



SUR L'ENTROPIE DES AUTOMORPHISMES DES ALGÈBRES DE VON NEUMANN FINIES

Thèse présentée à la Faculté des Sciences pour
obtenir le grade de docteur es sciences par
O. Besson

Université de Neuchâtel
Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
CH-2000 NEUCHÂTEL (Suisse)

Sommaire

1. Introduction p.1

2. Préliminaires p.6

2.1. Rappels sur l'entropie de Kolmogorov p.6

2.2. Le théorème de concavité de Lieb et ses conséquences
p.9

3. Entropie dans une algèbre de von Neumann p.17

4. Entropie d'un automorphisme p.30

4.1. Définitions et premières propriétés p.30

4.2. Entropie dans les produits croisés p.42

4.3. Entropie d'un flot d'automorphismes p.54

4.4. Non continuité de l'entropie p.56

4.5. Une famille non dénombrable d'automorphismes d'entropie
nulle p.59

4.6. Un exemple de décalage markovien p.63

Bibliographie p.71

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Sur l'entropie des automorphismes des algèbres
de von Neumann finies

de Monsieur Olivier Besson

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

Messieurs R. Bader, P.-L. Aubert, E. Størmer
(Oslo) et P. de la Harpe (Genève)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 18 janvier 1983

Le doyen:



A. Aeschlimann

1. Introduction.

Soit M une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace τ normale fidèle normalisée. Un automorphisme θ de M est une bijection linéaire de M vérifiant

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y) \text{ et } \theta(x^*) = \theta(x)^*$$

pour tout $x, y \in M$. On note $\text{Aut } M$ le groupe des automorphismes de M .

Dans [C-S], A. Connes et E. Størmer ont défini l'entropie $H(\theta)$ d'un automorphisme θ de M conservant τ . Cet invariant leur a permis de démontrer l'existence d'une famille non dénombrable d'automorphismes non conjugués du facteur hyperfini de type II_1 .

Ce travail est consacré à l'étude de l'entropie d'un automorphisme. Une partie des résultats qui y sont contenus est tirée de l'article original cité ci-dessus. Certains de nos résultats ont été publiés dans [Be].

Dans le chapitre 2, nous rappelons les définitions et quelques propriétés relatives à l'entropie de la théorie ergodique classique (= commutative) dans la langage des algèbres de von Neumann; ceci en deux temps.

Dans le premier paragraphe, les définitions sont en terme des projecteurs minimaux d'une sous-algèbre de dimension finie d'une algèbre de von Neumann abélienne A ; on ne fait donc que paraphraser l'exposition classique (voir par exemple [Wal]).

Dans le second paragraphe, le théorème de concavité de Lieb

que nous rappelons dans le cadre d'une algèbre de von Neumann finie permet d'exprimer la définition en terme du cône positif A_+ de A . C'est cette formulation qui admet une généralisation convenable au cas non commutatif.

Dans le chapitre 3 nous rappelons les définitions de l'entropie $H(N_1, \dots, N_k)$ d'une famille finie de sous-algèbres de dimension finie de M et de l'entropie relative $H(P|Q)$ de deux sous-algèbres de dimension finie de M . Nous énonçons les propriétés de ces deux notions données dans [C-S] et démontrons quelques propriétés supplémentaires; en particulier que l'application $d(N, P) = H(N|P) + H(P|N)$ définit une métrique sur l'ensemble des sous-algèbres de dimension finie de M .

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de l'entropie $H(\theta)$ d'un automorphisme θ de M .

Dans le premier paragraphe, nous rappelons la définition de $H(\theta)$, ses propriétés essentielles et démontrons un "théorème de Kolmogorov-Sinai", qui permet parfois de calculer l'entropie d'un automorphisme d'une algèbre hyperfinie. En particulier nous étudions les "décalages de Bernoulli" du facteur hyperfini de type II₁. Tous ces résultats sont dans [C-S]. Nous remarquons de plus que ces décalages sont fortement mélangeurs.

Dans le paragraphe 4.2 on considère un espace borélien standard X muni d'une mesure de probabilité diffuse μ et un automorphisme T de X conservant μ , dont on note $h(T)$ l'entropie au sens classique. Considérons le produit croisé M de $A = L^\infty(X, \mu)$ par T , la trace sur M associée à μ et l'automorphisme $\text{Ad } U$ induit par T . On a banalement $H(\text{Ad } U) \geq h(T)$, d'où en particulier $H(\text{Ad } U) = \infty$ si $h(T) = \infty$.

(remarque 4.2.10).

Dans l'état actuel de la théorie initiée par Connes et Størmer, le problème le plus insolent est

$$\text{a-t-on } H(\text{Ad } U) = h(T) ?$$

Nous avons obtenu une réponse partielle.

Théorème 4.2.8. Si T est à spectre discret, alors $H(\text{Ad } U) = 0$ et par suite $H(\text{Ad } U) = h(T)$.

Ce problème admet la variation suivante. Soient G un groupe dénombrable d'automorphismes de (X, μ) et $R(A, G)$ le produit de Krieger de A par G . (Rappelons que $R(A, G)$ coïncide avec le produit croisé usuel lorsque l'action de G est libre et que c'est toujours un facteur lorsque l'action est ergodique; nous rappelons la construction de $R(A, G)$ au début du paragraphe 4.2). Supposons que T normalise G . Alors on vérifie que T se prolonge en un automorphisme θ de $R(A, G)$ en général non intérieur, avec $H(\theta) \geq h(T)$. De nouveau

$$\text{a-t-on } H(\theta) = h(T) ?$$

Nous nous sommes intéressés au cas où G est localement fini (de sorte que $R(A, G)$ est hyperfinie) et nous montrons dans certains cas que $H(\theta) = h(T)$ (théorème 4.2.1).

Nous montrons que les décalages de Bernoulli peuvent être obtenus par cette construction (4.2.2), d'où une nouvelle manière de calculer leur entropie.

Au paragraphe 4.3 nous démontrons que si $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut } R$ est un homomorphisme continu pour la topologie de la convergence simple uniforme dans le prédual de R , alors $H(\alpha_t) = |t| H(\alpha_1)$. Ce résultat est une généralisation

d'un théorème dû à Abramov en théorie ergodique classique.

Au paragraphe 4.4 nous démontrons que l'application $H: \text{Aut } R \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas continue pour la topologie normique (et à fortiori pour toute topologie convenable) sur $\text{Aut } R$. Dans le même ordre d'idée si R est encore le facteur hyperfini de type II_1 et si $\text{Aut } R$ est muni de la topologie de la convergence simple uniforme dans le prédual de R , on a

Proposition 4.4.3. L'ensemble des automorphismes de R d'entropie nulle est un G_δ dense (bien que $H: \text{Aut } R \rightarrow [0, \infty]$ soit surjective).

A titre d'exemple, nous donnons au paragraphe 4.5 une famille non dénombrable d'automorphismes de R non conjugués deux à deux qui sont d'entropie nulle (ces automorphismes sont en plus apériodiques, donc conjugués dans le quotient $\text{Out } R$ de $\text{Aut } R$ par les automorphismes intérieurs).

Si la théorie a peu progressé depuis l'article original (1975) c'est peut-être par manque d'exemples calculables. L'objet du paragraphe 4.6 est d'étudier, en nous inspirant de [Ac1, Ac2], ce que nous appelons les décalages de Markov, généralisation du cas bernoullien rappelé au paragraphe 4.1. On considère pour ceci un vecteur de probabilité $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $\lambda_j > 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$, et une matrice stochastique $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ avec $p_{ij} \geq 0$, $p_{i1} + \dots + p_{im} = 1$ et $\sum_j \lambda_j p_{j,i} = \lambda_i$ pour $i = 1, \dots, m$. On associe à ces données une algèbre hyperfinie N munie d'une trace τ et un automorphisme θ de N .

Théorème 4.6.9. Avec les mêmes notations on a

$$H(\theta) = - \sum_{i,j} \lambda_{ij} p_{ij} \log p_{ij}.$$

On peut penser que $N = R$ lorsque les p_{ij} sont strictement positifs.

Je remercie très chaleureusement Monsieur R. Bader pour ses conseils et son soutien lors de l'élaboration de ce travail.

Ma gratitude s'adresse également aux autres membres du jury: Messieurs P.L. Aubert, P. de la Harpe et E. Størmer, ainsi qu'à T. Giordano, S. Griener, V.F.R. Jones et C. Serres pour de fructueuses conversations.

Je tient aussi à remercier Monsieur J. Ratcliff, analyste système au Centre de Calcul de l'Université de Neuchâtel qui a écrit le programme me permettant de rédiger ce travail sous cette forme.

Enfin ma reconnaissance s'adresse à Monsieur S.D. Chatterji pour son accueil à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne et au Fond National de la Recherche Scientifique. Leurs soutiens financiers m'ont permis de terminer ce travail.

2. PRELIMINAIRES.

2.1. Rappels sur l'entropie de Kolmogorov.

Soit A une algèbre de von Neumann abélienne, munie d'une trace τ normale fidèle finie normalisée. Nous noterons η la fonction continue sur $[0, \infty[$ définie par $\eta(t) = -t \log t$. Soient P et Q deux sous-algèbres de dimension finie de A , de projecteurs minimaux $\langle p_i \rangle$ et $\langle q_j \rangle$ respectivement.

Définition 2.1.1. L'entropie de la sous-algèbre P est

$$h(P) = \sum_i \eta(\tau(p_i)) = -\sum_i \tau(p_i) \log \tau(p_i).$$

Définition 2.1.2. L'entropie relative de P relativement à Q est:

$$\begin{aligned} h(P|Q) &= \sum_j \tau(q_j) \sum_i \eta(\tau(p_i q_j) / \tau(q_j)) \\ &= - \sum_j \tau(q_j) \sum_i \tau(p_i q_j) / \tau(q_j) \log(\tau(p_i q_j) / \tau(q_j)). \end{aligned}$$

Soit x un opérateur positif sur un espace de Hilbert et soit $x = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ sa décomposition spectrale; on définit $\eta(x) = \int_0^\infty \eta(\lambda) de_\lambda$.

Remarquons que l'unique espérance conditionnelle normale fidèle $E_Q: A \rightarrow Q$ qui conserve la trace τ est donnée par

$$E_Q(a) = \sum_j q_j \tau(a q_j) / \tau(q_j).$$

Ainsi nous avons

$$h(P|Q) = \sum_i \tau_i E_0(p_i).$$

Nous noterons $P \vee Q$ la sous-algèbre de A engendrée par P et Q .

Théorème 2.1.3. Soient N , P et Q des sous-algèbres de dimension finie de A . Nous avons les propriétés:

- a) $0 \leq h(P) \leq \log n$ si P est de dimension n
- b) si $P \subset Q$ alors $h(P) \leq h(Q)$
- c) $h(P \vee Q) = h(P) + h(Q|P)$
- d) $h(P|Q)$ est croissante en P et décroissante en Q
- e) $h(P|Q) \leq h(P|N) + h(N|Q)$.

Preuve. Voir par exemple [Wal, théorème 4.3 p. 77].

Notation 2.1.4. Soient P et Q deux sous-algèbres de von Neumann de A . Pour $\delta > 0$ on notera $P \overset{\delta}{\subset} Q$ si pour tout $x \in P$, $\|x\| \leq 1$, il existe $y \in Q$, $\|y\| \leq 1$ tel que $\|x - y\|_2 \leq \delta$ où $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$.

La proposition suivante exprime la continuité de l'entropie relative pour la topologie forte sur A . Sa preuve est similaire à celle du théorème 4.18 de [Smor] ou du lemme 8.2 de [Shi].

Proposition 2.1.5. Soit k un entier positif; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(k, \varepsilon) > 0$ tel que si P et Q sont des sous-algèbres de dimension finie de A , vérifiant $\dim P = k$

et $P \subset Q$; alors $h(P|Q) < \varepsilon$.

Soit T un automorphisme de A conservant la trace τ et soit P une sous-algèbre de dimension finie de A . On notera $T^n P$ la transformée de P par T^n . Grâce aux propriétés c) et d) du théorème 2.1.3, il est facile de voir que la suite $(n^{-1} h(P \vee TP \vee \dots \vee T^n P))$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini, que l'on notera $h(P, T)$:

$$h(P, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} h(P \vee TP \vee \dots \vee T^n P).$$

Définition 2.1.6. L'entropie de T est définie par

$$h(T) = \sup_P h(P, T) \in [0, \infty]$$

le supremum étant pris sur les sous-algèbres de dimension finie P de A .

Remarquons que si S et T sont deux automorphismes conjugués de A , alors $h(S) = h(T)$.

Le théorème suivant dû à Kolmogorov et Sinai donne un moyen de calculer l'entropie d'un automorphisme. La démonstration de ce théorème est une conséquence facile de la proposition 2.1.5.

Théorème 2.1.7. Soit (P_n) une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de A telle que la réunion des P_n soit faiblement dense dans A . Alors

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(P_n, T).$$

2.2. Le théorème de concavité de Lieb et ses conséquences.

Soit M une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace τ normale fidèle finie normalisée.

Théorème 2.2.1. [Lieb] Soit $k \in M$ fixé; pour tout $\lambda \in [0, 1]$, l'application

$$f: M_+ \times M_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(a, b) = \tau(k^* a^\lambda k b^{1-\lambda})$$

est concave.

La preuve qui suit est due à B. Simon [Sim]; nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.2.2. Pour $i = 1, 2$, soient r_i, s_i et t_i des opérateurs continus positifs sur un espace de Hilbert K tels que

$$r_1 r_2 = r_2 r_1, s_1 s_2 = s_2 s_1, t_1 t_2 = t_2 t_1$$

et $r_i \geq s_i + t_i$ pour $i = 1, 2$.

Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$r_1^\lambda r_2^{1-\lambda} \geq s_1^\lambda s_2^{1-\lambda} + t_1^\lambda t_2^{1-\lambda}.$$

Preuve. a) On peut supposer que r_1 et r_2 sont inversibles, car par le calcul fonctionnel borélien, pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $r \in M_+$, $(\varepsilon + r)^\lambda$ converge fortement vers r^λ lorsque ε tend vers zéro ($\varepsilon > 0$) [S-Z, théorème 2.20].

b) Supposons que pour $\lambda, \mu \in [0, 1]$

$$r_1^\lambda r_2^{1-\lambda} \geq s_1^\lambda s_2^{1-\lambda} + t_1^\lambda t_2^{1-\lambda} \text{ et } r_1^\mu r_2^{1-\mu} \geq s_1^\mu s_2^{1-\mu} + t_1^\mu t_2^{1-\mu}$$

et montrons que

$$r_1^{(\lambda+\mu)/2} r_2^{1-(\lambda+\mu)/2} \geq s_1^{(\lambda+\mu)/2} s_2^{1-(\lambda+\mu)/2} + t_1^{(\lambda+\mu)/2} t_2^{1-(\lambda+\mu)/2} = q$$

Soient ξ et $\eta \in K$; nous avons:

$$\begin{aligned} |(q\xi | \eta)| &= |(\langle s_1^{(\lambda+\mu)/2} s_2^{1-(\lambda+\mu)/2} + t_1^{(\lambda+\mu)/2} t_2^{1-(\lambda+\mu)/2} \rangle \xi | \eta)| = \\ &= |(\langle (s_1^\lambda s_2^{1-\lambda})^{1/2} (s_1^\mu s_2^{1-\mu})^{1/2} + (t_1^\lambda t_2^{1-\lambda})^{1/2} (t_1^\mu t_2^{1-\mu})^{1/2} \rangle \xi | \eta)| \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Cauchy - Schwarz

$$\begin{aligned} |(q\xi | \eta)| &\leq \| (s_1^\lambda s_2^{1-\lambda})^{1/2} \xi \| \| (s_1^\mu s_2^{1-\mu})^{1/2} \eta \| + \\ &\quad \| (t_1^\lambda t_2^{1-\lambda})^{1/2} \xi \| \| (t_1^\mu t_2^{1-\mu})^{1/2} \eta \| \leq \\ &\quad \langle (s_1^\lambda s_2^{1-\lambda} + t_1^\lambda t_2^{1-\lambda}) \xi | \xi \rangle^{1/2} \langle (s_1^\mu s_2^{1-\mu} + t_1^\mu t_2^{1-\mu}) \eta | \eta \rangle^{1/2} \end{aligned}$$

Car pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \leq (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^{1/2} (\alpha_2^2 + \beta_2^2)^{1/2}.$$

Posons $\xi = r_1^{-\lambda/2} r_2^{-(1-\lambda)/2} \varphi$ et $\eta = r_1^{-\mu/2} r_2^{-(1-\mu)/2} \varphi$, $\varphi \in K$;
alors

$$\begin{aligned} |(q\xi | \eta)| &\leq (r_1^{-\lambda/2} r_2^{-(1-\lambda)/2} (s_1^\lambda s_2^{1-\lambda} + t_1^\lambda t_2^{1-\lambda}) r_1^{-\lambda/2} r_2^{-(1-\lambda)/2} \varphi | \varphi)^{1/2} \cdot \\ &\quad (r_1^{-\mu/2} r_2^{-(1-\mu)/2} (s_1^\mu s_2^{1-\mu} + t_1^\mu t_2^{1-\mu}) r_1^{-\mu/2} r_2^{-(1-\mu)/2} \varphi | \varphi)^{1/2} \leq \\ &\quad \|\varphi\|^2 \text{ par hypothèse;} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|(r_1^{-\mu/2} r_2^{-(1-\mu)/2} q r_1^{-\lambda/2} r_2^{-(1-\lambda)/2} \varphi | \varphi)| \leq \|\varphi\|^2,$$

donc

$$\| (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/2} q (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/2} \| \leq 1.$$

ainsi si ρ désigne le rayon spectral d'un opérateur,

$$\begin{aligned} & \| (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/4} (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/4} q (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/4} (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/4} \| = \\ & \rho \langle (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/4} (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/4} q (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/4} (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/4} \rangle = \\ & \rho \langle (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/2} q (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/2} \rangle \text{ car } \rho(ab) = \rho(ba) . \\ & \leq \| (r_1^\mu r_2^{1-\mu})^{-1/2} q (r_1^\lambda r_2^{1-\lambda})^{-1/2} \| \leq 1. \end{aligned}$$

D'où

$$r_1^{(\lambda+\mu)/2} r_2^{1-(\lambda+\mu)/2} \geq s_1^{(\lambda+\mu)/2} s_2^{1-(\lambda+\mu)/2} + t_1^{(\lambda+\mu)/2} t_2^{1-(\lambda+\mu)/2}$$

c) Du résultat démontré en b) on déduit par induction que

$$r_1^\lambda r_2^{1-\lambda} \geq s_1^\lambda s_2^{1-\lambda} + t_1^\lambda t_2^{1-\lambda}$$

pour tout λ rationnel diadique dans l'intervalle $[0, 1]$.

