériques. Il reste la solution de développer le second membre. Le développement fera apparaître des coefficients de toutes sortes, mais il suffira de considérer les quatre cas suivants: 1, 0, 0/0 et 1/0.

La signification assignée par Boole à ces symboles est la suivante:

— 1 étant le symbole de l'univers de discours, la totalité de la classe à laquelle il est préfixé doit être prise en compte.
— 0 étant le symbole du Rien, la classe vide, la classe à laquelle il est préfixé ne sera pas prise en compte.
— 0/0 est un symbole qui traduit une quantité indéterminée d'éléments de la classe à laquelle il est préfixé: *tous, quelques* ou *aucun*. Il peut être remplacé par le symbole auxiliaire v qui obéit à la loi de dualité $v\,(1-v) = 0$ (cf. remarque ici-même: 155).
— 1/0 est un symbole qui n'obéit pas à la loi de dualité. Le constituant auquel il est préfixé doit être égalé à 0

(LT: 90-91). A ce symbole sont ramenés tous les coefficients qui peuvent apparaître dans un développement et qui sont différents de 1, 0, et 0/0.

Il s'ensuit que si le développement d'une fonction logique f(w) est le suivant pour le symbole de classe w:

$$w = A+0\ B+0/0\ C+1/0\ D.$$

A, B, C, et D étant des symboles de classes (ou de combinaison de classes) la solution se ramène aux deux équations suivantes:

$$w = A+\nu\ C;\ D = 0.$$

Soit: «la classe w est formée de la totalité de la classe A et d'une partie indéterminée de la classe C» et «la classe D est vide».

La première équation fournit sur la classe w toute l'information qui est contenue dans la prémisse en exprimant la relation de la classe w et des autres symboles de classe. La deuxième exprime la relation qu'ont entre eux, indépendamment de w, les éléments de la prémisse.

Revenons à notre exemple où nous cherchons à définir les choses raisonnables en termes d'hommes et d'animaux, soit:

$$z = xy + 1/0\ x(1-y) + 0(1-x)y + 0/0\ (1-x)(1-y).$$

Selon les canons de l'interprétation qui viennent d'être donnés, nous avons:

$$z = xy+\nu\ (1-x)(1-y)$$
$$x(1-y) = 0.$$

Soit: «Les choses raisonnables sont tous les animaux qui sont des hommes plus une classe indéterminée de non-hommes qui ne sont pas des animaux (quelques-uns, aucun ou tous)» et «Les hommes qui ne sont pas des animaux n'existent pas».

Remarque:

Boole tire la signification du symbole 0/0 de l'analyse d'un exemple particulier, à savoir la proposition «Les hommes non mortels n'existent pas». Si x représente «hommes» et y «êtres mortels», cette proposition se traduit par l'équation x(1-y) = 0.

On peut l'écrire sous la forme x-xy = 0 ou x = xy.

Si nous cherchons à exprimer x en fonction de y, il vient: y = x/x. Par là, nous n'*effectuons* pas une division. Nous *exprimons* l'opération. En développant le second membre, on obtient:

$$y = x + 0/0\,(1-x).$$

Boole interprète cette dernière équation ainsi: «La classe des mortels est constituée par la classe des hommes plus un restant d'êtres qui ne sont pas des hommes». Ce restant d'êtres, écrit -il, peut correspondre à *tous* les êtres qui ne sont pas des hommes, une *partie* ou *aucun* d'entre eux. Chacun des trois cas ne change rien à la vérité de la prémisse selon laquelle «Les hommes non mortels n'existent pas». Boole en conclut que cet exemple particulier est généralisable et attribue au symbole 0/0 une signification que lui suggère une comparaison avec l'arithmétique. Le symbole 0/0 représentera une classe indéterminée[19]. «Il faudra prendre en compte *tout*, *une partie* ou *rien* de la classe à laquelle il est préfixée». On pourra, «pour des raisons de commodité», lui substituer le symbole *v*, soumis à la loi fondamentale $v\,(1-v) = 0$ (LT: 89-90).

