

4347
870

Université de Neuchâtel

Faculté des Sciences

Modélisation à méso-échelle de
l'hydrodynamique et du transport de
particules en milieu marin semi-ouvert.
Application au Golfe du Lion.

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
de l'Université de Neuchâtel

pour l'obtention du grade de Docteur ès Sciences
par

Vincent THUNUS

Ingénieur Civil Mécanicien (Mécanique Physique)
diplômé de l'Université de Liège (B)

Soutenue le 30 janvier 1996 devant le Jury d'Examen composé de

Dr François Nyffeler, Université de Neuchâtel	Président
Dr Pierre Brasseur, Université J. Fourier, Grenoble	Examineur
Pr Miquel Canals, Universitat de Barcelona	Examineur
Pr Dieter Imboden, ETH Zürich	Examineur
Dr Claude Millot, COM/CNRS, La Seyne sur Mer	Examineur
Dr Eduard Zuur, Université de Neuchâtel	Examineur

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Modélisation à mésoéchelle de l'hydrodynamique et du
transport de particules en milieu marin semi-ouvert.
"Application au Golfe du Lion"

de M. Vincent Thunus

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de
Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

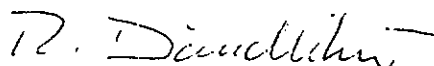
Messieurs F. Nyffeler, E. Zuur, D. Imboden (Zürich),
C. Millot (IFREMER; L. Seine s/Mer), M. Canals (Barcelone)
et P. Brasseur (Grenoble)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 16 juillet 1996

Le doyen:

R. Dändliker



Résumé

Ce travail porte sur la modélisation de l'hydrodynamique et du transport de matériel particulaire en suspension dans un milieu marin semi-ouvert, le Golfe du Lion, en Méditerranée.

Il s'inscrit dans le contexte du programme de recherche européen EURO-MARGE dont l'objectif est l'identification des facteurs contrôlant le fonctionnement des écosystèmes des marges continentales et de la manière dont ces facteurs interagissent. Dans ce contexte, la description et l'analyse des processus hydrodynamiques majeurs de la méso-échelle ainsi que la mesure de leur importance relative pour le transport des particules constituent la finalité de notre travail.

Un modèle de circulation générale, le PROSPER General Circulation Model (PGCM), développé au sein du groupe PROSPER, à l'Université de Neuchâtel, a été utilisé. Il repose sur les équations primitives classiques, présentées néanmoins dans une formulation équivalente plus appropriée à leur résolution.

La mise en oeuvre du modèle a nécessité une approche nouvelle du problème des conditions limites aux frontières ouvertes ainsi qu'une optimisation de l'algorithme de résolution.

L'origine des difficultés associées au traitement du problème des conditions limites aux frontières ouvertes est examinée en détail. Les manifestations en sont décrites et une approche est proposée pour en éliminer ou limiter au maximum les inconvénients. Après avoir mis l'accent sur l'importance de l'incompressibilité du champ de vitesse, on présente l'optimisation qui a été développée et implémentée dans l'algorithme de résolution.

Les développements apportés au modèle ont permis, d'une part, d'éliminer les effets indésirables de couches limites artificielles aux frontières ouvertes et, d'autre part, de réduire le temps de calcul des simulations effectuées d'un facteur 8.

Afin de rencontrer la finalité de notre travail, l'exploitation du modèle a consisté en une série de simulations visant à mettre en évidence les caractéristiques de la circulation et du transport de particules sous des conditions de forçage typiques. Des circulations moyennes pour le mois de juillet et février sont décrites et analysées. Elles servent de cadre à l'étude de la réponse hydrodynamique à plusieurs épisodes de vent d'une durée de l'ordre de la semaine.

Un modèle de transport simple couplé au modèle hydrodynamique a permis de calculer les trajectoires de particules lâchées en divers points sources et mues sous l'action combinée de l'advection par le fluide et de leur propre

poids (induisant une vitesse de chute par différence de densité avec le fluide).

Parmi les processus majeurs mis en évidence, on peut citer, entre autres, les upwellings et downwellings générés par le vent, les mouvements de contre-courant induits par la circulation de surface ou les oscillations d'inertie et les ondes internes. L'interprétation des résultats met également en évidence l'influence des vents du NO, Mistral et Tramontane, dans la formation, en période estivale, d'une circulation anticyclonique sur la partie occidentale du plateau.

Les mécanismes de base du transport sont identifiés et le rôle essentiel des épisodes de vent pour la dispersion du matériel est souligné dans les différentes simulations. Les résultats illustrent la multiplicité des "schémas" de dispersion. L'influence de la circulation est particulièrement sensible dans les couches de surfaces où l'amplitude des courants, sous l'action du vent, peut être très importante, et dans les zones de downwelling et d'upwelling où le mouvement de chute des particules peut être amplifié ou ralenti, voire renversé.

Les résultats des simulations sont rassemblés, sous la forme de figures, dans un volume séparé.

Abstract

This work deals with hydrodynamics and suspended particle transport modelling in a semi-open marine environment, the Gulf of Lions, in the Mediterranean Sea.

It has been part of the EUROMARGE European research program which aims to identify the factors governing the behaviour of continental margin ecosystems and their interaction. In this context, our aim is to describe and analyse the major mesoscale hydrodynamic processes as well as their relative importance for particle transport.

The PROSPER General Circulation Model (PGCM), developed by the PROSPER group at Neuchâtel University was used for this purpose. It is based on the classical primitive equations, which are given out in an equivalent formulation more suited to solving them.

Operating the model necessitated a new approach to the open boundary condition problem and an optimization of the algorithm.

The origin of difficulties associated with the open boundary condition problem is examined in detail. How these difficulties are manifested is described and a method is suggested to eliminate them or limit them as much as possible. After having emphasized the importance of the incompressibility of the velocity field, we show the optimization which has been developed and implemented in the algorithm.

The developments brought into the model removed the unwanted effects of artificial boundary layers and reduced computation times by a factor of 8 respectively.

The model was then used for several simulations to demonstrate the characteristics of circulation and particle transport under typical forcing conditions. Mean circulations for July and February are described and analysed. These serve as a basis for the study of the hydrodynamic response to several wind events lasting for around one week.

A simple transport model coupled with the hydrodynamic model made it possible to calculate trajectories of particles released from different point sources and moved under the combined action of advection by the fluid and their own weight (leading to a settling velocity due to density differences from the fluid).

Amongst the major processes identified were upwellings and downwellings caused by wind, the counter-currents induced by surface circulation or the inertial oscillations and internal waves. The interpretation of the results also shows the influence of northwesterly winds (Mistral and Tramontane)

in forming an anticyclonic circulation on the western part of the shelf in the summer period.

The basic transport mechanisms are identified and the essential role of wind events for the dispersion of the material is highlighted in the various simulations. The results show the diversity of dispersion patterns. The influence of the circulation is particularly strong in surface layers where the magnitude of the currents, under the action of the wind, can be very important, and in the zones of downwelling and upwelling where the particle fall movements can be increased or slowed, or even reversed.

The results of the simulations are brought together in a separate volume in the form of graphic representations.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier François Nyffeler qui a soutenu et dirigé cette recherche; je lui suis en particulier reconnaissant de la confiance qu'il m'a accordée. Par ailleurs, grâce à sa critique toujours constructive, les versions successives du manuscrit ont pu chaque fois être améliorées.

Je tiens également à remercier Eduard Zuur qui a supervisé la partie mathématique de ce travail et de la part de qui j'ai bénéficié de nombreux conseils. J'ai ainsi pu apprécier sa compétence et son savoir-faire. De nos discussions, parfois animées, j'ai souvent pu tirer des idées utiles. Je le remercie en outre d'avoir mis à ma disposition le code du PGCM dont l'exploitation a permis d'obtenir des résultats de qualité.

Je remercie également Pierre Brasseur de m'avoir fourni les résultats de son modèle inverse qui ont été utilisés lors des simulations numériques. A plusieurs reprises, Xavier Durieu de Madron m'a apporté des références utiles. Qu'il soit ici remercié.

Au cours de ce travail, j'ai fait usage de nombreuses ressources informatiques. A ce titre, je remercie le Département de Calcul de l'Université de Neuchâtel, le Centre Suisse de Calcul Scientifique et l'entreprise Silicon Graphics d'avoir mis à ma disposition les moyens techniques appropriés.

Pour leur aide en diverses occasions ou pour leurs marques d'amitié, que soient encore remerciés tous mes collègues et amis de l'Institut de Géologie et de l'Institut d'Informatique, et en particulier Thierry Adatte, Robin Farine, Claude Fuhrer, Charles-Henri Godet, David Hindle, Laszlo Kiraly, Bernard Kübler, Elisabeth Kuster, Pierre Lambert, Marc Rolli et Hervé Sanglard.

Je voudrais enfin exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury.

Ce travail n'aurait pas pu être réalisé sans le soutien financier du Fonds National de la Recherche Scientifique (contrat 20-30169.90) et de l'Office Fédéral de l'Éducation et la Science (contrats 93.0044 et 93.0101), octroyé sur les crédits alloués pour la participation au programme de recherche européen EUROMARGE. Je leur exprime toute ma gratitude ainsi qu'à l'Université de Neuchâtel.

J'ai ici une pensée particulière pour mes parents qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de cette thèse comme ils l'ont fait auparavant durant mes études. Merci Papa pour l'aide apportée à l'encodage de la bibliographie.

Et à toi surtout, Chantal, merci.

A Chantal

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Caractérisation des particules	4
1.2	Temps de résidence et échelle spatiale du transport	7
1.3	Processus hydrodynamiques majeurs du Golfe du Lion	8
1.4	Définition de la fenêtre spectrale du modèle	10
1.5	Finalité du travail et développements nécessaires	12
2	Modèle physique	15
2.1	Equations primitives	15
2.1.1	Dimensions caractéristiques des milieux marins et rotation terrestre	15
2.1.2	Variations de densité et approximation de Boussinesq	17
2.1.3	Variabilité de l'océan et turbulence	18
2.1.4	Ordres de grandeur et approximation hydrostatique	19
2.1.5	Equations primitives	20
2.2	Ondes de gravité	21
2.2.1	Etat d'équilibre et équations aux petites perturbations	21
2.2.2	Ondes dans un milieu de densité homogène	23
2.2.3	Ondes dans un milieu stratifié	25
2.2.4	Ondes internes, ondes de surface et approximation du toit rigide	27
2.2.5	Résolution des ondes de gravité dans un modèle de circulation générale	28
2.3	Formulation équivalente des équations primitives	29
2.4	Relation entre pression et incompressibilité de l'écoulement	32
2.4.1	... sans l'approximation hydrostatique	32
2.4.2	... avec l'approximation hydrostatique	34
3	Conditions initiales et limites	39
3.1	Formulation de base des conditions initiales et limites pour les équations primitives	40

3.2	Le problème des conditions limites en mer ouverte	43
3.3	Reformulation des conditions limites sur la base du problème non visqueux	47
3.3.1	Advection et diffusion dans l'équation de la poussée . . .	48
3.3.2	Caractère mal posé de conditions limites locales	51
3.3.3	Application de la méthode de l'énergie	54
3.3.4	Reformulation des conditions limites pour les équations primitives avec viscosité	59
3.4	Approximation hydrostatique et vitesse u_3 sur des surfaces verticales	61
3.5	Construction des champs initiaux et limites	64
3.5.1	Le modèle inverse	65
3.5.2	Construction des champs initiaux	66
3.5.3	Construction des champs limites entrants	67
3.6	Annexe: formulation des équations primitives non visqueuses en coordonnées horizontales curvilignes	69
4	Modèle numérique	71
4.1	Discrétisation dans le temps des équations primitives	72
4.2	Problème de Stokes hydrostatique et algorithme de résolution	74
4.2.1	Formulation variationnelle	74
4.2.2	Algorithme d'Uzawa	76
4.3	Incompressibilité du champ de vitesse et stabilité numérique .	77
4.4	Discrétisation spatiale et formulation du problème de Stokes hydrostatique discret	80
4.4.1	Discrétisations isotropes	80
4.4.2	Discrétisations verticalement structurées	82
4.5	Optimisation de l'algorithme de résolution	84
4.5.1	Décomposition du problème de Stokes	84
4.5.2	Optimisation pour une discrétisation isotrope	85
4.5.3	Optimisation pour une discrétisation verticalement stru- cturée	87
4.5.4	Extension des résultats	88
4.6	Configuration du PGCM	88
4.6.1	Equations pour la vitesse et la poussée	88
4.6.2	Approximation aux différences finies sur grille Arakawa- C	89
4.6.3	Implémentation de l'algorithme de résolution optimisé .	91
4.6.4	Discrétisation des conditions limites	91
4.7	Paramètres de discrétisation pour le Golfe du Lion	92

5	Simulations dans le Golfe du Lion: résultats et analyse	95
5.1	Conditions et paramètres de simulation	97
5.1.1	Conditions initiales et limites	97
5.1.2	Flux thermiques et halins en surface	97
5.1.3	Equation d'état	97
5.1.4	Coefficients de viscosité et diffusivité turbulentes	98
5.2	Circulation moyenne estivale (juillet)	99
5.2.1	Simulation hydrodynamique	99
5.2.2	Transport de particules	102
5.3	Circulation (juillet) par vent du NO	107
5.3.1	Simulation hydrodynamique	111
5.3.2	Transport de particules	113
5.4	Circulation (juillet) par vent variable	118
5.4.1	Localisation et intensité des upwellings	121
5.4.2	Circulation anticyclonique	121
5.4.3	Oscillations d'inertie et ondes internes	125
5.5	Circulation moyenne hivernale (février)	127
5.5.1	Simulation hydrodynamique	127
5.5.2	Transport de particules	129
5.6	Circulation (février) par vent du NO	130
5.6.1	Simulation hydrodynamique	130
5.6.2	Transport de particules	132
5.7	Circulation (février) par vent du SE	134
5.7.1	Simulation hydrodynamique	134
5.7.2	Transport de particules	134
6	Synthèse et conclusions	137
6.1	Rappel du contexte de l'étude	137
6.2	Approche et développements originaux	138
6.3	Synthèse des principaux résultats	139
6.4	Conclusions et perspectives	142

Chapitre 1

Introduction

Ces dernières années, les problèmes de pollution ont suscité un intérêt croissant au sein de l'opinion publique. Parmi ces problèmes, on peut citer ceux liés à la production anthropogène de CO₂ et plus particulièrement à l'augmentation de sa concentration dans l'atmosphère résultant de la consommation de combustibles fossiles. Les médias en ont fréquemment évoqué les conséquences sur le climat. Les problèmes de pollution des eaux deviennent également chaque jour plus sensibles et leurs conséquences à court terme ont déjà été mesurées. Du fait des interactions multiples avec les autres milieux, le milieu marin constitue un réceptacle pour un grand nombre de polluants. L'évaluation et la gestion des problèmes écologiques requièrent donc une compréhension plus profonde des processus physiques, géochimiques et biologiques de l'environnement marin.

Depuis 1987, le programme transnational JGOFS (Joint Global Ocean Flux Study) coordonne les divers programmes de recherche qui visent à améliorer la compréhension de mécanismes contrôlant les cycles biogéochimiques majeurs (C, N, P, Si, O, etc.) et à estimer les échanges de matière entre les différents milieux.

Parmi les différents milieux marins, on peut distinguer les marges continentales en tant que zones spécifiques. En raison de leur position tampon entre zones côtières et abyssales et du fait d'importants apports de matériel provenant à la fois de sources terrestres et d'une grande productivité, les marges continentales jouent en effet un rôle essentiel dans le cycle global des éléments de l'océan.

Le programme français ECOMARGE (1983-1988) puis aujourd'hui le programme européen EUROMARGE (1991-1995) ont visé et visent à développer une étude interdisciplinaire des écosystèmes des marges continentales. Ils constituent ainsi des contributions à JGOFS.

Les objectifs de l'expérience ECOMARGE-I étaient définis en ces termes (Monaco et al. 1990):

- quantifier le transfert de matière particulaire, en général, et de carbone organique, en particulier, depuis son introduction et sa formation dans les eaux du plateau continental, jusqu'à sa consommation ou sédimentation sur le plateau ou son transfert vers la pente et la mer profonde,
- comprendre les processus impliqués dans le transfert, la consommation et la sédimentation en relation avec leur variabilité spatiale et temporelle .

Sous forme de questions, les objectifs pourraient être formulés comme suit. D'une part,

- quelles sont les sources de particules (introduction, formation et resuspension)?
- Quels sont les puits de particules (consommation et sédimentation)?
- Quels sont les flux associés au transfert des particules depuis les sources jusqu'aux puits?

Et, d'autre part,

- quels sont les processus associés et leurs échelles spatiales et temporelles?

Parmi les sites d'étude choisis, le Golfe du Lion en Méditerranée a fait l'objet de plusieurs campagnes de mesures effectuées dans la colonne d'eau et dans le sédiment, en grande partie concentrées à proximité des principaux canyons sous-marins (figure 1.1). Les résultats de ces campagnes (l'édition spéciale (ECOMARGE 1990) en réunit les principaux) et en particulier des études portant sur la colonne d'eau ont montré l'importance du forcing hydrodynamique et du transport advectif de la matière particulaire ainsi que de la structure physique de la marge continentale. Une grande variabilité spatio-temporelle dans les mesures a été également observée.

Dans le prolongement d'ECOMARGE, le programme EUROMARGE s'est fixé pour objectif l'identification des facteurs contrôlant le fonctionnement des écosystèmes des marges continentales et de la manière dont ces facteurs interagissent pour produire la grande variabilité observée (Dinet 1993; Canals et al. 1994; Canals et al. 1995).

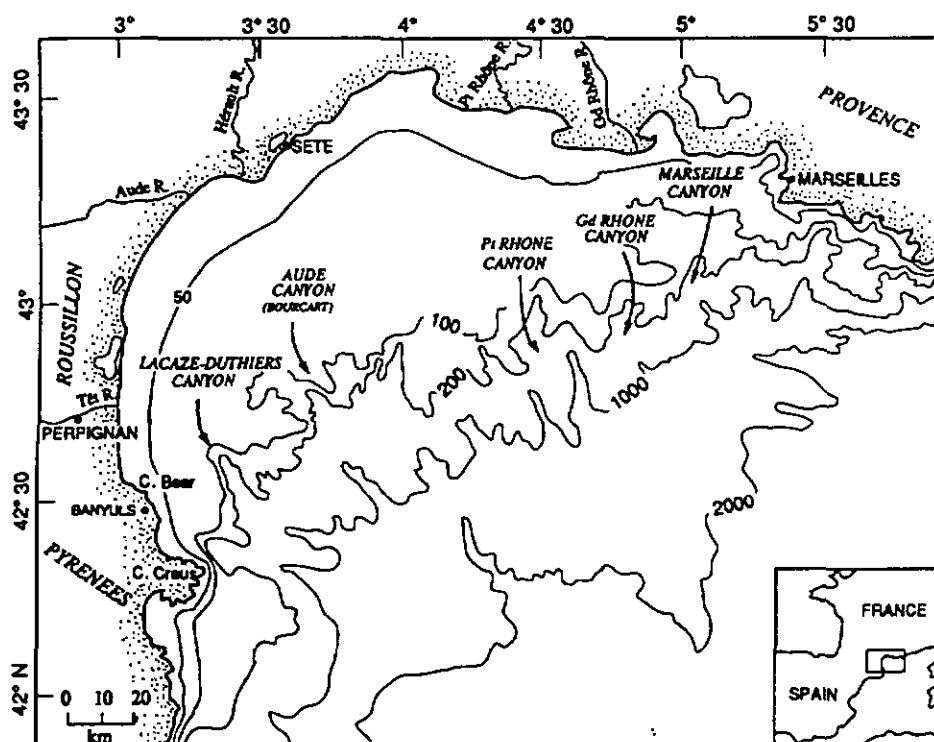


Figure 1.1: Bathymétrie du Golfe du Lion et localisation des principaux canyons

Du point de vue hydrodynamique, cet objectif s'est traduit dans la pratique par le mouillage de lignes de courantomètres, devant permettre de corréler les autres mesures (hydrologiques, néphélogiques, sédimentologiques, etc.) de la colonne d'eau avec le signal de courant. L'action locale des courants sur les différents paramètres mesurés pourra ainsi être mieux discernée.

