Publié dans G. Mugny & F. Carugati (Eds).
Psicologia sociale dello svilupo cognitivo, pp. 200-221, 1987
qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

MARIA LUISA SCHUBAUER-LEONI
e ANNE-NELLY PERRET-CLERMONT

Interazioni sociali e apprendimento di cognizioni matematiche da parte del bambino [1]

La problematica che intendiamo affrontare in questo capitolo riguarda l'elaborazione da parte del bambino, in interazione con altri, di concetti scolastici: nel caso specifico, si tratta di contenuti matematici elementari.

Un grosso cambiamento epistemologico

Gli apprendimenti matematici negli alunni della scuola elementare costituiscono un campo complesso, irriducibile alla costruzione di altre conoscenze, il cui funzionamento merita pertanto un approccio specifico. Consideriamo quindi, da un punto di vista epistemologico, alcuni dati che caratterizzano l'apprendimento della matematica e che ci interessano qui direttamente:

— le nozioni scolastiche sono insegnate prima dell'intervento dello sperimentatore e continuano ad esserlo durante e dopo. Sono oggetti connotati socialmente in quanto oggetti scolastici, ma anche investiti di diversi significati da parte dell'ambiente familiare, sociale e culturale;

[1] Questo lavoro è il frutto di un certo numero di interazioni sociali e didattiche con l'équipe di didattica della matematica della Sezione di Scienze dell'Educazione dell'Università di Ginevra. Ringraziamo quindi i nostri colleghi J. Brun, F. Conne ed E. H. Saada. La raccolta dei dati ha potuto essere eseguita grazie al contributo del F.N.R.S. (contratto 1.706.078, A.-N. Perret-Clermont e J. Brun).

— queste nozioni sono insegnate da « attori sociali » (gli insegnanti, appunto) che si ritiene abbiano una preparazione finalizzata a questo scopo. Nel nostro caso, si tratta di insegnanti di scuola elementare che intrattengono con queste nozioni un rapporto particolare (Perret, 1981). Inoltre si tratta di insegnanti che hanno metodi didattici propri e che fanno appello, almeno in parte, al « lavoro di gruppo ». Non dimentichiamo che questo tipo di pratica interattiva è da tempo auspicata da pedagogisti quali, ad esempio, Freinet, Cousinet, Decroly;

— gli alunni a loro volta si accostano alle conoscenze scolastiche in funzione del loro « mestiere » di alunni che hanno già avuto a che fare con questo tipo di oggetti. L'esperienza passata li indurrà più o meno bene a identificare gli oggetti dell'insegnamento. È ovvio che il bambino, uscito dalla classe scolastica e posto di fronte, da uno sperimentatore estraneo, a un problema « nuovo » da risolvere, faccia riferimento alla propria storia scolastica precedente: interpreterà il proprio ruolo nel compito proposto e dimostrerà questa o quella competenza, in funzione di una « costruzione di abitudini », sia cognitive che sociali, acquisite in precedenza.

L'immagine che si farà del suo partner (adulto o bambino) nel corso dell'interazione sarà inoltre influenzata dall'oggetto in questione. Quest'ultimo, a sua volta, divenuto posta in gioco dell'interazione, è destinato ad essere influenzato dal peso particolare che viene ad assumere nell'interazione; cosa che può introdurre cambiamenti nei significati che vengono costruiti a proposito dell'oggetto stesso. L'oggetto di conoscenza sarà così connotato nella sua stessa natura, dai significati che gli scolari imparano a conferirgli;

— per tutte queste ragioni, il ruolo che lo sperimentatore occupa nell'interazione viene ad essere certamente modificato: è molto probabile che, facendo riferimento alla situazione di classe, l'alunno gli attribuisca la "parte" dell'insegnante (o addirittura gli faccia svolgere, suo malgrado, questo ruolo).

Dal momento che pretendiamo di studiare come il bambino elabora dei contenuti matematici, dobbiamo allora ridefinire anzitutto, nel quadro del cambiamento epistemologico qui proposto, il significato teorico dei dati che raccogliamo col nostro intervento sperimentale e specificarne la portata; condizione questa per capire meglio l'articolazione delle pratiche di insegnamento-apprendimento di specifiche nozioni scolastiche e il loro rapporto con il contesto in cui si collocano. Sarebbe illusorio ed epistemologicamente discutibile pensare di individuare in maniera esauriente i processi che intervengono nell'insegnamento-appropriazione di contenuti matematici, esclusivamente attraverso esperimenti di laboratorio. Questo vasto campo di studio fa appello a metodologie di ricerca diversificate e non può fare a meno di tener conto di quanto avviene nella stessa classe scolastica, nel corso delle interazioni quotidiane fra l'insegnante, gli alunni e le conoscenze scolastiche.

In questa prospettiva, nell'ambito della didattica della matematica, Brousseau (1976) concepisce e studia sequenze d'insegnamento (*situazioni didattiche*), che chiamano in causa l'articolazione fra quelle che l'autore definisce *dialettiche dell'azione*, *della formulazione* e *della validazione*, dialettiche create dai vincoli della situazione e che sono, per la loro stessa natura, interattive e sociali.

Per introdurre il lettore nel vivo della nostra problematica, ne ripercorreremo l'elaborazione seguendo due approcci:

— un primo approccio nell'ambito della psicologia sociale genetica, con numerosi lavori che mettono in evidenza il ruolo attivatore degli scambi interpersonali nella costruzione dell'intelligenza (Perret-Clermont, 1979; Perret-Clermont e Schubauer-Leoni, 1981; Doise e Mugny, 1981);

— un secondo approccio che fa capo a varie riflessioni circa i rapporti fra la psicologia genetica e l'insegnamento della matematica (Brun e Conne, 1979).

Nell'ambito del primo filone di ricerca, l'analisi degli effetti dell'interazione sociale sulle competenze cognitive dei bambini ci ha resi particolarmente attenti alle caratteristiche sociali delle situazioni di test e di apprendimento. Infatti, il livello di comportamento operatorio dei soggetti è risultato molto sensibile non solo al contenuto concettuale dei compiti proposti, ma anche alle particolarità della loro « messa in scena » e alle modalità delle relazioni interpersonali chiamate in causa (Perret-Clermont e coll., 1982). Le variazioni, fra gruppi di soggetti, del livello di prestazioni sono inoltre risultate dipendenti dal contesto culturale di origine dei soggetti: lo « sviluppo intellettuale », anche nella sua definizione operatoria, appare come il frutto di un processo di acculturazione di cui il bambino non sarebbe autore ma « co-autore ».