Notons que Boole assigne au symbole *v* une signification autre que celle assignée dans le chapitre consacré à l'expression symbolique des propositions où *v* représente une classe indéfinie sous tout rapport, *excepté qu'elle n'est pas vide*: *v*x signifie «quelques x» ou «x n'est pas vide». Notons aussi qu'il introduit les symboles 0/0 et 1/0 en leur attribuant «une interprétation logique très importante» alors qu'il rejette la division comme opération logique (LT: 74).

---

19 «Toutefois, il faut bien avouer que son interprétation effective comme symbole de classe indéfinie ne saurait être déduite, sauf par analogie, de ses propriétés arithmétiques, mais doit être établie expérimentalement» (LT: 91-92).

6.3. L'élimination

Cette fonction occupe une place fondamentale dans le système de Boole. Rappelons que l'objectif à atteindre, sur le modèle du syllogisme, est un procédé général d'élimination d'un nombre quelconque de termes dans un système composé d'un nombre quelconque de prémisses données sous forme d'équations et faire apparaître dans le résultat les relations effectives qui demeurent entre les autres éléments (LT: 100).

Proposition:

> «Si f(x) = 0 est une équation logique contenant le symbole de classe x, avec ou sans d'autres symboles de classe, alors l'équation f(1)f(0) = 0 est vraie indépendamment de l'interprétation de x et elle est le résultat de l'élimination de x dans l'équation donnée (LT: 101).

De cette proposition, Boole donne trois démonstrations. J'ai choisi celle qui fait intervenir la méthode de développement.

Soit l'équation logique f(x) = 0
Développons le premier membre: f(1) x+f(0) (1-x) = 0.
Multiplions l'équation d'abord par x, puis par 1-x:

f(1) x = 0
f(0) (1- x) = 0.

Par solution et développement, nous obtenons:

f(1) = 0/x	d'où	f(1) = 0/0 (1-x)
f(0) = 0/1-x	d'où	f(0) = 0/0 x.

L'interprétation de ces équations est:

> «Tous les individus contenus dans la classe représentée par f(1) ne sont pas x».
> «Tous les individus contenus dans la classe représentée par f(0) sont x».

En d'autres termes:

> «Il n'existe pas d'individus contenus à la fois dans la classe f(1) et dans la classe f(0)».

Dès lors, symboliquement:

$$f(1)\,f(0) = 0.$$

D'où cette règle: pour éliminer un symbole x d'une équation donnée f(x) = 0, donner successivement à ce symbole les valeurs 0 et 1 et multiplier les deux équations obtenues.

Considérons maintenant l'équation générale f(x,y) = 0. Le premier membre peut contenir d'autres symboles que x et y. Si nous éliminons tout d'abord y, selon ce qui a été dit précédemment, nous obtenons:

$$f(x,1)\,f(x,0) = 0.$$

Eliminons maintenant x. Il vient:

$$f(1,1)\,f(1,0)\,f(0,1)\,f(0,0) = 0.$$

Et ainsi de suite pour f(x,y,z,...) = 0.

Il est possible, comme en algèbre ordinaire, que l'élimination d'un ou plusieurs symboles conduise à l'identité 0 = 0. Dans ce cas, il n'existe aucune relation indépendante entre les autres symboles.

Appliquons la procédure d'élimination au symbole *v:*
La proposition «Tous les hommes sont mortels» se traduit par $x = v\,y$ (x représente «les hommes» et y «les mortels»).
Pour éliminer v, on écrit $x - v\,y = 0$:

$$f(1) = x\text{-}y;\ f(0) = x.$$

Ainsi f(1)f(0) = x-xy.
Donc x(1-y) = 0, soit «les hommes non mortels n'existent pas».

Si nous voulons maintenant exprimer la relation entre les non-mortels et les hommes, nous avons:

1-y = 0/x.

En développant le second membre, on a 1-y = 0/0 (1-x) qui s'interprète «Ceux qui ne sont pas mortels ne sont pas des hommes».