Comme l'application

$$\alpha \in [0, 1] \rightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}$$

est fortement continue si $a, b \in M_+$ et $ab = ba$ [S-Z, corollaire 9.15], on en déduit le lemme.

q.e.d

Démonstration du théorème 2.2.1.

On peut supposer que $M \subset B(L^2(M, \tau))$; soit ξ l'image canonique de $1 \in M$ dans $L^2(M, \tau)$ et soient $a_0, a_1, b_0, b_1 \in M_+$ et $\theta \in [0, 1]$. Posons

$$a = \theta a_0 + (1 - \theta) a_1 \text{ et } b = \theta b_0 + (1 - \theta) b_1.$$

Considérons les opérateurs linéaires continus s_1, s_2, t_1, t_2, r_1 et r_2 dans $L^2(M, \tau)$ définis par

$$s_1(x\xi) = \theta a_0 x \xi, \quad s_2(x\xi) = \theta x b_0 \xi$$

$$t_1(x\xi) = (1-\theta) a_1 x \xi, \quad t_2(x\xi) = (1-\theta) x b_1 \xi$$

$$r_1(x\xi) = a x \xi, \quad r_2(x\xi) = x b \xi$$

pour tout $x \in M$.

Comme $(s_2(x\xi) | x\xi) = \theta (x b_0 \xi | x\xi) = \theta \tau(x^* b_0 x) \geq 0$, on a $s_2 \geq 0$ et on voit de même que s_1, t_1, t_2, r_1, r_2 sont des opérateurs positifs. Nous avons

$$s_1 s_2(x\xi) = \theta^2 a_0 x b_0 \xi = s_2 s_1(x\xi)$$

donc $s_1 s_2 = s_2 s_1$ et de même $t_1 t_2 = t_2 t_1$ et $r_1 r_2 = r_2 r_1$.

D'autre part il est clair que

$$r_i = s_i + t_i, \quad i = 1, 2.$$

Ainsi par le lemme 2.2.2 nous obtenons

$$(r_1^\lambda r_2^{1-\lambda}(k\xi) | k\xi) \geq (s_1^\lambda s_2^{1-\lambda}(k\xi) | k\xi) + (t_1^\lambda t_2^{1-\lambda}(k\xi) | k\xi)$$

pour tout $k \in M$; c'est-à-dire

$$\tau(k^* a^\lambda k b^{1-\lambda}) \geq \theta \tau(k^* a_0^\lambda k b_0^{1-\lambda}) + (1 - \theta) \tau(k^* a_1^\lambda k b_1^{1-\lambda}).$$

q.e.d.

Soient x et $y \in M_+$ et soit $\lambda > 0$ tel que $x \leq \lambda y$. Alors

$$x^{1/2} \log x \, x^{1/2} \text{ et } x^{1/2} \log y \, x^{1/2}$$

sont des opérateurs hermitiens de M . En effet, par le calcul fonctionnel continu il est clair que $x^{1/2} \log x \, x^{1/2}$ est un élément hermitien de M . D'autre part par [Pe, 1.3.5 et 1.3.11], pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$x^{1/2} \log x \, x^{1/2} \leq x^{1/2} \log(x + \varepsilon) \, x^{1/2}$$

$$\leq x^{1/2} \log(\lambda y + \varepsilon) x^{1/2}$$

et pour $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ on obtient

$$\begin{aligned} x^{1/2} \log x x^{1/2} &\leq x^{1/2} \log(\lambda y + \varepsilon_1) x^{1/2} \\ &\leq x^{1/2} \log(\lambda y + \varepsilon_2) x^{1/2}, \end{aligned}$$

d'où l'existence de la limite forte $x^{1/2} \log(\lambda y) x^{1/2}$

et de $x^{1/2} \log y x^{1/2} = x^{1/2} \log(\lambda y) x^{1/2} - x \log \lambda$

Si τ est une trace sur M on écrit abusivement

$$\tau(x \log y) = \tau(x^{1/2} \log y x^{1/2})$$

Définition 2.2.3. Soient x et $y \in M_+$ et supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $x \leq \lambda y$. On appelle entropie relative de x relativement à y le nombre réel

$$S(x|y) = \tau(x(\log x - \log y)).$$

Corollaire 2.2.4. [Lin] L'application $(x, y) \mapsto S(x|y)$ est convexe.

Preuve. Par le théorème 2.2.1, l'application

$$(x, y) \mapsto \tau(x^{1-\lambda} y^\lambda)$$

est concave pour $\lambda \in [0, 1]$ et pour $\lambda = 0$ elle est linéaire. Donc

$$(x, y) \mapsto d/d\lambda|_{\lambda=0} \tau(x^{1-\lambda} y^\lambda)$$

est concave. Mais

$$d/d\lambda|_{\lambda=0} \tau(x^{1-\lambda} y^\lambda) = -\tau(x(\log x - \log y))$$

ce qui démontre le corollaire.

q.e.d.

Remarque 2.2.5. Nous avons $S(\lambda x \mid \lambda y) = \lambda S(x \mid y)$ pour tout $\lambda > 0$.

Soit A une algèbre de von Neumann abélienne munie d'une trace τ normale fidèle normalisée. Soit P une sous-algèbre de dimension finie de A , de projecteurs minimaux $\langle p_i \rangle$. Notons E_P l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de A sur P qui conserve la trace τ .

Lemme 2.2.6. Soit $a = \sum_i \lambda_i p_i \in P$ avec $\lambda_i \geq 0$ et soit Q une sous-algèbre de dimension finie de A ; alors

$$S(a \mid E_Q(a)) \leq \sum_i \lambda_i S(p_i \mid E_Q(p_i)).$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que $S(a \mid E_Q(a))$ est bien défini; c'est-à-dire qu'il existe $\kappa > 0$ vérifiant $\kappa E_Q(a) \geq a$. On a $E_Q(a) = \sum_j q_j \tau(aq_j) / \tau(q_j)$ où $\langle q_j \rangle$ est la liste des projecteurs minimaux de Q . Pour tout j il existe $\kappa_j > 0$ tel que $\kappa_j \tau(aq_j) \tau(q_j) q_j \geq aq_j$. Soit $\kappa = \max \kappa_j$, alors $\kappa E_Q(a) \geq \sum_j aq_j = a$.

Soit $\alpha = \sum_i \lambda_i$ et soit $b = \sum_i \mu_i p_i$ avec $\mu_i = \lambda_i / \alpha$, alors $\sum_i \mu_i = 1$. Donc

$$\begin{aligned} S(b \mid E_Q(b)) &= S(\sum_i \mu_i p_i \mid \sum_i \mu_i E_Q(p_i)) \\ &\leq \sum_i \mu_i S(p_i \mid E_Q(p_i)) \quad (\text{corollaire 2.2.4}) \\ &= 1/\alpha \sum_i \lambda_i S(p_i \mid E_Q(p_i)). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} S(b | E_0(b)) &= S(a/\alpha | 1/\alpha E_0(a)) \\ &= 1/\alpha S(a | E_0(a)) \quad (\text{remarque 2.2.5}) \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

q.e.d.

Soit S_1 l'ensemble des suites $x = (x_i)$, $x_i \in A_+$, $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices et satisfaisant $\sum_i x_i = 1$.

Théorème 2.2.7. Soient P et Q deux sous-algèbres de dimension finie de A . Nous avons

$$\begin{aligned} 1) \quad h(P) &= \sup_{x \in S_1} \sum_k \eta \tau(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) \\ 2) \quad h(P | Q) &= \sup_{x \in S_1} \sum_k \tau \eta E_Q(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) \end{aligned}$$

Preuve. 1) Soient (p_i) les projecteurs minimaux de P . Il est clair que

$$h(P) \leq \sup_{x \in S_1} \sum_k \eta \tau(x_k) - \tau \eta E_P(x_k)$$

car $(p_i) \in S_1$ et $\eta(p_i) = 0$.

Montrons que pour tout $x = (x_j) \in S_1$,

$$\sum_k \eta \tau(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) \leq \sum_i \eta \tau(p_i).$$

Comme $\tau(x_k) = \tau(E_P(x_k))$, nous pouvons supposer que $x_k \in P$;

c'est-à-dire $x_k = \sum_i \lambda_{ki} p_i$ avec $\sum_k \lambda_{ki} = 1$ pour tout i .

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_k \eta \tau(x_k) &= \sum_k \tau(\eta(\sum_i \lambda_{ki} \tau(p_i)) - \eta(\sum_i \lambda_{ki} p_i)) = \\ &= \sum_k \tau(\sum_i \lambda_{ki} p_i (\log \sum_i \lambda_{ki} p_i - \log \sum_i \lambda_{ki} \tau(p_i))). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.2.6 à $Q = \mathbb{C}$, nous obtenons

$$\sum_k \eta \tau(x_k) - \tau \eta(x_k) \leq \sum_k \sum_i \lambda_{ki} \tau(p_i (\log p_i - \log \tau(p_i))) = \\ \sum_i \sum_k \lambda_{ki} \eta \tau(p_i) - \sum_i \eta \tau(p_i).$$

2) Comme $h(P|Q) = \sum_i \tau \eta E_Q(p_i)$, nous avons

$$h(P|Q) \leq \sup_k \sum_k \tau \eta E_Q(x_k) - \tau \eta E_P(x_k).$$

Montrons que pour tout $x = (x_k) \in S_1$,

$$\sum_k \tau \eta E_Q(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) \leq h(P|Q).$$

Par la définition 2.1.2, nous avons $h(P|Q) = h(P \vee Q|Q)$; nous pouvons donc supposer que $P \subset Q$. Nous avons alors

$$\sum_k \tau \eta E_Q(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) = \\ \sum_k \tau (E_P(x_k) \log E_P(x_k) - E_Q(x_k) \log E_Q(x_k)) = \\ \sum_k \tau (E_P(x_k) \log E_P(x_k) - E_Q(E_P(x_k)) \log E_Q(E_P(x_k))) = \\ \sum_k \tau (y_k \log y_k - E_Q(y_k) \log E_Q(y_k)) = \sum_k S(y_k | E_Q(y_k))$$

où $y_k = E_P(x_k)$.

Nous avons $y_k \geq 0$ et $y_k \in P$, donc $y_k = \sum_i \lambda_{ki} p_i$ avec $\lambda_{ki} \geq 0$ et $\sum_k \lambda_{ki} = 1$, car $\sum_k y_k = 1$. Ainsi

$$\sum_k \tau \eta E_Q(x_k) - \tau \eta E_P(x_k) = \sum_k S(\sum_i \lambda_{ki} p_i | \sum_i \lambda_{ki} E_Q(p_i)) \leq \\ \sum_k \sum_i \lambda_{ki} S(p_i | E_Q(p_i)) = \sum_i \tau \eta E_Q(p_i)$$

à cause du lemme 2.2.6.

q.e.d.

3. Entropie dans une algèbre de von Neumann finie.

Soit M une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace normale fidèle finie τ telle que $\tau(1) = 1$. Pour tout entier n strictement positif, nous noterons S_n l'ensemble des familles $x = (x_{i_1, \dots, i_n})$, $i_1, \dots, i_n \in N$ d'éléments positifs de M , nuls sauf pour un nombre fini d'indices et vérifiant

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1, \dots, i_n} = 1.$$

Pour $x \in S_n$, $l \in \{1, \dots, n\}$ et $i_l \in N$, on pose

$$x_{i_l}^1 = \sum_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_n} x_{i_1, \dots, i_n}$$

D'autre part si P est une sous-algèbre de dimension finie de M , on notera E_P l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de M sur P qui conserve la trace τ . Nous noterons η la fonction continue sur $[0, \infty[$ définie par $\eta(t) = -t \log t$. Remarquons que η est une fonction concave d'un opérateur [N-U, théorème 2, p.153].

Définition 3.1. Si $P_1, \dots, P_n$ sont des sous-algèbres de dimension finie de M , l'entropie de la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est

$$H(P_1, \dots, P_n) = \sup_{x \in S_n} \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_n} \eta \tau(x_{i_1, \dots, i_n}) - \sum_1 \sum_{i_1} \tau \eta E_{P_1}(x_{i_1}^1) \right\}.$$

Définition 3.2. Si P et Q sont des sous-algèbres de dimension finie de M , l'entropie relative de P relativement à Q est

$$H(P|Q) = \sup_{x \in S_1} \left\{ \sum_i \tau_i \eta E_Q(x_i) - \sum_i \tau_i \eta E_P(x_i) \right\}.$$

Remarquons que $H(P_1, \dots, P_n)$ est symétrique et positive (on le voit en choisissant tous les $x_1, \dots, x_n$ nuls sauf l'un d'eux, égal à 1).

Proposition 3.3. [C-S] Soient $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, P, Q$ et N des sous-algèbres de dimension finie de M . Nous avons les propriétés

$$(A) \quad H(P_1, \dots, P_n) \leq H(Q_1, \dots, Q_n) \text{ si } P_i \leq Q_i, i=1, \dots, n$$

$$(B) \quad H(P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n) \leq H(P_1, \dots, P_k) + H(P_{k+1}, \dots, P_n)$$

$$(C) \quad \text{Si } P_1, \dots, P_k \leq P \text{ alors}$$

$$H(P_1, \dots, P_k, P_{k+1}, \dots, P_n) \leq H(P, P_{k+1}, \dots, P_n)$$

$$(D) \quad \text{Pour toute famille } (e_i)_{i \in I} \text{ de projecteurs minimaux de } P \text{ telle que } \sum_i e_i = 1, H(P) = \sum_i \eta \tau(e_i).$$

$$(E) \quad \text{Si } (P_1 \cup \dots \cup P_n)^* \text{ est engendrée par des sous-algèbres } Q_j \text{ de } P_j, \text{ commutant deux à deux, alors}$$

$$H(P_1, \dots, P_n) = H((P_1 \cup \dots \cup P_n)^*)$$

$$(F) \quad H(P_1, \dots, P_n) \leq H(Q_1, \dots, Q_n) + \sum_{i=1}^n H(P_i | Q_i)$$

$$(G) \quad H(N|Q) \leq H(N|P) + H(P|Q)$$

$$(H) \quad H(N|P) \text{ est croissante en } N \text{ et décroissante en } P$$

$$(I) \quad \text{Si } P \text{ et } Q \text{ commutent, alors}$$

$$H(P|Q) = H((P \cup Q)^* | Q) = H((P \cup Q)^*) - H(Q)$$

Lemme 3.4. (Inégalité de Jensen) Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann. E une application linéaire positive de M_1 dans M_2 telle que $E(1) = 1$. Nous avons

$$E(\eta(x)) \leq \eta(E(x))$$

pour tout $x \in M_1, 0 \leq x \leq 1$.

Preuve. [Gui1] La fonction η est enveloppe inférieure de fonctions affines, soit

$$\eta(t) = \inf_{i \in I} (a_i + b_i t).$$

On a

$$E(\eta(x)) \leq E(a_i + b_i x) = a_i + b_i E(x).$$

Nous obtenons alors le résultat en prenant la borne inférieure sur le membre de droite.

q.e.d.

La preuve de la proposition 3.3 se trouve dans [C-S]. Nous en donnons ci-dessous une esquisse.

Propriété A: Si $P_i \leq Q$, alors $\tau \eta E_{P_i}(x) = \tau \eta E_{P_i}(E_Q(x))$
 $\geq \tau \eta E_Q(x)$ par l'inégalité de Jensen et donc la propriété se déduit de la définition.

Propriété B: La démonstration de cette propriété consiste à se ramener au cas de la sous-additivité de l'entropie $h(P \vee Q) \leq h(P) + h(Q)$ dans le cas abélien.

Propriété C: En utilisant la propriété A on se ramène au cas où $P_1, \dots, P_k$ sont toutes égales à P . Pour simplifier les notations, posons $E_l = E_{P_l}$ pour $l = 1, \dots, n$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^k$. Si $x \in S_n$, on définit $y \in S_{n-k+1}$ par

$$y_{j_1, \dots, j_{n-k+1}} = x_{\varphi(j_1)_1, \dots, \varphi(j_1)_k, j_2, \dots, j_{n-k+1}}.$$

On veut alors démontrer que

$$(*) \quad \sum \eta \tau(x_{i_1}, \dots, i_n) - \sum_{l=1}^n \sum_{i_1} \tau \eta E_l(x_{i_1}^1) \leq \\ \sum \eta \tau(y_{j_1}, \dots, j_{n+k}) - \sum_{l=1}^{n+k+1} \sum_{i_1} \tau \eta E_{l+k-1}(y_{i_1}^1).$$

Pour $l \geq 2$, $y_{j_1}^1 = x_{j_1}^{k+1-l}$ donc ces termes disparaissent dans l'inégalité (*). D'autre part si on pose

$$x'_{\varphi(j)_1, \dots, \varphi(j)_k} = y_j^1 = \sum_{j_2, \dots, j_{n+k-1}} x_{\varphi(j)_1, \dots, \varphi(j)_k, j_2, \dots, j_n}$$

alors (*) est équivalente à

$$(**) \quad \sum_{l=1}^k \sum_{i_1} \tau \eta E_l(x_{i_1}^1) \geq \sum_j \tau \eta E_k(x'_{\varphi(j)_1, \dots, \varphi(j)_k}).$$

Mais comme $E_l = E_k$ pour $l = 1, \dots, k$ et

$$\sum_{\varphi(j)_1, \dots, \varphi(j)_k} E_k(x'_{\varphi(j)_1, \dots, \varphi(j)_k}) = E_k(x_{\varphi(j)_1}^1),$$

l'inégalité (**) se déduit de l'inégalité plus générale: si $z \in S_m$ alors

$$\sum \tau \eta(z_{i_1}, \dots, i_m) \leq \sum_{l=1}^m \sum_{i_1} \tau \eta(z_{i_1}^1).$$

Cette inégalité se démontre par induction sur m en utilisant le corollaire 2.2.4 et la remarque 2.2.5.