A une échelle plus large cependant, une meilleure description et compréhension des processus de transport des particules par les courants reste nécessaire. En effet, si l'on est intéressé par la destination des particules dans le bassin depuis leur point source dans la colonne d'eau jusqu'au sédiment, il apparaît essentiel de pouvoir décrire comment elles passent de l'un à l'autre.

Notre travail s'inscrit dans cette perspective. Le site étudié est le Golfe du Lion et l'outil utilisé est un modèle hydrodynamique auquel est couplé un modèle de transport de particules.

Un tel modèle est susceptible d'apporter de précieux éléments d'inter-

prétation et de compréhension des processus. Idéalement, ce modèle devrait intégrer toutes à la fois des composantes physiques, biologiques, chimiques et géochimiques. Son envergure serait toutefois telle qu'il deviendrait difficile de l'appliquer à des cas concrets. Réduire l'envergure de ce modèle idéal est donc indispensable si l'on veut disposer d'un outil aisé à mettre en oeuvre.

La démarche adoptée à cet effet pour notre approche passe par

- une caractérisation simplifiée des particules,
- une évaluation de l'échelle spatiale du transport en fonction des temps de résidence des particules,
- la définition de la fenêtre spectrale du modèle.

Les deux premiers points font l'objet des sections 1.1 et 1.2 qui suivent. La section 1.3 est un rappel des processus hydrodynamiques majeurs, basé principalement sur l'article de Millot (1990). Elle introduit la section 1.4 consacrée à la définition de la fenêtre spectrale du modèle. Enfin, la section 1.5 précise la finalité de notre travail et évoque les développements qu'elle a nécessités.

1.1 Caractérisation des particules

Les particules qui composent la matière particulaire en suspension dans les océans ont des tailles variant de $0,02 \mu\text{m}$ ¹ à plusieurs *mm* de diamètre. Les particules de tailles entre 1 et $10 \mu\text{m}$ en constituent toutefois la majeure partie (Lal 1977).

La nature et l'origine de ce matériel sont multiples. On distingue comme sources principales: les rivières qui apportent du matériel terrigène et, dans la plupart des cas, également anthropogène; l'atmosphère où les vents transportent du matériel terrigène et anthropogène; l'activité biologique euphotique ou benthique; l'activité néotectonique, avec des apports de matériel terrigène. Selon leur nature, les formes de particules sont très hétérogènes. La figure 1.2 illustre la variété de particules observées dans les eaux de la Méditerranée. La densité des particules, fonction de leur composition et de leur teneur en eau est également variable.

Sous l'effet de la gravitation, en raison de leur densité plus importante que celle de l'eau de mer, ces particules acquièrent une vitesse de chute par

¹Cette valeur correspond à la limite inférieure arbitraire d'une définition pratique des particules.



Figure 1.2: Exemples de particules observées dans les eaux de la Méditerranée (Xavier Durrieu de Madron, communication personnelle)

rapport au fluide environnant. Pour des particules sphériques, la formule de Stokes en fournit une évaluation simple. Elle s'écrit

$$V_{set} = \frac{1}{18} \frac{1}{\mu} (\rho_p - \rho_w) g \phi^2 \quad (1.1)$$

avec ρ_p et ρ_w les densités de la particule et du fluide, g l'accélération de la pesanteur, ϕ le diamètre de la particule et μ la viscosité du fluide. Avec des valeurs de $\rho_p = 2,6 \cdot 10^3 \text{kgm}^{-3}$, $\rho_w = 10^3 \text{kgm}^{-3}$ et $\mu = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-1}$ par exemple, on obtient les estimations reprises dans le tableau 1.1.

La formule de Stokes repose sur un modèle de particule idéalisé et les valeurs de vitesses de chute obtenues s'éloignent parfois sensiblement des valeurs réelles selon le type de particules considérées. Lorsque notamment

<i>diamètre</i>	<i>vitesse de chute</i>
$2\mu m$	$0,27m j^{-1} = 3,1 10^{-6}m s^{-1}$
$30\mu m$	$61m j^{-1} = 7,1 10^{-4}m s^{-1}$
$100\mu m$	$680m j^{-1} = 7,9 10^{-3}m s^{-1}$

Tableau 1.1: Estimations des vitesses de chute d'après la formule de Stokes pour quelques tailles de particules.

la concentration des particules dépasse certaines valeurs limites, la vitesse de chute devient une fonction de la concentration (Mehta 1984; Teisson and Latteux 1986).

Diverses méthodes expérimentales peuvent être également utilisées pour la déterminer. Une première méthode consiste, à partir de mesures de flux de particules et de concentration, à déduire une vitesse de chute. La méthode est (en principe) simple, mais la différenciation des types de matériels n'est pas toujours aisée (Asper 1986; Shanks and Edmondson 1990). Des systèmes vidéo ont été également développés pour la mesure in situ des tailles et vitesses de chute d'agrégats (Van Leussen and Cornelisse 1993). D'autres méthodes, reposant sur des mesures en laboratoire dans des conditions de similitude adéquates, ont débouché sur de nouvelles formulations de vitesses de chute, généralement de la forme de celle de Stokes avec des facteurs correctifs prenant en compte la structure irrégulière des particules (Baba and Komar 1981).

L'évaluation des vitesses de chute en fonction des forme, taille et densité des particules pour l'ensemble d'une population de particules polydispersée n'est pas possible. Du point de vue du transport, il est dès lors beaucoup plus commode de caractériser les particules par leur vitesse de chute.

Cette caractérisation des particules simplifie considérablement le modèle de transport. Les effets des processus tels que la dissolution, l'aggrégation ou la consommation peuvent être pris en compte en modifiant les valeurs de vitesse de chute. Ils ne peuvent cependant plus être paramétrés dans le modèle en fonction de la forme, de la taille ou de la densité des particules.

Le modèle de transport que nous utiliserons consiste à intégrer, à partir de la connaissance des champs de vitesse du fluide et de la vitesse de chute, les trajectoires des particules. Plusieurs classes de particules caractérisées par leur vitesse de chute seront considérées.

1.2 Temps de résidence et échelle spatiale du transport

Aux vitesses de chute on associe des temps de résidence dans la colonne d'eau. Le tableau 1.2 donne les temps de résidence rapportés à la hauteur de la colonne d'eau pour les quelques valeurs de vitesses de chute obtenues précédemment.

<i>vitesse de chute</i>	<i>temps de résidence</i>
$0,27m\ j^{-1} = 3,1\ 10^{-6}m\ s^{-1}$	$3,7j\ m^{-1}$
$61m\ j^{-1} = 7,1\ 10^{-4}m\ s^{-1}$	$23,6min\ m^{-1}$
$680m\ j^{-1} = 7,9\ 10^{-3}m\ s^{-1}$	$2,1min\ m^{-1}$

Tableau 1.2: Temps de résidence rapportés à la hauteur de colonne d'eau pour quelques valeurs de vitesses de chute.

Pour des profondeurs de l'ordre de quelques dizaines de mètres à plusieurs centaines ou milliers de mètres, les temps de résidence des particules aux vitesses de chute comprises entre quelques dizaines de $cm\ j^{-1}$ et quelques centaines de $m\ j^{-1}$ varient de l'heure à plusieurs années. Lorsque le temps de résidence est inférieur à quelques heures, l'effet de la circulation générale est marginal et les sites de déposition sont très proches des points sources. Au delà de quelques heures, l'influence de la circulation devient essentielle et la connaissance des courants est alors indispensable pour tracer les particules.

Les échelles spatiales du transport sont fonctions du rapport entre les vitesses de chute et d'advection par le fluide. Si les vitesses horizontales sont relativement uniformes en amplitude et direction sur toute la hauteur de la colonne d'eau, le produit de la vitesse par le temps de résidence fournit une évaluation de l'échelle spatiale du transport. Ainsi, par exemple, pour un temps de résidence de l'ordre du mois et une vitesse de l'ordre de la dizaine de $cm\ s^{-1}$, l'échelle spatiale est de l'ordre de $260km$.

En réalité, des champs de vitesse uniformes sont exceptionnels et l'on observe plutôt une grande variabilité. Dans ces conditions, plus l'échelle spatiale est grande, plus les particules sont susceptibles d'être dispersées. Le rôle de la vitesse de chute est alors essentiel puisque c'est elle qui contrôle leur déplacement entre couches où les champs de vitesses peuvent varier fortement en intensité et direction.

A la vitesse de chute des particules il faut ajouter la composante verticale de la vitesse du fluide pour obtenir la vitesse verticale résultante de la particule. Pour des particules avec des valeurs de vitesses de chute jusqu'à l'ordre du $mm\ s^{-1}$, on comprend que la vitesse verticale du fluide revêt une importance particulière.

En définitive, l'étude du transport de la matière particulaire en suspension requiert une modélisation hydrodynamique tridimensionnelle capable de résoudre, dans leurs dimensions horizontales et verticale, les processus qui influencent la dispersion particulaire à grande échelle.

1.3 Processus hydrodynamiques majeurs du Golfe du Lion

La Méditerranée est souvent présentée comme un modèle d'océan en miniature car elle concentre un grand nombre de processus observables par ailleurs dans les océans. Plusieurs d'entre eux se rencontrent dans le Golfe du Lion et leur interaction résulte en des structures complexes à toutes échelles. Dans (Millot 1990), Millot les passe en revue et nous allons ici en reprendre les principaux.

Le courant liguro-provençal-catalan ou courant Nord ² est la structure hydrodynamique dominante du bassin Nord-Baléares. Il est associé à la circulation générale de la Méditerranée occidentale et entraîne les masses d'eaux au travers du Golfe dans un flux NE-SO.

On y distingue trois couches caractérisées par leurs paramètres hydrologiques: la température, la salinité et la densité (Lacombe and Tchernia 1972; Béthoux 1980; Millot 1987). La couche de surface, d'une épaisseur d'environ 200m, est constituée d'eau d'origine atlantique et est sous l'influence directe des conditions météorologiques. On y observe, comme dans toute la Méditerranée, des variations saisonnières de la stratification, avec, du printemps à l'automne, la formation puis la disparition d'une thermocline. Plus en profondeur, à peu près entre 200 et 800m, on trouve de l'eau intermédiaire levantine caractérisée par un maximum thermique et halin. Sous l'eau intermédiaire levantine et jusqu'au fond, s'écoule l'eau méditerranéenne profonde, quasi homogène en température et salinité. Toutes ces masses d'eau longent la pente continentale; les eaux immergées à moins de 100m débordent toutefois sur

²Dans la région du Golfe du Lion, on parlera simplement de "courant liguro-provençal" (LP).

1.3 Processus hydrodynamiques majeurs du Golfe du Lion

le plateau.

Des mouvements verticaux résultent de l'interaction du courant avec le talus et des circulations secondaires peuvent apparaître sur le plateau. Les vitesses du courant LP peuvent atteindre 50cm s^{-1} près de la surface et sont de l'ordre de quelques cm s^{-1} à partir de quelques centaines de mètres de profondeur. Les flux (de masse) associés au courant sont de l'ordre du sverdrup ($= 10^6\text{m}^3\text{s}^{-1}$) et peuvent être jusqu'à doublés en hiver (Béthoux et al. 1988).

C'est en hiver qu'on observe la formation d'eau dense dans le Golfe du Lion. Ce processus, parmi d'autres, semble être un moteur de la circulation générale (Crépon and Boukthir 1987). La région est exposée en hiver à des vents du NO froids et secs qui provoquent un refroidissement et une évaporation intenses de masses d'eau proches de la surface. Il en résulte la formation d'eau dense qui, par différence de densité, va plonger. Au large, ces mouvements se développent en de véritables cheminées d'une dizaine de km de diamètre dans lesquelles les vitesses verticales peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de 10cm s^{-1} . Sur le plateau, les masses d'eau dense formées de la même manière se répandent sur le plateau entier et peuvent s'écouler le long de la pente dans un mouvement de "cascading". Les vents du NO provoquent également des upwellings sur le plateau qui renforcent le mécanisme de formation d'eau dense.

Les termes d'upwelling et downwelling désignent de manière générique des mouvements d'eau ascendants ou descendants. On les observe généralement le long des reliefs et ils résultent de l'interaction des courants avec ceux-ci. Ces processus sont toutefois plus marqués en amplitude lorsqu'ils sont provoqués par le vent.

Les vents dominants sur le Golfe du Lion sont les vents du NO, Mistral et Tramontane, soufflant depuis les passages entre les Alpes et le Massif Central pour le premier et entre Massif Central et Pyrénées pour le second, ainsi que les vents du SE. Les vents du NO sont très fréquents (ils soufflent en moyenne entre un jour sur deux et un jour sur trois). Ils ont des vitesses moyennes de 10 à 15m s^{-1} et durent quelques jours l'été; ils sont plus forts encore l'hiver et peuvent souffler durant plusieurs semaines.

Lorsqu'ils soufflent, ils entraînent les masses d'eau superficielle dans un mouvement de S à SO. Ces masses d'eau sont déplacées rapidement vers la large (pour une grande part) et vers les côtes O-SO. Là se développent des downwellings tandis que des upwellings apparaissent sur les côtes NO-NE et l'on observe des courants de retour dans les couches de fond. Ces mouvements verticaux affectent sensiblement la distribution des masses d'eau: des

variations de 5°C voire davantage peuvent apparaître après un jour dans les zones d'upwelling.

Bien que moins fréquents, les vents du SE peuvent souffler violemment, particulièrement de l'automne au printemps; les vitesses peuvent atteindre 25m s^{-1} . Ces vents engendrent des upwellings et des downwellings mais également des houles de forte amplitude (jusqu'à 5m) et des courants littoraux intenses. Les houles ont des périodes de l'ordre de 6 à 8s. Selon Lacombe (1965), les vitesses des courants de fond induits varient entre 100 et 30cm s^{-1} à des profondeurs de 20m , entre 15 et 2cm s^{-1} à 50m et ne dépassent pas 1cm s^{-1} à 100m .

Des variations brutales du vent peuvent provoquer des oscillations dans le transport d'Ekman de surface, de période égale à la période d'inertie. La période d'inertie (égale à $2\pi/f$, avec f le paramètre de Coriolis) a une valeur d'environ $17,5h$ dans le Golfe du Lion. On observe alors une rotation des courants dans le sens des aiguilles d'une montre. A ces oscillations sont associées des ondes internes (sauf en hiver lorsque la stratification a disparu) de période proche, pouvant se propager sur de larges distances, au delà des limites du Golfe du Lion.

Mentionnons enfin les apports d'eau douce du Rhône. De quelques mètres près de l'embouchure, l'épaisseur de la couche d'eau douce se réduit à quelques centimètres après quelques kilomètres au large, lorsque cette eau douce n'est pas mélangée avec les eaux sous-jacentes par le vent. Seule la trace turbide des eaux reste perceptible à plusieurs dizaines de kilomètres de l'embouchure. Le débit du Rhône est de l'ordre de $10^3\text{m}^3\text{s}^{-1}$, soit 1000 fois moins que le flux du courant LP. Son influence sur la dynamique de la circulation est donc négligable.

1.4 Définition de la fenêtre spectrale du modèle

Si l'influence du Rhône est négligable du point de vue dynamique, elle ne l'est pas du tout du point de vue sédimentaire. Le Rhône, avec un apport de matériel évalué entre 2 et $10 \cdot 10^9\text{kg}$ par année (Aloisi et al. 1979), est la source principale de matière particulaire en suspension dans le Golfe du Lion. L'apport des autres rivières (l'Hérault, l'Aude ou la Têt) est beaucoup plus réduit, mais peut toutefois augmenter fortement en période de crue. L'activité biologique, concentrée dans les eaux de surface, constitue la seconde source

1.4 Définition de la fenêtre spectrale du modèle

majeure de particules.

La section précédente a permis de caractériser, du point de vue hydrodynamique l' "environnement fluide" de ces particules. Les processus sont multiples et leurs échelles variables. Cela va des oscillations de la houle avec des périodes de quelques secondes jusqu'au courant LP avec ses variations saisonnières. Pour examiner leur influence sur le transport des particules, ces temps caractéristiques sont à mettre en relation avec les temps de résidence des particules dans la colonne d'eau.

Lorsque le temps de résidence ne dépasse pas quelques heures, nous avons souligné le rôle marginal de l'advection par le fluide pour les particules. Par conséquent, du point de vue du *transport*, les processus tels que la houle ont une influence négligeable, sauf peut-être dans les zones de faible profondeur ($\leq 50\text{m}$) où l'amplitude des courants de fond induits peut être importante. L'influence de la houle reste néanmoins déterminante car il s'agit d'un puissant mécanisme de *resuspension* pour les particules du sédiment superficiel. Les zones de resuspension apparaissent alors comme des sources de matériel additionnelles au même titre que les autres sources.

De l'autre côté du spectre, l'influence des variations saisonnières sur le transport des particules aux temps de résidence de plusieurs mois, pour être prise en compte, nécessiterait d'élargir le site d'étude bien au delà des limites du Golfe du Lion. Bien entendu, l'influence des saisons reste sensible à des échelles plus petites au travers des conditions hydrologiques propres à chaque saison ou à chaque mois de l'année.

Entre ces deux extrémités du spectre, nous nous intéresserons aux processus de méso-échelle et plus particulièrement à ceux qui sont induits par le vent. Dans cette fenêtre spectrale, le choix d'un modèle hydrodynamique se porte logiquement sur un modèle de circulation générale.

Il faut toutefois noter que de tels modèles ne sont pas appropriés pour la résolution du processus de formation d'eau dense. En effet, lorsque les vitesses verticales atteignent des valeurs de l'ordre de 10cm s^{-1} , l'approximation hydrostatique qui est à la base des modèles de circulation générale cesse d'être valide. Les modèles peuvent reproduire l'homogénéisation verticale des variables hydrologiques à l'aplomb des points où une instabilité barocline est détectée mais ils ne peuvent simuler l'advection qui résulte de cette instabilité et qui provoque l'homogénéisation observée.

Plusieurs études ont déjà été consacrées à la modélisation de processus hydrodynamiques de la méso-échelle dans le Golfe du Lion. Hua (1981) a ainsi étudié la formation des upwellings en période estivale. Elle utilise un modèle à deux couches, appliqué dans un domaine à fond plat et forcé par le vent, en l'absence de circulation générale. La démarche de Johns et al. (1992)

est analogue. Ils utilisent un modèle 3D multi-couche pour simuler la réponse hydrodynamique au seul forçage du vent dans un domaine dont la profondeur ne dépasse pas 100m. Marsaleix (1993) a élargi le champ d'application de ce modèle en analysant, en plus de la circulation induite par le vent, celle induite par le courant LP. Son approche est toutefois limitée à un domaine dont la bathymétrie a été lissée et la profondeur tronquée à 500m. Deleville et al. (1995) ont utilisé quant à eux le modèle de circulation générale du LODYC pour simuler l'effet d'un vent du NO soufflant durant un peu plus de deux jours sur un bassin initialement au repos. Deux types de bathymétries ont été considérés: un fond plat à 100m de profondeur ou une bathymétrie plus réaliste mais toutefois tronquée à 300m. Enfin, à l'aide du modèle du GHER, Beckers (1996) a étudié l'évolution de l'hydrodynamique et de la dispersion de traceurs passifs dans le Golfe du Lion sur un cycle annuel. Outre le forçage du vent, des résultats d'un modèle de circulation générale appliqué à la Méditerranée Occidentale sont utilisés pour forcer le modèle régional. Bien que résolvant ainsi la méso-échelle dans le Golfe du Lion, Beckers s'est attaché essentiellement à décrire l'évolution des courants et des traceurs de mois en mois.

1.5 Finalité du travail et développements nécessaires

La description et l'analyse des processus hydrodynamiques majeurs de la méso-échelle dans le Golfe du Lion ainsi que la mesure de leur importance relative pour le transport des particules constituent la finalité de ce travail. Nous nous efforcerons dans notre approche de nous affranchir au mieux des limitations et difficultés rencontrées dans la modélisation de ces processus.

Des contraintes sont en effet liées à l'utilisation d'un modèle de circulation générale sur un site tel que le Golfe du Lion et des impératifs de qualité sont à exiger du modèle.

Ainsi, le Golfe du Lion est un domaine largement ouvert sur le reste du bassin nord-occidental de la Méditerranée. Ses limites maritimes sont le lieu des échanges de masse et d'énergie avec le reste de la Méditerranée et les flux associés sont importants. Un traitement adéquat des conditions limites dans le modèle est donc primordial.