Il s'agit là de la conversion par contraposition de la logique classique dont Boole montre qu'elle n'est qu'un particulier de «l'application d'une méthode bien plus générale en logique» (LT: 230).

Le lecteur curieux retrouvera aux pages 106-113 du chapitre consacré à l'élimination le traitement d'un exemple plus complexe.

6.4. La réduction

La méthode générale d'élimination n'est applicable qu'à une seule équation, c'est-à-dire à une seule prémisse. Mais les prémisses d'un raisonnement déductif sont le plus souvent au nombre de deux ou plus. Il faut donc établir une méthode qui permette de réduire un système quelconque d'équations logiques à une équation unique équivalente de manière à pouvoir leur appliquer les méthodes qui viennent d'être exposées. Boole présente deux méthodes de réduction. Je n'en présenterai que, succinctement, la deuxième. Elle se présente sous la forme d'une double règle.

1) Première règle:

Si V= 0, V'= 0, etc. sont des équations dont les développements ne font apparaître que des coefficients positifs, elles peuvent être réunies en une unique équation équivalente:

V+V'+ etc. = 0.

Si les coefficients sont positifs, tous les constituants des équations distinctes V= 0, V'= 0, etc. se retrouveront dans le développement de l'équation V+V'+ etc. = 0. Dans le cas contraire, des coefficients qui ne s'annulent pas dans les équations de départ peuvent s'annuler dans l'équation finale.

2) Deuxième règle (elle découle de la précédente):

Si V = 0, V' = 0, etc. représentent un système quelconque d'équations, l'interprétation de l'ensemble du système sera l'équation unique:

$$V^2+V'^2+ \text{etc.} = 0.$$

Appliquons cette règle à un syllogisme. (Cet exemple est particulièrement simple en comparaison de ceux que présente Boole).

Soient les prémisses:

«Tout homme est animal».
«Tout animal est mortel».

Si x représente «homme», y «animal» et z «mortel», on obtient les équations:

$$x(1-y) = 0$$
$$y(1-z) = 0.$$

Le développement de ces équations ne fait pas apparaître de coefficients négatifs, donc:

$$x(1-y) + y(1-z) = 0 \text{ ou } x-xy + y-yz = 0.$$

Si nous éliminons y, nous avons:

$$f(0) = x;\ f(1) = x- y$$
$$f(1)\ f(0) = 0;\ \text{d'où } x(1-y) = 0.$$

D'où: «Tout homme est mortel».

Avec la procédure de réduction s'achève la présentation de la méthode générale du raisonnement déductif. Dans les deux chapitres qui suivent, Boole ne donne plus que des méthodes pour abréger les calculs et les rendre plus élégants, car il est nécessaire, dit-il, «de garder présent à l'esprit, le modèle d'une perfection idéale» (LT: 154).

7. Les propositions secondaires

Tout ce qui a été présenté jusqu'ici se rapporte exclusivement aux propositions primaires. Il nous reste à examiner le cas des propositions secondaires, qui expriment des relations entre des propositions primaires, considérées comme vraies ou fausses. Boole montre que les lois et les procédures formelles établies précédemment sont identiques lorsqu'on passe des propositions primaires aux propositions secondaires. Il n'y a, d'un cas à l'autre, qu'une différence d'interprétation.

7.1. Interprétation du symbolisme

x, y, z représentent les temps pendant lesquels les propositions X, Y, Z sont vraies[20].
1 représente la totalité du temps.
0 représente le néant du temps.
+, -, x, = traduisent l'addition, la soustraction, la composition et l'égalité de ces temps.
x+y est la réunion des temps où X ou Y sont vraies (mais pas les deux).
xy est le temps où X et Y sont toutes deux vraies.
x-y est le temps qui reste lorsque l'on retranche de celui où X est vraie celui où Y est vraie.
x(1-y) est le temps où X est vraie et Y fausse.
Et ainsi de suite...

On retrouve les lois fondamentales établies pour le calcul des classes:

20 Plus précisément, «x représente un acte mental qui fixe l'attention sur la portion de temps durant laquelle la proposition X est vraie» (LT: 165).