Per cogliere la dinamica cognitiva e sociale dello sviluppo del pensiero, crediamo che sia necessario andare al di là degli indici di una competenza operatoria, ricollocabili esplicitamente nel loro contesto di elaborazione.

La scelta, a livello teorico, di considerare il contesto di produzione delle risposte del bambino si basa su considerazioni che si collocano su due piani:

— il primo cerca di tener conto dell'etnocentrismo (culturale e professionale) dell'adulto sperimentatore: ciò per non attribuire a certi indici di competenze che si osservano nell'alunno la medesima relazione con l'oggetto di conoscenza che è propria dell'osservatore. Grazie a questo primo sforzo di « oggettivazione », lo sperimentatore può darsi gli strumenti per capire in che modo l'alunno si rappresenta il problema che gli viene posto: come decodifica la domanda per poterle dare un senso? Che interpretazione elabora della « messa in scena » organizzata dall'adulto, per potervi svolgere un ruolo che, sulle prime, non conosce e che deve imparare a individuare (cioè il ruolo del « soggetto-che-risponde-adeguatamente-alle-domande »)?

— il secondo livello di oggettivazione analizza sistematicamente la dialettica sociale e cognitiva implicita in qualunque relazione di domanda e risposta, dialettica che può assumere forme molto diverse. Essa dipende soprattutto dalla percezione che l'alunno elabora della relazione sociale in cui è coinvolto, la cui asimmetria esprime una distanza sociale (di classe e/o di status) più o meno « superabile » (formalmente) ai suoi occhi.

Proponiamo allora di interpretare le prestazioni degli alunni come il prodotto di « meta-contatti » che permettono di stabilire, *hic et nunc*, l'intersoggettività fra i partner, passando attraverso fasi di confronto con una realtà sociale condivisa solo parzialmente, cosa che può attivare conflitti sociocognitivi. È attraverso un gioco di regolazioni sociali e cognitive, talvolta piuttosto complesse, che il bambino perviene ad uno stato soddisfacente di intersoggettività con il partner, tale che gli permette di impegnarsi in un lavoro di autentica elaborazione cognitiva circa l'oggetto-problema che l'adulto gli sottopone. Ci sembra già molto importante integrare esplicitamente la considerazione di questi processi nelle teorizzazioni classiche dei processi operatori (in senso piagetiano), ma ciò è tanto più necessario quando affrontiamo concetti più complessi e indubbiamente più connotati sul piano culturale, come la matematica insegnata a scuola.

E tuttavia la nostra prospettiva non è di tipo matematico, nel senso che la matematica che ci interessa qui è la matematica insegnata a scuola, non la matematica così come i matematici l'hanno l'inventata. Fra l'uno e l'altro contesto c'è tutto il lavoro e la distanza della « trasposizione didattica » (Verret, 1975; Chevallard, 1980; Conne, 1981). In più, nel campo scolastico abbiamo a che fare con agenti sociali diversi, che elaborano rappresentazioni sociali specifiche dell'oggetto di insegnamento, in tal modo prima decontestualizzato e poi ricontestualizzato (Perret-Clermont e coll., 1982).

Pensiamo quindi che sia riduttivo sostituire formalmente un oggetto (una nozione matematica x) a un altro (un concetto operatorio piagetiano) e postulare che siano in azione gli stessi meccanismi, mentre si tratta di oggetti diversi.

Qualunque tentativo di « prolungamento » delle ricerche sulla costruzione sociale dell'intelligenza mediante una semplice sostituzione di oggetto, in paradigmi sperimentali peraltro efficaci, ma eseguita senza ripensare il quadro teorico (sia pure parziale e provvisorio) adatto a render conto della complessità dello schema sperimentale appena creato, è da considerare doppiamente discutibile: da un lato, porterebbe paradossalmente a sottovalutare la portata dei risultati ottenuti in precedenza; dall'altro, indurrebbe a generalizzare abusivamente questi risultati ad altri oggetti, cosa che ha molte probabilità di essere inefficace in una prospettiva di didattica della matematica (Brun, 1981).

Qual è allora la specificità dei contenuti matematici?

I contenuti delle conoscenze matematiche non sono riducibili ai concetti operatori in senso piagetiano. Tuttavia simili trasposizioni troppo generali, senza sufficienti verifiche sistematiche, sono state tentate ripetutamente: i rapporti fra psicologia genetica e insegnamento della matematica sono stati concepiti spesso in un senso che snatura la concezione epistemologica che avrebbe dovuto esserne alla base. Così, studiando i recenti sviluppi della pedagogia, si scopre tutta una serie di sperimentazioni che, volendosi ispirare ai più recenti lavori psicologici, sono sfociate in realtà in una reificazione dei concetti piagetiani, spingendosi fino alla trasformazione in esercizi scolastici dei dispositivi sperimentali utilizzati per mettere in evidenza lo sviluppo. L'esempio più vistoso è forse quello della sorte subìta dal concetto di numero. Molti manuali parlano ora di « costruzione del numero », in riferimento alla concezione piagetiana (diventata definizione) del numero come « sintesi della seriazione e dell'inclusione di classi ». Credendo di potersi basare fedelmente sui lavori di Piaget, questi manuali suggeriscono di far costruire il numero agli alunni, facendo eseguire loro esercizi di seriazione e di classificazione, come elementi di un programma di studi. In realtà, abbiamo a che fare qui con una interpretazione positivista dell'approccio epistemologico piagetiano, che gli fa perdere il suo vero senso: si finisce per rinchiudere il bambino in attività che lasciano da parte le esperienze che può avere del numero e della quantificazione, col pretesto di fondarsi su « quello che è » il numero (Brun e Schubauer-Leoni, 1981).

L'articolazione che esiste fra l'elaborazione di conoscenze matematiche e gli strumenti generali del pensiero è già stata in parte esplorata (Brun, 1975; Vergnaud, 1980). Questi lavori mostrano che i legami sono molto più complessi del previsto. Anche in una delle nostre ricerche (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980) abbiamo dovuto constatare che i legami di dipendenza supposti fra certe strutture operatorie e particolari contenuti di conoscenza matematica non sono così diretti come avevamo immaginato. Per esempio, ci aspettavamo che quanto più il bambino era progredito sul piano operatorio (in una prova di composizione additiva del numero) tanto più sarebbe riuscito a completare esattamente uguaglianze lacunose del tipo « a + ... = c, oppure « a + b = ... ».