Propriété D: Supposons pour simplifier que P est un facteur de type I_n . Soit $x = (x_i) \in S_1$; en choisissant pour (x_i) une suite de projecteurs minimaux, de somme 1 dans P on voit que $H(P) \geq \log n$. Il faut donc démontrer que

$$\sum_i \eta \tau(x_i) - \tau \eta E_P(x_i) \leq \log n.$$

Comme $\tau E_P(x_i) = \tau(x_i)$, on peut supposer que $x_i \in P$.

D'autre part par le corollaire 2.2.4 on a si $a, b \in P$, $a \geq 0$, $b \geq 0$,

$$\eta \tau(a+b) - \tau \eta(a+b) \leq \eta \tau(a) - \tau \eta(a) + \eta \tau(b) - \tau \eta(b).$$

Ainsi en utilisant la décomposition spectrale de chaque x_i , on peut supposer que chaque x_i est un opérateur positif de rang 1 et dans ce cas on voit que $\sum_i \eta \tau(x_i) = \tau \eta(x_i) = \log n$.

Propriété E: L'inégalité $H(P_1, \dots, P_n) \leq H((P_1 \cup \dots \cup P_n)^*)$ découle de la propriété C. Pour l'inégalité réciproque, on est ramené à étudier les sous-algèbres abéliennes maximales des P_j .

Propriété F: Cette propriété est immédiate à partir des définitions.

Propriété G: Si $x \in S_1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_i \tau \eta E_Q(x_i) - \tau \eta E_N(x_i) &= \\ \sum_i \tau \eta E_Q(x_i) - \tau \eta E_P(x_i) + \tau \eta E_P(x_i) - \tau \eta E_N(x_i) &\leq \\ H(P|Q) + H(N|P). \end{aligned}$$

Propriété H: Se démontre comme A.

Propriété I: Pour démontrer cette propriété on se ramène au cas où Q est un facteur. Dans ce cas on peut supposer que $(P \cup Q)^* = P \otimes Q$ et les inégalités se déduisent du théorème de sous-additivité de Lieb-Ruskai [L-R, théorème 2ii)].

Remarque 3.5. On a

$$H(P_1, \dots, P_n) \leq H(P_1, \dots, P_n, P_{n+1});$$

cette propriété est une conséquence immédiate de la

définition 3.1.

Proposition 3.6. Soit N un sous-facteur de type I_n de M et soit $(e_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ un système d'unités matricielles de N . Si A est la sous-algèbre abélienne maximale de N engendrée par $(e_{ii})_{i=1,\dots,n}$ alors

$$1) \quad H(N|A) = H(N) = H(A) = \log n$$

2) Pour tout automorphisme σ de M ,

$$H(N|\sigma(A)) \geq H(N) - \log 4.$$

Preuve 1) Soit λ une racine primitive n -ième de l'unité; pour tout k , $1 \leq k \leq n$, soit x_k le projecteur

$$x_k = 1/n \sum_{j=1}^n \lambda^{k(i-j)} e_{ij}.$$

Nous avons $\tau(x_k) = 1/n$ pour tout k et $\sum_{k=1}^n x_k = 1$; de plus

$$E_A(x_k) = 1/n \sum_{j=1}^n e_{jj} = 1/n$$

pour tout k . Nous obtenons donc, en utilisant la propriété H :

$$\begin{aligned} H(N) &\geq H(N|A) \geq \sum_{k=1}^n \tau \eta E_A(x_k) - \tau \eta(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \tau \eta E_A(x_k) = n \eta(1/n) = \log n = H(N) \end{aligned}$$

ce qui démontre 1).

2) Soient $(x_k)_{k=1,\dots,n}$ comme ci-dessus et posons $x_k = 1/n + y_k$; alors $\tau(y_k) = 0$. Soit $\sigma \in \text{Aut } M$, comme E_A est positive fidèle et conserve la trace, nous avons

$$E_A(\sigma(x_k)) = E_A(1/n + \sigma(y_k))$$

$$= 1/n + \sum_{i=1}^n \mu_i e_{ii}$$

avec $\mu_i \in \mathbb{R}$, $|\mu_i| \leq 1/n$ et $\sum \mu_i = 0$.

Si $\mu_i = 0$ pour tout i , alors $E_A(\sigma(x_k)) = 1/n$, donc

$$\begin{aligned} \tau \eta E_A(\sigma(x_k)) &= \eta(1/n) = 1/n \log n \\ &> 1/n (\log n - \log 4). \end{aligned}$$

Comme $\tau \eta E_A(\sigma(x_k)) = 1/n \sum_{i=1}^n \eta(1/n + \mu_i)$, on peut supposer que $\mu_i > 0$ pour $1 \leq i \leq r$, $\mu_i < 0$ pour $r < i \leq r+s$ et $\mu_i = 0$ pour $r+s < i \leq n$.

Posons $p_i = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq r$, $q_i = -\mu_{r+i}$ pour $1 \leq i \leq s$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \tau \eta E_A(\sigma(x_k)) &= \\ &= 1/n \sum_{i=1}^r \eta(1/n + p_i) + 1/n \sum_{i=1}^s \eta(1/n - q_i) + (n-r-s)/n \eta(1/n) \\ &= 1/n \sum_{i=1}^r ((1 + np_i) \eta(1/n) + 1/n \eta(1 + np_i)) \\ &\quad + 1/n \sum_{i=1}^s ((1 - nq_i) \eta(1/n) + 1/n \eta(1 - nq_i)) \\ &\quad + (n-r-s)/n \eta(1/n) \\ &= \eta(1/n) + 1/n^2 \sum_{i=1}^r \eta(1 + np_i) + 1/n^2 \sum_{i=1}^s \eta(1 - nq_i). \end{aligned}$$

Mais $\eta(1-nq_i) \geq 0$ car $0 \leq 1-nq_i \leq 1$ et $\eta(1+np_i) \geq \eta(2)$ car $1 \leq 1+np_i \leq 2$. Donc

$$\begin{aligned} \tau \eta E_A(\sigma(x_k)) &\geq \eta(1/n) + r/n^2 \eta(2) \\ &\geq \eta(1/n) + 1/n \eta(2) \\ &= \eta(1/n) - 1/n \log 4. \end{aligned}$$

D'où $\sum_{k=1}^n \tau \eta E_A(\sigma(x_k)) \geq n \eta(1/n) - \log 4 = \log n - \log 4$.

Comme $E_{\sigma^{-1}(A)} = \sigma^{-1} E_A \sigma$, nous obtenons

$$\begin{aligned} H(N | \sigma^{-1}(A)) &\geq \sum_{k=1}^n \tau \eta E_{\sigma^{-1}(A)}(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \tau \eta E_A(\sigma(x_k)) \geq H(N) - \log 4. \end{aligned}$$

q.e.d.

La propriété 1) de la proposition ci-dessus est caractéristique de la non commutativité de M . En effet si P et Q sont deux sous-algèbres de dimension finie d'une algèbre de von Neumann abélienne, on a $h(P|Q) = h(P)$ si et seulement si P et Q sont indépendantes; c'est-à-dire si (p_i) (resp. (q_j)) est la liste des projecteurs minimaux de P (resp. Q) alors $\tau(p_i q_j) = \tau(p_i) \tau(q_j)$ pour tout i et tout j (voir [Sh1]).

Si R est le facteur hyperfini de type II, obtenu comme produit croisé d'un espace borélien standard (X, μ) par un automorphisme ergodique T , la théorie de Dye-Krieger permet de construire une suite croissante de sous-facteurs N_k de dimension finie de R dont la réunion soit faiblement dense dans R et telle que chaque N_k contient une sous-algèbre abélienne maximale A_k vérifiant $A_k \subset A_{k+1}$, $A_k \subset A = L^\infty(X, \mu) \subset R$ et $\cup A_k$ faiblement dense dans A . Il est alors tentant d'essayer de calculer l'entropie de l'automorphisme $\text{Ad } U$, où U est l'unitaire de R canoniquement associé à T , à l'aide de la suite (N_k) (pour la définition de l'entropie d'un automorphisme, voir le paragraphe 4.1 suivant). En fait la propriété 2) de la proposition 3.6 semble indiquer que cette méthode conduit à une impasse.

Dorénavant nous noterons F l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de M .

Lemme 3.7. a) Soient $P, Q \in F$; si $x \in P$ et $y \in Q$, vérifient il existe $\lambda > 0$ tel que $x \leq \lambda y$, $\tau(x) = \tau(y)$ et $S(x|y) = 0$, alors $x = y$.

b) Pour tout $Q \in F$ et tout $x \in M_+$, il existe $\lambda > 0$ tel que $x \leq \lambda E_Q(x)$.

Preuve. a) Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, la décomposition spectrale de x et $y = \sum_{j=1}^m y_j f_j$, la décomposition spectrale de y ; nous supposerons que

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \text{ et } 0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} x \log x &= \sum_i x_i \log x_i e_i = \sum_{i,j} x_i \log x_i e_i f_j \\ \text{et} \quad x \log y &= \sum_{i,j, y_j \neq 0} x_i \log y_j e_i f_j \\ \text{car } x &\leq \lambda y. \text{ Donc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x|y) &= \tau(x(\log x - \log y)) \\ &= \sum_{i,j, y_j \neq 0} (x_i \log x_i - x_i \log y_j) \tau(e_i f_j) \\ &= \sum (x_i \log x_i - x_i \log y_j - x_i + y_j) \tau(e_i f_j) \\ &= \sum y_j ((x_i/y_j) \log (x_i/y_j) - x_i/y_j + 1) \tau(e_i f_j) \end{aligned}$$

car $\tau(x) = \tau(y)$; d'autre part $t - 1 \leq t \log t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, avec égalité si et seulement si $t = 1$. Ainsi si $S(x|y) = 0$ on obtient $x_i = y_j$ ou $\tau(e_i f_j) = 0$. Mais $\tau(e_i f_j) = 0$ implique $e_i f_j e_i = 0$, donc $e_i f_j = 0$. Enfin on a

$$x - y = \sum_{i,j} e_i (x - y) f_j = \sum_{i,j} (x_i - y_j) e_i f_j$$

donc $x = y$.

b) Soit $E_Q(x) = \sum_i \alpha_i e_i$, la décomposition spectrale de $E_Q(x)$, où (e_i) est une famille finie de projecteurs de Q . Soit A la sous-algèbre abélienne de Q engendrée par la famille (e_i) . On a $E_Q(x) = E_A(x)$ car $E_Q(x) e_j = \alpha_j e_j = E_Q(x e_j)$ et $\tau(E_Q(x) e_j) = \alpha_j \tau(e_j) = \tau(x e_j)$. on peut donc supposer que $Q = A$ est abélienne et on a

$$E_{\theta}(x) = \sum_i \alpha_i e_i = \sum_i \tau(xe_i) / \tau(e_i) e_i.$$

Pour tout i vérifiant $e_i x e_i \neq 0$, soit $\lambda_i = \|x\| / \alpha_i$; alors $\lambda_i \alpha_i e_i \geq e_i x e_i$ et si $\lambda' = \max(\lambda_i)$

$$\lambda' E_{\theta}(x) \geq \sum_i e_i x e_i = E_{\theta \cap H}(x).$$

Soit G le groupe des unitaires involutifs de Q ; on a aussi

$$E_{\theta \cap H}(x) = |G|^{-1} \sum_{u \in G} u x u$$

$$\text{donc } |G| E_{\theta \cap H}(x) = \sum_{u \in G} u x u \geq x.$$

Ainsi en posant $\lambda = \lambda' |G|$ on obtient $\lambda E_{\theta}(x) \geq x$.

q.e.d.

Lemme 3.8. Soient P et Q des éléments de F . Alors $H(P|Q) = 0$ si et seulement si $P \leq Q$.

Preuve. La suffisance est une conséquence de la propriété H. Supposons que $H(P|Q) = 0$ et soit $(x_i) \in S_1$ vérifiant $x_i \in P$ pour tout i . Par l'inégalité de Jensen nous avons

$$\tau \eta E_{\theta}(x_i) \geq \tau \eta(x_i)$$

pour tout i . Par hypothèse $H(P|Q) = 0$; nous obtenons donc

$$\sum_i \tau \eta E_{\theta}(x_i) - \tau \eta(x_i) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \tau \eta E_{\theta}(x_i) - \tau \eta(x_i) = 0$$

pour tout i ; c'est-à-dire

$$\tau(x_i \log x_i - x_i \log E_{\theta}(x_i)) = 0$$

pour tout i . Ainsi par le lemme 3.7 on a $x_i = E_{\theta}(x_i)$, donc $x_i \in Q$ pour tout i , d'où $P \leq Q$.

q.e.d.

Proposition 3.9. L'application $d: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$, $d(P, Q) = H(P|Q) + H(Q|P)$ est une distance sur F .

Preuve. Il est clair que d est positive et symétrique; l'inégalité triangulaire est une conséquence de la propriété G de la proposition 3.3 et par le lemme 3.8, si $d(P, Q) = 0$ alors $P = Q$.

q.e.d.

Le théorème suivant est le résultat le plus important démontré par Connes et Størmer; il donne la continuité de l'entropie relative pour la topologie forte. La preuve de ce théorème est longue et difficile; nous en donnons ci-dessous une esquisse.

Soient P et Q des sous-algèbres de von Neumann de M ; on écrit $P \overset{\delta}{\subset} Q$ pour $\delta > 0$, si pour tout $x \in P$, $\|x\| \leq 1$ il existe $y \in Q$, $\|y\| \leq 1$ vérifiant $\|x - y\|_2 < \delta$, où $\|x\|_p = \tau((x^*x)^{p/2})^{1/p}$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Théorème 3.10. [C-S] Pour tout entier n et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(n, \varepsilon) > 0$ tel que pour tous $P, Q \in F$ vérifiant $\dim P = n$ et $P \overset{\delta}{\subset} Q$ on ait $H(P|Q) < \varepsilon$.

Esquisse de la preuve. L'idée de la démonstration est d'essayer de trouver un unitaire $u \in M$ tel que $uPu^* \subset Q$ et $\|u - 1\|$ petit. En fait ce résultat ne peut être obtenu qu'approximativement.

Soient $P \in F$, $f \in P' \cap M$ et notons

$$P^f = \{xf + \lambda(1-f) \mid x \in P, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Le lemme clé pour la démonstration est le suivant:

Lemme 3.11. [C-S] Soient n un entier positif et $\varepsilon > 0$: il existe $\delta = \delta(n, \varepsilon) > 0$ tel que pour tous $P, Q \in \mathcal{F}$ vérifiant $\dim P = n$ et $P \subset Q$ il existe un unitaire $u \in M$ avec $\|u - 1\| < \varepsilon$, un projecteur $e \in P' \cap M$ tel que $\tau(e) \geq 1 - \varepsilon$ et une sous-algèbre $\tilde{P}$ de Q vérifiant $\dim \tilde{P} \leq n+1$ telle que

$$ueu^* \in \tilde{P}' \text{ et } uP^e u^* = \tilde{P}^{ueu^*}$$

Ce lemme étant admis, la démonstration devient facile; en effet par la propriété 6 on a

$$\begin{aligned} H(P \mid Q) &\leq H(P \mid P^e) + H(P^e \mid uP^e u^*) + H(\tilde{P}^{ueu^*} \mid \tilde{P}) + H(\tilde{P} \mid Q) \\ &= H(P \mid P^e) + H(P^e \mid uP^e u^*) + H(\tilde{P}^{ueu^*} \mid \tilde{P}) \end{aligned}$$

car $\tilde{P} \subset Q$. Il reste donc à démontrer que $H(P \mid P^e)$ et $H(P^e \mid P)$ sont petits si e est proche de 1 et que $H(P \mid uP^e u^*)$ est petit si $\|u - 1\|$ est petit.

Soit A l'algèbre de von Neumann engendrée par e et N l'algèbre de von Neumann engendrée par P et A . Comme $A \subset P'$ nous avons par la propriété I

$$H(P \mid P^e) \leq H(N \mid P^e) \leq H(A) = \eta \tau(e) + \eta \tau(1 - e)$$

et on démontre de manière similaire que

$$H(P^e \mid P) \leq \eta \tau(e) + \eta \tau(1 - e) + \tau(1 - e) \log n$$

si $\dim P \leq n$.

Pour voir que $H(P \mid uP^e u^*)$ est petit si $\|u - 1\|$ est petit

nous supposerons pour simplifier les notations que P est un facteur de type I_n . Soit x un élément positif de M , de trace 1. On a $\tau \eta_{E_P U^*} (x) = \tau \eta_{E_P} (U^* x U)$ car, pour tout automorphisme σ de M , $E_{\sigma(P)} = \sigma E_P \sigma^{-1}$. Donc

$$\tau \eta_{E_P U^*} (x) - \tau \eta_{E_P} (x) = \tau \eta_{E_P} (U^* x U) - \tau \eta_{E_P} (x).$$

Soient $x_1 = E_P(x)$, $x_2 = E_P(U^* x U)$ et soient $x_1 = \sum_i \lambda_i e_i$, $x_2 = \sum_i \mu_i f_i$ leur décomposition spectrale avec

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ et } \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n.$$

Nous avons $\tau(x_1) = \tau(x_2)$ et

$$\|x_1 - x_2\|_1 \leq \|x - U^* x U\|_1 \leq \|1 - U\|.$$

En outre, par [Po, théorème 5.6], on a

$$1/n \sum_i |\lambda_i - \mu_i| \leq \|x_1 - x_2\|_1.$$

D'autre part nous avons

$$|\tau \eta(x_2) - \tau \eta(x_1)| = 1/n \left| \sum_i \eta(\mu_i) - \eta(\lambda_i) \right|.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|1 - U\|$ est suffisamment petit, alors

$$|\tau \eta_{E_P U^*} (x) - \tau \eta_{E_P} (x)| < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré que pour tout $x \in M$, $x \geq 0$

$$|\tau \eta_{P_{U^* P U^*}} (x) - \tau \eta_{E_P} (x)| < \varepsilon \tau(x)$$

si $\|1 - U\|$ est suffisamment petit; d'où le résultat.