$x+y = y+x$
$xy = yx$
$x(y+z) = xy+xz$
$x^2 = x$ ou $x(1-x) = 0$.

7.2. L'expression symbolique des propositions secondaires

1) La proposition «X est toujours vraie» est exprimée symboliquement par l'équation $x = 1$.
2) La proposition «X est toujours fausse» par l'équation $x = 0$.
3) La proposition disjonctive «Soit la proposition X est vraie soit la proposition Y est vraie» se traduit par l'équation $x(1-y)+(1-x)y = 1$ si on suppose que les propositions en question s'excluent mutuellement. Dans le cas contraire, nous avons $xy + x(1-y) + (1-x)y = 1$ ou $x +(1-x)y = 1$.
4) La proposition conditionnelle «Si la proposition Y est vraie, la proposition X est vraie» s'exprime par l'équation $y = v\, x$. Le symbole auxiliaire v représente, dans l'interprétation propositionnelle, une portion indéfinie du temps de x. En effet, la conditionnelle «Si Y alors X» signifie que le temps où la proposition Y est vraie est une partie du temps où la proposition X est vraie. $v\, x$ peut s'entendre comme représentant la totalité, une portion indéfinie ou une portion nulle du temps x.
   Nous retrouvons, avec ces trois significations possibles de v, les trois cas de vérité de l'implication logique. Si $v = 1$, la vérité de Y entraîne nécessairement celle de X; si v représente une partie du temps x, X peut être vraie sans que Y le soit nécessairement; et enfin, si $v = 0$, alors Y est fausse.

Boole donne quelques exemples de propositions plus complexes faisant intervenir à la fois la conjonction et la disjonction (LT: 171-174).

Analysons une proposition secondaire à l'aide des procédures algébriques exposées précédemment.

Soit la proposition conditionnelle: «Si Fabius est né au lever de la canicule, il ne mourra pas en mer». Si y *représente*[21] la proposition; Fabius est né au lever de la canicule» et x la proposition «Fabius mourra en mer», nous avons

$$y = v\,(1-x) \qquad (1).$$

Eliminons tout d'abord le symbole *v*. Nous obtenons:

$$y\,\{y-(1-x)\} = 0$$
$$\text{ou } yx = 0 \qquad (2).$$

L'interprétation de ce résultat est: «Il n'est pas vrai que Fabius est né au lever de la canicule et qu'il mourra en mer».

Cette proposition peut être ramenée à la forme disjonctive suivante:

$$x(1-y)+y(1-x)+(1-x)(1-y) = 1 \quad (3).$$

C'est-à-dire: «Ou Fabius est né au lever de la canicule et il ne mourra pas en mer; ou il n'est pas né au lever de la canicule et il mourra en mer; ou il n'est pas né au lever de la canicule et il ne mourra pas en mer».

L'équation (3) peut aussi s'écrire:

$$(1-y)x+1-x = 1 \qquad (4)$$
$$\text{ou } y(1-x)+1-y = 1 \qquad (5).$$

En utilisant le symbolisme moderne c'est-à-dire en remplaçant y et x par les symboles de propositions p et q, le produit par la conjonction &, l'addition par la disjonction «exclusive» w, 1- ... par la négation $\neg$ et l'égalité par la conditionnelle $\supset$, on observe que les expressions suivantes sont équivalentes:

21 «Par x *représente* la proposition «Fabius est né...» nous entendrons simplement que x est un symbole correspondant à cette proposition de telle manière que l'équation x = 1 affirme, et que l'équation x = 0 nie, la vérité de cette proposition» (LT: 179).

$p \supset \neg q$
$\neg (p \& q)$
$(p \& \neg q) \text{ w } (\neg p \& q) \text{ w } (\neg p \& \neg q)$
$(\neg p \& q) \text{ w } \neg q$
$(p \& \neg q) \text{ w } \neg p.$

Insistons sur le fait qu'avec l'interprétation propositionnelle, nous sommes toujours dans une logique des classes. L'introduction de la notion de temps permet de maintenir l'interprétation en termes d'extension (ou classe d'instants) (Frege 1971: 75).