D'autre part, un soin particulier doit être apporté à la résolution des vitesses verticales dont l'importance pour le transport a déjà été soulignée. Une bonne résolution des vitesses verticales a un prix que l'on chiffre en nombre d'opérations pour un ordinateur. Ce prix est d'autant plus élevé

1.5 Finalité du travail et développements nécessaires

que les variations bathymétriques du domaine sont importantes. Le coût du calcul doit néanmoins rester modéré, spécialement si l'on souhaite conserver au modèle le caractère d'un outil aisé à mettre en oeuvre.

Ces deux points (conditions limites et coût de calcul) ont fait l'objet d'un traitement particulier dans ce travail et ont impliqué le développement d'approches et solutions nouvelles.

Celles-ci seront présentées respectivement dans les chapitres 3 et 4, après que le chapitre 2 ait introduit les équations et notations utiles. Les résultats des simulations dans le Golfe du Lion et leur analyse feront l'objet du chapitre 5. Une synthèse et des conclusions clôtureront ce volume au chapitre 6.

Un second volume réunit l'ensemble des figures tirées des résultats, accompagnées d'une brève description.

Chapitre 2

Modèle physique

Les sections 2.1 et 2.2 de ce chapitre sont consacrées respectivement à la dérivation des équations primitives et à la caractérisation des ondes de gravité. Elles reprennent les notions de base de la mécanique des fluides géophysiques sur lesquelles s'appuieront les développements des sections et chapitres suivants. Le lecteur à qui ces notions sont familières peut passer directement à la section 2.2.5 où sont précisées les conditions de résolution des ondes de gravité par le modèle.

Ensuite, on introduit dans la section 2.3 le transport, qui sert à reformuler les conditions d'incompressibilité dans les équations primitives.

Enfin, la section 2.4 décrit le rôle de la pression dans les équations de quantité de mouvement en relation avec la condition d'incompressibilité.

2.1 Equations primitives

En toute généralité, la dynamique des fluides géophysiques est décrite à l'aide des équations de Navier-Stokes compressibles, couplées aux équations de conservation de la masse et de l'énergie. Toutefois les milieux géophysiques et en particulier l'océan présentent des caractéristiques propres justifiant un certain nombre d'approximations et conduisant ainsi à une forme spécifique des équations. Cette section est une synthèse de notions de base dont on trouvera les développements dans les ouvrages de Gill (1982) et Pedlosky (1987).

2.1.1 Dimensions caractéristiques des milieux marins et rotation terrestre

Le repère le plus naturel pour décrire le mouvement des fluides géophysiques est un repère attaché à la Terre tournant à la vitesse angulaire $\Omega \approx$

$7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Un tel repère n'est pas inertiel et, aux composantes de l'accélération relative, viennent s'ajouter les composantes de l'accélération centripète et de l'accélération de Coriolis. Il est d'usage de définir des forces fictives équivalentes appelées force centrifuge et force de Coriolis.

Une première caractéristique des milieux géophysiques est la disparité entre leurs dimensions horizontales et verticales. La profondeur des mers et océans dépasse rarement les six mille mètres tandis qu'ils s'étendent horizontalement sur plusieurs centaines ou milliers de kilomètres. Ainsi, les mers et océans (tout comme l'atmosphère) apparaissent comme de fines pellicules de fluide à la surface du globe. Les mouvements du fluide à grande échelle s'inscrivant à l'intérieur de ces pellicules, leurs échelles de longueurs verticale D et horizontale L définissent un rapport d'aspect

$$\delta = \frac{D}{L} \quad (2.1)$$

très petit, de l'ordre de 10^{-2} .

Lorsque l'amplitude des mouvements ne dépasse pas quelques degrés en latitude et longitude, un système cartésien de coordonnées (x_1, x_2, x_3) peut être utilisé, en très bonne approximation, en lieu et place d'un système de coordonnées sphériques. Les mouvements étant essentiellement horizontaux, seule est significative, pour la force de Coriolis, la composante verticale de la rotation terrestre

$$f = 2\Omega \sin \theta, \quad (2.2)$$

θ désignant la latitude terrestre. f est appelé paramètre de Coriolis ou encore fréquence inertielle car elle correspond à la fréquence du mouvement d'une particule se déplaçant sous sa propre inertie. La période correspondante est $2\pi f^{-1}$ et s'appelle période d'inertie. Elle varie donc avec la latitude, de $12h$ aux pôles, à l'infini à l'équateur, en passant par $17,5h$ à $43,5^\circ$ de latitude ($f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$).¹

A côté de la force de Coriolis exerçant son action dans le plan horizontal, une force essentielle domine dans la direction verticale. Il s'agit de la force de gravité (dont le potentiel inclut de facto celui de la force centrifuge). Elle s'écrit $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, \mathbf{e}_3 étant un vecteur unitaire pointant verticalement vers le haut. Pour la plupart des applications, une valeur constante $g \approx 9,8 \text{ ms}^{-2}$ est suffisamment précise.

¹La région du Golfe du Lion se situe entre 42 et $43,5^\circ$ de latitude Nord.

2.1.2 Variations de densité et approximation de Boussinesq

Une deuxième caractéristique des fluides géophysiques tient aux variations relativement faibles de leur densité ρ par rapport à une densité de référence ρ_0 . Dans l'océan, les écarts par rapport à la valeur de $\rho_0 = 1035 \text{ kg m}^{-3}$ n'excèdent généralement pas 2% (Gill 1982). Ces variations résultent de différences de température T et salinité S entre masses d'eau. Elles ne provoquent pas de variation significative des forces d'inertie mais, par contre, les variations induites dans la force de pesanteur ρg sont déterminantes car elles génèrent des forces de poussée, composantes essentielles de la circulation.

L'approximation de Boussinesq consiste à négliger les variations de densité du fluide sauf dans l'expression de la force de pesanteur. Dans le cadre de cette approximation, la condition cinématique d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

se substitue à l'équation de continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

et l'équation de Navier-Stokes prend la forme

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + f\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \quad (2.5)$$

où $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ désigne la vitesse du fluide, P la pression cinématique réduite de la composante hydrostatique associée à une densité de référence ρ_0 , ν la viscosité cinématique et \mathbf{b} la poussée définie par

$$\mathbf{b} = b\mathbf{e}_3 = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g\mathbf{e}_3. \quad (2.6)$$

∇ est noté pour l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, le point \cdot pour le produit scalaire, Δ pour le laplacien $\nabla \cdot \nabla$ et $\frac{D}{Dt}$ pour la dérivée matérielle $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$.

L'écoulement est incompressible sans que la densité (donc la poussée) ne soit strictement constante. Celle-ci reste liée aux variables thermodynamiques par une équation d'état. En pratique, les variables utilisées pour décrire l'état du fluide sont la pression P , la température T et la salinité S . On fait généralement référence à l'équation (2.5), avec (2.3), sous le nom d'équations de Boussinesq.

2.1.3 Variabilité de l'océan et turbulence

Une troisième caractéristique des milieux géophysiques est la nature turbulente des écoulements. Définir précisément la notion de turbulence dans un océan est une entreprise ardue qui relève plutôt de la gageure. En fait sous le concept de turbulence, on englobe également celui de "variabilité de l'océan" qui regroupe toute une variété de mécanismes marqués par l'influence de la force de Coriolis, de la stratification en densité, des variations thermiques et halines, et de leurs interactions avec l'atmosphère ou les fonds marins (Nihoul 1980).

La résolution des mouvements du fluide à toutes les échelles est irréaliste. On se contente donc de décrire l'évolution de valeurs moyennes de la vitesse, de la température et de la salinité. Lorsque les différentes variables sont décomposées en composantes moyennes et fluctuations turbulentes et qu'un opérateur de moyenne est appliqué aux équations du mouvement, les moyennes des produits des fluctuations issus des termes non linéaires apparaissent comme des flux turbulents venant s'ajouter aux flux de la diffusion moléculaire. En raison de l'analogie entre les effets diffusifs induits par les agitations turbulente et moléculaire,² les flux turbulents sont supposés dépendre de manière linéaire des gradients des grandeurs moyennes, sur le modèle des lois constitutives. Dans les équations de la vitesse, de la température et de la salinité apparaissent alors des coefficients de viscosités et diffusivités turbulentes horizontales et verticales A_h , K_h , A_v et K_v .

La distinction entre A_h (K_h) et A_v (K_v) est naturelle si l'on se rappelle que la turbulence est une propriété de l'écoulement et non du fluide et que les écoulements présentent une forte anisotropie dans leurs échelles horizontale et verticale. Les évaluations des coefficients sont sujettes à une grande incertitude et leurs valeurs varient énormément. Dans l'océan, A_v varie de $10^{-4}m^2s^{-1}$ à $10^{-1}m^2s^{-1}$ et A_h de $10m^2s^{-1}$ à $10^4m^2s^{-1}$ (Pedlosky 1987). Les valeurs des diffusivités sont du même ordre, parfois moindres pour la diffusivité verticale K_v . Les différents coefficients sont pour l'instant supposés constants. En pratique, A_v et K_v sont paramétrés de manière plus ou moins élaborée selon le degré de complexité du modèle de fermeture turbulente.

²la diffusion turbulente étant toutefois nettement plus intense que la diffusion moléculaire

2.1.4 Ordres de grandeur et approximation hydrostatique

Afin d'évaluer l'importance relative des différents termes dans l'équation (2.5) avec diffusion turbulente, définissons les variables adimensionnelles

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1/L & \hat{x}_2 &= x_2/L & \hat{x}_3 &= x_3/D \\ \hat{t} &= tU/L & \hat{P} &= P/\Pi & \hat{b} &= b/B \\ \hat{u}_1 &= u_1/U & \hat{u}_2 &= u_2/U & \hat{u}_3 &= u_3/W \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les quantités notées en caractères majuscules, à l'exception de P , représentent les grandeurs caractéristiques (longueurs, vitesses, pression et poussée) associées aux différentes variables. On remarquera l'anisotropie introduite entre les vitesses horizontales (u_1, u_2) et verticale u_3 dans les grandeurs caractéristiques.

En termes des nouvelles variables, la condition d'incompressibilité (2.3) devient

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{U}{L} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{W}{D} \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad (2.8)$$

et on en tire la relation suivante entre W et U

$$\frac{W}{U} = \frac{D}{L} = \delta \quad (2.9)$$

L'anisotropie entre amplitudes verticale et horizontale des mouvements apparaît là clairement.

En utilisant (2.7) et (2.9), les composantes horizontales de l'équation (2.5) avec diffusion turbulente s'écrivent sous forme adimensionnelle

$$Ro \frac{D\hat{u}_1}{D\hat{t}} - \hat{u}_2 = -\frac{\Pi}{UfL} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}_1} + \frac{1}{2} E_h \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2^2} \right) + \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_3^2}, \quad (2.10)$$

$$Ro \frac{D\hat{u}_2}{D\hat{t}} + \hat{u}_1 = -\frac{\Pi}{UfL} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}_2} + \frac{1}{2} E_h \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_2^2} \right) + \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_3^2}, \quad (2.11)$$

où $Ro = U/fL$ est le nombre de Rossby, $E_h = 2A_h/fL^2$ et $E_v = 2A_v/fD^2$ les nombres d'Ekman horizontal et vertical. Les nombres de Rossby et d'Ekman étant respectivement de l'ordre de 10^{-1} et 10^{-2} pour les valeurs usuelles des grandeurs caractéristiques, seul le gradient de pression peut équilibrer la force de Coriolis. Les mouvements du fluide apparaissent donc en première approximation comme le résultat de l'équilibre (dit géostrophique) de ces forces auxquelles viennent s'ajouter, par ordre d'importance, les forces d'inertie et

de friction. Il s'agit bien entendu d'estimations globales et, localement, ces dernières forces peuvent devenir prépondérantes.

De (2.10) ou (2.11), on tire l'estimation $\Pi = UfL$ qui, utilisée avec (2.9), permet d'écrire la composante verticale de (2.5) sous forme adimensionnelle

$$\delta^2 Ro \frac{D\hat{u}_3}{Dt} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}_3} + \delta^2 \left(\frac{1}{2} E_h \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_2^2} \right) + \frac{1}{2} E_v \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_3^2} \right) + \frac{\delta B}{Uf} \hat{b} \quad (2.12)$$

Un examen des ordres de grandeur montre que la poussée équilibre le gradient vertical de pression. Avec δ^2 en facteur, les autres termes sont cette fois de plusieurs ordres de grandeur plus petits. Bien que le fluide soit en mouvement, le caractère quasi-horizontale des trajectoires du fluide induit des accélérations verticales si faibles que le principe d'Archimède pour un fluide statique reste d'application.

L'approximation hydrostatique consiste à négliger les termes en δ^2 dans l'équation (2.12) et donc à lui substituer l'équation de l'équilibre hydrostatique.

2.1.5 Equations primitives

Les équations résultant des approximations successives s'écrivent explicitement, pour les variables u_1, u_2, u_3, P, b, T et S ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - f u_2 = \\ -\frac{\partial P}{\partial x_1} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + f u_1 = \\ -\frac{\partial P}{\partial x_2} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = K_h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial S}{\partial x_3} = K_h \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 S}{\partial x_3^2}, \quad (2.18)$$

$$b = b(T, S, P). \quad (2.19)$$

2.2 Ondes de gravité

Elles constituent les équations de base décrivant la dynamique de l'océan et sont généralement appelées équations primitives. Il est commode, en tout cas formellement, d'utiliser en lieu et place des équations (2.17), (2.18) et (2.19) une équation pour la poussée

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_1 \frac{\partial b}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial b}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial b}{\partial x_3} = K_h \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 b}{\partial x_3^2}. \quad (2.20)$$

Rigoureusement, celle-ci ne peut être déduite que lorsque l'équation d'état (2.19) est linéarisée et que la dépendance en P y est négligée. Par souci de concision, nous formulerons le système d'équations primitives avec (2.20) tant que la distinction entre température et salinité n'est pas expressément requise.

2.2 Ondes de gravité

Le mouvement des masses d'eau résulte de l'action combinée des différentes forces s'exerçant sur le fluide. Parmi ces forces, la force de gravité domine et conditionne très largement le mouvement: son effet est celui d'une force stabilisatrice qui tend à restaurer l'équilibre hydrostatique du champ de pression. Toute perturbation affectant le champ de pression ou de vitesse engendre des processus d'ajustement par lesquels le système tend à retrouver un état d'équilibre (Rossby 1937; Rossby 1938; Cahn 1945; Hsieh and Gill 1984). Ces processus sont de nature essentiellement oscillatoire et les ondes de gravité y participent pour une large part.

Cette section vise à rappeler brièvement les régimes d'ondes de gravité potentiellement résolubles avec des équations primitives. Pour une approche élargie et une description détaillée des phénomènes d'ondes dans l'océan, on se reportera aux ouvrages d'Eckart (1960), de Phillips (1977) ou de Gill (1982) par exemple, dont les développements ont été ici synthétisés dans un formalisme unifié. La sous-section 2.2.5 qui suit précise les conditions de résolution des ondes de gravité par le modèle.

2.2.1 Etat d'équilibre et équations aux petites perturbations

Classiquement, la caractérisation des ondes de gravité repose sur l'étude de la réponse du système à des (petites) perturbations de l'équilibre d'un fluide au repos dans un domaine d'extension horizontale infinie et de profondeur constante H .

Les vitesses à l'équilibre étant nulles, le gradient de pression équilibre la force verticale de poussée. On fixe la pression P_e ³ à une valeur nulle en $x_3 = 0$. La stabilité de l'équilibre est mesurée par la fréquence de Brunt-Väisälä N , définie par

$$N^2 = \frac{db_e}{dx_3} = -\frac{1}{\rho_0} g \frac{d\rho_e}{dx_3}. \quad (2.21)$$

En écrivant les variables u_1, u_2, u_3, P et b comme la somme des valeurs à l'équilibre et de perturbations, les équations primitives deviennent

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - f u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + f u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2 u_3 = 0, \quad (2.26)$$

avec u_1, u_2, u_3, P et b désignant cette fois les perturbations. Celles-ci étant supposées petites, les termes de viscosité et les termes qui font apparaître un produit de perturbations ont été négligés.

Des équations (2.22) et (2.23), on dérive aisément, en utilisant (2.25),

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} + f \zeta = \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - f \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (2.28)$$

où

$$\zeta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2.29)$$

est la composante verticale de la vorticité. En combinant ces équations, on élimine u_3 dans la première et ζ dans la seconde pour obtenir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\zeta = f\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}\right), \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}\right). \quad (2.31)$$

³Les indices e se rapportent aux variables à l'état d'équilibre.

2.2 Ondes de gravité

Par ailleurs, en dérivant (2.24) par rapport à t et en y substituant la valeur de $\frac{\partial b}{\partial t}$ donnée par (2.26), on obtient une seconde équation liant u_3 et P

$$N^2 u_3 = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial t}. \quad (2.32)$$

Au fond et à la surface, les conditions limites pour les vitesses expriment l'imperméabilité des interfaces. Sur un fond plat, on a simplement

$$u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = -H \quad (2.33)$$

et en surface,

$$u_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad \text{en } x_3 = \eta, \quad (2.34)$$

où η est l'élévation de la surface libre. Pour de petites perturbations, la condition limite se réduit à

$$u_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } x_3 = \eta. \quad (2.35)$$

En supposant un champ de pression atmosphérique homogène (nul pour simplifier), la pression totale ⁴ $P_e + P - gx_3$ doit s'annuler en $x_3 = \eta$. Si l'on néglige les variations de densité sur la hauteur d'eau η , $P_e = 0$ en $x_3 = \eta$ et cette condition devient

$$P = g\eta \quad \text{en } x_3 = \eta. \quad (2.36)$$

Combinant (2.35) et (2.36), on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial t} = gu_3 \quad \text{en } x_3 = \eta. \quad (2.37)$$

L'élévation η étant petite par rapport à la profondeur H , les conditions limites de surface peuvent être appliquées en bonne approximation en $x_3 = 0$.

2.2.2 Ondes dans un milieu de densité homogène

Dans un milieu de densité homogène, $\frac{\partial P}{\partial x_3} = 0$ et donc $P = g\eta$ en vertu de (2.36). Puisque η est indépendant de x_3 , on déduit de (2.22) et de (2.23) que u_1 et u_2 le sont également ⁵. En intégrant les équations (2.27) et (2.28)

⁴c.-à-d. y compris la composante hydrostatique

⁵en supposant u_1 et u_2 indépendants de x_3 à l'instant initial

entre $x_3 = -H$ et $x_3 = 0$ et en exploitant les conditions limites (2.33) et (2.35), on obtient alors

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + fH\zeta = gH\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2}\right), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta}{f} - \frac{\eta}{H}\right) = 0. \quad (2.39)$$

Cette dernière équation exprime la conservation de la quantité $Q = \zeta/f - \eta/H$.

Q étant déterminé par la perturbation initiale de l'état d'équilibre, on tire de (2.38) une équation pour η uniquement

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\eta - c^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2}\right) = -f^2 H Q \quad (2.40)$$

avec $c = \sqrt{gH}$. La solution η est la superposition d'une solution particulière et des combinaisons linéaires des solutions de l'équation homogène

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\eta - c^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2}\right) = 0. \quad (2.41)$$

Celles-ci peuvent être recherchées sous la forme d'ondes planes

$$\eta = C e^{i(kx_1 + lx_2 - \omega t)}, \quad (2.42)$$

i dénote l'imaginaire $\sqrt{-1}$, k et l sont les composantes du nombre d'onde κ de norme κ , ω est la pulsation ou fréquence angulaire. La substitution de (2.42) dans (2.41) fournit la relation de dispersion

$$\omega^2 = f^2 + gH\kappa^2 = f^2(1 + a^2\kappa^2) \quad (2.43)$$

où $a = \sqrt{gH}/f$ est la rayon de déformation de Rossby. Les ondes satisfaisant cette relation de dispersion sont les ondes de Poincaré.

On distingue généralement les ondes courtes pour lesquelles $\kappa^{-1} \ll a$ des ondes longues pour lesquelles $\kappa^{-1} \gg a$. Quand $\kappa^{-1} \ll a$, la relation de dispersion (2.43) devient approximativement

$$\omega \sim \kappa \sqrt{gH}. \quad (2.44)$$

Les ondes courtes sont donc peu influencées par la rotation terrestre. Quand $\kappa^{-1} \gg a$, (2.43) prend la forme

$$\omega \sim f. \quad (2.45)$$

2.2 Ondes de gravité

A la limite, la gravité n'a plus d'effet et les particules se déplacent sous leur seule inertie à la fréquence f .