Analogamente, avevamo formulato l'ipotesi che i bambini, se hanno raggiunto la costruzione operatoria di questi significati (sotto forma di composizione additiva del numero), più facilmente ricorreranno al codice equazionale insegnato a scuola. I risultati ci indicano, invece, che lo stadio più avanzato alla prova piagetiana non è condizione né necessaria né sufficiente alla soluzione delle equazioni lacunose. Neppure la conquista della costruzione operatoria sembra condizione sufficiente perché l'alunno possa utilizzare, per produrre una codifica, il formalismo matematico consueto.

Questi pochi studi bastano già a dimostrare che, a livello dei processi di acquisizione, quell'oggetto di conoscenza che è la matematica presenta una specificità. Tale specificità non riguarda peraltro unicamente i processi. C'è forse bisogno di ricordare che, quando si parla di matematica, si tratta di contenuti storicamente situati, culturalmente connotati e, per di più, insegnati in quel contesto socialmente definito e organizzato che è la scuola? La matematica (come la lingua, del resto) è costituita da oggetti codificati e regolati secondo un sistema elaborato precedentemente ed esternamente al bambino. Quest'ultimo non li inventa spontaneamente da solo: eventualmente, se ne appropria.

La formulazione di scritture simboliche: ricerche sperimentali

Abbiamo affrontato lo studio dei processi di appropriazione di contenuti matematici, partendo dalla problematica della formulazione e ci siamo proposti di esaminare l'impatto del contesto interpersonale in cui si svolge un'attività di formulazione di un problema additivo. Parallelamente, un altro problema che ci siamo posto, è quello degli eventuali legami che il bambino potrebbe essere indotto a costruire fra diverse attività implicanti scritture simboliche. Consideriamo un alunno che ha un'esperienza scolastica abbastanza massiccia di attività riguardanti scritture aritmetiche del tipo $5 + 3 - 2 = ...$, che venga invitato a rappresentare per iscritto un'operazione additiva (senza menzionare esplicitamente il ricorso al registro matematico): come rappresenterà il problema e la sua soluzione?

In questa prospettiva, ci interessa cogliere la conoscenza matematica durante il suo funzionamento: il nostro problema diventa quello di spiegare il rapporto esistente fra le caratteristiche cognitive, materiali e relazionali della situazione e l'attualizzazione delle conoscenze, mettendo in evidenza il ruolo mediatore delle procedure e delle rappresentazioni.

Le ricerche che tratteremo qui sono state condotte con alunni di 7-8 anni del Cantone di Ginevra e si sono svolte secondo uno schema sperimentale articolato in 4 oppure 5 fasi successive.

Fase 1. L'alunno risolve da solo e nel contesto abituale della classe, una prova carta-e-matita dello stesso tipo di quelle in uso nelle scuole elementari locali ($a + b - c = x$, $a + x = b$, ecc.).

Lo sperimentatore non è il medesimo per questa fase e per quelle successive, per non indurre, attraverso un collegamento di persona, l'uso della scrittura equazionale nei successivi problemi di formulazione.

Fase 2. Un nuovo sperimentatore presenta al bambino (individualmente al di fuori della classe, oppure « collettivamente » in classe, secondo le condizioni sperimentali) una situazione in cui intervengono operazioni di addizione e di sottrazione, chiedendo all'alunno di formulare per iscritto « che cos'è successo ». Lo sperimentatore esegue la manipolazione sotto gli occhi degli alunni. In uno degli esperimenti (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980), si tratta di una « manipolazione » in cui l'adulto introduce in due riprese dei cioccolatini in un sacchetto e poi ne toglie alcuni, e alla fine viene chiesto al bambino se è possibile sapere « quanti cioccolatini ci sono nel sacchetto ». In un altro esperimento (Brun e Schubauer-Leoni, 1981) si tratta di un gioco con 3 dadi (2 rossi, 1 verde), in cui la regola è la seguente: « Ora lancio i dadi tutti insieme. Si decide che si vincono i punti dei dadi rossi e si

perdono i punti del dado verde ». I dadi, quindi, vengono lanciati e posti in vista degli alunni, che notano su un foglio tutto quello che è successo coi punti durante il gioco e i punti che ci sono alla fine del gioco. In questo caso, è importante sottolineare che la formulazione scritta interviene senza che il bambino sia invitato prima ad esplicitare verbalmente la composizione dei dati del problema.
Fase 3. In questa fase gli alunni sono distribuiti nelle diverse condizioni sperimentali, caratterizzate da contesti relazionali diversi.

— Condizione sperimentale 1: i bambini producono le loro formulazioni a coppie, sottoponendo poi il loro messaggio a una coppia di decodificatori, assenti al momento della formulazione;

— condizione sperimentale 2: la codificazione è eseguita da due partner, che formulano il messaggio per un terzo assente, il quale in realtà non lo decodificherà (comunicazione evocata); nella situazione sono state introdotte due varianti, con la produzione di un codice comune sullo stesso foglio da parte dei due bambini (2a), oppure con l'esecuzione a turno e verifica della formulazione del compagno (2b);

— condizione sperimentale 3: l'alunno codifica da solo e poi comunica il messaggio a una coppia di decodificatori;

— condizione sperimentale 4: l'alunno codifica da solo, come nella situazione classica di test psicologico;

— condizione di controllo: nella fase 3 gli alunni di questo gruppo non sono sottoposti a nessuna prova sperimentale.

Quando la formulazione viene eseguita in interazione (condizioni sperimentali 1 e 2), abbiamo formato le coppie in modo da favorire possibilmente conflitti sociocognitivi: trattandosi sistematicamente di soggetti che non hanno usato la scrittura equazionale nella codificazione della fase 2, abbiamo scelto bambini che si erano richiamati a due registri diversi per indicare le operazioni in questione. Così, nella nostra prima ricerca (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980), abbiamo abbinato, per esempio, un bambino che codifica in linguaggio naturale e uno che usa piuttosto il disegno o altri schemi e indizi percettivi. Nella ricerca in cui i bambini dovevano codificare la composizione di vincite e perdite nel gioco di dadi, le coppie sono state formate in base alla composizione che hanno operato ed attualizzato nella fase 2: per esempio, un bambino che descrive vincite e perdite senza comporle ed uno che effettua almeno una composizione parziale dei dati (Brun e Schubauer-Leoni, 1981).

Le prove eseguite nella fase 3 sono dello stesso tipo di quelle proposte nella fase 2: identiche per quanto riguarda le composizioni da operare ($a + b - c = x$), diverse nella « messa in scena » del compito e nel materiale da manipolare.