On remarque aussi que x+y ne représente pas la disjonction «exclusive» entre deux classes quelconques, mais la simple union de deux classes disjointes.

8. Epilogue

Telle est, dans ses grandes lignes, l'algèbre de la logique de Boole. Blanché, dans *La logique et son histoire* rend le verdict suivant:

> Il présente un système qu'on peut bien, malgré ses imperfections, qualifier d'achevé, en ce sens qu'il apporte, pour la solution de problèmes logiques qui englobent, en les dépassant , ceux auxquels se limitait la logique traditionnelle, ce que nous appellerions aujourd'hui des procédures de décision, permettant des calculs efficaces (Blanché 1971: 270).

Revenons, dans un premier temps, à quelques-unes de ces imperfections dont souffre le système déductif de Boole. J'insisterai sur deux d'entre elles. La première est que Boole introduit des symboles logiques autres que ceux définis dans l'alphabet logique de base. Il est tout d'abord contraint, du fait de l'impossibilité, au sein du langage algébrique, d'exprimer les propositions existentielles, d'introduire un symbole auxiliaire *v* auquel il assigne la fonction d'exprimer «quelques». Ce symbole est présenté comme étant un symbole de classe indéterminée. S'il peut, en un certain sens, fonctionner comme un symbole de classe, l'explication qu'en donne Boole est cependant peu satisfaisante. D'une part, il ne peut être détaché de la classe à laquelle il est préfixé. D'autre part, le fait est qu'une classe dont l'unique caractérisation serait d'être indéterminée ne peut exister. Nous avons relevé une autre difficulté liée à ce symbole auxiliaire. Dans l'équation $x = vy$ exprimant la proposition «Tout X est Y», vy signifie que la classe y n'est pas vide. Boole semble donc considérer que la proposition $x = vy$ a une portée existentielle. Mais, plus loin, il déclare que le symbole v est l'équivalent du symbole 0/0 qui exprime que la totalité, une partie ou rien de la classe à laquelle il est préfixée doit être prise en compte. Dans ce cas, on a donc la possibilité que la classe $x = v\, y$ soit vide.

On rencontre aussi les expressions 0/0, 1/0 auxquelles est attribuée une signification logique alors que la division ne fait pas partie des opérations logiques. Néammoins, bien que cela ne supprime en rien son manque de rigueur, il est probable que Boole considère que ces symboles font uniquement partie de sa méthode générale.

La deuxième faiblesse, sans doute la plus importante, est celle qui découle du choix d'un sens exclusif pour l'addition. Il entraîne que les expressions $x+x$ et $x+1$ sont ininterprétables car $x+x$, sur le modèle de l'algèbre numérique, est égal à $2x$. Boole ignore, par ailleurs le problème qu'elles posent. Il se contente de remarquer, dans le chapitre consacré aux méthodes pour abréger les calculs, que dans toute équation $V= 0$, où V consiste en une suite de symboles ayant des coefficients positifs, on peut remplacer $2x$ par x et $x+xy$ par x (LT: 131).

Les successeurs de Boole adopteront un sens inclusif pour l'addition, de telle sorte que la classe notée $x+y$ contienne xy. Par conséquent, la loi d'idempotence pour l'addition, $x+x = x$ deviendra le signe distinctif d'une algèbre non numérique. L'addition n'étant alors plus réversible, il faudra introduire un symbole pour la négation. (La seule forme de négation, chez Boole, est la complémentarité par rapport à la classe universelle). On disposera alors des lois de dualité de De Morgan.