4. Entropie d'un automorphisme.

Nous gardons les notations du chapitre 3; de plus nous noterons $\text{Aut } M$ le groupe des automorphismes de M .

4.1. Définitions et premières propriétés.

Soit θ un automorphisme de M conservant la trace τ sur M .

Définition 4.1.1. [C-S] Pour tout $P \in F$ on pose

$$a) \quad H(P, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H(P, \theta(P), \dots, \theta^n(P))$$

et

$$b) \quad H(\theta) = \sup_{P \in F} H(P, \theta).$$

On appelle entropie de θ la quantité $H(\theta) \in [0, \infty]$.

Remarquons que la limite a) existe. En effet, posons $a_n = H(P, \theta(P), \dots, \theta^n(P))$; par la propriété B on a $a_{n+p} \leq a_n + a_p$. Soit q un entier; pour tout entier n posons $n = kq + r$ avec $0 \leq r < q$. Alors

$$a_n/n = a_{kq+r}/(kq+r) \leq a_{kq}/(kq) + a_r/(kr) \leq a_q/q + a_1/k,$$

donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n/n \leq a_q/q$; d'où $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n/n \leq \inf_q a_q/q$.

Ainsi $H(P, \theta) = \inf_q a_q/q = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n$.

Remarque 4.1.2. 1) Comme conséquence immédiate de la définition nous avons les propriétés suivantes.

a) L'entropie est un invariant de conjugaison; c'est-à-dire si $\theta_1, \theta_2 \in \text{Aut } M$ sont tels qu'il existe $\sigma \in \text{Aut } M$ avec $\theta_2 = \sigma \theta_1 \sigma^{-1}$, alors $H(\theta_1) = H(\theta_2)$.

b) Si M est abélienne, on retrouve l'entropie classique à cause de la propriété E .

c) Si θ est périodique, alors $H(\theta) = 0$.

ii) Si σ est un antiautomorphisme de M , on peut évidemment définir $H(\sigma)$ comme pour les automorphismes. Les propriétés de $H(\sigma)$ sont les mêmes que celles de l'entropie d'un automorphisme.

Comme dans le cas classique, un des seuls moyens pour calculer l'entropie d'un automorphisme est le théorème du type de Kolmogorov-Sinai:

Théorème 4.1.3. [C-S] Si M est une algèbre hyperfinie, engendrée par une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie P_k , alors

$$H(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} H(P_k, \theta).$$

Preuve. Soient $P \in F$ et $\varepsilon > 0$ donnés; par le théorème 3.10, il existe k tel que $H(P | P_k) < \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} H(P, \theta(P), \dots, \theta^n(P)) &\leq \\ H(P_k, \theta(P_k), \dots, \theta^n(P_k)) &+ \sum_{i=0}^n H(\theta^i(P) | \theta^i(P_k)) = \\ H(P_k, \dots, \theta^n(P_k)) &+ (n+1)H(P | P_k) \leq \\ H(P_k, \theta(P_k), \dots, \theta^n(P_k)) &+ (n+1)\varepsilon \end{aligned}$$

donc

$$H(P, \theta) \leq H(P_k, \theta) + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, nous obtenons la conclusion.

q.e.d.

Proposition 4.1.4. [C-S] Soit $\theta \in \text{Aut } M$ conservant la trace τ . Pour tout entier p nous avons $H(\theta^p) \leq |p| H(\theta)$; de plus si M est hyperfinie alors $H(\theta^p) = |p| H(\theta)$.

Preuve. Comme $H(\theta) = H(\theta^{-1})$, nous pouvons supposer $p > 0$.

Soit $N \in F$; par la remarque 3.5 nous avons

$$\begin{aligned} n^{-1} H(N, \theta^p(N), \dots, \theta^{np}(N)) &\leq n^{-1} H(N, \theta(N), \dots, \theta^{np}(N)) \\ &= p(np)^{-1} H(N, \theta(N), \dots, \theta^{np}(N)) \end{aligned}$$

donc

$$H(N, \theta^p) \leq p H(N, \theta)$$

ce qui démontre la première assertion.

Supposons maintenant qu'il existe une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie N_k de M dont la réunion soit faiblement dense dans M . Soient N_k et ε fixés et posons $m = \dim N_k$. Par le théorème 3.10 il existe $\delta > 0$ tel que si $P, Q \in F$ vérifient $\dim P = m$ et $P \overset{\delta}{\subset} Q$ alors $H(P|Q) < \varepsilon$.

D'autre part comme la réunion des N_j est faiblement dense dans M , il existe $q \geq k$ tel que $\theta^j(N_k) \overset{\delta}{\subset} N_q$, $j = 0, \dots, p-1$. Par la propriété C et la remarque 3.5 nous avons

$$\begin{aligned} H(N_q, \theta^p(N_q), \dots, \theta^{rp}(N_q)) &= \\ H(N_q, \dots, N_q, \theta^p(N_q), \dots, \theta^p(N_q), \dots, \theta^{r(p-1)}(N_q), \dots, \theta^{r(p-1)}(N_q), \theta^{rp}(N_q)) \end{aligned}$$

où chaque répétition apparaît p fois. Donc par la propriété F nous obtenons

$$r^{-1} H(N_q, \theta^p(N_q), \dots, \theta^{rp}(N_q)) \geq$$

$$\begin{aligned}
& r^{-1} H(N_k, \theta(N_k), \dots, \theta^{rp}(N_k)) - r^{-1} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^{sp+t}(N_k) | \theta^{sp}(N_k)) \\
& = r^{-1} H(N_k, \theta(N_k), \dots, \theta^{rp}(N_k)) - \sum_{t=0}^{p-1} H(\theta^t(N_k) | N_k) \\
& \geq p(rp)^{-1} H(N_k, \theta(N_k), \dots, \theta^{rp}(N_k)) - p\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $H(N_q, \theta^p) \geq pH(N_k, \theta) - \varepsilon$, ce qui démontre la deuxième assertion.

Définition 4.1.5. Le groupe des automorphismes d'une algèbre de von Neumann peut être muni de diverses topologies:

i) La topologie de la convergence simple forte, définie par $\theta_1 \rightarrow \theta$ si $\theta_1(x)$ converge fortement vers $\theta(x)$ pour tout $x \in M$.

ii) La topologie de la convergence simple ponctuelle dans M_* ou p -topologie, définie par $\theta_1 \rightarrow \theta$ si $\varphi(\theta_1(x))$ converge vers $\varphi(\theta(x))$ pour tout $x \in M$ et tout $\varphi \in M_*$.

iii) La topologie de la convergence simple uniforme dans M_* , ou u -topologie, définie par $\theta_1 \rightarrow \theta$ si $\|\varphi \circ \theta_1 - \varphi \circ \theta\|$ converge vers 0 pour tout $\varphi \in M_*$.

Toutes ces topologies coïncident si M est un facteur fini à préduel séparable [Col, Ha] et elles sont encore équivalentes à

iv) la topologie de la convergence simple 2-normique, définie par $\theta_1 \rightarrow \theta$ si $\|\theta_1(x) - \theta(x)\|_2$ tend vers 0 pour tout $x \in M$.

Définition 4.1.6. Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann M . On dit que G opère ergodiquement dans M ou que G est ergodique si l'algèbre des éléments G -invariants est réduite aux scalaires; ce qui revient à dire que les seuls projecteurs de M invariants par G sont 0

et 1. De plus si G est localement compact, non compact pour la p -topologie et si φ est un état normal fidèle G -invariant, on dira que G est fortement mélangeant pour φ si

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(g(x)y) = \varphi(x) \varphi(y)$$

pour tout $x, y \in M$, où $g \rightarrow \infty$ signifie que g sort de tout compact de G .

Il est clair que si G est fortement mélangeant alors G est ergodique.

Proposition 4.1.7. Soit A une sous-algèbre involutive ultrafaiblement dense de M ; si

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(g(a)b) = \varphi(a) \varphi(b) \quad \forall a, b \in A$$

alors G est fortement mélangeant dans M .

Preuve. Soient $x, y \in M$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a, b \in A$, $\|a\| \leq \|x\|$, $\|b\| \leq \|y\|$ tels que

$$|\varphi(a) \varphi(b) - \varphi(x) \varphi(y)| < \varepsilon \text{ et } |\varphi(g(a)b - g(x)y)| < \varepsilon.$$

En effet

$$|\varphi(a) \varphi(b) - \varphi(x) \varphi(y)| \leq$$

$$|\varphi(a)| |\varphi(b-y)| + |\varphi(y)| |\varphi(a-x)|$$

$$\leq \|x\| |\varphi(b-y)| + \|y\| |\varphi(a-x)|$$

$$\text{et } |\varphi(g(a)b - g(x)y)| \leq |\varphi(g(a)(b-y))| + |\varphi(g(a-x)y)|$$

$$= |\varphi(g(a)(b-y))| + |\varphi((a-x)g^{-1}(y))|$$

$$\text{Donc } |\varphi(g(x)y) - \varphi(x) \varphi(y)| \leq$$

$$\begin{aligned}
& | \varphi(g(x)y - g(a)b) | + | \varphi(x) \varphi(y) - \varphi(a) \varphi(b) | \\
& + | \varphi(g(a)b) - \varphi(a) \varphi(b) | \\
& < 2\varepsilon + | \varphi(g(a)b) - \varphi(a) \varphi(b) | < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

si g est suffisamment grand.

q.e.d.

Soit $M_0 = M_n(\mathbb{C})$ et soit φ_0 un état fidèle sur M_0 ; alors $\varphi_0 = \text{Tr}(h.)$ où Tr est la trace habituelle sur M_0 et h est un opérateur positif de trace 1, de valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ posons $M_k = M_0$, $\varphi_k = \varphi_0$ et soit $M = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} (M_k, \varphi_k)$ le facteur opérant dans l'espace de Hilbert K obtenu par la représentation GNS pour l'état $\varphi = \bigotimes \varphi_k$ de la C^* -algèbre $\bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} M_k$. Si p et q sont des entiers vérifiant $p \leq q$, on notera M_p^q l'image canonique de $\bigotimes_p^q M_k$ dans $\bigotimes_k M_k$.

Proposition 4.1.8. Soient M et φ comme ci-dessus.

- 1) Le groupe G des permutations finies de $\mathbb{Z}$ opère ergodiquement dans M .
- 2) Le sous-groupe de $\text{Aut } M$ engendré par le décalage vers la droite α sur M est fortement mélangeant dans M pour φ .

Preuve. 1) [St1, St2] Soit $g \in G$; il existe $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$ tels que g soit une permutation de $\{p, p+1, \dots, q\}$. Soit u_g l'opérateur unitaire de M_p^q défini par

$$u_g(\bigotimes_p^q \xi_j) = \bigotimes_p^q \xi_{g(j)}$$

Il est clair que $g \mapsto u_g$ est une représentation unitaire de G dans $\bigotimes M_k$ et que $\varphi(u_g x u_g^*) = \varphi(x)$ pour tout $x \in M$.

Soit ξ l'image canonique de $1 \in \bigotimes M_k$ dans K ; on a $u_g \xi = \xi$

pour tout $g \in G$. Pour tout entier positif p soit g_p la permutation écrite sous forme de produit de cycles disjoints:

$$g_p = (-2p+1, -p+1) (-2p+2, -p+2) \dots (-p, 0) (1, p+1) \dots (p, 2p)$$

et notons u_p l'unitaire u_{g_p} . Si $x, y, z \in M_q^a$ pour $p > q$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle u_p x u_p^* y \xi \mid z \xi \rangle &= \varphi(z^* u_p x u_p^* y) = \varphi(u_p x u_p^* z^* y) \\ &= \varphi(x) \langle y \xi \mid z \xi \rangle \end{aligned}$$

Soient $x, y, z \in \otimes M_k$ et soient $x_q, y_q, z_q \in M_q^a$ tels que $\|x - x_q\| \rightarrow 0$, $\|y - y_q\| \rightarrow 0$ et $\|z - z_q\| \rightarrow 0$ si $q \rightarrow \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} &| \langle u_p x u_p^* y \xi \mid z \xi \rangle - \varphi(x) \langle y \xi \mid z \xi \rangle | \leq \\ &2\|x - x_q\| \|y\| \|z\| + 2\|x_q\| \|y - y_q\| \|z\| + 2\|x_q\| \|y_q\| \|z - z_q\| \\ &+ | \langle u_p x_q u_p^* y_q \xi \mid z_q \xi \rangle - \varphi(x_q) \langle y_q \xi \mid z_q \xi \rangle | \\ &< \varepsilon \text{ si } q \text{ est suffisamment grand et } p < q. \end{aligned}$$

Donc $\langle u_p x u_p^* y \xi \mid z \xi \rangle \rightarrow \varphi(x) \langle y \xi \mid z \xi \rangle$ si $p \rightarrow \infty$ et si $\xi_1, \xi_2 \in K$ on obtient $\langle u_p x u_p^* \xi_1 \mid \xi_2 \rangle \rightarrow \varphi(x) \langle \xi_1 \mid \xi_2 \rangle$ pour tout $x \in \otimes M_k$.

Soit M^G l'algèbre des points fixes de M par l'action de G ; du raisonnement ci-dessus on déduit que pour tout $x \in M^G$ et tout $\xi_1 \in K$, $\langle x \xi \mid \xi_1 \rangle = \varphi(x) \langle \xi \mid \xi_1 \rangle$. En effet soit (x_n) une suite d'éléments de $\otimes M_k$ convergeant fortement vers x et soit $\varepsilon > 0$ fixé; pour tout p nous avons

$$\begin{aligned} | \langle x \xi \mid \xi_1 \rangle - \varphi(x) \langle \xi \mid \xi_1 \rangle | &= | \langle u_p x u_p^* \xi \mid \xi_1 \rangle - \varphi(x) \langle \xi \mid \xi_1 \rangle | \\ &= | \langle x \xi \mid u_p^* \xi_1 \rangle - \varphi(x) \langle \xi \mid \xi_1 \rangle | \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|u_p^* \xi_1\| \| (x_n - x) \xi \| + | \langle \varphi(x_n) - \varphi(x) \rangle (\xi | \xi_1) | \\
&\quad + | \langle u_p x_n u_p^* \xi | \xi_1 \rangle - \varphi(x_n) (\xi | \xi_1) | \\
&\leq 2 \| \xi_1 \| \| (x_n - x) \xi \| + | \langle u_p x_n u_p^* \xi | \xi_1 \rangle - \varphi(x_n) (\xi | \xi_1) | .
\end{aligned}$$

Il existe n suffisamment grand pour que $2 \| \xi_1 \| \| (x_n - x) \xi \| < \varepsilon/2$ et pour cet entier n il existe p suffisamment grand pour que $| \langle u_p x_n u_p^* \xi | \xi_1 \rangle - \varphi(x_n) (\xi | \xi_1) | < \varepsilon/2$. Comme ε est arbitraire on obtient $\langle x \xi | \xi_1 \rangle = \varphi(x) (\xi | \xi_1)$. Soit e le projecteur sur $\mathbb{C} \xi$. Pour $x \in M^0$ et $\xi_1, \xi_2 \in K$ on a

$$\begin{aligned}
\langle ex \xi_1 | \xi_2 \rangle &= \langle x \xi_1 | \xi \rangle (\xi | \xi_2) = \langle \xi_1 | x^* \xi \rangle (\xi | \xi_2) \\
&= \varphi(x) (\xi_1 | \xi) (\xi | \xi_2)
\end{aligned}$$

$$\text{et } \langle xe \xi_1 | \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 | \xi \rangle \langle x \xi | \xi_2 \rangle = \varphi(x) (\xi_1 | \xi) (\xi | \xi_2)$$

donc $xe = ex$ pour tout $x \in M^0$ donc $e \in (M^0)'$.

On en déduit alors que $M^0 = \mathbb{C}$. En effet si $x, y \in M^0$ on a

$$\varphi(xy) = \langle xy \xi | \xi \rangle = \langle exey \xi | \xi \rangle = \varphi(x) \varphi(y)$$

donc $\varphi: M^0 \rightarrow \mathbb{C}$ est un $*$ -homomorphisme surjectif et comme φ est fidèle, φ est un isomorphisme de M^0 sur $\mathbb{C}$.

2) Par la proposition 4.1.7 il suffit de démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\alpha^k(a)b) = \varphi(a) \varphi(b)$ pour tout $a, b \in \bigcup_p M_{-p}^p$. Si $a, b \in \bigcup_p M_{-p}^p$ il existe p tel que $a, b \in M_{-p}^p$ et pour tout $k > 2p$ $\varphi(\alpha^k(a)b) = \varphi(a) \varphi(b)$ car φ est invariant par α .

q.e.d.

Le théorème suivant donne une généralisation des schémas de Bernoulli classiques; il permet d'en déduire l'existence d'une famille non dénombrable d'automorphismes apériodiques [Co2] non conjugués de R .

Théorème 4.1.9. [C-S] Soient M , φ et α comme dans la proposition 4.1.8.

1) Le centralisateur $Z_\varphi(M)$ de φ dans M est le facteur R hyperfini de type II_1 .