Fase 4. Gli alunni vengono riesaminati con le stesse procedure e nello stesso contesto relazionale della fase 2.

Fase 5 (in uno solo degli esperimenti). L'alunno è sottoposto a un test carta-e-matita analogo a quello della fase 1.

Nelle diverse situazioni in cui il bambino deve produrre una formulazione scritta, l'analisi del problema in termini cognitivi mostra che, per trovare una soluzione, il bambino deve concatenare un'addizione e una sottrazione e trovare il bilancio finale, oppure eseguire un bilancio parziale: $a + b = x_1$, $x_1 - c = x_2$. La scrittura di tale operazione mentale comporta il ricorso a due tipi di segni: quelli che rappresentano le quantità e quelli che rappresentano le operazioni sulle quantità stesse.

La concatenazione dei due tipi di segni può corrispondere allo svolgimento nella fase del calcolo eseguito dall'alunno, ma può anche discostarsene, quando la scrittura dell'eguaglianza rappresenta le relazioni che intervengono fra le quantità e il loro risultato e non la procedura di calcolo. Se, come rileva Bresson (1978), si può benissimo rappresentare un calcolo senza rappresentare le operazioni (è il caso, per esempio, del calcolo con l'abaco, dove il supporto ci informa sugli stati raggiunti e non sulle operazioni eseguite), in compenso l'espressione aritmetica $a + b - c = x$ ha una doppia funzione, in quanto comunica sia gli stati che le operazioni. Infatti, chi la produce utilizza i segni per conservare traccia del suo calcolo (o della relazione che questo rappresenta) e chi la legge utilizza i segni come ordini di eseguire certe operazioni.

Data questa duplice funzione dei segni, abbiamo avanzato l'ipotesi che le situazioni sperimentali che stimolano esplicitamente l'interazione e la comunicazione fossero particolarmente adatte a favorire la produzione e l'evoluzione di scritture simboliche e aritmetiche (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980; Brun e Schubauer-Leoni, 1981).

Le situazioni in cui i bambini producono un codice a coppie per sottoporlo poi a un terzo decodificatore sono pertanto quelle che ci sembrano più suscettibili di stimolare, nell'arco della micro-storia sperimentale, dei progressi a livello di scrittura, nella misura in cui si producono confronti cognitivi sia fra i partner all'atto della codificazione, sia fra codificatori e decodificatori all'atto della decodificazione del messaggio.

Utilizziamo qui il termine « progresso » nel senso dell'elaborazione di un codice la cui formulazione sia sempre più esplicita e comprensibile ad altri, in direzione di una composizione sempre più pertinente dei dati del problema, magari anche con un uso più sistematico del formalismo equazionale appreso precedentemente a scuola.

Risultati principali

Esamineremo le produzioni dei bambini in questi esperimenti, sulla base di griglie di lettura diverse. In un primo momento, analizzeremo il ricorso alla scrittura equazionale (*a*), secondo le condizioni sperimentali e in funzione dei risultati al test carta-e-matita di equazioni lacunose (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980; Brun e Schubauer-Leoni, 1981). In seguito metteremo in evidenza i principali risultati dell'esperimento con i cioccolatini (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980) in base al grado di esplicitazione delle produzioni (*b*). Il secondo esperimento (Brun e Schubauer-Leoni, 1981) sarà analizzato invece tenendo conto delle formulazioni delle operazioni sulle quantità (*c*). La sezione successiva (*d*) riguarderà infine la correlazione fra questi ultimi due criteri di analisi delle produzioni (cfr. *b* e *c*).

a) *Ricorso alla scrittura equazionale convenzionale*

Gli alunni hanno una certa pratica scolastica del simbolismo matematico e manifestano una certa padronanza delle eguaglianze aritmetiche elementari nel test carta-e-matita della fase 1; tuttavia, nella fase 2, quando la consegna richiede al bambino (da solo) di produrre un codice per significare le quantità e le operazioni su tali quantità, notiamo che il ricorso al codice convenzionale di scrittura delle eguaglianze non è affatto frequente.

TAB. 1 - Tipi di formulazioni scritte di problemi additivi e quantità di errori al test di uguaglianze numeriche da completare

Tipi di formulazione / Errori al test di uguaglianze numeriche	Formulazione equazionale: corretta	Formulazione equazionale: scorretta	Formulazione non equazionale	Numero totale dei soggetti
0 - 1 errori	9	9	31	49
2 - 8 errori	0	7	33	40
Totale	9	16	64	89

Nel primo esperimento, con il materiale costituito dai cioccolatini (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980), in cui lo sperimentatore limita al massimo le sue verbalizzazioni nel corso della manipolazione (cfr. tab. 1), solo 9 soggetti su un totale di 89 fanno ricorso correttamente al codice equazionale ($a + b - c = x$; oppure $a + b = x_1$, $x_1 - c = x_2$). Si tratta di bambini che nel test carta-e-matita hanno fatto al massimo un errore. 64 soggetti, invece, utilizzano una scrittura non equazionale: di questi, 31 soggetti avevano risolto il test carta-e-matita facendo, al massimo, un errore.

Nell'esperimento con il gioco dei dadi (Brun e Schubauer-Leoni, 1981), il ricorso al formalismo è ancora più raro: alla prima codificazione (fase 2) un solo bambino su 44 ricorre a un codice del tipo $a + b - c = x$. Tre alunni della stessa classe formulano un codice con un inizio di equazione (esempio: $4 \ldots 5 - 2 = 7$). Tutti gli altri usano il linguaggio naturale, schemi grafici oppure altri indici percettivi, benché 18 di loro abbiano eseguito il test di equazioni lacunose della fase 1 con un errore al massimo. Utilizzare una scrittura convenzionale delle eguaglianze sembra far capo, quindi, ad un altro tipo di competenze rispetto alla capacità di completare esattamente equazioni lacunose.

Dopo una seduta di interazione e di comunicazione fra coetanei (condizione sperimentale 1), nell'esecuzione individuale della fase 4, il ricorso al formalismo equazionale rimane piuttosto raro; tuttavia, sono proprio i soggetti di questa condizione sperimentale quelli che lo utilizzano di più (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980).

Rimane aperto un interrogativo: se il bambino non utilizza il codice aritmetico, ciò vuol forse dire che « non ha » a disposizione questo registro come registro possibile per descrivere l'operazione in questione? Oppure il bambino ha attribuito alla consegna un senso diverso da quello che ha inteso lo sperimentatore? Infatti, c'è tutto un repertorio di risposte possibili (di tipo scolastico o no), in una situazione in cui il bambino deve dimostrare di « sapere » qualcosa (ma che cosa esattamente?): perché allora giudicare « illegittimo » cogliere questa occasione per dare una dimostrazione di capacità grafiche, disegnando « accuratamente » un sacchetto e dei cioccolatini?