Les oscillations de la surface libre s'accompagnent d'oscillations des particules fluides sur toute la colonne d'eau. Leur amplitude est toutefois maximale en surface puisque u_3 est une fonction monotone de x_3 (voir (2.25)) qui s'annule en $x_3 = -H$. Les ondes de gravité d'un fluide de densité homogène sont donc des ondes de surface.

2.2.3 Ondes dans un milieu stratifié

De la même manière que les ondes de Poincaré se propagent à l'interface mer-air, des ondes de gravité peuvent se propager à l'interface séparant deux masses d'eau superposées de densités différentes. On parle dans ce cas d'ondes internes. C'est la force de poussée qui est le mécanisme de rappel nécessaire à la propagation des ondes internes. Lorsque le fluide est continuellement stratifié, la force de poussée s'exerce sur toute ou partie de la colonne d'eau qui peut alors également supporter des ondes internes.

Reprenons ici les équations pour u_3 et P (2.31–2.32). Elles s'écrivent

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}\right), \quad (2.46)$$

$$N^2 u_3 = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_3 \partial t}. \quad (2.47)$$

Ces équations possèdent des solutions séparables de la forme

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_3)\tilde{u}_3(x_1, x_2, t), \quad (2.48)$$

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = q(x_3)\tilde{\eta}(x_1, x_2, t). \quad (2.49)$$

La substitution dans (2.46) et (2.47) conduit à deux systèmes d'équations séparés décrivant la structure verticale des solutions d'une part (fonctions w et q) et leurs variations avec x_1, x_2, t d'autre part (fonctions \tilde{u}_3 et $\tilde{\eta}$). Une constante de séparation c_e aux dimensions d'une vitesse relie les deux systèmes.

Le premier système d'équations définit un problème aux valeurs propres pour c_e . Formulé pour la fonction w , il s'écrit

$$\frac{d^2 w}{dx_3^2} + \frac{N^2}{c_e^2} w = 0, \quad (2.50)$$

avec les conditions limites

$$w = 0 \quad \text{en } x_3 = -H, \quad (2.51)$$

$$c_e^2 \frac{dw}{dx_3} = gw \quad \text{en } x_3 = 0 \quad (2.52)$$

et a la forme classique d'un problème de Sturm-Liouville.

Si $N = 0$, on trouve la valeur propre $c_e = \sqrt{gH}$. Si N est une fonction continue de x_3 , il existe une infinité de valeurs propres c_n , $n = 0, 1, \dots$, rangées en ordre décroissant, et autant de fonctions propres w_n (ou q_n) correspondantes. Ces fonctions vérifient des propriétés d'orthogonalité permettant la décomposition de fonctions u_3 et P quelconques en modes propres orthogonaux.

La plus grande des valeurs propres c_0 vaut en bonne approximation \sqrt{gH} . Cette valeur correspond à la limite obtenue lorsque $N \rightarrow 0$. Le mode propre associé à c_0 est pour cette raison appelé mode barotrope. Pour chacune des autres valeurs c_n , on définit une profondeur équivalente $H_n < H$ telle que $c_n = \sqrt{gH_n}$. Les modes propres associés aux c_n , $n = 1, 2, \dots$ sont appelés modes baroclines.

Le deuxième système d'équations (pour les fonctions \tilde{u}_3 et $\tilde{\eta}$) se réduit à une équation pour $\tilde{\eta}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial t^2} + f^2 \tilde{\eta} = c_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \tilde{\eta} \quad (2.53)$$

où c_e prend les valeurs c_n de chaque mode propre. Cette équation a exactement la forme de l'équation (2.41) pour l'élévation η d'un fluide homogène, avec $c_e^2 = gH$. Des solutions d'onde existent; il s'agit des ondes de Poincaré.

Chaque mode a donc une structure verticale propre et se propage horizontalement comme le ferait une onde de Poincaré dans un domaine de profondeur H_n . L'équation de dispersion pour chacun d'eux s'écrit (voir (2.43))

$$\omega_n^2 = f^2 + gH_n \kappa^2 = f^2 (1 + a_n^2 \kappa^2) \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.54)$$

où $a_0 = \sqrt{gH}/f$ est le rayon de Rossby barotrope et $a_n = \sqrt{gH_n}/f$, $n > 0$, est le n^{e} rayon de Rossby barocline.

La distinction entre ondes longues et courtes développées pour les ondes barotropiques dans la section 2.2.2 peut être ici reconduite pour les ondes baroclines sur la base des a_n . En particulier on note que les ondes longues ont une fréquence proche de f et que l'effet de la rotation terrestre est alors dominant.

2.2 Ondes de gravité

Dans l'océan, les ondes longues concentrent la majeure partie de l'énergie des ondes internes. La figure 2.1 montre le spectre obtenu à partir des données de l'International Wave EXperiment (d'après Muller et al. (1978)). Les

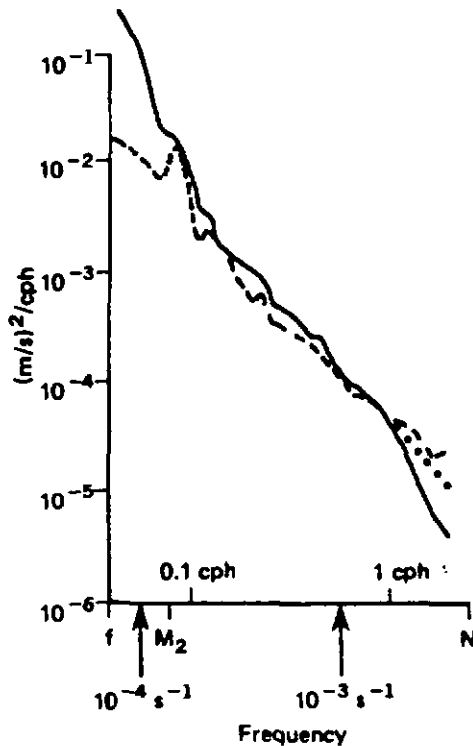


Figure 2.1: Spectre de l'énergie cinétique horizontale spécifique (courbe en trait plein), de l'énergie cinétique totale spécifique (courbe en trait pointillé se superposant à la courbe en trait plein à l'exception de la gamme des hautes fréquences) et de l'énergie potentielle spécifique (courbe en traits discontinus).

maxima de densité d'énergie y sont observés à la fréquence d'inertie.

2.2.4 Ondes internes, ondes de surface et approximation du toit rigide

Contrairement aux ondes de gravité de surface, les ondes internes atteignent leur amplitude maximale au sein du fluide. Pour ces dernières, les déplacements de la surface sont petits par rapport aux déplacements des interfaces.

L'approximation du toit rigide consiste à remplacer la condition limite

(2.35) par

$$u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = 0. \quad (2.55)$$

Le champ de pression induit par l'élévation de surface n'est pas éliminé mais correspond à celui qu'exercerait sur le fluide une surface rigide disposée horizontalement en $x_3 = 0$. La pression n'est donc pas nulle en $x_3 = 0$ et l'élévation de surface équivalente peut être évaluée à l'aide de la relation $P = g\eta$.

Le calcul des modes internes pour des valeurs usuelles de N montre que l'approximation du toit rigide affecte très peu les solutions: les modes internes sont restitués avec une très bonne précision. Le toit rigide élimine par contre les ondes de surface du mode barotrope.

2.2.5 Résolution des ondes de gravité dans un modèle de circulation générale

Dans un modèle de circulation générale, le mouvement du fluide est la réponse du milieu considéré à une variété de forçages, de nature astronomique ou atmosphérique pour la plupart. Cette réponse intègre plusieurs composantes, dont certaines présentent un comportement ondulatoire. Le problème d'ajustement sous gravité conjugue les effets de la gravité, de la stratification et de la rotation terrestre mais également ceux de l'advection, de la dissipation turbulente et de la topographie. Il s'en trouve à la fois enrichi et compliqué du point de vue de son traitement numérique.

Indépendamment de ces complications, la contrainte première réside dans le coût de calcul. En effet, la résolution explicite des ondes de gravité dans un modèle de circulation nécessite l'adoption d'un pas de temps d'intégration Δt satisfaisant à

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{max}} \quad (2.56)$$

où c_{max} désigne la vitesse de phase maximale et Δx la taille d'une maille. Les valeurs typiques de vitesses de phase des ondes internes sont de l'ordre du ms^{-1} alors que celles des ondes de surface peuvent atteindre jusqu'à plusieurs centaines de ms^{-1} . Les ondes de gravité de surface, associées notamment aux signaux de marées, sont souvent étudiées dans des modèles 2D aux équations intégrées sur la verticale. Dans les modèles 3D de circulation générale, leur résolution est très coûteuse.

Pour ces raisons de coût de calcul, notre modèle utilise l'approximation du toit rigide qui filtre les ondes de gravité de surface. Compte tenu de la

structure morphologique du bassin méditerranéen composée surtout de zones profondes et compte tenu de l'amplitude réduite des signaux de marée, cette approximation ne semble pas déraisonnable.

2.3 Formulation équivalente des équations primitives

Les milieux marins ont une configuration propre qui peut être décrite en termes de la profondeur. On caractérise le domaine de résolution Ω pour les équations primitives en faisant intervenir explicitement cette dernière.

Soit donc Ω un ouvert de \mathbf{R}^3 de bord $\partial\Omega$. Notons Σ sa projection orthogonale dans le plan $x_3 = 0$. Le domaine spatial est défini par

$$\Omega = \Sigma \times (-h(x_1, x_2), 0), \quad (x_1, x_2) \in \Sigma \quad (2.57)$$

avec $h(x_1, x_2)$, une fonction $C^1(\bar{\Sigma})$ telle que $h \geq h_0 > 0$. Le bord $\partial\Omega$ se compose donc des surfaces

$$\partial\Omega_s = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma, x_3 = 0\} \quad (2.58)$$

à la limite supérieure du bassin,

$$\partial\Omega_b = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \Sigma, x_3 = -h(x_1, x_2)\} \quad (2.59)$$

au fond et

$$\partial\Omega_l = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \partial\Sigma, x_3 \in (-h(x_1, x_2), 0)\} \quad (2.60)$$

aux frontières latérales de Ω . La figure 2.2 représente le domaine de résolution.

Il faut noter qu'en définissant la surface $\partial\Omega_s$ par le plan $x_3 = 0$ on fixe l'élévation et l'approximation du toit rigide est donc utilisée. Les bords $\partial\Omega_s$ et $\partial\Omega_b$ sont des frontières imperméables. Selon la configuration du milieu considéré, $\partial\Omega_l$ peut être une frontière ouverte (perméable) en partie ou en totalité.

Parmi les équations primitives, l'équation

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.61)$$

est l'expression de l'incompressibilité de l'écoulement. Cette contrainte lie en tout point de Ω les trois composantes du champ de vitesse. Il est possible, en

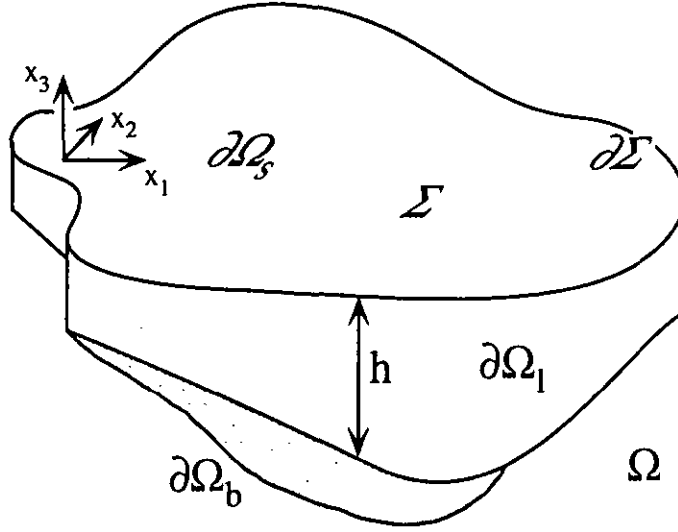


Figure 2.2: Domaine de résolution Ω . Le bord $\partial\Omega$ se compose des portions $\partial\Omega_s$ en surface, $\partial\Omega_l$ sur les côtés et $\partial\Omega_b$ au fond. La cote des points de $\partial\Omega_b$ est $-h(x_1, x_2)$ dans le repère cartésien (x_1, x_2, x_3) . Σ est la projection orthogonale de Ω dans le plan $x_3 = 0$.

exploitant les conditions d'imperméabilité de la surface $\partial\Omega_s$ et du fond $\partial\Omega_b$, d'en tirer une forme intégrale ne liant que les composantes u_1 et u_2 . En effet, l'intégration entre $x_3 = -h$ et $x_3 = 0$ de (2.61) avec les conditions limites

$$u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = 0, \quad (2.62)$$

$$u_3 = -(u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}) \quad \text{en } x_3 = -h(x_1, x_2) \quad (2.63)$$

fournit, en utilisant la règle de Leibniz, la relation

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h}^0 u_1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h}^0 u_2 dx_3 = 0. \quad (2.64)$$

Si (2.64) est vérifiée, la vitesse verticale donnée par

$$u_3 = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dz \quad (2.65)$$

satisfait alors à la fois à la condition d'incompressibilité (2.61) et aux conditions limites (2.62–2.63). Les équations (2.64–2.65) sont en fait strictement équivalentes à (2.61–2.63). Il faut encore noter que, les champs u_1 et u_2 donnés, (2.65) permet de déterminer le champ de vitesse verticale u_3 sans autre

2.3 Formulation équivalente des équations primitives

condition limite. Ceci est une conséquence directe de l'approximation hydrostatique qui a transformé l'équation de quantité de mouvement verticale, de nature prognostique, en l'équation (2.15), de nature diagnostique.

On définit le transport $\bar{\mathbf{u}}_h = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ par les quantités

$$\bar{u}_1 = \int_{-h}^0 u_1 dx_3 \quad (2.66)$$

$$\bar{u}_2 = \int_{-h}^0 u_2 dx_3. \quad (2.67)$$

En termes de ces dernières, l'équation (2.64) s'écrit

$$\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0. \quad (2.68)$$

La reformulation de la condition d'incompressibilité en termes du transport est à la base de l'algorithme numérique utilisé pour la résolution des équations primitives (chapitre 4) mais également des conditions limites aux frontières ouvertes du domaine Ω (chapitre 3). Avec (2.64), le système des équations primitives peut se réécrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - f u_2 = \\ - \frac{\partial P}{\partial x_1} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + f u_1 = \\ - \frac{\partial P}{\partial x_2} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0, \quad (2.72)$$

$$u_3 = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dz, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_1 \frac{\partial b}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial b}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial b}{\partial x_3} = K_h \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 b}{\partial x_3^2}. \quad (2.74)$$

2.4 Relation entre pression et incompressibilité de l'écoulement

Les approximations de Boussinesq et hydrostatique sont à la base des équations primitives. Toutes deux modifient profondément la nature des équations du mouvement et le rôle qu'y joue la force de pression.

Cette section décrit plus en détail le rôle que joue la pression dans les équations du mouvement, en relation avec la condition d'incompressibilité ainsi qu'avec les conditions limites. On considère tout d'abord le cas d'un écoulement incompressible sans l'approximation hydrostatique dans la section 2.4.1. L'interprétation du rôle de la pression y repose sur des notions classiques reprises de la théorie des équations de Navier-Stokes. Le cas d'un écoulement incompressible avec l'approximation hydrostatique est examiné ensuite dans la section 2.4.2, après y avoir dérivé un théorème de décomposition approprié.

2.4.1 ... sans l'approximation hydrostatique

L'approximation de Boussinesq suppose un écoulement incompressible. Dans un écoulement compressible, la force de pression assure à la fois un mécanisme de transfert pour l'énergie cinétique du fluide et un mécanisme de conversion de celle-ci en énergie interne (ou inversement). Avec l'approximation de Boussinesq, le mécanisme de conversion disparaît; l'énergie cinétique ne peut plus être transformée en énergie interne⁶. Le travail de la force de pression ne sert alors qu'au transfert de l'énergie cinétique. La pression n'est plus une variable thermodynamique et le couplage entre la dynamique de l'écoulement et l'état thermodynamique du fluide dans les équations de Boussinesq (2.5) n'est le fait que du seul terme de poussée.

Chorin et Marsden (1993) proposent une interprétation plus détaillée du lien entre pression et incompressibilité sur la base d'un théorème de décomposition des champs vectoriels. Soit un domaine Ω de \mathbf{R}^3 (ou de \mathbf{R}^2) de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Le théorème de décomposition s'énonce comme suit.

Théorème 1 (décomposition de Helmholtz-Hodge). *Tout champ vectoriel $w: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{3(2)}$, $w \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ se décompose de manière unique*

⁶si ce n'est par dissipation visqueuse, laquelle est généralement négligée dans le bilan thermique

2.4 Relation entre pression et incompressibilité de l'écoulement

sous la forme

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla P \quad (2.75)$$

où $P \in C^1(\Omega)$ et $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ satisfait à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.77)$$

\mathbf{n} désignant la normale extérieure à Ω . De plus, les champs \mathbf{u} et ∇P sont orthogonaux au sens intégral

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla P \, d\Omega = 0. \quad (2.78)$$

Démonstration. \mathbf{w} donné, le champ P est défini (à une constante additive près) par le problème de Neumann

$$\Delta P = \nabla \cdot \mathbf{w} \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.80)$$

obtenu en prenant la divergence de (2.75). L'unicité de la décomposition et l'orthogonalité des champs \mathbf{u} et ∇P se démontre aisément. La démonstration est classique; voir par exemple (Chorin and Marsden 1993) ou (Marchioro and Pulvirenti 1994). \square

Ce théorème permet donc de décomposer tout vecteur $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ en composantes orthogonales. Il est naturel d'introduire l'opérateur \mathcal{P} , un opérateur de projection orthogonale, qui applique \mathbf{w} sur sa partie à divergence nulle \mathbf{u} . \mathcal{P} est un opérateur linéaire par construction et $\mathbf{w} = \mathcal{P}\mathbf{w} + \nabla P$. On note que $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ et que $\mathcal{P}(\nabla P) = 0$.

Le champ de vitesse \mathbf{u} d'un écoulement incompressible dans un domaine fermé (c.-à-d. dont la frontière $\partial\Omega$ est imperméable) vérifie les contraintes (2.76) et (2.77). En appliquant l'opérateur \mathcal{P} à l'équation de Boussinesq (2.5), on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{P}(-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - f\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}). \quad (2.81)$$

La projection élimine la pression P et exprime l'accélération $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ en termes de \mathbf{u} uniquement. La force de pression doit donc équilibrer la composante potentielle de

$$-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

pour que l'accélération du fluide soit à divergence nulle. Lorsque cet équilibre n'est pas réalisé, l'accélération comprend une composante à divergence non nulle et le champ de vitesse évolue vers un état où l'une au moins des conditions d'incompressibilité ou d'imperméabilité est violée.

Le lien entre la pression et les conditions d'incompressibilité et d'imperméabilité apparaît également de manière explicite dans une formulation variationnelle des équations de Boussinesq. La pression y figure en facteur de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ (dans Ω) et en facteur de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ (sur $\partial\Omega$), et constitue ainsi un multiplicateur de Lagrange pour les contraintes (2.76) et (2.77).

2.4.2 ... avec l'approximation hydrostatique

Avec l'approximation hydrostatique, la composante verticale de l'équation de quantité de mouvement se réduit à l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b. \quad (2.82)$$

L'écoulement doit toujours vérifier $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ mais, à la différence des équations de Boussinesq, la pression n'offre plus un contrôle direct de l'accélération $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ puisque $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ n'apparaît plus dans (2.82). Elle reste toutefois étroitement liée à l'incompressibilité de l'écoulement (exprimée sous la forme $\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h = 0$) dans le domaine Ω que l'on a défini précédemment (section 2.3).