A la lumière de ces développements, on peut s'étonner que Boole n'ait pas su éviter la difficulté des opérations inverses en adoptant un sens inclusif pour l'addition. Faut-il n'y voir qu'une maladresse de sa part? Je répondrai que non. L'algèbre de la logique de Boole est une application «brute» de l'algèbre symbolique telle que l'ont définie les algébristes anglais. Le principe de permanence des formes équivalentes sur lequel Boole s'appuie écartait, *de fait*, l'idée de considérer l'algèbre comme une science *pure* de symboles en ce sens qu'elle n'admettrait aucune sorte d'interprétation. Si l'arithmétique n'était qu'une interprétation possible parmi d'autres, elle n'en demeurait pas moins une interprétation nécessaire. Boole n'avait donc conscience que de donner une interprétation nouvelle des mathématiques, légitimée par leur polysémie naturelle. Ce qu'il n'a pas su voir, c'est qu'il créait en réalité un objet mathématique nouveau, une algèbre non numérique reposant sur des axiomes différents de ceux de l'algèbre ordinaire. Quoi qu'il en soit. ce que nous pourrions tenir aujourd'hui pour une faiblesse fit, en son temps, sa force. Car, c'est précisément pour s'être obstiné dans la voie d'une mathématisation de la logique et n'avoir pas cru insurmontables les difficultés qui en résultèrent que Boole a su faire de l'idée d'analogie formelle une technique d'analyse féconde.

Au coeur du système déductif de Boole, il reste le problème de l'ininterprétable. En vertu du principe général de sa méthode, le chemin qui conduit des prémisses d'un raisonnement à la conclusion est totalement dénué de signification logique. Boole savait fort bien que sa méthode allait à l'encontre d'une logique dont on attend, si elle est la mise en oeuvre des lois de la pensée, qu'elle soit apte à rendre compte d'elle-même à chaque étape. A une condamnation de principe, nous l'avons vu répondre par des principes généraux concernant l'usage des méthodes symboliques. En outre, pour se convaincre de la validité d'un tel principe, il affirme qu'un seul exemple suffit. L'exemple qu'il donne est celui de l'emploi du nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, symbole ininterprétable, utilisé dans les procédures trigonométriques intermédiaires. Il en sera donc de l'ininterprétable en logique comme de l'imaginaire en mathématiques et Boole range au nombre des vérités axiomatiques ce principe général dont il fait «une loi générale de l'esprit» (LT: 68).

Dans un texte posthume, sans date, Boole écrivait:

> [...] aussi curieuses et exactes que fussent les analogies formelles entre la science de la logique et celle de l'algèbre limitée aux nombres 0 et 1, il eût été préférable que la première trouvât un développement indépendant. Bien qu'il m'apparaisse que sans la lumière de cette analogie, j'eusse probablement échoué à édifier sur le fondement de lois formelles le système de méthodes et de résultats qu'a produit mon travail, je suis prêt à admettre franchement qu'en l'écrivant [*The Laws of Thought*], j'étais bien trop sous la domination d'idées mathématiques (Boole 1954: 211).

La logique a trouvé ce développement indépendant en 1879, date de la publication de la *Begriffsschriff* de Frege. Ce dernier, en vue de reconstruire les mathématiques sur une base strictement logique, élabore le premier langage spécifiquement logique. Comme il le souligna, Boole a réalisé un *calculus ratiocinator* au sens de Leibniz, tandis que lui-même a voulu créer une *lingua characteristica universalis*, dont le calcul de la déduction est partie obligée. Il relève chez Boole deux faiblesses. La première est que sa logique a les mêmes limites que celle d'Aristote. Elle ne peut pas exprimer les jugements d'existence et n'a pas les moyens de créer de nouveaux concepts. La seconde faiblesse tient à ce que le même symbolisme est utilisé pour représenter les rapports entre les termes et ceux entre les énoncés propositionnels. On ne peut donc exprimer simultanément le contenu des propositions et le lien entre propositions comme il se fait dans le raisonnement mathématique. Grâce à l'analyse de la proposition (fonction, argument) et l'usage réglé des quantificateurs, Frege a su relier ce qu'il appelait la logique des fonctions à la logique des propositions. Boole avait émancipé la logique de la philosophie, Frege la libère d'une réduction aux mathématiques. D'un côté, nous avons un système déductif construit sur le modèle de l'algèbre où la logique se voit attribuer le rôle de déduire les conséquences de prémisses données, et non pas celui de déterminer la validité ou la non-validité d'un argument. Car, si le système de Boole possède bien, en un certain sens, un critère de validité, en revanche, il ignore complètement le critère de la non-validité. De l'autre côté, nous avons une véritable théorie déductive, fondée sur les moyens d'effectuer des déductions, étant données des prémisses et une conclusion possible.