Un esempio di formulazione grafica che descrive l'operazione $2 + 4 = 6 \quad 6 - 1 = 5$ è rappresentato nella fig. 1.

In base a quale criterio decideremo che una rappresentazione del genere non è legittima, in quanto non rispondente alla consegna (« indicare tutto quello che è successo con i cioccolatini per averne alla fine

5 nel sacchetto »)? E ancora, perché giudicare inadeguata la condotta di un altro bambino che ricorda « diligentemente » la consegna, distinguendo per bene i dadi dei due colori e i punti vinti e persi? (fig. 2).

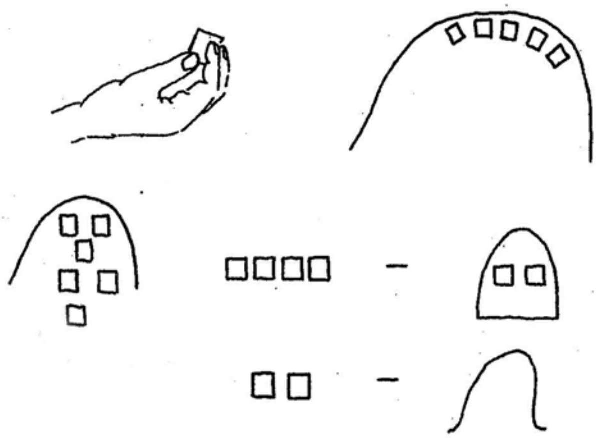


FIG. 1.

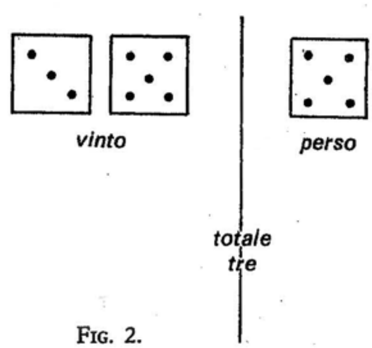


FIG. 2.

Eccoci al centro della problematica: quale interpretazione dà il bambino della situazione e delle domande che gli vengono poste? Che significato sociale attribuisce alla « messa in scena » che orienta le sue risposte e, perciò stesso, gli permette di individuare le conoscenze che sono chiamate in causa? Vediamo che il bambino costruisce (con i suoi strumenti cognitivi e attraverso le sue esperienze) mediante la sua interpretazione della consegna, il significato sociale della situazione, significato che forse differisce da quello progettato dallo sperimentatore.

Il ricorso a una scrittura equazionale è un criterio importante per esaminare i comportamenti del bambino in rapporto al tipo di situazione (cognitiva e relazionale) che l'ha prodotto. Ma volevamo anche darci i mezzi per considerare altre letture possibili delle produzioni dei soggetti, che non fossero pensate solo in termini di conformità al formalismo aritmetico convenzionale.

Le ricerche presentate qui sono state anche l'occasione di elaborare strumenti diversi di analisi e di categorizzazione delle produzioni scritte degli alunni. Così, in un primo tempo abbiamo studiato soprattutto il grado di esplicitazione delle produzioni (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980), mentre in un secondo tempo abbiamo messo in evidenza le procedure di rappresentazione delle operazioni in $a + b - c = x$ (Brun e Schubauer-Leoni, 1981). È quanto intendiamo presentare nelle pagine seguenti.

b) *Grado di esplicitazione delle produzioni*

Abbiamo costruito una griglia di analisi delle produzioni scritte che tiene conto delle tre dimensioni seguenti del codice:

— formulazione delle quantità in gioco e del bilancio finale;

— formulazione delle operazioni (aggiungere, togliere, quantità finale);

— svolgimento temporale delle operazioni eseguite.

Si è proceduto quindi allo spoglio delle codificazioni prodotte dagli alunni, attribuendo un punto per ogni formulazione che designasse una quantità (a, b, c, x_1, x_2 : 5 punti), un'operazione (+, — , =: 3 punti) e una tappa dello svolgimento temporale (massimo: 5 punti). In conseguenza, il bambino che produce una codificazione rispondente all'insieme di queste caratteristiche ottiene 13 punti (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980). Consideriamo il punteggio ottenuto da ogni soggetto come una misura del grado di esplicitazione delle produzioni.

Grazie a questo strumento di analisi, abbiamo verificato che qualunque sia la condizione sperimentale, c'è un progresso fra la fase 2 e la fase 4, ma il progresso maggiore è registrato dagli alunni che nella fase 3 hanno incontrato una situazione di interazione e di comunicazione (condizione sperimentale 1).

In questo stesso esperimento (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980) i soggetti della condizione sperimentale 2 (interazione con comunicazione evocata) fanno registrare anch'essi un progresso, ma in misura minore.

Invece, i soggetti che hanno formulato da soli il codice e hanno poi confrontato il loro messaggio con una coppia di decodificatori (condizione sperimentale 3) non mostrano un'evoluzione significativa fra la fase 2 e la fase 4, benché nessuno in questo gruppo produca nella fase 4 un codice di tipo « regressivo », cioè meno esplicito rispetto alla fase 2.

Questo avviene invece per 2 dei 7 soggetti che, durante le tre fasi della codificazione (2, 3 e 4), sono stati posti di fronte alla condizione cosiddetta « neutra » dell'adulto sperimentatore. Gli altri 5 bambini di questo gruppo sperimentale progrediscono. A quanto pare, il confronto implicito con l'adulto non lascia indifferente nessuno: l'esplicitazione registra un progresso oppure una « regressione » (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980). Vedremo che il problema dell'esplicitazione dovrà essere approfondito in seguito, in funzione di un'analisi delle operazioni eseguite mentalmente e poi rappresentate per iscritto.

c) *Le operazioni sulle quantità e le loro formulazioni*

L'esperimento con il gioco dei tre dadi (Brun e Schubauer-Leoni, 1981) ci ha permesso di individuare tre categorie di operazioni:

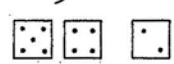
1) *Assenza di composizione fra i numeri*
(A) descrizione parziale o totale
esempio di produzione: *4 5 punti per i rossi*
(operazione da eseguire: *2 per il verde*
5 + 4 − 2 = x)