Avant d'établir un théorème de décomposition permettant d'établir ce lien, il est nécessaire de séparer les composantes barotrope et barocline de la pression. Intégrée sur la verticale, l'équation (2.82) donne

$$P(x_1, x_2, x_3, t) = p(x_1, x_2, t) - \int_{x_3}^0 b(x_1, x_2, z, t) dz \quad (2.83)$$

où $p(x_1, x_2, t)$ est la pression en $x_3 = 0$, c.-à-d. en surface. La composante barotrope est p ; la composante barocline est $-\int_{x_3}^0 b(x_1, x_2, z, t) dz$. Dans les équations de la quantité de mouvement horizontale, la composante barocline apparaît alors comme une force additionnelle dont l'évolution est déterminée par l'équation de la poussée. La composante barotrope reste elle directement liée à l'écoulement et à son incompressibilité.

En préalable du théorème 2 qui suit, on énonce le lemme 1 qui est une variante du théorème de Helmholtz-Hodge en 2D. Soit un domaine Σ de \mathbf{R}^2 de frontière $\partial\Sigma$ suffisamment régulière.

2.4 Relation entre pression et incompressibilité de l'écoulement

Lemme 1. Soit $h \geq h_0 > 0$. Tout champ vectoriel $s: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^2$, $s \in C^1(\Sigma) \cap C^0(\bar{\Sigma})$ se décompose de manière unique sous la forme

$$s = t + h\nabla_h q \quad (2.84)$$

où $q \in C^1(\Sigma)$ et $t \in C^1(\Sigma)$ satisfont à

$$\nabla_h \cdot t = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \quad (2.85)$$

$$t \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (2.86)$$

n désignant la normale extérieure à Σ . De plus, les champs t et $\nabla_h q$ sont orthogonaux au sens intégral

$$\int_{\Sigma} t \cdot \nabla_h q \, d\Sigma = 0. \quad (2.87)$$

Démonstration. La démonstration est fort proche de celle du théorème 1.

L'orthogonalité découle immédiatement de l'application de la divergence et de l'utilisation des conditions (2.85) et (2.86).

s donné, le champ q est défini (à une constante additive près) par le problème de Neumann

$$\nabla_h \cdot (h\nabla_h q) = \nabla_h \cdot s \quad \text{dans } \Sigma, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{1}{h} s \cdot n \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (2.89)$$

obtenu en prenant la divergence de (2.84). t est alors donné par la différence avec s .

L'unicité de la décomposition se démontre en utilisant l'orthogonalité. Supposons $s = t_1 + h\nabla_h q_1 = t_2 + h\nabla_h q_2$. Alors

$$0 = t_1 - t_2 + h\nabla_h(q_1 - q_2). \quad (2.90)$$

Multipliant scalairement par $\frac{1}{h}(t_1 - t_2)$ et intégrant sur Σ , on obtient

$$0 = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{h} \|t_1 - t_2\|^2 + (t_1 - t_2) \cdot \nabla_h(q_1 - q_2) \right) d\Sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{h} \|t_1 - t_2\|^2 d\Sigma \quad (2.91)$$

grâce à (2.87). Il s'ensuit que $t_1 = t_2$ et $\nabla_h q_1 = \nabla_h q_2$. \square

Le théorème 2 apporte la décomposition recherchée. Soit le domaine Ω tel que défini dans la section 2.3.

Théorème 2. *Tout champ vectoriel $w_h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$, $w_h \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ se décompose de manière unique sous la forme*

$$w_h = u_h + \nabla_h p \quad (2.92)$$

où $p \in C^1(\Sigma)$ et $u_h \in C^1(\Omega)$ satisfait à

$$\nabla_h \cdot \bar{u}_h = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \quad (2.93)$$

$$\bar{u}_h \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (2.94)$$

\mathbf{n} désignant la normale extérieure à Σ . De plus, les champs u_h et $\nabla_h p$ sont orthogonaux au sens intégral

$$\int_{\Omega} u_h \cdot \nabla_h p \, d\Omega = 0. \quad (2.95)$$

Démonstration. En vertu du lemme 1, il existe t et q tels que

$$\bar{w}_h = t + h \nabla_h q \quad (2.96)$$

avec

$$\nabla_h \cdot t = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \quad (2.97)$$

$$t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (2.98)$$

Il suffit alors de prendre

$$u_h = w_h - \frac{\bar{w}_h}{h} + \frac{t}{h} \quad (2.99)$$

et $p = q$ pour obtenir la décomposition recherchée. L'orthogonalité et l'unicité de la décomposition se démontre comme précédemment. \square

Sur la base de ces résultats, on peut construire, comme dans la section 2.4.1, un opérateur de projection orthogonale qui applique w_h sur sa composante u_h au transport de divergence nulle. D'une discussion analogue, on déduit le rôle de la composante barotrope de la pression dans les équations primitives: en y équilibrant la composante potentielle de

$$-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \left(\frac{-f u_2}{f u_1} \right) + A_h \nabla_h^2 \mathbf{u}_h + A_v \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial x_3^2} + \nabla_h \int_{x_3}^0 b \, dz,$$

le gradient de pression $\nabla_h p$ contraint le champ de transport u_h à rester non divergent. Il faut noter au passage que l'approximation hydrostatique implique que cette composante potentielle ne dépend pas de x_3 .

2.4 Relation entre pression et incompressibilité de l'écoulement

L'incompressibilité de l'écoulement et l'imperméabilité de la surface et du fond découle directement de la relation

$$\nabla_h \cdot \bar{u}_h = 0 \quad (2.100)$$

si la vitesse verticale u_3 est déterminée à l'aide de (2.65). Si u_1 et u_2 ne vérifient pas (2.100), le champ de vitesse \mathbf{u} violera la condition d'imperméabilité

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Sigma_b} = 0 \quad (2.101)$$

du fond ⁷. Quant aux frontières latérales, la seule condition sur le transport normal dans (2.94) ne garantit pas son imperméabilité et celle-ci doit être cherchée le cas échéant dans d'autres conditions limites.

La construction d'une forme variationnelle des équations primitives fait apparaître la pression comme un multiplicateur de Lagrange des contraintes (2.93) et (2.94). Lorsque celles-ci sont vérifiées, la pression disparaît de la formulation des équations. Mettons ici l'accent sur le fait que ces contraintes, portant sur le transport, ont un caractère intégral et non local pour les vitesses u_1 et u_2 .

⁷De même, la condition d'imperméabilité en surface sera violée si l'intégration de la vitesse verticale est effectuée depuis le fond jusqu'à la surface.

Chapitre 3

Conditions initiales et limites

La résolution des équations primitives dans un domaine fini de l'espace et du temps requiert la prescription de conditions initiales et limites. Certaines des conditions limites, traduisant l'imperméabilité des frontières terrestres et atmosphérique, ont déjà été précisées dans la section 2.3; d'autres sont encore nécessaires pour fermer le problème aux limites.

Le nombre et la forme des conditions à prescrire sont étroitement liés à la question de l'existence et de l'unicité d'une solution au problème aux limites considéré. En effet, des conditions limites surnuméraires ou inappropriées compromettent l'existence de solutions tandis que des conditions en nombre insuffisant sous-déterminent le problème et ne permettent pas de garantir l'unicité. Cette question (mathématique) a été étudiée par Lions, Temam et Wang (1991b). La première section de ce chapitre reprend la formulation des conditions limites qu'ils ont utilisées et examine leur extension aux frontières en mer ouverte, perméables.

La prescription de conditions limites aux frontières en mer ouverte pose également un problème (physique) de consistance avec la dynamique "interne" du domaine de résolution. Lorsque les données utilisées dans les conditions limites sont inconsistantes, des perturbations de la solution apparaissent, qui, si elles se développent, peuvent conduire jusqu'à l'instabilité. La section 3.2 identifie l'origine de ce problème, décrit les difficultés rencontrées dans son traitement et introduit l'approche que nous avons adoptée pour en éliminer ou limiter au maximum les inconvénients majeurs.

Celle-ci procède en deux étapes. La première, à laquelle est consacrée la section 3.3, consiste à reformuler les conditions limites de la section 3.1 de manière à relaxer celles dont l'influence sur la solution est moindre. Les transferts de quantité de mouvement et d'énergie aux frontières ouvertes étant essentiellement le fait de l'advection par le fluide, on a cherché, sur la base d'un examen des équations primitives non visqueuses, à identifier

les conditions limites requises par les seuls termes de diffusion. En relaxant spécifiquement ces conditions limites, on élimine ainsi une source possible de perturbations tout en préservant l'essentiel de l'information apportée par les autres.

Aux frontières en mer ouverte, des mouvements verticaux importants observés dans la solution sont souvent interprétés comme des "perturbations parasites". Ils sont dans ce cas la manifestation de l'inconsistance des valeurs utilisées par les conditions limites. Toujours sur la base des équations primitives non visqueuses, l'analyse de la section 3.4 met en évidence la dépendance des vitesses verticales aux valeurs prescrites par les conditions limites sur les frontières en mer ouverte.

La seconde étape de notre démarche, qui fait l'objet de la section 3.5, est davantage liée au problème étudié que la première étape. Elle doit permettre, à partir des données dont on dispose et en fonction des simulations envisagées, de pallier au manque de données ou à leur inconsistance avec la dynamique "intérieure". Inspiré par l'analyse de la section 3.4, un sous-modèle local combinant données et solution calculée est utilisé à cet effet. Pour les simulations à méso-échelle du Golfe du Lion, les données utilisées sont issues des résultats d'un modèle inverse (Brasseur and Haus 1991). Ces mêmes données servant également à déterminer les champs initiaux, la construction de ceux-ci est abordée dans la sous-section 3.5.2 après avoir décrit le modèle inverse.

3.1 Formulation de base des conditions initiales et limites pour les équations primitives

L'existence globale (c.-à-d. non limitée à un intervalle de temps restreint) de solutions régulières reste un problème ouvert de la théorie des équations de Navier-Stokes incompressibles (Heywood 1990). Les travaux de nombreux auteurs, parmi lesquels Lions et Prodi (1959), Ladyzhenskaya (1969), Temam (1984) par exemple, ont permis d'aboutir au résultat d'existence suivant pour le cas d'un fluide homogène incompressible, sans approximation hydrostatique: "dans un domaine 3D délimité par des frontières imperméables, moyennant une régularité suffisante des données, il existe une solution régulière locale unique définie sur un intervalle de temps $[0, T^*)$, T^* dépendant des données du problème. Les conditions limites consistent à prescrire sur le bord $\partial\Omega$, en plus de la condition d'imperméabilité $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, des conditions de

3.1 Formulation de base des conditions initiales et limites

non glissement

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_1 = 0, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_2 = 0, \quad (3.2)$$

où \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 sont deux vecteurs tangents à $\partial\Omega$.”

Du point de vue de l'existence, l'approximation hydrostatique complique les équations primitives (2.69-2.74) par rapport aux équations de Navier-Stokes. Lions, Temam et Wang (1991b) ont établi l'existence de solutions faibles (c.-à-d. issues d'une formulation variationnelle des équations) globales.

¹ Dans un second article consacré à des équations similaires appliquées à l'atmosphère (Lions et al. 1991a), les mêmes auteurs mentionnent que l'existence et l'unicité de solutions locales fortes (c.-à-d. pour les équations dans leur formulation classique) peuvent également être démontrées.

Ces résultats se rapportent aux conditions initiales et limites formulées comme suit. Les conditions initiales spécifient les valeurs des champs \mathbf{u}_h , T et S à l'instant $t = 0$. Les conditions limites sont, en surface,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x_3} = \boldsymbol{\tau} \\ u_3 = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha_T (T_{\text{air}} - T) \\ \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_s, \quad (3.3)$$

avec $\boldsymbol{\tau}$ désignant la tension du vent et α_T un coefficient d'échange constant; au fond,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = 0 \\ T = T_b \\ S = S_b \end{array} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_b, \quad (3.4)$$

et, sur les frontières latérales,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_h = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \end{array} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_l. \quad (3.5)$$

¹Dans cet article, les auteurs considèrent les équations écrites en termes de la densité, de la température et de la salinité plutôt qu'en termes de la poussée.

On retrouve dans (3.3), (3.4) et (3.5) l'expression de l'imperméabilité de $\partial\Omega$. Les conditions limites pour les composantes tangentielles de la vitesse en surface traduisent la traction exercée par le vent sur le fluide, tandis qu'au fond, les conditions de non glissement assurent la continuité de la vitesse du fluide avec celle de la paroi solide. Sur les parois verticales des frontières latérales, seule la composante tangentielle horizontale est fixée. Les conditions limites n'y offrent aucun contrôle direct sur la vitesse verticale et celle-ci peut être a priori d'amplitude quelconque. Cette particularité est une conséquence, déjà évoquée dans la section 2.3, de l'approximation hydrostatique. Les frontières étant imperméables, les conditions limites de Neumann pour la température et la salinité quantifient les flux de chaleur et salinité sur $\partial\Omega$, et $\partial\Omega_l$. Au fond, des conditions limites de Dirichlet fixent T et S à des valeurs déterminées T_b et S_b . Lions, Temam et Wang (1991b) précisent que d'autres conditions limites peuvent être utilisées au fond, par exemple,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x_3} = 0 \\ u_3 = -\mathbf{u}_h \cdot \nabla_h h \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\}, x \in \partial\Omega_b, \quad (3.6)$$

La condition pour u_3 , équivalente à $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ est l'expression de l'imperméabilité du fond.

Dans le cas où le bassin est ouvert sur certaines portions de $\partial\Omega_l$, les conditions limites n'y sont plus homogènes. Elles s'écrivent alors

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_h = \mathbf{d}_h \\ T = T_l \\ S = S_l \end{array} \right\}, x \in \partial\Omega_l, \quad (3.7)$$

où \mathbf{d}_h , T_l et S_l sont des valeurs données des composantes horizontales de la vitesse, de la température et de la salinité; \mathbf{d}_h doit vérifier

$$\int_{\partial\Omega_l} \mathbf{d}_h \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega = \int_{\partial\Sigma} \left(\int_{-h}^0 \mathbf{d}_h \cdot \mathbf{n} dx_3 \right) d\partial\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \bar{\mathbf{d}}_h \cdot \mathbf{n} d\partial\Sigma = 0 \quad (3.8)$$

qui exprime la conservation de la masse fluide totale dans Ω .

3.2 Le problème des conditions limites en mer ouverte

L'existence d'une solution unique au problème non homogène n'est pas démontrée à notre connaissance. On peut toutefois avancer des arguments à l'appui de sa vraisemblance. Les conditions limites pour T et S sur $\partial\Omega_l$ sont du même type que celles utilisées au fond et devraient donc n'apporter que quelques complications techniques à leur traitement. Pour ce qui est des vitesses, Zuur (1995b) a montré comment il est possible de définir sur Ω un champ \mathbf{u}'_h de trace \mathbf{d}_h sur $\partial\Omega_l$ et vérifiant la contrainte d'incompressibilité

$$\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}'_h = 0. \quad (3.9)$$

Un champ u'_3 peut en être déduit à l'aide de

$$u'_3 = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} \right) dz. \quad (3.10)$$

En soustrayant le champ de vitesse \mathbf{u}' à \mathbf{u} , on obtient un problème aux limites pour la différence \mathbf{v} avec des conditions limites en \mathbf{v}_h homogènes sur $\partial\Omega_l$. Ce problème ne diffère du problème homogène que par la présence de termes additionnels issus des non-linéarités. Ladyzhenskaya (1969) a établi que ces termes issus des non-linéarités n'exercent aucune influence sur les résultats finaux de solvabilité dans le cas des équations de Navier-Stokes. On supposera qu'ils ne menacent pas non plus l'existence d'une solution unique pour le problème hydrostatique.

Les conditions limites à prescrire sur $\partial\Omega_l$ portent donc sur la température et la salinité (ou la poussée), et sur les composantes horizontales de la vitesse, que les frontières soient ouvertes ou fermées. Dans tous les cas, le champ de vitesse au bord doit vérifier la contrainte

$$\int_{\partial\Sigma} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Sigma = 0. \quad (3.11)$$

3.2 Le problème des conditions limites en mer ouverte

Les frontières en mer ouverte ² apparaissent généralement lorsqu'on restreint l'extension du domaine de résolution pour des raisons d'économie de calcul. Celui-ci est alors délimité par des frontières latérales ouvertes, en partie ou en totalité, sur le milieu marin environnant. Dans le cas du Golfe du Lion par exemple, ces frontières couvrent la moitié du périmètre de surface du domaine.

²dénommées simplement frontières ouvertes

A la différence des frontières avec la terre ou l'atmosphère, les frontières en mer ouverte ne correspondent pas à des limites naturelles et les conditions limites n'y sont plus l'expression d'une interaction physique déterminée avec le milieu environnant telle que la friction au contact d'une interface solide ou gazeuse; elles sont uniquement l'expression de la continuité du milieu fluide. Ces frontières revêtent donc un caractère artificiel puisque rien, dynamiquement parlant, ne justifie leur choix.

La prescription de conditions limites aux frontières ouvertes est particulièrement délicate. En effet, selon les conditions limites prescrites, on peut voir apparaître, à proximité de ces frontières, des "perturbations parasites" de la solution. Elles se manifestent notamment sous la forme de fortes variations des champs de vitesse, de densité et de pression. La littérature parle à leur sujet de "couche limite artificielle" (Oligier and Sundström 1978; Christer and Johansson 1991). Au-delà d'une certaine amplitude, ces perturbations menacent la stabilité de la solution. De toute façon, elles sont préjudiciables à la solution et peuvent parfois s'étendre largement dans le domaine de résolution.

Il s'agit là fondamentalement d'un problème de consistance des données utilisées par les conditions limites avec la dynamique du domaine considéré. Un exemple simple permet de l'illustrer. Soit un bassin dont certaines portions de la frontière sont ouvertes, et soumis à l'action du vent. Imaginons que les conditions limites sur une portion ouverte y fixent les valeurs de la vitesse. Si, sur le bassin, le vent se met à souffler et tend à entraîner, à proximité de la frontière, les couches de surface dans une direction opposée au flux spécifié, on verra se former un front à hauteur de la frontière, avec des mouvements verticaux importants. On peut supposer qu'il s'agit là de "perturbations parasites" générées par l'usage de données inconsistantes pour les conditions limites sur la vitesse. Remarquons qu'en l'absence d'information sur la configuration et la dynamique du bassin au-delà de la frontière, rien ne permet d'évaluer le degré d'"inconsistance" des conditions limites et d'"artificialité" de la solution. En fait, le forçage de la zone contiguë pourrait être tel qu'il induise les courants prescrits par les conditions limites, auquel cas la solution obtenue n'aurait plus rien d'artificiel.

L'exemple choisi est sans doute quelque peu caricatural mais il illustre bien la nature du problème posé par les conditions limites sur des frontières ouvertes. Il s'agit bien, à la base, d'un problème de données et non de formulation des conditions limites. Si la solution des équations primitives était connue sur un domaine plus large Ω' englobant le domaine Ω considéré, on disposerait alors des valeurs nécessaires pour les conditions limites du problème ouvert sur Ω , dans la forme de (3.7). La solution pourrait donc être

3.2 Le problème des conditions limites en mer ouverte

reproduite sur Ω sans que les conditions limites n'induisent de perturbation.

En pratique, le problème des conditions limites en mer ouverte se pose différemment: on ne connaît pas a priori la solution et les valeurs utilisées pour les conditions limites sont généralement fournies par des mesures ou des résultats de modèles plus simples, de modèles inverses, de modèles englobants de résolution spatiale ou temporelle moindre, ou encore de modèles sur des domaines jointifs. Ce dernier type de situation apparaît notamment pour des problèmes dont la résolution numérique exploite une méthode de décomposition de domaines sur des machines parallèles. La solution est calculée sur un bassin plus large et la frontière ouverte est simplement le lieu de jonction entre sous-domaines. Dans tous les autres cas, l'apparition de perturbations est inévitable mais leur amplitude peut varier fortement selon le degré de consistance entre les valeurs des conditions limites et les processus modélisés.

Le problème pratique posé au modélisateur consiste à éliminer ou limiter au maximum les perturbations de la solution tout en préservant au mieux l'information apportée de l'extérieur par les conditions limites.

Avec l'objectif d'épurer la solution de ces perturbations, divers auteurs ont imaginé de nombreuses formulations alternatives pour les conditions limites. On en trouvera une revue relativement complète dans (Haltiner and Williams 1980) et dans (Røed and Cooper 1986). Roed et Cooper (1986) distinguent parmi celles-ci trois grandes catégories:

- les formules d'extrapolation simple,
- les conditions radiatives,
- les techniques d'extension du domaine.