2) La restriction de α à R est un automorphisme θ fortement mélangeant pour φ , d'entropie

$$H(\theta) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log \lambda_i,$$

appelé décalage de Bernoulli sur R .

Preuve. 1) Soient p et q des entiers avec $p \leq q$; on notera $N_p^q \subset M_p^q$ le centralisateur de la restriction de φ à M_p^q . Il est clair que la suite $(N_p^p)_{p=1}^\infty$ est croissante et que $\bigcup_{p=1}^\infty N_p^p$ est fortement dense dans $Z_\varphi(M)$ car φ est un état produit.

Pour voir que $Z_\varphi(M)$ est un facteur, soit G et u_g comme dans la proposition 4.1.8. Comme φ est G -invariant, $Z_\varphi(M)$ est globalement invariant par l'action de G et $u_g \in Z_\varphi(M)$. Par la proposition 4.1.8 1) si x est un élément central de $Z_\varphi(M)$, $xu_g = u_gx$ pour tout $g \in G$, donc $x \in \mathbb{C}$; ce qui démontre que $Z_\varphi(M)$ est un facteur et donc $Z_\varphi(M) = R$.

2) Il est clair que φ est α -invariant et que R est globalement invariant par α . Comme α est fortement mélangeant dans M (proposition 4.1.8), θ est fortement mélangeant dans R et on a $\theta(N_p^q) = N_{p+1}^{q+1}$.

Soit $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, e_i projecteurs minimaux de M_0 ; l'algèbre A_0 engendrée par $\{e_1, \dots, e_n\}$ est abélienne maximale dans M_0 car φ_0 est fidèle, donc dans $Z_{\varphi_0}(M_0)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $A_k = A_0$ et pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$, soit A_p^q l'image canonique de $\bigotimes_p^q A_k$ dans M ; alors A_p^q est abélienne maximale dans N_p^q .

$$H(\theta) = \lim_{p \rightarrow \infty} H(N_{-p}^p, \theta).$$

Soit p fixé; par la propriété C nous avons

$$\begin{aligned} H(N_{-p}^p, \theta(N_{-p}^p), \dots, \theta^m(N_{-p}^p)) &= H(N_{-p}^p, N_{-p+1}^{p+1}, \dots, N_{-p+m}^{p+m}) \\ &\leq H(N_{-p}^{p+m}) \end{aligned}$$

De plus comme A_{-p}^{p+m} est abélienne maximale dans N_{-p}^{p+m} , par la propriété D

$$H(N_{-p}^{p+m}) = H(A_{-p}^{p+m}) = (2p + m + 1)H(A_0^0)$$

car $H(P \otimes Q) = H(P) + H(Q)$; donc

$$\begin{aligned} H(N_{-p}^{p+m}) &= H(A_{-p}^{p+m}) = (2p+m+1)H(A_0^0) \\ &= H(A_{-p}^p, \theta(A_{-p}^p), \dots, \theta^m(A_{-p}^p)) \\ &\leq H(N_{-p}^p, \theta(N_{-p}^p), \dots, \theta^m(N_{-p}^p)), \end{aligned}$$

d'où $H(N_{-p}^p, \dots, \theta^m(N_{-p}^p)) = (2p+m+1)H(A_0^0)$.

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} H(A_0^0) &= H(A_0) = \sum_{i=1}^n \eta \varphi_0(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \eta(\lambda_i) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log \lambda_i. \end{aligned}$$

Ainsi $H(N_{-p}^p, \theta) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log \lambda_i$ pour tout p .

q.e.d.

Soit β_0 la transposition sur M_0 et pour $k \in \mathbb{Z}$ posons $\beta_k = \beta_0$ et $\beta = \otimes \beta_k$. Comme φ_0 est invariant par β_0 , φ est invariant par β et on notera ρ la restriction de β à R . Par [Gi] ρ est, à conjugaison près, l'unique anti-automorphisme involutif de R .

Corollaire 4.1.10. L'antiautomorphisme $\sigma = \theta \rho$ est apériodique (c'est-à-dire σ^2 est apériodique) et d'entropie $H(\sigma) = H(\theta) = -\sum \lambda_i \log \lambda_i$.

Preuve. Comme $\theta \rho = \rho \theta$ on a $\sigma^{2n} = \theta^{2n}$ pour tout entier n , donc σ est apériodique et $H(\sigma^2) = H(\theta^2)$. Ainsi par la proposition 4.1.4 et le théorème 4.1.9,

$$H(\sigma) = H(\theta) = -\sum \lambda_i \log \lambda_i.$$

q.e.d.

Corollaire 4.1.11. Soient θ_1 et θ_2 deux décalages de Bernoulli sur R , alors

$$H(\theta_1 \otimes \theta_2) = H(\theta_1) + H(\theta_2).$$

Preuve. Pour θ_1 soit (N_p^q) la famille des sous-algèbres définie comme dans la démonstration du théorème 4.1.9 et pour θ_2 soit de même (P_p^q) . Nous avons

$$H(N_{-p}^p, \theta_1(N_{-p}^p), \dots, \theta_1^k(N_{-p}^p)) = H(N_{-p}^{p+k})$$

et

$$H(P_{-p}^p, \theta_2(P_{-p}^p), \dots, \theta_2^k(P_{-p}^p)) = H(P_{-p}^{p+k})$$

$$\text{Donc } H(N_{-p}^p, \theta_1(N_{-p}^p), \dots, \theta_1^k(N_{-p}^p)) + H(P_{-p}^p, \theta_2(P_{-p}^p), \dots, \theta_2^k(P_{-p}^p)) = H(N_{-p}^{p+k}) + H(P_{-p}^{p+k}) = H(N_{-p}^{p+k} \otimes P_{-p}^{p+k}) = H(N_{-p}^p \otimes P_{-p}^p, \dots, \theta_1^k \otimes \theta_2^k(N_{-p}^p \otimes P_{-p}^p)).$$

Ainsi $H(N_{-p}^p, \theta_1) + H(P_{-p}^p, \theta_2) = H(N_{-p}^p \otimes P_{-p}^p, \theta_1 \otimes \theta_2)$ et nous obtenons la conclusion par le théorème de Kolmogorov-Sinai.

q.e.d.

Mentionnons que la généralisation du corollaire 4.1.11 à des

automorphismes arbitraires constitue un des problèmes ouverts les plus importants.

Proposition 4.1.12. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ soient R_n le facteur hyperfini de type II₁ et τ_n la trace canonique sur R_n . On a $R = \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (R_n, \tau_n)$ et si θ désigne le décalage sur R , alors $H(\theta) = \infty$.

Preuve. Pour chaque n soit $(N_p^n)_{p=1}^\infty$ une suite croissante de sous-facteurs de type I_p de R_n dont la réunion soit faiblement dense dans R_n . Si M_p^q désigne l'image canonique de $\bigotimes_{n=-q}^q N_p^n$, alors (M_p^q) est une suite croissante de sous-facteurs de dimension finie dont la réunion est faiblement dense dans $\bigotimes (R_n, \tau_n)$; ainsi $R = \bigotimes (R_n, \tau_n)$.

En outre, par le théorème de Kolmogorov-Sinai, nous avons

$$H(\theta) = \lim_{p \rightarrow \infty} H(M_p^p, \theta)$$

et par la propriété E,

$$H(M_p^p, \theta(M_p^p), \dots, \theta^k(M_p^p)) = H\left(\bigotimes_{n=-p}^{p+k} N_p^n\right) = (2p+k+1) \log p,$$

donc $H(M_p^p, \theta) = \log p$; d'où $H(\theta) = \infty$.

q.e.d.

4.2. Entropie dans les produits croisés.

Soit X un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité μ diffuse. Soit G un groupe dénombrable d'automorphismes de X . Nous supposons que le groupe G conserve la mesure μ et qu'il opère ergodiquement dans X ; nous noterons e l'élément neutre de G .

Rappelons la construction du produit croisé de Krieger [Kr] telle qu'elle est exposée dans [Gu12].

Pour tout $\omega \in X$ soit $G\omega = \{g\omega, g \in G\}$ l'orbite de ω sous l'action de G et soit $K_\omega = l^2(G\omega)$ muni de la base hilbertienne canonique $\varepsilon_{\omega, \psi}$, $\psi \in G\omega$ et posons $\xi_\omega^{(g)} = \varepsilon_{\omega, g\omega}$. Il est clair que pour $g, h \in G$ la fonction $\omega \mapsto \langle \xi_\omega^{(g)} | \xi_\omega^{(h)} \rangle$ est mesurable, donc l'ensemble des $\xi_\omega^{(g)}$ est une famille fondamentale de champs de vecteurs mesurables [Di, II.1]. On définit alors l'espace de Hilbert $K = \int_X^\oplus K_\omega d\mu(\omega)$ intégrale hilbertienne du champ mesurable $\omega \mapsto K_\omega$. Pour $a \in L^\infty(X, \mu)$ et $g \in G$ soient M_a et U_g les opérateurs sur K définis par

$$(M_a \xi)_\omega = a(\omega) \xi_\omega \quad \text{et} \quad (U_g \xi)_\omega = \psi_{g, g^{-1}\omega}(\xi_{g^{-1}\omega})$$

où $\psi_{g, \omega}$ est l'isomorphisme de K_ω sur $K_{g\omega}$ défini par

$$\psi_{g, \omega}(\varepsilon_{\omega, \psi}) = \varepsilon_{g\omega, g\psi}.$$

U est une représentation unitaire de G dans K et on a les relations

$$U_g \xi_\omega^{(h)} = \xi_{g\omega}^{(hg^{-1})} \quad \text{et} \quad U_g M_a U_g^* = M_{ga}$$

où $ga(\omega) = a(g^{-1}\omega)$.

L'algèbre de von Neumann $A = \{M_a, a \in L^\infty(X, \mu)\}$ est

isomorphe à $L^{\infty}(X, \mu)$; dès lors nous identifierons ces deux algèbres.

Par hypothèse sur le groupe G , l'algèbre de von Neumann $R = R(A, G)$ engendrée par a et $\{U_g, g \in G\}$ est un facteur de type II_1 , hyperfini si G est moyennable.

Remarquons que le vecteur $\xi^{(e)}$ de K est un vecteur trace totalisateur et séparateur pour R ; de plus A est abélienne maximale dans R . Si K' est le sous-espace de K engendré par les $a\xi^{(e)}$, $a \in A$ et si p désigne le projecteur orthogonal de K sur K' , l'application $E: R \rightarrow A$ définie par

$$E(x)\xi^{(e)} = p(x\xi^{(e)})$$

est l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de R sur A qui conserve la trace τ sur R donnée par le vecteur $\xi^{(e)}$.

Soit T un automorphisme de X conservant la mesure μ ; nous noterons encore T son prolongement à A . Supposons que $TGT^{-1} = G$ et notons $\alpha(g) = TgT^{-1}$.

Montrons que T se prolonge en un automorphisme θ de R vérifiant $\theta(a) = T(a)$ pour tout $a \in A$ et $\theta(U_g) = U_{\alpha(g)}$.

Comme $TGT^{-1} = G$, pour tout $\omega \in X$ on a $GT^{-1}\omega = T^{-1}G\omega$,

donc l'application linéaire $\Phi_{\omega}: K_{\omega} \rightarrow K_{T^{-1}\omega}$ définie par

$$\Phi_{\omega}(\varepsilon_{\omega, \psi}) = \varepsilon_{T^{-1}\omega, T^{-1}\psi}$$

est un isomorphisme. Par [D1, II.2], le champ $\omega \rightarrow \Phi_{\omega}$ est mesurable. D'autre part pour tout $g \in G$ nous avons la relation:

$$\psi_{TgT^{-1}, TgT^{-1}\omega} = \Phi_{\omega}^{-1} \psi_{g, g^{-1}T^{-1}\omega} \Phi_{Tg^{-1}T^{-1}\omega}$$

En effet

$$\Phi_{\omega}^{-1} \psi_{g, g^{-1}T^{-1}\omega} (\varepsilon_{Tg^{-1}T^{-1}\omega, Tg^{-1}T^{-1}\psi})$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_u^{-1} \Psi_{g, g^{-1}T^{-1}u} (\varepsilon_{g^{-1}T^{-1}u, g^{-1}T^{-1}\varphi}) \\
&= \Phi_u^{-1} (\varepsilon_{T^{-1}u, g^{-1}T^{-1}\varphi}) = \varepsilon_{u, Tg^{-1}T^{-1}\varphi}
\end{aligned}$$

et

$$\Psi_{TgT^{-1}, Tg^{-1}T^{-1}u} (\varepsilon_{Tg^{-1}T^{-1}u, Tg^{-1}T^{-1}\varphi}) = \varepsilon_{u, Tg^{-1}T^{-1}\varphi}.$$

Soit V l'opérateur sur K défini par

$$(V\xi)_u = \Phi^{-1} \xi_{T^{-1}u}.$$

Alors V est un opérateur unitaire sur K ; en effet on a

$$\langle V^{-1}\xi \rangle_u = \Phi_{Tu} \xi_{Tu}$$

et pour $\xi, \xi' \in K$

$$\begin{aligned}
\langle \xi | V^{-1} \xi' \rangle &= \int_X \langle \xi_u | \langle V^{-1} \xi' \rangle_u \rangle d\mu(u) \\
&= \int_X \langle \xi_u | \Phi_{Tu} \xi'_{Tu} \rangle d\mu(u).
\end{aligned}$$

Soient $\xi_u = \sum_{\varphi \in G_u} \lambda_{u,\varphi} \varepsilon_{u,\varphi}$ et $\xi'_{Tu} = \sum_{\varphi \in G_{Tu}} \lambda'_{Tu,T\varphi} \varepsilon_{Tu,T\varphi}$ alors

$$\begin{aligned}
\langle \xi | V^{-1} \xi' \rangle &= \int_X \langle \sum_{\varphi \in G_u} \lambda_{u,\varphi} \varepsilon_{u,\varphi} | \sum_{\varphi \in G_{Tu}} \lambda'_{Tu,T\varphi} \varepsilon_{Tu,T\varphi} \rangle d\mu(u) \\
&= \int_X \sum_{\varphi \in G_u} \lambda_{u,\varphi} \overline{\lambda'_{Tu,T\varphi}} d\mu(u) \\
&= \int_X \sum_{\varphi \in G_{T^{-1}u}} \lambda_{T^{-1}u,\varphi} \overline{\lambda'_{u,T\varphi}} d\mu(u) \\
&= \int_X \sum_{\varphi \in G_u} \lambda_{T^{-1}u,T^{-1}\varphi} \overline{\lambda'_{u,\varphi}} d\mu(u) \\
&= \int_X \langle (V\xi)_u | \xi'_u \rangle d\mu(u) \\
&= \langle V\xi | \xi' \rangle.
\end{aligned}$$

Pour tout $b \in A$ et tout $g \in G$ nous avons les relations

$$VbV^* = T(b) \text{ et } VU_gV^* = U_{g(g)}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
(VbV^*\xi)_u &= \Phi_u^{-1} (bV^*\xi)_{T^{-1}u} = \Phi_u^{-1} (b(T^{-1}u) (V^*\xi)_{T^{-1}u}) \\
&= b(T^{-1}u) \Phi_u^{-1} \Phi_u \xi_u = (Tb\xi)_u.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$(VU_gV^*\xi)_u = \Phi_u^{-1} (U_gV^*\xi)_{T^{-1}u} = \Phi_u^{-1} \Psi_{g, g^{-1}T^{-1}u} (V^{-1}\xi)_{g^{-1}T^{-1}u}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_u^{-1} \Psi_{g, g^{-1}T^{-1}u} \Phi_{Tg^{-1}T^{-1}u} \xi_{Tg^{-1}T^{-1}u} = \Psi_{TgT^{-1}, Tg^{-1}T^{-1}u} \xi_{Tg^{-1}T^{-1}u} \\
&= \Psi_{a(g), a(g^{-1})u} \xi_{a(g^{-1})u} = \langle U_{a(g)} \xi \rangle_u.
\end{aligned}$$

Ainsi $VRV^* = R$ et l'automorphisme θ de R défini par $\theta(x) = VxV^*$ pour tout $x \in R$ vérifie $\theta(a) = T(a)$ pour tout $a \in A$ et $\theta(U_g) = U_{a(g)}$ pour tout $g \in G$. D'où le prolongement annoncé.

Supposons G réunion d'une suite croissante (G_n) de groupes finis avec $TG_nT^{-1} \subset G_{n+1}$.

Soit $(A_n)_{n=1}^\infty$ une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de A telle que $\bigcup_n A_n$ soit faiblement dense dans A et telle que G_n opère sur A_n pour tout n . Pour p fixé, posons $A_{p,n} = \langle \bigcup_{j=0}^n T^j(A_p) \rangle^*$. Le groupe $G_{p,n}$ engendré par $\{a^j(G_p), 0 \leq j \leq n\}$ est fini; nous supposons que $G_{p,n}$ opère sur $A_{p,n}$.

Sous ces hypothèses nous avons le théorème

Théorème 4.2.1. Si R , θ et T sont comme ci-dessus, alors

$$H(\theta) = h(T)$$

où H est l'entropie de Connes-Størmer et h est l'entropie de Kolmogorov.

Preuve. Soit A_p comme ci-dessus et soit N_p l'algèbre de von Neumann engendrée par A_p et $\{U_g, g \in G_p\}$; N_p est une sous-algèbre de dimension finie de R et $\bigcup_{p=1}^\infty N_p$ est faiblement dense dans R .

Donc par le théorème de Kolmogorov-Sinai

$$H(\theta) = \lim_{p \rightarrow \infty} H(N_p, \theta).$$

Pour tout entier $j \geq 0$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $T^j(A_p)$ et $\{U_{g^j}, g \in G_p\}$ est égale à $\theta^j(N_p)$, donc si $j \leq n$, $\theta^j(N_p)$ est contenue dans la sous-algèbre de von Neumann $N_{p,n}$ de dimension finie, engendrée par $A_{p,n}$ et $\{U_g, g \in G_{p,n}\}$. Ainsi par la propriété C

$$H(N_p, \theta(N_p), \dots, \theta^n(N_p)) \leq H(N_{p,n}).$$

Comme $A_{p,n}$ est abélienne maximale dans $N_{p,n}$, nous obtenons

$$H(N_p, \theta(N_p), \dots, \theta^n(N_p)) \leq H(A_{p,n}) = h(\bigcup_{j=0}^n T^j(A_p))$$

d'où

$$H(N_p, \theta) \leq h(A_p, T)$$

et donc $H(\theta) \leq h(T)$.