2) *Composizione parziale con bilancio parziale*
(B) addizione delle due vincite o trasformazione della perdita in vincita e addizione a un'altra vincita
esempio di produzione:
(operazione da eseguire:
5 + 4 − 2 = x)

vinto punti	*perso punti*
9	2

(C) sottrazione della perdita a una vincita
(operazione da eseguire:
5 + 4 − 2 = x)

3



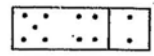
3) *Composizione completa e bilancio*
(D) trasformazione della perdita in vincita e composizione delle tre vincite

esempio di produzione:
(operazione da eseguire:
5 + 6 − 2 = x)

dadi rossi *dado blu*
11 *2*
risultato 13

(E) addizione di due vincite confrontate con la perdita

esempio di produzione 1
(operazione da eseguire:
5 + 4 − 2 = x)



vince *perde*
7 vince

esempio di produzione 2
(operazione da eseguire:
4 + 1 − 2 = x)

1 + 4 − 2 = 3

Per indicare queste operazioni, abbiamo potuto constatare che i bambini, anche in questa ricerca, si richiamano a tre registri:

— schemi ed altri indici percettivi (colore, disposizione spaziale, ecc.);

— linguaggio naturale (vinto-perso, in più-in meno, ecc.);

— scrittura aritmetica (+, −, =).

Con questo tipo di analisi abbiamo rilevato che gli alunni possono ricorrere a registri diversi per significare una medesima categoria di operazioni, nelle diverse fasi dell'esperimento.

Così, ad esempio, il bambino può benissimo eseguire la composizione completa e pertinente delle quantità ma rappresentare le operazioni con un disegno. In questo esperimento, che comporta (come abbiamo detto) due condizioni sperimentali (2a e 2b) con interazione sociale fra due bambini e una condizione di controllo (senza alcun intervento dello sperimentatore nella fase 3) non abbiamo notato nessuna procedura di tipo A (senza composizione dei dati) durante la fase di interazione. Nella fase sperimentale successiva alla situazione di interazione (fase 4), osserviamo gli effetti conseguenti nel bambino che lavora da solo: l'evoluzione dimostrata dagli alunni che si sono giovati di una fase di interazione (condizione sperimentale 2a o 2b) è nettamente maggiore di quella osservata nella condizione di controllo, in situazione individuale in classe (consegna collettiva e risposta scritta individuale).

Per evoluzione intendiamo qualunque cambiamento che vada nella direzione seguente: descrizione senza composizione (A) → composizione parziale (B o C) → composizione completa ma non pertinente (D) → composizione completa e pertinente (E).

L'evoluzione dei soggetti nei due gruppi sperimentali 2a e 2b è risultata sostanzialmente identica: nelle due condizioni sperimentali, i soggetti interagiscono producendo un codice comune, oppure controllando reciprocamente le loro produzioni. Questi dati, raccolti nel quadro dell'esperimento con il gioco dei dadi (Brun e Schubauer-Leoni, 1981) confermano quindi l'ipotesi di una superiorità dei gruppi che hanno beneficiato di una fase di interazione.

d) *Grado di esplicitazione e livello di composizione delle quantità*

Ci sembra interessante, a questo punto, cercar di combinare le due analisi condotte fin qui, cioè i cambiamenti che intervengono (fra la fase 2 e la fase 4), sia a livello di esplicitazione delle quantità, sia a livello di composizione di queste quantità (cfr. § *b* e *c*).

Ci è sembrato che non basti ragionare in termini di numero delle quantità esplicitate, ma si debba analizzare quali quantità il bambino indica. In caso di cambiamento, nel corso delle fasi sperimentali, si tratta di vedere quali fra le quantità sono state aggiunte o lasciate cadere ed eventualmente a profitto di quale altro dato.

La tab. 2 indica i diversi cambiamenti intervenuti fra la fase 2 e la fase 4 nelle condizioni sperimentali e di controllo.

TAB. 2 - Cambiamenti intervenuti fra la fase 2 e la fase 4 nei soggetti delle condizioni sperimentali 2 (con interazione nella fase 3) e di controllo (nessun intervento nella fase 3), nell'ambito dell'esperimento con il gioco dei dadi (Brun e Schubauer-Leoni, 1981)

Cambiamenti	I	II	III	IV	V	VI	N. totale di soggetti
Condizioni sperimentali	0	0	4	2	7	7	20
Condizione di controllo	2	1	10	2	3	3	21

Legenda:

I) Il bambino produce nella fase 4 un codice di tipo « regressivo » dal punto di vista sia dell'esplicitazione delle quantità sia della composizione dei dati.

II) Il bambino rimane stabile in una delle due dimensioni e « regredisce » nell'altra.

III) Stabilità in entrambe le dimensioni esaminate.

IV) Il bambino progredisce nella composizione dei dati e « regredisce » nell'esplicitazione delle quantità, oppure viceversa.

V) Il bambino progredisce soltanto nella composizione delle quantità.

VI) Il bambino progredisce in entrambe le dimensioni.

La superiorità delle condizioni sperimentali che prevedono una fase di interazione nella fase 3 è netta nell'esperimento con il gioco dei dadi (Brun e Schubauer-Leoni, 1981): nessuna « regressione », pochi comportamenti stabili e soprattutto maggiore progresso in entrambe le dimensioni (composizione ed esplicitazione delle quantità).

Abbiamo applicato questa stessa analisi ai dati della prima ricerca con i cioccolatini (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980). La superiorità della condizione sperimentale 1 (interazione e comunicazione con una coppia di decodificatori) era stata accertata finora solo in base alla maggior esplicitazione dei dati. Vediamo ora che cosa succede nelle quattro condizioni sperimentali se teniamo conto della dimensione: composizione delle quantità del problema.

La tab. 3 ci conferma la superiorità della condizione 1, in cui gli alunni hanno beneficiato, nella fase 3, di un lavoro in interazione con comunicazione a un terzo soggetto.

TAB. 3 - Cambiamenti intervenuti fra la fase 2 e la fase 4 nei soggetti delle quattro condizioni sperimentali dell'esperimento coi cioccolatini (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1980)

Cambiamenti / Condizioni	I	II	III	IV	V	VI	N. totale di soggetti
1	0	0	0	0	4+1=5	9	14
2	1	1	3	1	4	2	12
3	0	1+1=2	2	0	2	0	6
4	0	1+1=2	0	0	2	3	7

Legenda: v. tab. 2.
Condizione 1: codificazione in interazione e comunicazione a un coetaneo.
Condizione 2: codificazione in interazione e comunicazione soltanto evocata.
Condizione 3: codificazione individuale e comunicazione a un coetaneo.
Condizione 4: codificazione individuale e comunicazione soltanto evocata.

e) *Qualche osservazione a proposito dei registri utilizzati nella formulazione delle operazioni*

Finora abbiamo analizzato i cambiamenti osservati, nelle diverse situazioni sperimentali e di controllo, dal punto di vista della composizione e dell'esplicitazione delle quantità, ma non abbiamo ancora messo in luce un eventuale legame fra le modificazioni osservate e i registri utilizzati dagli alunni per indicare le operazioni.