Le premier type de formulations (Sundström and Elvius 1979) consiste à extrapoler une valeur sur la frontière à partir de la solution à l'intérieur du domaine.

Les formulations du deuxième type reposent sur la condition de radiation de Sommerfeld

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \quad (3.12)$$

où ϕ est n'importe quelle variable et c la vitesse de phase des ondes associées à cette variable. Utilisées pour la première fois par Orlandi (1976) dans l'étude

d'ondes de gravité, elles ont fait depuis l'objet de nombreuses adaptations (Camerlengo and O'Brien 1980; Chapman 1985; Guo and Zeng 1995). L'objectif n'a pas changé: elles visent toujours à permettre aux ondes, physiques ou numériques (c.-à-d. générées artificiellement par la discrétisation), de quitter le domaine de résolution. Bien que développées théoriquement dans le cadre d'équations hyperboliques, elles sont très largement utilisées dans les modèles de circulation générale.

Dans les formulations du troisième type (Israeli and Orszag 1981; Chapman 1985), le domaine de résolution est étendu au delà de la région étudiée, constituant ainsi une zone tampon où les différents champs peuvent s'ajuster progressivement aux conditions limites. La technique des "couches éponges" fait partie de ce type de formulations. Elle consiste à discrétiser un terme d'amortissement, éventuellement combiné à un terme de radiation, dans la zone tampon. La méthode permet effectivement d'amortir les perturbations mais au risque de lisser excessivement la solution à proximité des frontières.

Le danger de l'application systématique de ces techniques dans un modèle de circulation générale est une perte de contrôle sur le comportement dynamique des régions proches des frontières.

L'objectif de notre approche est identique, à savoir éliminer ou limiter au maximum les perturbations de la solution, mais la démarche est différente. Elle procède en deux étapes, comme précisé en introduction du chapitre. La première vise à relaxer spécifiquement, parmi les conditions limites aux frontières ouvertes données sous (3.7), celles dont l'influence sur la solution est moindre; pour celles-ci, on substitue à une condition de Dirichlet une condition de type radiatif.

En dehors des couches limites de surface et de fond, les termes de viscosité sont les plus petits termes des équations de quantité de mouvement comme l'a montré l'analyse d'ordres de grandeur de la section 2.1.4. On peut dès lors supposer que les conditions limites requises aux frontières ouvertes par les seuls termes de diffusion exercent une influence plus réduite sur la solution. Afin de les identifier, on déterminera un ensemble de conditions limites suffisantes pour l'unicité de solutions aux équations primitives non visqueuses linéarisées. La section 3.3 qui suit est consacrée à cette première étape.

Après avoir reformulé les conditions limites associées aux termes visqueux, la deuxième étape consiste à construire à l'aide d'un sous-modèle combinant données et solution calculée, des valeurs consistantes pour leur usage dans les autres conditions limites. Cette étape est souvent indispensable car, comme mentionné précédemment, on ne dispose jamais de données parfaitement consistantes avec les processus modélisés.

Dans le cas du Golfe du Lion, les données dont nous disposons sont des

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

champs mensuels moyens de température et salinité reconstruits par un modèle inverse à partir de données climatologiques; les simulations envisagées sont des simulations à méso-échelle avec un vent variable. L'utilisation des données sous forme "brute" dans les conditions limites n'est donc pas possible.

Notre sous-modèle repose sur une forme simplifiée de la composante normale à la frontière ouverte de l'équation de quantité de mouvement, dont on a éliminé les termes de diffusion horizontale mais dont on a conservé le terme de diffusion verticale de manière à pouvoir intégrer les effets du vent. En supposant des vitesses verticales nulles et une valeur du transport normal donné, cette équation permet de déterminer un champ de vitesse normale, qui est alors utilisé dans les conditions limites. Cette deuxième étape, lié au problème étudié et fonction des données dont on dispose, fera l'objet de la section 3.5.

3.3 Reformulation des conditions limites sur la base du problème non visqueux

Deux processus majeurs participent aux transferts de quantité de mouvement et d'énergie dans les milieux marins. Ce sont l'advection par le fluide et la diffusion turbulente. En dehors des couches limites de surface et de fond, et notamment aux frontières ouvertes, l'advection joue le rôle prépondérant. Parmi les conditions limites aux frontières ouvertes (3.7) formulées dans la section 3.1, certaines ne sont associées qu'aux seuls termes de diffusion des équations primitives. L'utilisation pour ces conditions limites de valeurs inconsistantes avec une dynamique de l'écoulement dominée par les processus advectifs génère des perturbations de la solution.

L'exemple de l'équation de la poussée (2.74) en est la plus simple et plus parlante illustration. Son analyse permet de mettre aisément en évidence l'importance relative des processus d'advection et de diffusion, d'illustrer la formation de couches limites artificielles et de proposer une formulation alternative pour les conditions limites requises par les seuls termes de diffusion. La section 3.3.1 y est consacrée.

Le but du restant de la section 3.3 est d'aboutir à une reformulation analogue des conditions limites aux frontières ouvertes pour l'ensemble des équations primitives.

Les équations de quantité de mouvement (2.69–2.71) avec la condition d'incompressibilité (2.72) n'ont toutefois pas la forme simple de l'équation de la poussée et la différenciation des conditions limites n'est pas aussi aisée.

Afin d'identifier les conditions limites requises par les seuls termes de diffusion, il est nécessaire d'examiner le problème aux limites pour les équations primitives dans lesquelles on néglige viscosité et diffusivité.

A l'aide d'une analyse de modes normaux inspirée par Oliger et Sundström (1978), la section 3.3.2 montre le caractère mal posé d'un problème aux limites pour ces équations avec des conditions limites définies exclusivement *localement* sur les frontières ouvertes. Dans la section 3.3.3, on déduit de l'application de la méthode de l'énergie un ensemble de conditions limites, dont certaines sous forme *intégrale*, permettant de garantir l'unicité de solutions des équations linéarisées.

Sur la base de ces résultats et de la distinction entre frontières "entrantes" et "sortantes" qui en découle, on reformule dans la section 3.3.4 les conditions limites des équations primitives avec viscosité: les conditions limites qui sont associées aux seuls termes de diffusion sont relaxées en utilisant une condition de type radiatif.

3.3.1 Advection et diffusion dans l'équation de la poussée

Pour un champ de vitesse \mathbf{u} donné, l'équation de la poussée

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = K_h \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 b}{\partial x_3^2} \quad (3.13)$$

est une équation aux dérivées partielles de type mixte. Si les termes advectifs sont négligeables devant les termes diffusifs, l'équation se réduit à une équation de diffusion de type parabolique, requérant une condition initiale dans Ω ainsi que des conditions limites en tous les points de la frontière $\partial\Omega$.

Si, au contraire, les termes diffusifs sont négligeables devant les termes advectifs, l'équation se réduit à

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = 0 \quad (3.14)$$

qui est du type hyperbolique. Les trajectoires des particules fluides dans l'espace (x, t) sont des lignes caractéristiques le long desquelles (3.14) peut être intégrée. Sur chacune des caractéristiques, on a $b(s) = b(s_0)$, où s désigne une abscisse curviligne attachée à la ligne caractéristique et s_0 , l'abscisse d'un point où la valeur de b est donnée. Selon que la trajectoire de la particule considérée est issue d'un point de Ω en $t = 0$ ou d'un point de la frontière "entrante" $\partial\Omega_{in}$ en $t > 0$ ($\partial\Omega_{in}$ est noté pour les portions de $\partial\Omega_i$ où les particules fluides pénètrent dans le domaine Ω), une condition initiale ou une

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

condition limite sur la frontière entrante permet de déterminer la solution sur toute la trajectoire. Le domaine $\Omega \times (0, T^*)$ ³ de l'espace (x, t) étant couvert par l'ensemble des trajectoires issues des points de Ω en $t = 0$ ou des points de $\partial\Omega_{in}$ en $t > 0$, les conditions initiales sur Ω et limites sur $\partial\Omega_{in}$ suffisent à déterminer la solution $b(x, t)$ de manière unique.

Pour mesurer l'importance relative des termes de transport et de diffusion, un nombre sans dimension, le Peclet, est défini par analogie avec les problèmes de convection thermique:

$$Pe = \frac{UL}{K_h}, \quad (3.15)$$

où U , L sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement. Avec des valeurs caractéristiques $U = O(5 \cdot 10^{-1} m s^{-1})$, $L = O(10^5 m)$ et $K_h = O(10 - 10^4 m^2 s^{-1})$ pour la circulation océanique (voir section 2.1), on obtient pour le nombre de Peclet des valeurs entre 5 et 5000. L'advection apparaît donc bien comme un processus déterminant pour l'évolution du champ de poussée.

L'équation avec diffusivité (3.13), aussi petits soient les termes diffusifs, requiert néanmoins des conditions limites pour b en chacun des points de $\partial\Omega$. Aux frontières ouvertes, les flux advectifs dominent les flux diffusifs. On doit dès lors s'attendre à ce que les conditions limites sur $\partial\Omega_{out}$ (noté pour la frontière "sortante", là où les particules fluides quittent le domaine Ω), requises par les seuls termes diffusifs, influencent la solution dans une moindre mesure que celles sur $\partial\Omega_{in}$.

La résolution de l'équation (3.13) dans le cas unidimensionnel stationnaire nous permet de mesurer plus précisément l'influence de chacune des conditions limites sur la solution. Soit un domaine $(0, L)$ où le fluide s'écoule à vitesse $u(x_1) = U$ constante. En introduisant la variable indépendante adimensionnelle $\xi = x_1/L$, l'équation pour la poussée s'écrit

$$\frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} - Pe \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0. \quad (3.16)$$

Avec les conditions limites

$$b = b_0 \quad \text{en } \xi = 0, \quad (3.17)$$

$$b = b_1 \quad \text{en } \xi = 1, \quad (3.18)$$

³L'intervalle $(0, T^*)$ est l'intervalle d'intégration pour la variable t .

l'intégration de (3.18) est immédiate et l'on obtient la solution

$$b(\xi) = b_0 + (b_1 - b_0) \frac{\exp^{Pe\xi} - 1}{\exp^{Pe} - 1}. \quad (3.19)$$

La figure 3.1 représente la solution pour les différentes valeurs du Pe . Lorsque

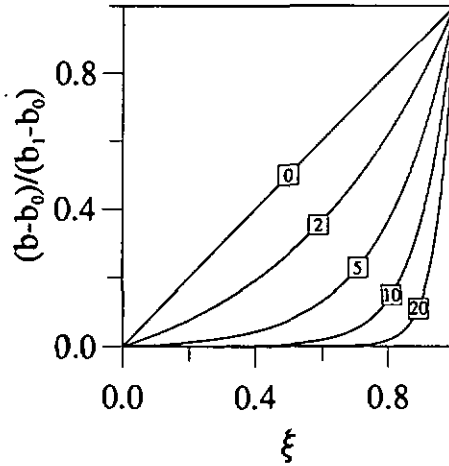


Figure 3.1: Distribution de la poussée (adimensionnelle) en fonction de $\xi = x_1/L$. Les différentes courbes correspondent aux solutions obtenues pour les valeurs mentionnées du nombre de Peclet.

Pe croît, on observe la formation d'une couche limite de diffusion de plus en plus confinée près de la frontière $\xi = 1$ en aval de l'écoulement. En reportant dans l'équation (3.16) l'ordre de grandeur des variations de poussée (noté Δb) au sein de la couche limite d'épaisseur $\Delta x_1 = \delta$, on obtient

$$L^2 \frac{\Delta b}{\delta^2} - Pe L \frac{\Delta b}{\delta} = 0 \quad (3.20)$$

qui nous fournit, en ordre de grandeur, l'évaluation

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{Pe} \quad (3.21)$$

pour l'épaisseur relative de la couche limite. Pour les valeurs du Pe calculées précédemment, la solution se comporte sur la majeure partie du domaine comme la solution d'un problème d'advection pure tandis que les effets de diffusion ne se manifestent que dans une couche limite restreinte. La condition limite pour la poussée sur la frontière entrante influe donc sur la totalité de la solution alors que la condition limite en aval ne l'influence de manière significative que dans la couche limite.

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

Même si dans les milieux marins de fortes variations de densité peuvent apparaître à hauteur de fronts thermohalins, les gradients de densité ont rarement la direction du courant. La formation d'une telle couche limite transversale à l'écoulement est donc peu réaliste et doit être considérée comme une perturbation artificielle de la solution. On l'élimine aisément en substituant à (3.18) la condition limite

$$\frac{\partial b}{\partial \xi} = 0 \quad \text{en } \xi = 1. \quad (3.22)$$

La solution est alors

$$b(\xi) = b_0 \quad (3.23)$$

et correspond à celle du problème advectif pur. La condition de Neumann homogène permet donc d'éviter la formation d'une couche limite, mais supprime également, dans ce cas unidimensionnel, tout effet de diffusion vers l'amont du courant.

Pour l'équation de la poussée (3.13), les valeurs de la poussée aux frontières entrantes d'un domaine ouvert conditionnent l'entièreté de la solution alors que les conditions limites aux frontières sortantes exercent une influence plus locale. Il faut toutefois noter que lorsque les équations pour la quantité de mouvement et la poussée sont couplées, la formation d'une couche limite s'accompagne également de perturbations du champ de vitesse, lesquelles, selon leur amplitude, peuvent ne pas rester confinées dans la couche limite.

3.3.2 Caractère mal posé de conditions limites locales

En l'absence des termes de diffusion, les équations primitives deviennent

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 - f u_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 + f u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (3.26)$$

$$\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = 0. \quad (3.28)$$

Elles ont la forme des équations d'Euler où l'on a introduit l'approximation hydrostatique et rajouté les termes de Coriolis.

Plusieurs auteurs, parmi lesquels récemment Zajaczkowski (1987) et Antontsev et al. (1990), ont étudié le problème aux limites des équations d'Euler en présence de frontières ouvertes. Antontsev et al. obtiennent un résultat d'existence (locale) et d'unicité pour le problème d'Euler (non hydrostatique), dont les conditions limites consistent à prescrire toutes les composantes de la vitesse sur les frontières entrantes et la seule composante normale sur les frontières sortantes et fermées. Zajaczkowski montre que la pression peut être prescrite à la place de la vitesse normale sur les frontières sortantes.

Pour le problème aux limites des équations (3.24–3.28), Norbory et Cullen (1985) établissent l'existence de surfaces caractéristiques constituées de trajectoires de particules fluides dans l'espace (x, t) . Ils en déduisent que des conditions limites prescrivant les valeurs de u_1 , u_2 et b sont nécessaires sur les frontières latérales entrantes. Ces conditions ne sont toutefois pas suffisantes. Dans le cas particulier d'un écoulement horizontal 2D pour un fluide de densité homogène, les résultats de Zajaczkowski et d'Antontsev et al. ⁴ montrent en effet qu'une condition additionnelle, sur la vitesse normale ou la pression, est nécessaire pour obtenir une solution unique.

Oliger et Sundström (1978) ont également abordé les problèmes aux limites de plusieurs équations de la mécanique des fluides, parmi lesquelles les équations d'Euler compressibles avec approximation hydrostatique. Ces équations diffèrent de celles que nous considérons par la présence d'une équation d'évolution pour la pression au lieu de la condition d'incompressibilité. A l'aide d'une analyse des modes normaux, ils montrent le caractère mal posé d'un problème aux limites fermé avec des conditions limites définies exclusivement *localement* sur les frontières ouvertes. Nous allons reprendre ici leur démarche en l'appliquant aux équations (3.24–3.28) qui nous occupent pour en tirer des conclusions analogues.

Afin de pouvoir appliquer une technique de décomposition en modes normaux, les équations sont linéarisées pour des petites perturbations d'un état d'équilibre. Celui-ci est défini par un champ de vitesse uniforme

$$(u_1, u_2, u_3) = (a_1, a_2, 0), \tag{3.29}$$

avec a_1 et a_2 constants. Le domaine de résolution Ω considéré est de profondeur constante et les frontières imperméables sont constituées de surfaces verticales parallèles à la direction de l'écoulement $(a_1, a_2, 0)$. Les équations

⁴A deux dimensions, les équations (3.24) et (3.25) ne diffèrent des équations d'Euler que par la présence des termes de Coriolis qui, étant d'ordre de dérivée zéro, n'ont aucune incidence sur les conditions limites à poser.

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

pour les perturbations u , P et b s'écrivent, au premier ordre ⁵,

$$\frac{Du_1}{Dt} - fu_2 = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (3.30)$$

$$\frac{Du_2}{Dt} + fu_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{Db}{Dt} + N^2 u_3 = 0, \quad (3.34)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, et les conditions limites

$$u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = -h, \quad (3.35)$$

$$\alpha \frac{DP}{Dt} = gu_3 \quad \text{en } x_3 = 0. \quad (3.36)$$

Le coefficient α vaut 0 du fait de l'approximation du toit rigide; il vaudrait 1 sinon. Ces équations ont exactement la forme des équations (2.22–2.26) et des conditions limites (2.33) et (2.37) établies pour l'analyse d'ondes de la section 2.2, si ce n'est que les dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ sont remplacées par $\frac{D}{Dt}$. De développements strictement analogues où l'on substitue $\frac{D}{Dt}$ à $\frac{\partial}{\partial t}$ de manière systématique, on tire des équations pour u_3 et P formellement identiques à (2.46) et (2.47). Les équations sont séparables et la décomposition de u_3 et P sous la forme (2.48–2.49) conduit, pour la dépendance verticale, au problème aux valeurs propres (2.50) déjà discuté. Pour les variables u_1 et u_2 , leur décomposition dans la base des fonctions propres $q_n(x_3)$ obtenues s'écrit

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_i^{(n)}(x_1, x_2, t) q_n(x_3) / g, \quad i = 1, 2. \quad (3.37)$$

Introduite dans (3.30), (3.31) et (3.34), cette décomposition conduit, pour chacun des modes propres n , aux équations

$$\frac{D\tilde{u}_1}{Dt} - f\tilde{u}_2 = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x_1}, \quad (3.38)$$

$$\frac{D\tilde{u}_2}{Dt} + f\tilde{u}_1 = -g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x_2}, \quad (3.39)$$

$$\frac{D\tilde{\eta}}{Dt} + H_n \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (3.40)$$

⁵La condition d'incompressibilité a été réécrite sous la forme 3.33 pour retrouver le formalisme utilisé pour l'étude des ondes de gravité.

où H_n est la profondeur équivalente définie pour la n^e valeur propre. On reconnaît en (3.38–3.40) les équations shallow water linéarisées, de nature hyperbolique, pour lesquelles la formulation de conditions limites appropriées est aisée (voir par exemple (Bennett 1992)). Elle consiste, selon les valeurs relatives de la vitesse normale $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ et de $c_n = \sqrt{gH_n}$ ⁶, à prescrire zéro, une, deux ou trois conditions limites aux frontières ouvertes. Le nombre de conditions limites à prescrire en un même point diffère donc selon les modes. Oliger et Sundström concluent qu'un problème aux limites bien posé ne peut être obtenu que si les conditions limites sont formulées en termes des fonctions propres ou si des opérateurs limites non locaux sont utilisés. Dans ce dernier cas en effet, le problème n'est plus séparable pour les variables u_1 et u_2 et l'analyse des modes normaux ne permet pas de déterminer la forme adéquate des conditions limites. Malgré le fait que ces conclusions ne soient strictement valides que pour les équations aux petites perturbations, on peut penser qu'elles le sont également pour les équations sous forme originale résolues dans des domaines plus complexes.

3.3.3 Application de la méthode de l'énergie

Une technique classique utilisée pour la détermination du type des conditions initiales et limites pour les problèmes aux limites d'équations symétriques⁷ linéaires est la méthode de l'énergie (Courant and Hilbert 1962). Elle consiste à tirer une équation d'énergie des équations considérées et d'en déduire alors des conditions limites en nombre suffisant pour garantir l'unicité des solutions du problème aux limites ainsi défini. Nous appliquerons cette méthode aux équations primitives non visqueuses, linéarisées comme suit

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u_1 - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u_2 + f u_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b, \quad (3.43)$$

$$\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla b = 0, \quad (3.45)$$

⁶Les c_n sont les vitesses de phase des ondes de gravité correspondantes à chacun des modes, variant de plusieurs m/s ou dizaines de m/s pour les premiers modes à des valeurs proches de zéro pour $n \rightarrow \infty$.