D'autre part il est clair que $H(\theta) \geq h(T)$.

q.e.d.

Exemple 4.2.2. Soient $X_0 = \{1, \dots, m\}$, B_0 la tribu borélienne canonique sur X_0 et μ_0 la mesure donnée par $\mu(j) = \lambda_j$, $j=1, \dots, m$, $\lambda_j > 0$, $\sum_j \lambda_j = 1$ et soit G_0 le groupe des permutations de X_0 qui conservent la mesure μ_0 . Posons $(X, B, \mu) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (X_k, B_k, \mu_k)$ où $(X_k, B_k, \mu_k) = (X_0, B_0, \mu_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$ soit $(X_p^q, B_p^q, \mu_p^q) = \prod_{k=p}^q (X_k, B_k, \mu_k)$ et soit G_p^q le groupe des automorphismes de X_p^q engendré par $\bigoplus_p^q G_0$ et le groupe des automorphismes de X_p^q correspondant aux permutations de $\{p, p+1, \dots, q\}$. Posons $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{-n}^n$; il est clair que le groupe G opère ergodiquement dans X .

Soit T le décalage de Bernoulli sur X ; l'application $\alpha(g) = TgT^{-1}$ définit un automorphisme de G . Soit $R = R(A, G)$; si θ désigne l'automorphisme de R défini comme précédemment, le

triplet (X, G, T) vérifie les hypothèses du théorème, on a donc

$$H(\theta) = h(T) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i.$$

Ce résultat peut être obtenu différemment; en effet nous allons voir que l'automorphisme θ ci-dessus est conjugué au décalage de Bernoulli $\tilde{\theta}$ non commutatif construit au paragraphe 1 sur un produit tensoriel infini.

Reprenons les notations du théorème 4.1.9. Soient $M_0 = M_n(\mathbb{C})$, φ_0 un état fidèle sur M_0 vérifiant $\varphi_0 = \text{Tr}(h.)$ où $h = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i$, e_i projecteurs minimaux de M_0 et $M = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} (M_k, \varphi_k)$ avec $M_k = M_0$, $\varphi_k = \varphi_0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \bigotimes \varphi_k$ et $\tilde{R} = Z_\varphi(M)$. Soient M_p^q l'image canonique de $\bigotimes_p M_0$ dans M , N_p^q le centralisateur de la restriction de φ à M_p^q et A_p^q l'image canonique de $\bigotimes_p A_k$ où $A_k = A_0$ est la sous-algèbre abélienne maximale de M_0 engendrée par la famille $\langle e_i \rangle$. Nous identifierons la sous-algèbre abélienne maximale de $\tilde{R}$ adhérence faible de $\bigcup_n A_n^q$ à la sous-algèbre $A = L^\infty(X, \mu) \subset R$. Ainsi le groupe G_p^q opère sur A_p^q , donc pour tout $g \in G_p^q$ il existe un unitaire v_g de N_p^q tel que $g(a) = v_g a v_g^*$ pour tout $a \in A_p^q$ et grâce à la structure du groupe G_p^q , on peut choisir ces unitaires de manière qu'ils forment un groupe et que $\tilde{\theta}(v_g) = v_{\theta(g)} = v_{TgT^{-1}}$ où $\tilde{\theta}$ est le décalage de Bernoulli sur $\tilde{R}$.

D'autre part il est clair que A_p^q est régulière dans N_p^q car elle est abélienne maximale dans M_p^q . Donc l'algèbre de von Neumann engendrée par A_p^q et $\{v_g, g \in G_p^q\}$ est égale à N_p^q . Comme $\bigcup N_p^q$ est faiblement dense dans $\tilde{R}$, l'algèbre de von Neumann engendrée par A et $\{v_g, g \in G\}$ est égale à $\tilde{R}$. L'application $\phi: \tilde{R} \rightarrow R$ définie par $\phi(a) = a$ pour tout

$a \in A$ et $\Phi(v_g) = U_g$ est un isomorphisme et on a $\Phi \tilde{\theta} \Phi^{-1} = \theta$, ce qui démontre l'assertion ci-dessus.

Soit M une algèbre de von Neumann finie à préduel séparable, munie d'une trace normale fidèle normalisée.

Lemme 4.2.3. Soient G un groupe topologique et $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ une action continue pour la topologie de la convergence simple 2-normique sur $\text{Aut } M$ et telle que $\tau(\alpha_g(x)) = \tau(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$. Alors pour toute partie compacte K de M pour la topologie de la convergence 2-normique sur M nous avons

$$\sup_{x \in K} \|x - \alpha_g(x)\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{si } g \rightarrow e$$

où e est l'élément neutre de G .

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$; pour tout $x \in K$ soit $B(x, \varepsilon) = \{y \in M, \|x - y\|_2 < \varepsilon\}$. Comme K est compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Par hypothèse sur α il existe un voisinage W_1 de e dans G tel que pour tout $g \in W_1$, $\|x_1 - \alpha_g(x_1)\|_2 < \varepsilon$. Pour tout $x \in B(x_1, \varepsilon)$ nous avons

$$\|x - \alpha_g(x)\|_2 \leq 2 \|x_1 - x\|_2 + \|x_1 - \alpha_g(x_1)\|_2 < 3\varepsilon$$

si $g \in W_1$.

Soit $W = \bigcap_{i=1}^n W_i$; alors $\|x - \alpha_g(x)\|_2 < 3\varepsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $g \in W$.

q.e.d.

Proposition 4.2.4. Soit K un sous-ensemble précompact de l'espace métrique F des sous-algèbres de dimension finie de M . Pour toute suite $(N_j)_{j=1}^\infty$, $N_j \in K$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} H(N_1, \dots, N_n) = 0$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $n \geq m$ il existe $l < m$ avec $d(N_n, N_l) < \varepsilon$, donc par la propriété F

$$\begin{aligned} H(N_1, \dots, N_n) - H(N_1, \dots, N_{n-1}) &\leq H(N_n | N_1) \\ &\leq d(N_n, N_l) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} n^{-1} H(N_1, \dots, N_n) &= \\ n^{-1} \left[\sum_{i=m}^{n-1} (H(N_1, \dots, N_{i+1}) - H(N_1, \dots, N_i)) + H(N_1, \dots, N_m) \right] \\ &\leq n^{-1} ((n-m)\varepsilon + H(N_1, \dots, N_m)). \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, nous obtenons la conclusion.

q.e.d.

Soit G un sous-groupe compact du groupe des automorphismes de M muni de la topologie de la convergence simple 2-normique et supposons que $\tau(g(x)) = \tau(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$.

Lemme 4.2.5. Pour tout $N \in F$ et tout $g \in G$, l'ensemble $\{g^n(N), n \in \mathbb{N}\}$ est précompact dans F .

Preuve. Soit $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs. Il existe une sous-suite de (n_k) , encore notée (n_k) telle que (g^{n_k}) converge pour la topologie de la convergence uniforme

2-normique sur les compacts de M (lemme 4.2.3). Donc la suite $(g^{n_k}(N))$ est de Cauchy par le théorème 3.10.

q.e.d.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 4.2.4 et du lemme 4.2.5.

Proposition 4.2.6. *Sous les hypothèses ci-dessus nous avons $H(g) = 0$ pour tout $g \in G$.*

Soit X un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité diffuse μ et soit T un automorphisme ergodique de X conservant la mesure μ . Soit $R = L^\infty(X, \mu) \rtimes T$ le facteur hyperfini de type II_1 , produit croisé de X par T . Soient A l'image canonique de $L^\infty(X, \mu)$ dans R , E l'espérance conditionnelle canonique de R sur A et U l'unitaire de R correspondant à la translation de 1 dans Z . Posons

$$R_0 = \{y \in R, y = \sum_{n \in J} a_n U^n, a_n \in A, J \subset Z, J \text{ fini}\}$$

Pour tout $f \in L^1(X, \mu)$ et tout $y \in R_0$, l'application $\varphi_{y,f}$ définie par

$$\varphi_{y,f}(x) = \int_X E(y^*xy) f d\mu$$

est une forme linéaire ultrafaiblement continue sur R .

Proposition 4.2.7. *L'espace vectoriel engendré par les $\varphi_{y,f}$, $y \in R_0$, $f \in L^1(X, \mu)$ est dense dans le prédual de R .*

Preuve. Voir [Au, paragraphe 1.2].

Théorème 4.2.8. Supposons que l'automorphisme T soit à spectre discret; c'est-à-dire que l'ensemble des vecteurs propres de l'opérateur unitaire de $L^2(X, \mu)$ associé à T est total dans $L^2(X, \mu)$. Alors

$$H(Ad U) = h(T) = 0.$$

Preuve. Par [Wal, théorème 3.4 page 68] on peut supposer que X est un groupe abélien compact et que T est une rotation sur X ; c'est-à-dire il existe $g \in X$ avec $T = T_g$ où $T_g(h) = gh$ pour tout $h \in X$. Comme X est abélien, nous avons $T_g T_k = T_k T_g$ pour tout $k \in X$; donc T_k s'étend en un automorphisme θ_k de R en posant pour tout k $\theta_k(a) = T_k(a)$ pour tout $a \in A$ et $\theta_k(U) = U$.

Montrons que l'action de X sur R donnée par $k \in X \rightarrow \theta_k \in \text{Aut } R$ est continue pour la p -topologie.

Soient $y = \sum_{i=1}^r b_i U^{n_i} \in R_0$ et $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n U^n \in R$, $a_n \in A$.

Alors

$$\begin{aligned} y^* x y &= \sum_{i,j,n} U^{-n_i} b_i^* a_n U^{n_j} b_j U^{n_i} \\ &= \sum_{i,j,n} T_g^{-n_i} (b_i^*) T_g^{n_j} (b_j) U^{n-n_i+n_j} \end{aligned}$$

donc

$$E(y^* x y) = \sum_{i,j} T_g^{-n_i} (b_i^*) T_g^{n_j} (b_j) T_g^{-n_i} (a_{n_i-n_j})$$

et

$$E(y^* \theta_k(x) y) = \sum_{i,j} T_g^{-n_i} (b_i^*) T_g^{n_j} (b_j) T_g^{-n_i} (T_k(a_{n_i-n_j}))$$

Pour $f \in L^1(X, \mu)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_{y,r}(x - \theta_k(x)) &= \\ \int_X \left[\sum_{i,j} T_g^{-n_i} (b_i^*) T_g^{n_j} (b_j) T_g^{-n_i} (a_{n_i-n_j}) - T_k(a_{n_i-n_j}) \right] f d\mu. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\varphi_{y,r}(x - \theta_k(x))\| \leq$$

$$\sum_{i,j} \|a_i\| \|b_j\| \int_X \|T_g^{-n_i}(a_{n_i-n_j} - T_k(a_{n_i-n_j}))\| \|f\| d\mu$$

et donc $\|\varphi_{y,r}(x - \theta_k(x))\| \rightarrow 0$ si $k \rightarrow e$ où e est l'élément neutre de X .

Il est clair que ce résultat reste vrai pour toute combinaison linéaire finie de $\varphi_{y,r}$. Donc par la proposition 4.2.7 l'action $k \mapsto \theta_k$ est continue pour la p -topologie. Ainsi par la proposition 4.2.6 nous avons $H(\theta_k) = 0$ pour tout $k \in X$ et comme $\theta_g = \text{Ad } U$ nous obtenons la conclusion.

q.e.d.

Soit G un groupe abélien localement compact. On dit qu'une représentation unitaire continue π de G dans l'espace de Hilbert K a un spectre discret si K possède une base orthonormée $\{\xi_\gamma, \gamma \in \Gamma \subset \hat{G}\}$ formée de vecteurs propres; c'est-à-dire $\pi(g)\xi_\gamma = \langle g, \gamma \rangle \xi_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $g \in G$. Soit α une action ergodique de G dans le groupe des automorphismes d'un facteur fini M , continue pour la u -topologie. Le système (M, α) est appelé presque périodique [O-P-T, définition 7.3] si la représentation standard du système (M, G, α) a un spectre discret. Des propositions 4.2.6 ci-dessus et 7.2 de [O-P-T] on déduit le corollaire

Corollaire 4.2.9. Soit $(M; \alpha)$ un G -système presque périodique; alors $H(\alpha(g)) = 0$ pour tout $g \in G$.

Remarque 4.2.10. On a vu au paragraphe 1 qu'il existe des automorphismes extérieurs d'entropie infinie. Montrons qu'il existe aussi des automorphismes intérieurs d'entropie

infinie. Soit X un espace borélien standard muni d'une
 mesure de probabilité diffuse μ et soit T un automorphisme
 ergodique de X conservant μ et soit $R = L^\infty(X, \mu) \rtimes_{T^*} \mathbb{Z}$.
 Si U est l'unitaire de R correspondant à la translation
 de 1 dans $\mathbb{Z}$ il est clair que $H(\text{Ad } U) \geq h(T)$ donc si
 $h(T) = \infty$ (voir par exemple [Wal, page 96]) alors
 $H(\text{Ad } U) = \infty$.

4.3. Entropie d'un flot d'automorphismes.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème

Théorème 4.3.1. Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot d'automorphismes du facteur hyperfini de type II₁, continu pour la u -topologie. Alors

$$H(\alpha_t) = |t| H(\alpha_1)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. Vu que $H(\theta) = H(\theta^{-1})$ pour tout $\theta \in \text{Aut } R$, on peut supposer $t > 0$. Comme dans [Sin, page 127], montrons que pour $0 < s < t$

$$H(\alpha_t) \leq t/s H(\alpha_s)$$

Soient m un entier positif et N une sous-algèbre de dimension finie de R . Notons $k(n)$ un entier positif vérifiant

$$nt \leq k(n)s < (n+1)t, \quad n \in \mathbb{N}$$

et $r(n)$ l'entier positif vérifiant

$$r(n)s/m \leq nt < (r(n)+1)s/m, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\{r(1), \dots, r(n)\} \subset \{1, 2, \dots, k(n)m\}$, pour $k = k(n)$ nous avons

$$H(N, \alpha_t(N), \dots, \alpha_{nt}(N)) \leq H(N, \alpha_{s/m}(N), \dots, \alpha_{(km)s/m}(N)) + \sum_{p=1}^n H(\alpha_{pt}(N) \mid \alpha_{r(p)s/m}(N)).$$

Mais

$$H(\alpha_{pt}(N) \mid \alpha_{r(p)s/m}(N)) = H(\alpha_\lambda(N) \mid N)$$

où $\lambda = pt - r(p)s/m$ et $0 \leq \lambda < s/m$.

Par le lemme 4.2.3 on peut supposer que (α_t) est continu pour la topologie de la convergence uniforme 2-normique sur les compacts de R . Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m suffisamment grand pour que $H(\alpha_\lambda(N) \mid N) < \varepsilon$ (théorème 3.10). Ainsi

$$n^{-1} H(N, \alpha_t(N), \dots, \alpha_{nt}(N)) \leq \\ (km)n^{-1} (km)^{-1} H(N, \dots, \alpha_{(km)s/m}(N)) + \varepsilon.$$

De plus si $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$ et $k(n)/n \rightarrow t/s$, donc

$$H(N, \alpha_t) \leq mt/s H(N, \alpha_{s/m}) + \varepsilon.$$

Soit N telle que $H(\alpha_t) \leq H(N, \alpha_t) + \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} H(\alpha_t) &\leq H(N, \alpha_t) + \varepsilon \\ &\leq mt/s H(N, \alpha_{s/m}) + 2\varepsilon \\ &\leq mt/s H(\alpha_{s/m}) + 2\varepsilon \\ &= t/s H(\alpha_s) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

car R est hyperfini (proposition 4.1.4). Comme ε est arbitraire nous obtenons

$$H(\alpha_t) \leq t/s H(\alpha_s).$$

Soit q un entier vérifiant $0 < t/q < s$. Par le résultat ci-dessus nous avons

$$H(\alpha_s) \leq qs/t H(\alpha_{t/q}) = s/t H(\alpha_t)$$

Ainsi

$$H(\alpha_t) = t/s H(\alpha_s).$$

q.e.d.

4.4. Non continuité de l'entropie.

Dans ce paragraphe nous étudions certaines questions concernant la non continuité de l'entropie d'un automorphisme.

Proposition 4.4.1. L'ensemble des unitaires périodiques d'une algèbre de von Neumann M est normiquement dense dans le groupe des unitaires de M .

Preuve. Soit n un entier positif et posons

$$\omega_{n,k} = \exp(2i\pi k/n), \quad \Omega_{n,k} = \{ \omega \in \mathbb{C} \mid \omega = \exp(it), t \in \mathbb{R}, \\ 2i\pi k/n \leq t < 2i\pi(k+1)/n \};$$

pour $k = 0, \dots, n-1$.

Soit F_n la fonction borélienne sur le cercle unité S^1 de $\mathbb{C}$ définie par $F_n(z) = \omega_{n,k}$ si $z \in \Omega_{n,k}$; alors

$$|F_n(z) - z| \leq \varepsilon_n = |\omega_{n,1} - \omega_{n,0}|$$

pour tout $z \in S^1$ et il est clair que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Soit u un unitaire de M . Pour tout n soit $u_n = F_n(u)$; alors u_n est un unitaire périodique de M et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

q.e.d.

Corollaire 4.4.2. Si M est une algèbre de von Neumann de type II_1 , l'application $H: \text{Aut } M \rightarrow \mathbb{R}_+, \theta \mapsto H(\theta)$ n'est pas normiquement continue.