Rileggendo i risultati relativi ai comportamenti di esplicitazione e di composizione, tenendo conto dei registri usati per indicare le operazioni, un elemento nuovo compare in questo esperimento: in realtà, il bambino nella fase 3 può fornire produzioni più esplicite e comporre i dati del problema in maniera più pertinente anche nei registri di formulazione che non si basano sulla scrittura aritmetica convenzionale.

I soggetti della condizione di controllo, che nella fase 3 non si sono trovati di fronte ad alcun intervento da parte nostra, sembrano fissarsi al primo registro utilizzato. Alcuni « regrediscono »; la maggior parte non modifica affatto la formulazione della fase 2, ma quelli che progrediscono di più (nella composizione e nell'esplicitazione) lo fanno adottando i segni della scrittura aritmetica: forse, data la mancanza di confronto con il punto di vista di un altro, (ad eccezione dello sguardo dello sperimentatore) hanno cercato sostegno nel linguaggio « normativo » della scuola?

Di fronte a questi differenti risultati, le domande che ci poniamo sono le seguenti: quale decodificazione della situazione hanno operato gli alunni dei diversi gruppi? Che spiegazione si danno i bambini della condizione di controllo, o quelli della condizione sperimentale 4 (relazione bambino-sperimentatore), della medesima « messa in scena » che, a qualche giorno d'intervallo, ripropone le stesse domande circa lo stesso gioco?

Non è forse vero che a scuola i bambini hanno l'abitudine di « rifare », « ricominciare » un lavoro quando è stato fatto male o se la risposta data in un primo tempo, è sbagliata? Allora, anche se lo sperimentatore si astiene da qualunque commento all'atto della prima codificazione, gli alunni non interpreteranno il nuovo esame (« nuovo » dal punto di vista dello svolgimento sperimentale, ma praticamente identico nel contenuto e nella forma) come una richiesta implicita di « migliorare » la loro prima produzione? È significativo infatti notare che la metà dei soggetti del gruppo di controllo modificano, in positivo o in negativo, la risposta iniziale. Qual è allora lo status cognitivo e sociale di queste modificazioni?

Allo stesso modo, uno studio dettagliato di ciò che avviene nelle interazioni fra coetanei durante la codificazione ci permetterebbe di capire meglio il significato attribuito al compito dai soggetti e lo status delle diverse produzioni: che cosa determina la scelta di un registro? Quali sono gli indici che orientano la loro produzione? I bambini negoziano esplicitamente fra loro la scelta da compiere? Le osservazioni condotte finora sembrano dimostrare che lo scambio raramente comincia con una discussione: di solito uno dei due prende l'iniziativa dicendo: « Scrivo », oppure « Faccio un calcolo ». In seguito, i bambini si correggono reciprocamente e, nella maggior parte dei casi, si limitano a curare la forma del messaggio, magari l'ortografia se il registro adottato è il linguaggio naturale.

Porre il problema in questi termini; mettere in discussione lo status delle produzioni raccolte nelle diverse condizioni sperimentali e di controllo; sondare il significato delle modificazioni ottenute nel corso delle micro-storie sperimentali costruite: tutto questo significa ripensare l'articolazione teorica fra « ciò che ci si aspettava » e « ciò che si è trovato ». Così, se prima di iniziare le procedure sperimentali descritte avevamo già qualche buona ragione per pensare che le situazioni relazionali di interazione e di comunicazione fra coetanei fossero particolarmente suscettibili di mettere in moto dei progressi (progressi che susseguentemente si sarebbero ritrovati nell'esecuzione individuale di un compito simile), ora proponiamo di tener conto, in « ciò che si è trovato », non solo della conferma dell'ipotesi principale in quanto tale, ma anche dell'insieme delle osservazioni (relative al compito, al rapporto fra i partner, al tipo di interrogazione, all'atteggiamento del bambino quando stabilisce l'intersoggettività necessaria alla ricerca di una soluzione, ecc.) che si sono raccolte nel corso delle condizioni e secondo le diverse modalità sperimentali previste.

f) *I progressi nella produzione di una formulazione scritta comportano progressi nella soluzione di equazioni lacunose?*

Abbiamo visto che l'alunno che completa correttamente una pagina di equazioni lacunose non ricorre automaticamente a questo codice per indicare un'operazione eseguita materialmente e mentalmente. Ma vediamo che cosa succede, sul piano di « una buona pagina di calcoli », dopo due o tre sedute sperimentali di lavoro sulle formulazioni scritte. In pratica, ci siamo posti la seguente domanda: se il bambino evolve nella formulazione della composizione dei dati, farà perciò stesso meno errori a un test carta-e-matita che chiama in causa operazioni dello stesso tipo? Vediamo i risultati della fase 5 (test carta-e-matita) in funzione delle precedenti condizioni sperimentali.

In base alle nostre analisi (Schubauer-Leoni e Perret-Clermont, 1983), possiamo dire che il progresso della formulazione della composizione delle quantità non si accompagna necessariamente ad una soluzione più corretta delle equazioni lacunose: quegli alunni che hanno specificamente lavorato alla formulazione di scritture simboliche (condizioni sperimentali 2a e 2b) e che mostrano uno sviluppo positivo nella formulazione della composizione delle quantità, eseguono il test carta-e-matita della fase 5, facendo talvolta addirittura più errori che nella fase 1.

Ci sembra possibile affermare che nei bambini di questi gruppi sperimentali si è creata una nuova dinamica: mentre evolvono nel compito nel quale si sono specificamente esercitati nella fase 3, sembrano in compenso manifestare delle pseudo-regressioni nella soluzione di equazioni lacunose.

Invece, gli alunni del gruppo di controllo, che nella fase 3 non hanno beneficiato di tale attività specifica, sorprendentemente progrediscono un po' di più nella soluzione di equazioni lacunose (attività che, non dimentichiamolo, è più tipicamente scolastica).