⁷Dans cette terminologie, la symétrie caractérise les opérateurs différentiels écrits sous forme matricielle.

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

avec $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un champ de vitesse à divergence nulle. On vérifie que ces équations définissent un opérateur différentiel symétrique.

Sur la base du signe de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$, on distingue les frontières imperméables où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$, les frontières “entrantes” où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$ et les frontières “sortantes” où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} > 0$. On les notera respectivement $\partial\Omega_0$, $\partial\Omega_{in}$ et $\partial\Omega_{out}$. Les frontières $\partial\Omega_{in}$ et $\partial\Omega_{out}$ sont localisées sur les portions verticales $\partial\Omega_l$ du bord $\partial\Omega$. $\partial\Omega_0$ est la réunion des frontières de surface $\partial\Omega_s$ et de fond $\partial\Omega_b$, et d'éventuelles portions imperméables de $\partial\Omega_l$ (voir la figure 2.2 dans la section 2.3).

La linéarisation découple l'équation de la poussée (3.45), dont la solution est déterminée à partir des conditions initiales et limites définies dans la section 3.3.1. Les équations (3.41–3.44), où le champ b apparaît dès lors comme une force connue, peuvent être examinées séparément.

Soient $(\mathbf{u}_h^{(1)}, P^{(1)})$ et $(\mathbf{u}_h^{(2)}, P^{(2)})$ deux solutions de ces équations. La différence $(\mathbf{u}_h, P) = (\mathbf{u}_h^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(2)}, P^{(1)} - P^{(2)})$ vérifie les mêmes équations, homogènes, c.-à-d. (3.41–3.44) avec $b = 0$; P s'identifie alors à sa composante barotrope $p(x_1, x_2)$. Multiplions les deux premières respectivement par u_1 et u_2 , additionnons et intégrons-les sur Ω , pour obtenir, après utilisation de (3.43) homogène, de (3.44) et du théorème de la divergence, l'équation

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} + F(t) = 0 \quad (3.46)$$

où $K(t)$ mesure l'énergie cinétique du mouvement horizontal contenue dans Ω

$$K(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 d\Omega \quad (3.47)$$

et $F(t)$ son flux à travers $\partial\Omega$

$$F(t) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega + \int_{\partial\Sigma} p \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} d\partial\Sigma. \quad (3.48)$$

Intégrée sur un intervalle $[0, t]$, l'équation (3.46) donne

$$K(t) - K(0) = - \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (3.49)$$

Si l'on définit pour $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h^{(1)} - \mathbf{u}_h^{(2)}$ des conditions initiales homogènes et des conditions limites pour lesquelles F est positif ou nul, l'unicité sera acquise. En effet, de telles conditions conduiront à $K(t) = 0$, ce qui impliquera $\mathbf{u}_h = 0$.

Des équations (3.41–3.43), on déduira alors que P est un champ constant. Les solutions $(\mathbf{u}_h^{(1)}, P^{(1)})$ et $(\mathbf{u}_h^{(2)}, P^{(2)})$ seront donc confondues à une constante additive du champ de pression près.

Le second terme du membre de droite de (3.48) peut prendre a priori des valeurs quelconques. En fixant les valeurs du transport normal

$$\bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (3.50)$$

on assure le signe non négatif de cette composante de F . Examinons le signe de la seconde composante de F sur chacune des portions de $\partial\Omega_l$. Sur la surface $\partial\Omega_{in}$,

$$\int_{\partial\Omega_{in}} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \leq 0. \quad (3.51)$$

Le signe non négatif ne peut être garanti que si l'on y prescrit les conditions limites

$$\mathbf{u}_h = 0. \quad (3.52)$$

Sur la surface $\partial\Omega_{out}$,

$$\int_{\partial\Omega_{out}} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega \geq 0 \quad (3.53)$$

et aucune condition limite additionnelle n'est nécessaire. Il en est de même sur les portions imperméables de $\partial\Omega_l$ puisque

$$\int_{\partial\Omega_l \cap \partial\Omega_0} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h\|^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0. \quad (3.54)$$

Le terme $F(\tau)$ dans (3.49) est donc nécessairement positif ou nul pour les conditions limites définies et l'unicité est ainsi démontrée.

En résumé, outre les conditions d'imperméabilité en surface et au fond, les conditions limites pour le problème non visqueux sur un domaine ouvert consistent à prescrire les valeurs du transport normal sur $\partial\Sigma$,

$$\bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = D \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (3.55)$$

ainsi que celles des composantes horizontales de la vitesse sur $\partial\Omega_{in}$,

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{d}_h. \quad (3.56)$$

3.3 Reformul. des conditions limites sur la base du problème non visqueux

Les valeurs de la vitesse normale $d_h \cdot n$ sur $\partial\Omega_{in}$ doivent être compatibles avec les valeurs du transport normal sur les portions de $\partial\Sigma$ correspondantes. De plus comme déjà mentionné dans la section 3.1, les valeurs de D sur $\partial\Sigma$ doivent vérifier

$$\int_{\partial\Sigma} D d\partial\Sigma = 0 \quad (3.57)$$

pour qu'il y ait conservation de la masse dans Ω .

Les conditions limites obtenues constituent un ensemble de conditions suffisantes pour l'unicité de solutions aux équations (3.41–3.45). Nous n'avons pas démontré l'existence de ces solutions. Une telle analyse dépasse le cadre de notre approche et n'est pas justifiée pour l'exploitation faite des résultats qui, rappelons-le, doivent permettre de reformuler les conditions limites pour le problème visqueux.

On relève encore les points suivants.

1. La vitesse verticale u_3 peut être déterminée sans autre condition limite additionnelle sur les frontières verticales, même ouvertes.
2. La condition limite (3.55) a une forme intégrale et non locale pour les vitesses normales. Il n'y a donc pas de contradiction avec les résultats de Oligier et Sundström (1978) (voir section 3.3.2).
3. Cette condition limite est cohérente avec l'interprétation du rôle de la pression donnée dans la section 2.4.2 où elle se substitue à la condition

$$\bar{u}_h \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \quad (3.58)$$

prescrite dans le cas d'un bassin fermé. Utilisée avec le théorème 2, elle permet d'ailleurs de reformuler le problème ouvert pour une variable u'_h au champ de transport incompressible et tangent à $\partial\Sigma$: on décompose le champ de vitesse comme suit

$$u_h = u'_h + \nabla_h r, \quad (3.59)$$

u'_h vérifiant

$$\nabla_h \cdot \bar{u}'_h = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \quad (3.60)$$

$$\bar{u}'_h \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma. \quad (3.61)$$

Avec la condition limite (3.55), le champ $\nabla_h r$ peut être calculé explicitement: r est la solution du problème

$$\nabla_h \cdot (h \nabla_h r) = 0 \quad \text{dans } \Sigma, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{h} \bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{h} D \quad \text{sur } \partial \Sigma. \quad (3.63)$$

En reportant (3.59) dans les équations (3.41–3.44), on obtient un problème aux limites formulé pour un champ \mathbf{u}'_h de transport normal nul aux frontières latérales. Les seules conditions limites encore nécessaires pour \mathbf{u}'_h , et propres au problème ouvert, sont alors

$$\mathbf{u}'_h = \mathbf{d}_h - \nabla_h r \quad \text{sur } \partial \Omega_{in}. \quad (3.64)$$

4. Pour un champ de pression déterminé, les équations (3.41) et (3.42) sont des équations hyperboliques réductibles à une équation différentielle ordinaire (non homogène) pour la variable \mathbf{u}_h . Son intégration sur les trajectoires associées à \mathbf{a} , avec des valeurs initiales dans Ω et limites sur $\partial \Omega_{in}$, en fournit la solution \mathbf{u}_h .
5. Toute condition limite additionnelle par rapport à celles obtenues dans cette section surdéterminent nécessairement le problème.
6. Sur les portions verticales de $\partial \Omega_0$, la condition limite (3.55) n'impose pas que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Toutefois si l'on admet que les résultats obtenus sont généralisables au cas non linéaire, l'imperméabilité de $\partial \Omega_0$ implique alors, par définition, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ partout sur $\partial \Omega_0$.
7. L'application de la méthode de l'énergie aux équations sous la forme linéarisée (3.30–3.34) considérée dans la section précédente conduit aux mêmes conditions limites que celles obtenues ici.
8. Dans le cas particulier d'un écoulement bidimensionnel horizontal, les résultats obtenus sont compatibles avec ceux d'Antontsev et al. (1990), mentionnés dans la section précédente.
9. Une condition limite pour la pression sur $\partial \Sigma$ utilisée à la place de (3.50) permet également de conclure à l'unicité. Des valeurs de la pression ne peuvent cependant pas être prescrites de manière arbitraire, car elles doivent être compatibles avec celles prescrites pour la vitesse sur $\partial \Omega_{in}$. Même si ces contraintes ne sont pas traduisibles localement pour la pression, elles existent. Ainsi, dans le cas particulier 2D, des valeurs de p prescrites partout sur $\partial \Sigma$ surdétermineraient le problème puisque Zajaczkowski (1987) (cité dans la section 3.3.2) montre que seules sont nécessaires des valeurs sur la partie sortante de $\partial \Sigma$.

3.3.4 Reformulation des conditions limites pour les équations primitives avec viscosité

Les résultats de la section 3.3.3 nous permettent de distinguer, parmi les conditions limites prescrites dans la section 3.1, celles qui ne sont requises que par la présence des termes de viscosité et diffusivité dans les équations primitives (2.69-2.74). Cette distinction sert de base à la reformulation des conditions limites aux frontières sortantes. Pour être complet, nous reprenons également ici les autres conditions limites.

Tout d'abord, sur le bord $\partial\Sigma$, les valeurs du transport normal sont données par

$$\bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = D, \quad \mathbf{x} \in \partial\Sigma. \quad (3.65)$$

Les valeurs de D ⁸ satisfont à

$$\int_{\partial\Sigma} D \, d\partial\Sigma = 0. \quad (3.66)$$

Sur les frontières entrantes, les conditions limites consistent en

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_h = \mathbf{d}_h \\ T = T_{in} \\ S = S_{in} \end{array} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in}, \quad (3.67)$$

où \mathbf{d}_h , T_{in} et S_{in} sont des valeurs données. Ce sont les mêmes conditions limites que celles obtenues pour les équations non visqueuses. Si $\partial\Omega_{in}$ couvre localement l'intervalle $(-h, 0)$ tout entier, il faut qu'en ces points $\bar{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{d}}_h \cdot \mathbf{n} = D$.

Sur les frontières sortantes, les conditions limites consistent à appliquer des conditions de radiation pour chacune des variables:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = f \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_h + c \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_h = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} T + c \frac{\partial}{\partial n} T = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} S + c \frac{\partial}{\partial n} S = 0 \end{array} \right\}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_{out}, \quad (3.68)$$

⁸nulles aux points de $\partial\Sigma$ correspondant à des frontières imperméables

où \mathbf{n} et \mathbf{t}_h sont respectivement les directions normale et tangente horizontale à $\partial\Omega_{out}$. La vitesse de phase c est fixée par le rapport de la taille d'une maille Δx et du pas de temps Δt utilisés par le modèle numérique. Un terme $f(x_1, x_2, t)$ a été introduit. Il est ajusté de manière à ce que les vitesses normales satisfassent à la condition limite sur le transport normal (3.65).

Les conditions limites ainsi relaxées par rapport à des conditions limites de Dirichlet permettent d'éviter la formation aux frontières sortantes de couches limites artificielles, que générerait l'usage de valeurs inconsistantes de \mathbf{u}_h , T ou S .

En surface, les conditions limites s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x_3} &= \tau \\ u_3 &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} &= F_T \\ \frac{\partial S}{\partial x_3} &= F_S \end{aligned} \right\}, x \in \partial\Omega_s, \quad (3.69)$$

avec F_T et F_S des flux de température et salinité donnés. La tension exercée par le vent τ est déterminée par

$$\tau = \frac{\rho_a C_d}{\rho_0 A_v} \sqrt{U_{10}^2 + V_{10}^2} (U_{10}, V_{10}), \quad (3.70)$$

où (U_{10}, V_{10}) est la vitesse de l'air à une élévation de 10m au-dessus de la surface, C_d un coefficient de drag ($= 2 \cdot 10^{-3}$), ρ_0 et ρ_a les densités de l'eau et de l'air.

Au fond,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\}, x \in \partial\Omega_b. \quad (3.71)$$

Sur les portions imperméables de $\partial\Omega_l$ enfin,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_h &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\}, x \in \partial\Omega_l \cap \partial\Omega_0. \quad (3.72)$$

3.4 Approximation hydrostatique et vitesse u_3 sur des surfaces verticales

On a pu vérifier dans la section précédente qu'aucune condition limite ne porte sur u_3 sur les frontières verticales. Les conditions limites n'y offrent donc aucun contrôle direct sur les vitesses verticales. Celles-ci doivent s'ajuster de manière à ce que la solution des équations puisse vérifier l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b. \quad (3.73)$$

Sur des frontières entrantes, des conditions limites de Dirichlet fixent les valeurs des composantes horizontales de la vitesse \mathbf{u}_h et de la poussée b ⁹. Ces valeurs sont a priori quelconques. On conçoit bien toutefois que le champ de vitesse verticale à proximité de la frontière en dépendra étroitement. Il s'ensuit que si l'on utilise des valeurs arbitraires de \mathbf{u}_h et b pour les conditions limites aux frontières entrantes, on doit s'attendre à voir apparaître des mouvements verticaux plus ou moins importants. Lorsque ceux-ci sont localisés uniquement à proximité des frontières, ils sont la manifestation de l'inconsistance des valeurs utilisées avec la dynamique modélisée par les équations à l'intérieur du domaine. Plus particulièrement, ils expriment la "difficulté" de la solution à s'ajuster à l'équilibre hydrostatique.

Il n'est pas possible de traduire explicitement cette contrainte hydrostatique pour la vitesse verticale u_3 en fonction des seules valeurs de \mathbf{u}_h et b aux frontières ouvertes. Toutefois, lorsqu'on néglige les termes de viscosité dans les équations primitives et que l'on suppose, par continuité, celles-ci vérifiées sur les limites du domaine, on peut en dériver une relation différentielle liant les valeurs de u_3 , \mathbf{u}_h et b sur une frontière verticale¹⁰. Sur une frontière entrante, où ces valeurs sont connues du fait des conditions limites, une équation différentielle pour u_3 en est déduite.

Afin de ne pas alourdir les notations, nous considérerons des surfaces verticales planes sur lesquelles les coordonnées cartésiennes peuvent être utilisées.¹¹ Soit donc une surface verticale plane. Associons la coordonnée x_1 à la direction normale à la surface; l'axe associé à x_2 est dirigé selon la

⁹Des valeurs de T_{in} et S_{in} on peut déduire les valeurs de b_{in} ...

¹⁰La dérivation est en fait valide pour n'importe quelle surface verticale.

¹¹Dans le cas de surfaces non planes, une formulation des équations en coordonnées curvilignes doit être utilisée (voir annexe 3.6). Des termes additionnels induits par la courbure apparaissent dans les équations mais des dérivations analogues à celles effectuées ci-dessous conduisent à des résultats équivalents.

tangente horizontale. La composante normale de l'équation de quantité de mouvement non visqueuse s'écrit

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0. \quad (3.74)$$

Notons d'emblée que sur une frontière imperméable

$$f u_2 = \frac{\partial P}{\partial x_1}. \quad (3.75)$$

Si $\frac{\partial P}{\partial x_3} = b = 0$, on en déduit

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0, \quad (3.76)$$

qui est la traduction de la contrainte hydrostatique pour la vitesse tangentielle.¹²

En utilisant la condition d'incompressibilité sous sa forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad (3.77)$$

nous pouvons éliminer le terme $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ dans l'équation (3.74). On obtient

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad (3.78)$$

A l'exception du terme de pression, il n'a plus de dérivée selon la direction normale x_1 .

Supposons ici b nul. Si l'on dérive (3.78) par rapport à x_3 , nous obtenons un opérateur intérieur sur la surface verticale puisqu'il ne fait plus intervenir, pour les variables u_1 , u_2 et u_3 , que des dérivées temporelles et spatiales selon les directions tangentielles x_2 et x_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} - u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - f \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nous avons ainsi obtenu une relation différentielle que vérifient les composantes d'un champ de vitesse satisfaisant l'équilibre hydrostatique. Elle

¹²Notons encore qu'à la jonction de frontières imperméables et ouvertes, la continuité de la solution impose à u_2 de tendre vers $\frac{\partial P}{\partial x_1} / f$.

3.4 Approximation hydrostatique et vitesse u_3 sur des surfaces verticales

exprime localement sur la surface verticale la dépendance de la vitesse verticale aux composantes horizontales de la vitesse. Si les valeurs de u_1 et u_2 sont connues, (3.79) se réduit à une équation différentielle ordinaire du second ordre pour u_3

$$-u_1 \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) u_3 = \left(\frac{\partial s}{\partial x_3} \right), \quad (3.80)$$

où les termes connus de (3.79) ont été remis sous la forme de dérivées par rapport à x_3 et rassemblés dans $\frac{\partial s}{\partial x_3}$.

Sur une frontière verticale $\partial\Omega_{in}$ s'étendant de la surface au fond (figure 3.2), l'équation (3.80) est régulière sur l'intervalle $[-h, 0]$ tout entier (puisque $u_1 \neq 0$) et son intégration permet d'obtenir $u_3(x_3)$. Les conditions d'imper-

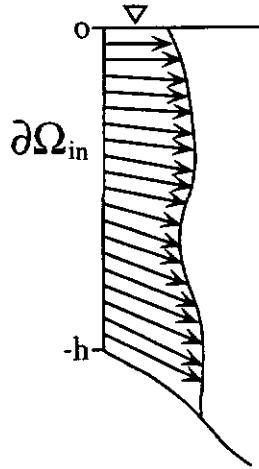


Figure 3.2: Configuration d'une frontière verticale entrante $\partial\Omega_{in}$ couvrant toute la hauteur de la colonne d'eau. Les flèches représentent la projection des vecteurs vitesses dans le plan vertical normal à $\partial\Omega_{in}$.

méabilité

$$u_3 = 0 \quad \text{en } x_3 = 0, \quad (3.81)$$

$$u_3 = -\left(u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \quad \text{en } x_3 = -h \quad (3.82)$$

en fournissent les conditions limites.

La solution de (3.80) s'écrit

$$u_3(x_3) = u_1(x_3) \left(A - \int_{x_3}^0 \frac{1}{u_1^2(z)} (B - s(z)) dz \right). \quad (3.83)$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées avec (3.81) et (3.82): A est nulle; l'expression de B est plus complexe. On note en passant que B s'identifie à la valeur de $\frac{\partial p}{\partial x_1}$. On le vérifie en introduisant la solution (3.83) dans l'équation (3.78).

Nous avons supposé, pour intégrer (3.80), un champ de poussée nul. Si celui-ci est non nul, mais connu, la composante barocline de la pression peut être incluse dans le terme s et l'intégration effectuée de la même manière. S'il n'est pas connu a priori, cela implique la présence d'un terme $\frac{\partial b}{\partial x_1}$ dans (3.79) et donc d'une dérivée normale à la surface considérée. Pour l'éliminer il faut multiplier l'équation par u_1 et substituer au terme $u_1 \frac{\partial b}{\partial x_1}$ la valeur tirée de l'équation de la poussée. L'équation aux dérivées partielles obtenue lie alors les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 et b sur la surface verticale. Sur une frontière entrante, où ces valeurs sont déterminées par les conditions limites, on en tire une équation différentielle pour u_3 , qui exprime la dépendance des vitesses verticales aux valeurs fixées par les conditions limites. Cette équation n'est cependant plus intégrable analytiquement.

Dans le cas du problème visqueux, la présence des termes de diffusion horizontale dans les équations ne permet pas d'en déduire un opérateur différentiel intérieur pour les vitesses sur des surfaces verticales. Les valeurs des vitesses u_3 sur une frontière verticale ouverte ne dépendent donc plus des seules conditions limites locales. On imagine que leur influence reste toutefois prédominante tant que les effets de la viscosité restent secondaires.

3.5 Construction des champs initiaux et limites

Le problème des conditions limites n'est pas clos. Des données sont encore nécessaires pour les conditions limites aux frontières ouvertes formulées dans la section 3.3.4. Les conditions initiales nécessitent également des données sur le domaine tout entier.