Preuve. Comme M est de type II_1 , elle contient le facteur hyperfini de type II_1 ; donc par la remarque 4.2.10 il existe un unitaire $u \in M$ vérifiant $H(\text{Ad } u) > 0$.

Par la proposition ci-dessus il existe une suite (u_n) d'unitaires périodiques de M tels que $\|u - u_n\| \rightarrow 0$. Comme $H(\text{Ad } u_n) = 0$ pour tout n , nous obtenons la conclusion.
q.e.d.

Proposition 4.4.3. Soit R le facteur hyperfini de type II_1 ; on muni $\text{Aut } R$ de la u -topologie. Le sous-ensemble de $\text{Aut } R$ formé des automorphismes d'entropie nulle est un G_δ dense.

Preuve. Comme $\overline{\text{Int } R} = \text{Aut } R$ [Sai, th. 4], par la proposition 4.4.1 l'ensemble des automorphismes d'entropie nulle est dense dans $\text{Aut } R$. Il reste donc à voir que c'est un G_δ . Soit N une sous-algèbre de dimension finie de R et soit p un entier positif. L'application $H_{p,N}: \text{Aut } R \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H_{p,N}(\theta) = p^{-1}H(N, \theta(N), \dots, \theta^p(N))$ est continue. En effet, soit $\theta \in \text{Aut } R$; par la propriété F, pour tout $\sigma \in \text{Aut } R$

$$|H_{p,N}(\theta) - H_{p,N}(\sigma)| \leq p^{-1} \max \left\{ \sum_{j=1}^p H(\theta^j(N) | \sigma^j(N)), \sum_{j=1}^p H(\sigma^j(N) | \theta^j(N)) \right\}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n = \dim N$; par le théorème 3.10 il existe $\delta > 0$ tel que si P et Q sont des sous-algèbres de dimension finie de R vérifiant $\dim P = n$ et $P \subset Q$ alors $H(P|Q) < \varepsilon$. D'autre part si N_1 désigne la boule unité de N , il existe un voisinage W de θ dans $\text{Aut } R$ tel que pour tout $\sigma \in W$

$$\sup_{x \in N_k} \|\theta^j(x) - \sigma^j(x)\|_2 < \delta$$

pour $j = 1, \dots, p$. Donc $\theta^j(N) \subset \sigma^j(N)$ et $\sigma^j(N) \subset \theta^j(N)$ pour $j = 1, \dots, p$. Ainsi si $\sigma \in W$, $|H_{p,N}(\theta) - H_{p,N}(\sigma)|$

$< \epsilon$ ce qui démontre la continuité de $H_{p,N}$.

On en déduit alors que l'application $\theta \rightarrow H(N, \theta)$ est semi-continue supérieurement car

$$H(N, \theta) = \lim_{p \rightarrow \infty} H_{p,N}(\theta) = \inf_p H_{p,N}(\theta).$$

Soit (ϵ_k) une suite décroissante de nombres positifs tels que $\lim \epsilon_k = 0$ et soit (N_k) une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de R telle que l'algèbre de von Neumann engendrée par les N_k soit égale à R . Pour tout k posons

$$V_k = \{\theta \in \text{Aut } R \mid H(N_k, \theta) \leq \epsilon_k\}$$

Il est clair que V_k contient l'ensemble des automorphismes d'entropie nulle; d'autre part V_k est un sous-ensemble ouvert de $\text{Aut } R$ car il est l'image réciproque de $]-\infty, \epsilon_k[$ par l'application $\theta \rightarrow H(N_k, \theta)$. Posons $V = \bigcap_k V_k$; alors V est l'ensemble des automorphismes d'entropie nulle et c'est un G_δ dense.

q.e.d.

4.5. Une famille non dénombrable d'automorphismes, d'entropie nulle.

Comme dans le cas classique, l'entropie est un invariant de conjugaison qui est loin d'être complet. A titre d'exemple, nous donnons dans ce paragraphe une famille non dénombrable d'automorphismes apériodiques non conjugués d'entropie nulle sur le facteur R hyperfini de type II_1 .

Soit X un espace borélien standard muni d'une mesure de probabilité diffuse μ et soit T un automorphisme ergodique de X conservant μ . On considère $R = L^\infty(X, \mu) \rtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ et A comme avant la proposition 4.2.7.

Pour $t \in [0, 1[$, posons $\chi_t = \exp(2i\pi t) \in S^1 = \hat{\mathbb{Z}}$ et soit V_t l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{Z}, L^2(X, \mu))$ défini par

$$V_t \xi(n) = \chi_t^{-n} \xi(n).$$

Pour tout $a \in A$ nous avons $V_t a V_t^* = a$ et $V_t U^n V_t^* = \chi_t^{-n} U^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc l'application $\theta_t(x) = V_t x V_t^*$ est un automorphisme de R . L'action θ de S^1 ainsi définie est appelée action duale (voir [Ta]). Cette action est continue pour la topologie de la convergence simple forte sur $\text{Aut } R$ [Ta, page 187]. Ainsi par la proposition 4.2.6 nous obtenons

Proposition 4.5.1. Pour tout $t \in [0, 1[$, $H(\theta_t) = 0$.

Nous noterons $P(T)$ le spectre ponctuel de T ; c'est-à-dire $P(T)$ est le spectre ponctuel de l'opérateur unitaire de $L^2(X, \mu)$ associé à T .

Proposition 4.5.2. Pour tout $t \in [0, 1[$, θ_t est un automorphisme intérieur de R si et seulement si $\chi_t = \exp(2i\pi t) \in P(T)$.

Preuve. Supposons que θ_t soit un automorphisme intérieur de R ; c'est-à-dire $\theta_t = \text{Ad } v$ avec $v \in R$. Comme $\theta_t(a) = a$ pour tout $a \in A$, nous avons $v \in A$ car A est abélienne maximale dans R . De plus $UU^* = \chi_t v$ donc $T(v) = \chi_t v$, ainsi $\chi_t \in P(T)$.

Réciproquement supposons que $\chi_t \in P(T)$ et soit $f \in L^2(X, \mu)$ une fonction propre de T correspondant à la valeur propre χ_t . Nous avons

$$|f(T^{-1}\omega)| = |\chi_t| |f(\omega)|$$

pour tout $\omega \in X$. Comme T est ergodique $|f| = k$ est une constante presque partout et $f \in L^\infty(X, \mu)$. Soit u l'image canonique de $k^{-1}f$ dans A ; u est un unitaire de A et une fonction propre de T . Donc $T(u) = \chi_t u = UU^*$, d'où $UU^* = \chi_t^{-1}U = \theta_t(U)$. Vu que $uau^* = a$ pour tout $a \in A$ nous avons $\theta_t = \text{Ad } u$.

q.e.d.

Corollaire 4.5.3. Si T est faiblement mélangeant, alors pour tout nombre irrationnel $t \in [0, 1[$, θ_t est apériodique.

Preuve. Si T est faiblement mélangeur alors $P(T) = \{1\}$ et si t est un nombre irrationnel dans $[0, 1[$ alors $\chi_t^n \neq 1$ pour tout entier $n \neq 0$, ainsi θ_t^n est un automorphisme extérieur pour tout $n \neq 0$; c'est-à-dire θ_t est apériodique.

Dès maintenant soit $t \in [0, 1[$ un nombre irrationnel fixé et soient S et T deux automorphismes ergodiques de X conservant la mesure μ . Notons $R = L^\infty(X, \mu) \rtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = L^\infty(X, \mu) \rtimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ et U (resp. V) l'opérateur unitaire de R correspondant à T (resp. S).

Soient θ l'action duale pour T et σ l'action duale pour S .

Supposons qu'il existe $\psi \in \text{Aut } R$ vérifiant $\sigma_t = \psi \theta_t \psi^{-1}$.

Pour tout $a \in A$ nous avons $a = \sigma_t(a) = \psi \theta_t \psi^{-1}(a)$, donc $\psi^{-1}(a) \in A$ car t est irrationnel, donc $\psi(A) = A$. De plus $\sigma_t(V) = \chi_t^{-1} V = \psi \theta_t \psi^{-1}(V)$, donc $\chi_t^{-1} \psi^{-1}(V) = \theta_t \psi^{-1}(V)$; ainsi $\theta_t(U^* \psi^{-1}(V)) = U^* \psi^{-1}(V)$, d'où $U^* \psi^{-1}(V) = a \in A$ car t est irrationnel. Ainsi $S(b) = VbV^* = \psi(U) \psi(a) b \psi(a)^* \psi(U)^* = \psi(U) b \psi(U)^*$; c'est-à-dire $S = \psi T \psi^{-1}$. En conséquence si σ_t et θ_t sont conjugués dans R , alors S et T sont conjugués dans A .

Réciproquement, supposons qu'il existe $\psi \in \text{Aut } A$ tel que $S = \psi T \psi^{-1}$. Nous noterons encore ψ son prolongement canonique à R ($\psi(U) = V$). Nous avons $\psi \theta_t \psi^{-1} V = \chi_t^{-1} V = \sigma_t(V)$ et $\psi \theta_t \psi^{-1}(a) = a$ pour tout $a \in A$, donc $\sigma_t = \psi \theta_t \psi^{-1}$.

Nous avons donc démontré le théorème

Théorème 4.5.4. Avec les notations ci-dessus, S et T sont conjugués si et seulement si σ_t et θ_t le sont pour un nombre irrationnel $t \in [0, 1[$.

Corollaire 4.5.5. Il existe une famille non dénombrable d'automorphismes apériodiques non conjugués d'entropie nulle sur le facteur hyperfini de type II_1 .

Preuve. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ soit S_λ le décalage de Bernoulli d'entropie λ sur X . Soit θ^λ l'action duale pour S_λ dans $R = L^\infty(X, \mu) \times_{S_\lambda} \mathbb{Z}$ et soit $t \in [0, 1[$ un nombre irrationnel fixé. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, θ_t^λ est apériodique par le corollaire 4.5.3 et $H(\theta_t^\lambda) = 0$ par la proposition 4.5.1. De plus si $\lambda \neq \lambda'$, S_λ et $S_{\lambda'}$ ne sont pas conjugués car leurs entropies diffèrent. Ainsi par le théorème 4.5.4, θ_t^λ et $\theta_t^{\lambda'}$ ne sont pas conjugués.

q.e.d.

4.6. Un exemple de décalage markovien.

Soit m un entier ≥ 2 et notons M_0 le facteur de type I_m . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ posons $M_k = M_0$ et soit C la C^* -algèbre $C = \bigotimes_{k \in \mathbb{Z}} M_k$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ nous noterons π_j l'injection naturelle de M_0 dans le j -ième facteur de C et si $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$, nous noterons M_p^q la C^* -algèbre engendrée par $\{\pi_j(M_0), j = p, \dots, q\}$.

Soient α le décalage de 1 vers la droite sur C , ψ un état sur C , invariant par α et ψ_p^q la restriction de ψ à M_p^q . Par [Sa2, 1.23] ψ est déterminé de manière unique par les ψ_n^n et, comme ψ est invariant par α , ψ est déterminé de manière unique par les ψ_0^n , $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.6.1. L'état ψ est appelé markovien s'il existe une application linéaire complètement positive $\sigma: M_0 \otimes M_0 \rightarrow M_0$ vérifiant $\sigma(1 \otimes 1) = 1$ et $\sigma(x \otimes y) = \sigma(x \otimes \sigma(y \otimes 1))$ pour tout $x, y \in M_0$, telle que

$$\begin{aligned} \psi(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) &= \psi_0^0(\sigma(x_0 \otimes \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes \sigma(x_n \otimes 1) \dots))) \\ &= \psi_0^0(\sigma(x_0 \otimes \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes \sigma(x_{n-1} \otimes x_n) \dots))) \end{aligned}$$

pour tout $x_0, x_1, \dots, x_n \in M_0$.

Dès maintenant nous nous concentrerons sur l'exemple suivant.

Soit $(e_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ un système d'unités matricielles dans M_0 .

Solent $h_0 \in M_0$ et pour tout $i = 1, \dots, m$, $W_i \in M_0$ $h_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_{ii}$, $W_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} e_{jj}$ vérifiant $\lambda_i > 0$, $p_{ij} \geq 0$ pour tout i, j , $\sum_{j=1}^m \lambda_j = \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ et $\sum_j \lambda_j p_{ji} = \lambda_i$ pour

tout i . Posons $\varphi_0 = \text{Tr}(h_0)$ où Tr est la trace habituelle sur M_0 et

$$\sigma(x \otimes y) = E_1(W(x \otimes y)W^*)$$

où $W = \sum_{i=1}^m e_{ii} \otimes W_i^{1/2}$ et E_1 est l'application linéaire de $M_0 \otimes M_0$ sur M_0 donnée par $E_1(x \otimes y) = x \text{Tr}(y)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sigma(x \otimes y) &= E_1\left(\sum_i e_{ii} \otimes W_i^{1/2} (x \otimes y) \sum_j e_{jj} \otimes W_j^{1/2}\right) \\ &= E_1\left(\sum_{i,j} e_{ii} x e_{jj} \otimes W_i^{1/2} y W_j^{1/2}\right) \\ &= \sum_{i,j} e_{ii} x e_{jj} \text{Tr}(W_i^{1/2} y W_j^{1/2}) \end{aligned}$$

Donc $\sigma(1 \otimes 1) = 1$; de plus

$$\begin{aligned} \sigma(x \otimes \sigma(y \otimes 1)) &= \sum_{k,l} e_{kk} x e_{ll} \text{Tr}(W_k^{1/2} \sum_{i,j} e_{ii} y e_{jj} \text{Tr}(W_i^{1/2} W_j^{1/2}) W_l^{1/2}) \\ &= \sum_{k,l} e_{kk} x e_{ll} \text{Tr}(W_k^{1/2} \sum_i e_{ii} y \text{Tr}(W_i) W_l^{1/2}) \\ &= \sum_{k,l} e_{kk} x e_{ll} \text{Tr}(W_k^{1/2} y W_l^{1/2}) = \sigma(x \otimes y). \end{aligned}$$

Donc σ satisfait aux conditions de la définition 4.6.1.

Pour $k = 0, \dots, n$ soit $x_k \in M_0$; on définit l'état φ_0^n sur M_0 par

$$\varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) = \varphi_0(\sigma(x_0 \otimes \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes \sigma(x_{n-1} \otimes x_n) \dots)))$$

et pour $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$ et pour $x \in M_p^q$ on pose

$$\varphi_p^q(x) = \varphi_0^{q-p}(\alpha^{-p}(x)).$$

L'état φ sur C est alors donné par la famille φ_{-n}^n . Pour simplifier, nous supposons φ fidèle.

Lemme 4.6.2. Soient $x_0, \dots, x_n \in M_0$, $x_k = \sum_{i,j} x_{ij}^{(k)} e_{ij}$, alors

$$\varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) = \sum_{i_0, \dots, i_n} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n} x_{i_0, i_0}^{(0)} \dots x_{i_n, i_n}^{(n)}.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^n(\pi_0(e_{i_0, j_0}) \pi_1(e_{i_1, j_1}) \dots \pi_n(e_{i_n, j_n})) &= \\
 = \varphi_0(\sigma(e_{i_0, j_0} \otimes \sigma(e_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes \sigma(e_{i_{n-1}, j_{n-1}} \otimes e_{i_n, j_n}) \dots))) &= \\
 = \varphi_0(\sigma(e_{i_0, j_0} \otimes \dots \otimes \sigma(e_{i_{n-2}, j_{n-2}} \otimes \sum_{I, J} e_{I, I} e_{i_{n-1}, j_{n-1}} e_{J, J} \text{Tr}(W_I^{1/2} e_{i_n, j_n} W_J^{1/2})) \dots)) &= \\
 = \varphi_0(\sigma(e_{i_0, j_0} \otimes \dots \otimes \sigma(e_{i_{n-2}, j_{n-2}} \otimes e_{i_{n-1}, j_{n-1}} \text{Tr}(W_{i_{n-1}}^{1/2} e_{i_n, j_n} W_{j_{n-1}}^{1/2})) \dots)) &= \\
 = \delta_{i_n, j_n} p_{i_{n-1}, i_n} \varphi_0(\sigma(e_{i_0, j_0} \otimes \dots \otimes \sigma(e_{i_{n-2}, j_{n-2}} \otimes e_{i_{n-1}, j_{n-1}}) \dots)) &
 \end{aligned}$$

D'où par induction

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) &= \\
 = \delta_{i_n, j_n} \delta_{i_{n-1}, j_{n-1}} \dots \delta_{i_1, j_1} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, i_n} \varphi(e_{i_0, j_0}) &= \\
 = \delta_{i_0, j_0} \delta_{i_1, j_1} \dots \delta_{i_n, j_n} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, i_n} &
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) = \sum_{i_0, \dots, i_n} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n} x_{i_0, i_0}^{(0)} \dots x_{i_n, i_n}^{(n)}$$

q.e.d.

Proposition 4.6.3. Si $W_i = h_0$ pour tout $i = 1, \dots, m$ alors l'état φ est un état produit.

Preuve. On a $W = \sum_{i=1}^m e_{i, i} \otimes W_i^{1/2} = \sum_i e_{i, i} \otimes h_0^{1/2} = 1 \otimes h_0^{1/2}$. Donc

$$\begin{aligned}
 \sigma(x \otimes y) &= E_1(\langle 1 \otimes h_0^{1/2} \rangle (x \otimes y) (1 \otimes h_0^{1/2})) = \\
 &= E_1(x \otimes h_0^{1/2} y h_0^{1/2}) \\
 &= x \text{Tr}(h_0^{1/2} y h_0^{1/2}) = x \varphi_0(y).
 \end{aligned}$$

D'où $\varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)) = \varphi_0(x_0) \dots \varphi_0(x_n)$.

q.e.d.

Soit M l'algèbre de von Neumann obtenue par la construction GNS pour l'état φ de la C^* -algèbre C et soit $N = Z_*(M)$ le centralisateur de φ dans M . Comme le décalage α

laisse φ invariant, la restriction de α à N est un automorphisme θ de N appelé *décalage markovien* sur N .