Ma le evoluzioni osservate nelle procedure di simbolizzazione non significano che i bambini padroneggiano le relazioni implicate nell'equazione $a + b - c = x$. Le formulazioni adottate descrivono, per lo più, procedure di calcolo. In linguaggio naturale, il bambino si esprime per esempio nei termini di « in tutto », « fa », ecc. Anche quando fa appello ai simboli aritmetici, certe scritture per concatenazione (sul tipo $5 + 3 = 8 - 2 = 6$) testimoniano che vuole esprimere una procedura di calcolo.

Secondo Freudenthal (*Encyclopaedia Universalis*, 1968, alla voce « Notazioni matematiche »), una tale concezione fa capo ad una « interpretazione ingenua » e, parlando del « senso delle formule algebriche », questo autore, aggiunge:

> L'interpretazione ingenua delle formula algebriche è quella di un resoconto circa una sequenza di operazioni e il loro risultato: $2 + 7$ è letto come un ordine « a 2 aggiungi 7 » e la formula $2 + 7 = 9$ come « a 2 aggiungi 7 e il risultato è 9 ». Questa interpretazione ingenua spiega altrettanto bene sia la struttura lineare delle espressioni del tipo $3 - 7 + 6 - 8 + 4$, sia quelle del tipo $2 + 7 = 9 + 7 = 16 + 7 = 23$... dei quaderni di aritmetica. Secondo l'interpretazione accettata in matematica, $2 + 7$ non costituisce un problema ma un numero e, in senso generale, $a + b$ è un numero in quanto a e b sono numeri. Secondo questa interpretazione, il segno di eguaglianza si legge « è lo stesso che ». Uno stesso oggetto può avere nomi diversi: così « Parigi » e « la capitale della Francia » designano lo stesso oggetto; il numero 9 può essere designato da un'infinità di espressioni, come $2 + 7$, $10 - 1$, 3^2, $9/1$, ecc. In questa interpretazione, il segno di eguaglianza non è un segno matematico ma un segno semantico, che esprime che due termini significano la stessa cosa.

Una tale concezione sembra presente a volte anche nell'adulto. N. Picard (1972), citato da Baruck (1973), osserva:

Tutti gli adulti con cui ho lavorato sapevano fare benissimo i calcoli. Tuttavia, nessuno era capace di giustificare la proposizione « $4 + 3 = 5 + 2$ » senza fare riferimento al « risultato » dell'addizione. Tutti hanno rifiutato di considerare « $4 + 3$ » come *un numero*. L'eguaglianza peraltro appare loro non come un segnale d'identificazione di due designazioni (il che dà il diritto di sostituire quando si vuole una designazione all'altra), ma come un segnale di risultato.

Conclusione

Al termine dell'analisi di queste due ricerche, ci sembra possibile affermare che le situazioni che permettono all'alunno di confrontare il suo punto di vista, la sua idea della formulazione, con un compagno che ha un approccio divergente, sono suscettibili di favorire una composizione e un'esplicitazione più completa dei dati del problema. Il bambino in interazione con un coetaneo (condizioni 1 e 2 della fase 3) e poi da solo nella fase 4 può così giungere a una formulazione del messaggio scritto (per una terza persona che lo leggerà realmente o per un decodificatore potenziale), che esplicita dettagliatamente le quantità e le operazioni eseguite su di esse, ma non necessariamente utilizzerà a questo fine la scrittura aritmetica classica.

D'altra parte, abbiamo visto che la capacità di completare equazioni lacunose di tipo additivo non va di pari passo con l'uso di questo stesso codice all'atto di una formulazione di operazioni eseguita dall'alunno; né, viceversa, l'esercizio specifico dell'attività di formulazione comporta necessariamente dei progressi (cioè, meno errori) nella risoluzione di eguaglianze lacunose: questi due tipi di competenza sembrano quindi far capo a meccanismi (cognitivi, ma forse anche di rappresentazione sociale della situazione e del compito) di natura diversa.

Per quanto riguarda la composizione delle quantità e l'esplicitazione dei dati, i soggetti della condizione sperimentale 3 (codificazione individuale e confronto con la decodificazione di un coetaneo) sembrano evolvere meno di quelli delle condizioni 1 e 2 (con interazione) e anche della condizione 4 (bambino solo di fronte all'adulto).

Abbiamo rilevato, inoltre, che la dinamica attivata dalle situazioni di interazione si manifesta anche attraverso cambiamenti a livello dei registri utilizzati: i soggetti della condizione di controllo (Brun e Schubauer-Leoni, 1981) lavorano in maggioranza nell'ambito dello stesso registro per indicare le operazioni della fase 2 e della fase 4, mentre gli alunni del gruppo sperimentale si mostrano più mobili da questo punto di vista.

Abbiamo osservato infine che il ricorso al codice equazionale insegnato a scuola per formulare le operazioni in gioco, rimane sporadico (un po' più frequente nei bambini della condizione 1 « interazione e comunicazione »); ci chiediamo allora come e in quali circostanze sociali l'alunno si appropria di questo codice e giudica pertinente utilizzarlo per indicare operazioni additive. In altri termini, se il bambino non ricorre alla scrittura equazionale per indicare (in un modo che sembrerebbe funzionale all'adulto sperimentatore) le operazioni eseguite, di che ordine sono gli ostacoli che glielo impediscono? L'intreccio fra dimensioni cognitive e sociali ci sembra particolarmente complesso. Elementi di comprensione e di esplicitazione del processo sono forse da ricercare all'incrocio di vari assi di ricerca, fra cui i principali ci sembrano i seguenti:

— il primo consiste nello sviluppare lo studio delle conoscenze matematiche nell'alunno (da solo; con l'adulto; con coetanei; in situazione di laboratorio e nella sua classe scolastica) tenendo conto delle caratteristiche delle situazioni e del contesto (cognitivo, relazionale e materiale) in cui queste si attualizzano e funzionano;

— il secondo asse di ricerca dovrebbe individuare mediante quali categorie di pensiero l'alunno e poi l'insegnante, o magari lo sperimentatore, si rappresentano la matematica, come oggetto rispettivamente da apprendere ovvero da insegnare. Tramite le rappresentazioni sociali all'opera nel processo di insegnamento-appropriazione (Perret-Clermont e coll., 1982), si dovrebbe poter decodificare meglio gli indici che permettono all'alunno, di fronte a un problema (etichettato, oppure no, come un problema di matematica) di interpretare il senso della domanda e di scegliere fra una serie di strategie e di risposte possibili, quelle che gli sembrano cognitivamente soddisfacenti e allo stesso tempo pertinenti, o magari socialmente accettabili nel contesto particolare in cui si trova.