L'histoire a retenu l'année 1879 pour celle de la véritable naissance de la logique symbolique. Il n'en demeure pas moins que la contribution de Boole est essentielle. D'un point de vue historique, son algèbre de la logique demeure le point de départ de la logique symbolique. La logique mathématique moderne lui doit ses premiers résultats importants. De plus, sa méthode, qui porte en elle l'idée d'une séparation entre syntaxe et sémantique, anticipe celle qui caractérise le formalisme contemporain.

Par ailleurs les résultats obtenus dans *The Mathematical Analysis of Logic* illustrent de manière exemplaire la puissance heuristique du symbolisme. Boole prouve en effet magistralement que celui-ci n'a pas pour unique fonction d'être un instrument d'expression et de rigueur. Il peut aussi conduire à la découverte. En rapport avec ce point, on peut penser que la conviction de Boole d'atteindre les lois ultimes des opérations de l'entendement n'est pas étrangère à la confiance que lui inspire l'outil de l'analyse et sa découverte du nouvel «Organon».

Ces quelques pages ne sauraient suffire à rendre compte des nombreuses facettes selon lesquelles se démultiplie *The Laws of Thought*. De nombreux points ont été négligés: les développements philosophiques auxquels se livre Boole avec l'introduction de la notion de temps dans l'interprétation propositionnelle ou encore ses réflexions sur les fins spéculatives de la logique réunies dans le dernier chapitre intitulé: «La nature de la science et la constitution de l'esprit humain». Je n'ai pas non plus abordé l'application que fait Boole de sa méthpde à l'analyse de deux textes métaphysiques: la «Démonstration de l'existence et des attributs de Dieu» de Clarke et le début de l'«Ethique» de Spinoza. A travers ces deux exemples, il entend montrer aux philosophes que son calcul peut être juge de la rigueur d'une argumentation métaphysique en mettant à l'épreuve sa validité formelle. Ce point fera l'objet d'un autre travail.

Cette présentation voulait avant tout restituer dans ses grandes lignes et aussi fidèlement que possible l'algèbre de la logique que le mathématicien anglais, au milieu du XIXe siècle, construisit sur le fondement des lois ultimes des opérations de l'entendement comme la mathématique même de l'esprit humain.

Séminaire de logique
Université de Neuchâtel

Bibliographie

BLANCHÉ R. (1970). *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*. Paris: Colin.

BOCHENSKI I.M. (1961). *A History of Formal Logic*. New York: Chelsea.

BOOLE G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan.

BOOLE G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Cambridge: Macmillan. Trad. fr. par DIAGNE S. B. *Les lois de la pensée*. Paris: Vrin, 1992.

BOOLE G. (1954). *Studies in Logic and Probability*. London: Rush Rhees, Watts & Co.

BOURBAKI N. (1960). *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

CORCORAN J. & WOOD S. (1980). Boole's criteria for validity and invalidity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 21, 609-638.

DIAGNE S.B. (1989). *Boole, 1815-1864, l'oiseau de nuit en plein jour*. Paris: Belin.

DIEUDONNÉ J. (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. Paris: Hermann.

FREGE G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Trad. de C. Imbert. Paris: Seuil.
KNEALE W. & KNEALE M. (1962). *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press.
KOTARBINSKI T. (1960). *Leçons sur l'histoire de la logique*. Paris: P.U.F.
LIARD L. (1878). *Les logiciens anglais contemporains*. Paris: F. Alcan.
PUTNAM H. (1982). Peirce the logician. *Historia Mathematica*, vol. 9, 290-301.
TIERCELIN C. (1993). *La pensée-signe. Etudes sur C.S. Peirce*. Nîmes: Editions J. Chambon.
VAN EVRA J. W. (1977). A reassessment of George Boole's theory of logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 18, 133-139.