Corollaire 4.6.4. Si $W_i = h_0$ pour tout $i = 1, \dots, m$, l'automorphisme θ est un décalage de Bernoulli.

Soit $\text{Tr}_{p,q}$ la trace habituelle sur $M_{p,q}$ et soit $h_{p,q}$ la dérivée de Radon-Nikodym de $\varphi_{p,q}$ relativement à la trace $\text{Tr}_{p,q}$: $\varphi_{p,q} = \text{Tr}_{p,q}(h_{p,q} \cdot)$. Nous noterons $h_n = h_{0,n}$; par définition de φ_p^q , on a $h_{p,q} = \alpha^p(h_{q-p})$.

Lemme 4.6.5. Avec les notations ci-dessus nous avons

- a) $h_n = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \pi_0(\lambda_{i_0} e_{i_0, i_0}) \pi_1(p_{i_0, i_1} e_{i_1, i_1}) \dots \pi_{n-1}(p_{i_{n-2}, i_{n-1}} e_{i_{n-1}, i_{n-1}}) \pi_n(W_{i_{n-1}})$.
 b) L'opérateur unitaire $u_t^{(p,q)} = h_{p-1, q+1}^{-it} h_{p,q}^{it} \in (M_{p-1}^p \cup M_q^{q+1})^*$.

Preuve. Pour $k = 0, \dots, n$ soit $x_k = \sum_{i,j} x_{ij}^{(k)} e_{ij}$; nous avons

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{0,n} \left[\sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \pi_0(\lambda_{i_0} e_{i_0, i_0}) \pi_1(p_{i_0, i_1} e_{i_1, i_1}) \dots \right. \\ & \quad \left. \pi_{n-1}(p_{i_{n-2}, i_{n-1}} e_{i_{n-1}, i_{n-1}}) \pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n) \right] = \\ & \text{Tr}_{0,n} \left[\pi_0(\lambda_{i_0} e_{i_0, i_0} x_0) \pi_1(p_{i_0, i_1} e_{i_1, i_1} x_1) \dots \right. \\ & \quad \left. \pi_{n-1}(p_{i_{n-2}, i_{n-1}} e_{i_{n-1}, i_{n-1}} x_{n-1}) \pi_n(W_{i_{n-1}} x_n) \right] = \\ & \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} \lambda_{i_0} x_{i_0, i_0}^{(0)} p_{i_0, i_1} x_{i_1, i_1}^{(1)} \dots p_{i_{n-2}, i_{n-1}} x_{i_{n-1}, i_{n-1}}^{(n-1)} \left(\sum_{i_n} p_{i_{n-1}, i_n} x_{i_n, i_n}^{(n)} \right) = \\ & \sum_{i_0, \dots, i_n} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{n-1}, i_n} x_{i_0, i_0}^{(0)} \dots x_{i_n, i_n}^{(n)} \\ & = \varphi_0^n(\pi_0(x_0) \dots \pi_n(x_n)). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la première assertion.

Posons $q - p = n$; nous avons

$$h_{p-1, q+1}^{-it} h_{p,q}^{it} = \alpha^{p-1}(h_{n+2}^{-it} \alpha(h_n^{it}))$$

$$h_{n+2}^{-it} = \sum_{j_0, \dots, j_{n+1}} (\lambda_{j_0} p_{j_0, j_1} \dots p_{j_n, j_{n+1}})^{-it} \pi_0(e_{j_0, j_0}) \dots \pi_{n+1}(e_{j_{n+1}, j_{n+1}}) \pi_{n+2}(W_{j_{n+1}}^{-it})$$

$$\alpha(h_n^{it}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (\lambda_{i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, i_n})^{it} \pi_1(e_{i_1, i_1}) \dots \pi_n(e_{i_n, i_n}) \pi_{n+1}(W_{i_n}^{it})$$

donc $h_{n+2}^{-it} \alpha(h_n^{it}) =$

$$\sum_{j_0, j_1} \lambda_{j_0}^{-it} \lambda_{j_1}^{it} p_{j_0, j_1}^{-it} \pi_0(e_{j_0, j_0}) \pi_1(e_{j_1, j_1}) \sum_{j_{n+1}} \pi_{n+1}(e_{j_{n+1}, j_{n+1}}) \pi_{n+2}(W_{j_{n+1}}^{-it})$$

d'où $h_{n+2}^{-it} \alpha(h_n^{it}) \in \langle M_0^1 \cup M_{n+1}^{n+2} \rangle^*$.

Ainsi $h_{p-1, q+1}^{-it} h_{p, q}^{it} \in a^{p-1} \langle M_0^1 \cup M_{n+1}^{n+2} \rangle^* = \langle M_{p-1}^p \cup M_q^{q+1} \rangle^*$.

q.e.d.

Soient σ^φ le groupe modulaire pour φ dans M et $\sigma^{(p, q)}$ le groupe modulaire pour φ_p^q dans M_p^q . Comme $\varphi \circ \alpha = \varphi$ et $\varphi_p^q = \varphi_{p+k}^{q+k} \circ \alpha^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sigma_t^\varphi \circ \alpha = \alpha \sigma_t^\varphi \text{ et } \alpha^k \circ \sigma_t^{(p, q)} = \sigma_t^{(p+k, q+k)} \circ \alpha^k$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.6.6. Pour tout $x \in M_{-n}^n$ on a $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^{(-n-1, n+1)}(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve. On a $\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\varphi \circ \sigma_t^{(-k, k)} \circ \sigma_t^{(-k, k)}$ et pour $k > n+1$

$$\begin{aligned} \sigma_t^{(-k, k)}(x) &= h_{-k, k}^{it} x h_{-k, k}^{-it} \\ &= h_{-k+1, k-1}^{it} h_{-k+1, k-1}^{-it} h_{-k, k}^{it} x h_{-k, k}^{-it} h_{-k+1, k-1}^{it} h_{-k+1, k-1}^{-it} \\ &= h_{-k+1, k-1}^{it} (u_t^{(-k+1, k-1)})^* x u_t^{(-k+1, k-1)} h_{-k+1, k-1}^{-it} \\ &= h_{-k+1, k-1}^{it} x h_{-k+1, k-1}^{-it} \\ &= \sigma_t^{(-k+1, k-1)}(x). \end{aligned}$$

Donc si $k > n+1$ on obtient

$$\sigma_t^\varphi(x) = \sigma_t^\varphi \circ \sigma_t^{(-k, k)} \circ \sigma_t^{(-n-1, n+1)}(x)$$

Mais par [Lo, lemme 4], $\sigma_t^{(-k, k)}(x)$ converge fortement vers $\sigma_t^\varphi(x)$ lorsque k tend vers l'infini. D'où

$$\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^{(-n-1, n+1)}(x)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

q.e.d.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ posons

$$N_{-n}^n = \{x \in M_{-n}^n \mid \sigma_t^{(-n-1, n+1)}(x) = x \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$$

$$N_{-n+k}^{n+k} = \{x \in M_{-n+k}^{n+k} \mid \sigma_t^{(-n+k-1, n+k+1)}(x) = x \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{donc } N_{-n+k}^{n+k} = \theta^k(N_{-n}^n).$$

Corollaire 4.6.7. Soit E_ψ l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N qui conserve ψ ; alors $E_\psi(M_{-n}^n) = N_{-n}^n$, donc N est une algèbre de von Neumann hyperfinie.

Preuve. Par définition $E_\psi(M_{-n}^n) = \{x \in M_{-n}^n \mid \sigma_t^\psi(x) = x \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$; comme $\sigma_t^\psi(x) = \sigma_t^{(-n-1, n+1)}(x)$ pour tout $x \in M_{-n}^n$ on a $E_\psi(M_{-n}^n) = N_{-n}^n$. Il est clair que N est finie; elle est hyperfinie car (M_{-n}^n) est une suite croissante de sous-algèbres de dimension finie de M qui engendrent M .

q.e.d.

Soit A_0 la sous-algèbre abélienne maximale de M_0 engendrée par $\{e_i, i = 1, \dots, m\}$ et soit A_p^q l'image canonique de $\bigotimes_p^q A_0$ dans M ; alors A_p^q est abélienne maximale dans M_p^q .

Proposition 4.6.8. Pour tout entier positif n on a $A_{-n}^n \subset N_{-n}^n$.

Preuve. Il suffit de voir que $h_{2n+2}y = yh_{2n+2}$ pour tout

$y \in A_1^{2n+1}$ car si $x \in A_n^n$

$$\begin{aligned} h_{-n-1, n+1} x &= \alpha^{-n-1} (h_{2n+2} \alpha^{n+1} (x)) \\ &= \alpha^{-n-1} (h_{2n+2} y) \end{aligned}$$

où $y = \alpha^{n+1} (x) \in A_1^{2n+1}$.

Si $y = \pi_1(a_1) \dots \pi_{2n+1}(a_{2n+1}) \in A_1^{2n+1}$, on a

$$\begin{aligned} h_{2n+2} y &= \sum_{i_0, \dots, i_{2n+1}} \pi_0(\lambda_{i_0} e_{i_0, i_0}) \pi_1(p_{i_0, i_1} e_{i_1, i_1}) \dots \\ &\quad \pi_{2n+1}(p_{i_{2n}, i_{2n+1}} e_{i_{2n+1}, i_{2n+1}}) \pi_{2n+2}(W_{i_{2n+1}}) \pi_1(a_1) \dots \pi_{2n+1}(a_{2n+1}) \\ &= y h_{2n+2} \end{aligned}$$

$$\text{car } \pi_k(p_{i_{k-1}, i_k} e_{i_k, i_k}) \pi_k(a_k) = \pi_k(a_k) \pi_k(p_{i_{k-1}, i_k} e_{i_k, i_k})$$

pour tout $k = 1, 2, \dots, 2n+1$.

q.e.d.

Théorème 4.6.9. Soit θ le décalage markovien sur N ; alors

$$H(\theta) = - \sum_{i,j=1}^n \lambda_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

Preuve. Par le théorème 4.1.3 et le corollaire 4.6.7 nous avons

$$H(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(N_n^n, \theta).$$

et pour n fixé

$$\begin{aligned} H(N_n^n, \theta) &= \lim_{q \rightarrow \infty} (2q)^{-1} H(N_n^n, \theta(N_n^n), \dots, \theta^{2q}(N_n^n)) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} (2q)^{-1} H(N_n^n, N_{-n+1}^{n+1}, \dots, N_{-n+2q}^{n+2q}). \end{aligned}$$

Pour tout $k = 1, \dots, 2q$ on a $N_{-n+k}^{n+k} \subset N_{-n}^{n+2q}$. En effet pour tout $x \in N_{-n+k}^{n+k}$ on a

$$\begin{aligned} \sigma_t^{(-n-1, n+2q+1)}(x) &= \sigma_t^{(-n-1, n+2q+1)} \circ \sigma_{-t}^{(-n+k-1, n+k+1)}(x) = \\ &= h_{-n-1, n+2q+1}^{it} h_{-n+k-1, n+k+1}^{-it} \times h_{-n+k-1, n+k+1}^{it} h_{-n-1, n+2q+1}^{-it}. \end{aligned}$$

Par un raisonnement identique à celui du lemme 4.6.5 b) on voit que

$$h_{-n-1, n+2q+1}^{it} h_{-n+k-1, n+k+1}^{-it} \in (M_{-n-1}^{k-n-1} \cup M_{k+n+1}^{n+2q+1})^*.$$

Donc cet opérateur commute à x ce qui démontre l'assertion.

Ainsi par la propriété C nous obtenons

$$\begin{aligned} H(N_{-n}^n, N_{-n+1}^{n+1}, \dots, N_{-n+2q}^{n+2q}) &\leq H(N_{-n}^{n+2q}) \\ &= H(A_{-n}^{n+2q}) = H(A_0^{2n+2q}). \end{aligned}$$

Posons $r = 2n+2q$; nous avons

$$\begin{aligned} H(A_0^r) &= \sum_{i_0, \dots, i_r} \eta \varphi(\pi_0(e_{i_0, i_0}) \dots \pi_r(e_{i_r, i_r})) \\ &= \sum_{i_0, \dots, i_r} \eta(\lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, i_r}) \\ &= - \sum_{i_0, \dots, i_r} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, i_r} \log(\lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, i_r}) \\ &= - \sum_{i_0} \lambda_{i_0} \left(\sum_{i_1, \dots, i_r} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, i_r} \right) \log \lambda_{i_0} \\ &\quad - \sum_{i_0, \dots, i_r} \lambda_{i_0} p_{i_0, i_1} \dots p_{i_{r-1}, i_r} (\log p_{i_0, i_1} + \dots + \log p_{i_{r-1}, i_r}) \\ &= - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i - r \sum_{i,j} \lambda_i p_{ij} \log p_{ij}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} H(N_{-n}^n, \theta) &\leq \lim_{q \rightarrow \infty} (2q)^{-1} \left(- \sum_i \lambda_i \log \lambda_i - (2n+2q) \sum_{i,j} \lambda_i p_{ij} \log p_{ij} \right) \\ &= - \sum_{i,j} \lambda_i p_{ij} \log p_{ij}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } H(\theta) \leq - \sum_{i,j} \lambda_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

D'autre part pour tout n on a $H(\theta) \geq H(A_{-n}^n, \theta)$ et

$$\begin{aligned} H(A_{-n}^n, \theta) &= \lim_{q \rightarrow \infty} q^{-1} H(A_{-n}^n, \theta(A_{-n}^n), \dots, \theta^q(A_{-n}^n)) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} q^{-1} H(A_{-n}^n, A_{-n+1}^{n+1}, \dots, A_{-n+q}^{n+q}) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} q^{-1} H(A_{-n}^{n+q}); \end{aligned}$$

d'où le résultat.

q.e.d.

Bibliographie.

- [Ac1] L. Accardi; Non commutative Markov chains;
Proc. Int. School of Mathematical Physics,
Sept.-Oct. 1974 Univ. Camerino 268-295.
- [Ac2] L. Accardi; Markovian cocycles; preprint 1980.
- [Au] P. L. Aubert; Une théorie de Galois pour
une W^* -algèbre;
Comment. Math. Helv. 51 (1976) 411-433.
- [Be] O. Besson; On the entropy in II_1 -von Neumann algebras;
Ergodic Th. and Dynam. Systems 1 (1981) 419-429.
- [Co1] A. Connes; A factor non anti-isomorphic to itself;
Ann. of Math. 101 (1975) 536-554.
- [Co2] A. Connes; Outer conjugacy classes of automorphisms
of factors;
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4-ème série
t.8 (1975) 383-419.
- [C-S] A. Connes, E. Størmer; Entropy for automorphisms
of II_1 -von Neumann algebras;
Acta Math. 134 (1975) 289-306.
- [Di] J. Dixmier; Les algèbres d'opérateurs dans l'espace
hilbertien; Gautier-Villars, Paris 1969.
- [Gi] T. Giordano; Antiautomorphismes involutifs des facteurs
de von Neumann injectifs; Thèse 1981.
- [Gui1] A. Guichardet; Entropie des systèmes dynamiques
commutatifs et non commutatifs;
Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique,
Paris 1974.
- [Gui2] A. Guichardet; Systèmes dynamiques non commutatifs;
Astérisque 13-14 1974.

- [Ha] U. Haagerup; The standard form of von Neumann algebras;
Math. Scan. 37 (1975) 271-283.
- [Kr] W. Krieger; On constructing non $*$ -isomorphic
hyperfinite factors of type III;
J. Funct. Anal. 6 (1970) 97-109.
- [Lieb] E. Lieb; Convex trace functions and the W.Y.D.
conjecture;
Adv. In Math. 11 (1973) 267-288.
- [L-R] E. Lieb, M.B. Ruskai; Proof of the strong
subadditivity of quantum mechanical entropy;
J. Math Phys. 14 (1973) 1938-1941.
- [Lin] G. Lindblad; Expectations and entropy inequalities
for finite quantum systems;
Comm. Math. Phys. 39 (1974) 111-119.
- [Lo] R. Longo; A simple proof of the existence of modular
automorphisms in approximately finite dimensionnal
von Neumann algebras;
Pacific J. of Math. 75 (1978) 199-205.
- [N-U] M. Nakamura, H. Umegaki; A note on the entropy
for operator algebras;
Proc. Japan Acad. 37 (1961) 149-154.
- [O-P-T] D. Olesen, G.K. Pedersen, M. Takesaki; Ergodic
actions of compact abelian groups;
J. Operator Theory 3 (1980) 237-269.
- [Pe] G.K. Pedersen; C^* -algebras and their automorphisms
groups; Academic Press London 1979.

- [Po] R. Powers; Representation of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings;
Ann. of Math. 86 (1967) 138-171.
- [Sa1] S. Sakai; On automorphism groups of II_1 -factors;
Tôhoku Math. J. 26 (1974) 423-430.
- [Sa2] S. Sakai; C^* -algebras and W^* -algebras;
Ergebnisse der Mathematik Bd 60.
Springer-Verlag 1971.
- [Shi] P. Shields; The theory of Bernoulli shifts;
Univ. of Chicago Press 1973.
- [Sim] B. Simon; Trace Ideals and their applications;
London Math. Soc. Lecture Notes 35 1979.
- [Sin] J.G. Sinai; Introduction to ergodic theory;
Math. Notes, Princeton Univ. Press 18 1976.
- [Smor] M. Smorodinsky; Ergodic theory, entropy;
Springer Lecture Notes in Math. 214 1971.
- [St1] E. Størmer; Symmetric states of infinite tensor products of C^* -algebras;
J. Funct. Anal. 3 (1969) 48-68.
- [St2] E. Størmer; Asymptotically abelian systems;
Cargèse Lectures in Physics 4 (1970) 195-213.
- [S-Z] S. Stratilla, L. Zsidó; Lectures on von Neumann algebras; Abacus Press 1979.
- [Ta] M. Takesaki; Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III ;
Acta Math. 131 (1973) 249-310.
- [Wal] P. Walters; Ergodic theory;
Springer Lecture Notes in Math. 458 1975.