Idéalement, on devrait disposer de données avec une couverture spatiale (et temporelle pour les conditions limites) identique à celle du modèle, et qui soient adaptées au type de simulations effectuées, en particulier du point de vue hydrologique et météorologique. Dans le cas de simulations à méso-échelle dans le Golfe du Lion, où de fortes et brutales variations de la circulation peuvent être générées par le vent, cela impliquerait de disposer de mesures de courant, de température et salinité sur toute la périphérie du domaine, pour quasi n'importe quel scénario de vent. Même limitées à des couches superfi-

3.5 Construction des champs initiaux et limites

cielles, de telles mesures représentent une masse de données gigantesque, et indisponible! Il est pourtant nécessaire d'utiliser dans les conditions limites des valeurs constantes avec le forçage considéré; imposer des conditions limites identiques sur les vitesses quelles que soient les conditions de vent $n'a$, en effet, pas beaucoup de sens.

Ce manque de données motive l'utilisation de techniques de modèles emboîtés où les conditions limites pour un modèle sur une région déterminée sont fournies par la solution d'un modèle à plus grande échelle appliqué sur un domaine plus large. Il faut toutefois garder à l'esprit que la résolution du modèle englobant étant moindre (typiquement d'un facteur 4 ou 5), l'utilisation brute de telles données implique *de facto* un filtrage, à l'échelle la plus large, de la solution à proximité des frontières ouvertes.

La démarche que nous avons adoptée consiste, pour l'essentiel, à construire des champs de vitesse normale $u \cdot n$ aux frontières entrantes, en utilisant les équations du mouvement sous une forme approximée et des données climatologiques de température et salinité reconstituées par un modèle inverse. La section 3.5.3 décrit cette démarche plus en détail. Auparavant, la section 3.5.1 présente brièvement le modèle inverse et les sources de données utilisées. La construction des champs initiaux, qui exploite également les résultats du modèle inverse, fait l'objet de la section 3.5.2.

3.5.1 Le modèle inverse

Le modèle variationnel inverse du G.H.E.R. (Brasseur and Haus 1991) reconstitue, à partir de mesures éparées, des champs continus de paramètres hydrologiques (ou autres). La méthode utilisée est une méthode d'analyse variationnelle qui peut être interprétée comme une variante de la méthode d'analyse objective standard et dont les avantages ont été discutés et illustrés par Brasseur et al. (1996). Pour le Golfe du Lion, des mesures de température et salinité issues de fichiers de données du BNDO (Bureau National des Données Océaniques, Brest, France) et de quelques campagnes EROS-2000 ont été utilisées. L'ensemble constitue un ensemble de données historiques représentatives de la période 1945–1978 pour l'essentiel, la distribution des données variant toutefois fortement selon les mois.

Appliqué aux données compilées des mois de juillet et de février, le modèle inverse a produit des champs de température et salinité considérés comme représentatifs des eaux du Golfe du Lion à ces périodes de l'année.

3.5.2 Construction des champs initiaux

Les résultats du modèle inverse servent à initialiser les champs de température et salinité. Ces derniers définissent un champ de poussée b dont les variations induisent des gradients horizontaux de pression. En première approximation, les courants générés par les forces de pression s'ajustent de manière à satisfaire l'équilibre géostrophique.

Cette approximation géostrophique des équations primitives est utilisée pour construire des champs initiaux de vitesse u_1 et u_2 . Ils sont décrits par les équations

$$f u_2 = \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad (3.84)$$

$$f u_1 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b. \quad (3.86)$$

L'intégration de (3.86) nécessite la connaissance du champ de pression à un niveau de référence quelconque. En l'absence d'autres données (comme l'élévation de la surface), il est d'usage de définir un niveau où les vitesses sont supposées nulles (ou le champ de pression uniforme, les deux hypothèses étant équivalentes).

Outre la difficulté à justifier l'existence physique d'un tel niveau de mouvement nul, le défaut majeur de l'approximation géostrophique est que les champs de vitesse obtenus ne peuvent satisfaire les conditions limites d'imperméabilité aux frontières solides. En effet, sur une frontière verticale imperméable,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -f^{-1} \frac{\partial P}{\partial t_h}, \quad (3.87)$$

où t_h désigne la tangente horizontale à la surface (orientée aire à gauche). Rien ne permet a priori de vérifier cette contrainte. De même, si l'on intègre l'équation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ de la surface au fond, une au moins des conditions d'imperméabilité sur ces frontières est violée.

Malgré ces inconvénients, l'approximation géostrophique est utilisée pour initialiser les champs de vitesse u_1 et u_2 . Dès la première itération du modèle numérique, le champ de pression s'ajuste de manière à forcer un champ de vitesse à divergence nulle et satisfaisant les conditions limites pour la vitesse normale.

3.5.3 Construction des champs limites entrants

Un sous-modèle local est utilisé pour déterminer les vitesses normales sur les frontières entrantes. Il repose sur une forme simplifiée des équations primitives pour la vitesse, où les termes de diffusion horizontale sont supprimés mais où le terme de diffusion verticale est conservé. En associant x_1 à la direction normale, l'équation pour la vitesse normale s'écrit alors

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} - A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.88)$$

La pression vérifie l'équilibre hydrostatique

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = b. \quad (3.89)$$

Au terme de diffusion près, (3.88) est l'équation (3.74) considérée dans la section 3.4. Comme précédemment, nous utilisons la relation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ pour obtenir une équation définie sur une surface verticale,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} - A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.90)$$

Dérivée par rapport à x_3 et combinée si nécessaire avec l'équation de la poussée, cette équation donnerait une relation différentielle liant les valeurs de la vitesse et de la poussée sur une frontière verticale entrante.

L'objectif ici n'est pas d'évaluer les vitesses verticales à partir de valeurs de u_1 , u_2 et b connues sur la frontière mais de tirer de l'équation (3.90) un champ de vitesse normale u_1 qui ne génère pas a priori de mouvements verticaux importants. Nous renversons en fait la démarche de la section 3.4: la résolution de (3.90) doit nous fournir, à partir de valeurs de u_2 et u_3 fixées, une solution u_1 .

Nous fixons $u_3(x_3) = 0$. Ce choix est consistant avec la condition limite de non glissement $\mathbf{u} = 0$ au fond. L'équation (3.90) se réduit alors à

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - f u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} - A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0. \quad (3.91)$$

Cette équation n'a pas la forme simple d'une équation différentielle ordinaire pour u_1 : elle combine des dérivées partielles de u_1 par rapport à t , x_2 et x_3 .

Une fois discrétisée dans le temps avec (3.89), elle se résout facilement. En adoptant une discrétisation analogue à celle des équations primitives dans le modèle numérique (voir chapitre 4), (3.91) et (3.89) deviennent

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^{n-1}}{2\Delta t} + u_2^n \frac{\partial u_1^n}{\partial x_2} - u_1^n \frac{\partial u_2^n}{\partial x_2} - f u_2^n + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_1} - A_v \frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_3^2} = 0, \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_3} = b^n. \quad (3.93)$$

où Δt est le pas de temps et n l'indice identifiant l'instant. Au $(n+1)^e$ pas de temps, les valeurs des différents champs aux instants n et $n-1$ sont connus et il reste à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{1}{2\Delta t} u_1^{n+1} - A_v \frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_3^2} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1} + r^n \quad (3.94)$$

pour u_1^{n+1} ; r^n réunit les termes connus, en ce compris la composante barocline du gradient de pression. Le terme $\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_1}$ est réduit à sa seule composante barotrope $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1}$, indépendante de x_3 . Avec les conditions limites en surface et au fond

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \tau_1 \quad \text{en } x_3 = 0, \quad (3.95)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en } x_3 = -h, \quad (3.96)$$

l'intégration de (3.94) donne la solution u_1^{n+1} cherchée. Celle-ci est une combinaison de fonctions hyperboliques dans laquelle $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1}$ apparaît comme un paramètre. Les valeurs de u_1^{n+1} ne sont déterminées de manière absolue qu'une fois celui-ci fixé. On choisit de le fixer de sorte que le transport normal induit corresponde à une valeur donnée. Les valeurs de u_1 sont alors utilisées comme conditions limites sur les frontières entrantes pour la vitesse normale.

On a donc élaboré un sous-modèle local permettant de construire un champ de vitesse normale sur les frontières ouvertes verticales à partir d'une approximation des équations de quantité de mouvement négligeant la diffusion horizontale et supposant une vitesse verticale nulle. Par rapport à une approximation plus simple comme l'approximation géostrophique, celle-ci a l'avantage d'intégrer, au travers de la condition limite de surface, l'influence du vent sur le profil de vitesse normale.

Précisons enfin, pour les simulations du Golfe du Lion, comment sont déterminées les valeurs du transport normal sur $\partial\Sigma$ et celles de la vitesse

3.6 Annexe: formulation en coordonnées horizontales curvilignes

tangentielle, de la température et de la salinité sur $\partial\Omega_{in}$. A défaut de données sur le transport normal aux frontières ouvertes ¹³, les valeurs en sont déterminées par une condition de radiation

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + c \frac{\partial}{\partial n} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = g, \quad (3.97)$$

avec $c = \Delta x / \Delta t$ comme précédemment (section 3.3.4) et $g(t)$ fixé de manière à ce que la masse totale du bassin soit conservée:

$$\int_{\partial\Sigma} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Sigma = 0. \quad (3.98)$$

Sur les frontières $\partial\Omega_{in}$, les valeurs de la vitesse tangentielle sont ajustées pour n'induire aucun cisaillement. Pour les champs de température et salinité enfin, les valeurs du modèle inverse sont utilisées, tout en en contrôlant les gradients. La raison, déjà évoquée, est que l'on ne peut imaginer continuer à imposer des valeurs moyennes saisonnières, lorsque, sous l'action du vent, les champs de température et salinité des couches superficielles sont fortement modifiés.

L'application de ces conditions limites sera illustrée par les simulations du chapitre 5.

3.6 Annexe: formulation des équations primitives non visqueuses en coordonnées horizontales curvilignes

Un changement de coordonnées $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est défini par les relations

$$x_1 = x_1(\lambda_1, \lambda_2), \quad (3.99)$$

$$x_2 = x_2(\lambda_1, \lambda_2), \quad (3.100)$$

$$x_3 = \lambda_3. \quad (3.101)$$

On en déduit la matrice jacobienne

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2} & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

¹³Pour rappel, les données dont nous disposons par le modèle inverse sont des données de température et salinité.

et les coefficients (de Lamé)

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2}\right)^2, \quad (3.103)$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2}\right)^2, \quad (3.104)$$

$$H_3^2 = 1. \quad (3.105)$$

Dans les coordonnées curvilignes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, les équations (3.24–3.27), pour un champ de poussée nul, s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_3} + \frac{v_1}{H_1} \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_2} \right) \\ - \frac{1}{H_1} \left(\frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_1} \right) - f v_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial \lambda_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial \lambda_3} + \frac{v_2}{H_2} \left(\frac{v_1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_2} \right) \\ - \frac{1}{H_2} \left(\frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_2} + \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_2} \right) + f v_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial \lambda_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_3} = b \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial(v_1 H_2)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial(v_2 H_1)}{\partial \lambda_2} + H_1 H_2 \frac{\partial v_3}{\partial \lambda_3} = 0 \quad (3.109)$$

où v_1, v_2, v_3 désignent les composantes de la vitesse dans le repère $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Les composantes normale et tangentielle des équations de quantité de mouvement à une surface verticale $\lambda_1 = c$ quelconque sont donc respectivement les équations (3.106) et (3.107).

Chapitre 4

Modèle numérique

Les équations primitives, avec leurs conditions limites, sont résolues sous une forme discrète. Un modèle numérique, le PROSPER General Circulation Model (PGCM) est utilisé à cet effet. Le PGCM a été développé par Zuur (1991), à partir du Sandia Ocean Modelling System (Dietrich et al. 1987). Des modifications récentes y ont été apportées, sur la base de la reformulation des équations présentée dans la section 2.3 (Zuur 1995b).

Le coeur du modèle numérique consiste en la résolution d'un problème de Stokes hydrostatique découlant de la discrétisation des équations primitives (section 4.1). La section 4.2 décrit brièvement la formulation variationnelle du problème et l'algorithme d'Uzawa utilisé pour sa résolution. Ces résultats sont tirés de (Zuur 1995b) et on trouvera dans cet article le détail des dérivations afférentes. Dans la section 4.3, nous illustrons à l'aide d'une brève simulation l'importance de la condition d'incompressibilité du champ de vitesse pour la stabilité du modèle numérique. Ensuite, la section 4.4 introduit deux types de discrétisations, qualifiées respectivement d'"isotrope" et de "verticalement structurée", pour lesquelles on déduit la forme discrète de l'algorithme d'Uzawa. Une méthode d'optimisation de cet algorithme, reposant sur une décomposition du problème de Stokes, est proposée et développée dans la section 4.5. On spécifie dans la section 4.6 les options de discrétisation retenues pour le PGCM et la manière dont elles ont été implémentées. Enfin, les paramètres de discrétisation relatifs aux simulations du Golfe du Lion sont précisées dans la section 4.7.

4.1 Discrétisation dans le temps des équations primitives

Les équations résolues par le modèle numérique sont les équations primitives hydrostatiques dont la condition d'incompressibilité est reformulée en termes du transport. Pour rappel (voir chapitre 2), elles s'écrivent

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 - f u_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_3}^0 b dz - \frac{\partial P}{\partial x_1} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 + f u_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_3}^0 b dz - \frac{\partial P}{\partial x_2} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0, \quad (4.4)$$

$$u_3 = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dz, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla b = K_h \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 b}{\partial x_3^2}. \quad (4.6)$$

On a séparé les composantes baroclines et barotropes de la pression, de telle sorte que ∇P est le gradient de pression barotrope.

Soit Δt un pas de temps constant et soit n l'indice marquant la dépendance temporelle des différentes variables. Le schéma considéré pour la discrétisation dans le temps est

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla u_1^n - f u_2^n = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_3}^0 b^n dz - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_1} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_3^2}, \quad (4.7)$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla u_2^n + f u_1^n = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_3}^0 b^n dz - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_2} + A_h \left(\frac{\partial^2 u_2^{n+1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{n+1}}{\partial x_2^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u_2^{n+1}}{\partial x_3^2}, \quad (4.8)$$

4.1 Discrétisation dans le temps des équations primitives

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_3} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{n+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2^{n+1}}{\partial x_2} = 0, \quad (4.10)$$

$$u_3^{n+1} = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2} \right) dz, \quad (4.11)$$

$$\frac{b^{n+1} - b^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla b^n = K_h \left(\frac{\partial^2 b^{n+1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b^{n+1}}{\partial x_2^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 b^{n+1}}{\partial x_3^2}. \quad (4.12)$$

On détermine la solution au temps $n + 1$ en résolvant ce système d'équations pour les variables \mathbf{u}^{n+1} , p^{n+1} et b^{n+1} .

La discrétisation adoptée a découplé certaines équations. L'équation (4.12) avec ses conditions limites constitue, pour b^{n+1} , un premier problème aux limites.

Un deuxième problème à résoudre, pour obtenir u_1^{n+1} , u_2^{n+1} et p^{n+1} , repose sur les équations (4.7-4.10). En rassemblant dans un terme unique \mathbf{g}_h les différents termes traités de manière explicite dans (4.7) et (4.8), ces équations prennent la forme

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - A_h \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - A_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \mathbf{u}_h^{n+1} = -\nabla_h P^{n+1} + \mathbf{g}_h, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_3} = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla_h \cdot \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} = 0. \quad (4.15)$$

Ce sont les équations d'un problème de Stokes hydrostatique. Elles ne font intervenir que les composantes horizontales de la vitesse et (4.15) remplace la contrainte cinématique $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ d'un problème de Stokes non hydrostatique. L'anisotropie des coefficients de viscosité A_h et A_v ainsi que la présence du terme $\mathbf{u}_h/2\Delta t$ dans l'équation (4.13) ne modifient pas la nature du problème par rapport à une formulation stationnaire classique.

Enfin, u_1^{n+1} et u_2^{n+1} déterminés, on obtient u_3^{n+1} par simple intégration

$$u_3^{n+1} = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial x_2} \right) dz. \quad (4.16)$$

4.2 Problème de Stokes hydrostatique et algorithme de résolution

Le schéma adopté pour la discrétisation temporelle conduit donc à la résolution d'un problème de Stokes hydrostatique à chaque pas de temps. Par souci de simplicité, nous fixons pour l'instant des conditions limites de Dirichlet homogènes pour u_1 et u_2 . Le domaine de résolution est l'ouvert Ω de \mathbf{R}^3 qui a été défini dans la section 2.3. $\partial\Omega$ désigne son bord et Σ sa projection orthogonale dans le plan $x_3 = 0$.

Dans une forme standard, le problème de Stokes hydrostatique s'écrit ¹

$$-\mu\Delta\mathbf{u} = -\nabla(P) + \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.18)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.20)$$

avec ²

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad P : \Omega \rightarrow \mathbf{R}, \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad (4.21)$$

et

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (4.22)$$

Le transport $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ est défini sur Σ .

4.2.1 Formulation variationnelle

On note $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Sigma)$ les espaces de Hilbert des fonctions réelles définies sur Ω et Σ respectivement, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue. Les produits scalaires et normes définis sur ces espaces sont

$$(\phi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \phi(x)\psi(x)d\Omega, \quad (4.23)$$

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} = (\phi, \phi)_{L^2(\Omega)}^{1/2} \quad (4.24)$$

¹La présentation de cette section 4.2 s'inspirant largement de Zuur (1995b), nous reprenons ici le formalisme adopté par l'auteur. Comme précisé en introduction, le lecteur trouvera dans cet article le détail des dérivations utiles.

²Afin d'éviter toute confusion future entre les vecteurs 2D, notés jusqu'ici $\mathbf{u}_h, \mathbf{g}_h$ ou ∇_h , et leurs approximations par éléments finis ou différences finies (section 4.4), l'indice h de ces vecteurs a été supprimé. Cette convention de notation sera d'application jusqu'à la fin de ce chapitre.

4.2 Problème de Stokes hydrostatique et algorithme de résolution

et

$$(\eta, \theta)_{L^2(\Sigma)} = \int_{\Sigma} \eta(x)\theta(x)d\Sigma, \quad (4.25)$$

$$\|\eta\|_{L^2(\Sigma)} = (\eta, \eta)_{L^2(\Sigma)}^{1/2}. \quad (4.26)$$

On définit aussi les espaces usuels

$$H_0^1(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega) : \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3, \gamma\phi|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (4.27)$$

$$H_0^1(\Sigma) = \{\eta \in L^2(\Sigma) : \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in L^2(\Sigma), i = 1, 2, \gamma\eta|_{\partial\Sigma} = 0\}, \quad (4.28)$$

où γ est l'opérateur trace, équipés des produits scalaires et normes

$$(\phi, \psi)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) d\Omega, \quad (4.29)$$

$$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} = (\phi, \phi)_{H_0^1(\Omega)}^{1/2} \quad (4.30)$$

et

$$(\eta, \theta)_{H_0^1(\Sigma)} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x) d\Sigma, \quad (4.31)$$

$$\|\eta\|_{H_0^1(\Sigma)} = (\eta, \eta)_{H_0^1(\Sigma)}^{1/2}. \quad (4.32)$$

Pour des fonctions vectorielles 2D définies sur Ω ou Σ , telles \mathbf{u} ou $\bar{\mathbf{u}}$, on utilisera les espaces $L^2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $L^2(\Sigma) = L^2(\Sigma) \times L^2(\Sigma)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{H}_0^1(\Sigma) = H_0^1(\Sigma) \times H_0^1(\Sigma)$. Les différents produits de fonctions intervenant dans l'expression des produits scalaires et normes sont effectués composante à composante.

Sous forme variationnelle, le problème de Stokes hydrostatique s'écrit (Zuur 1995b)

Problème 1. Soit $V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \text{ p.p. dans } \Sigma\}$; pour \mathbf{g} donné dans $L_2(\Omega)$, trouver $\mathbf{u} \in V$, tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.33)$$

avec

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.34)$$

$$L(\mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v})_{L_2(\Omega)}. \quad (4.35)$$

Le problème 1 possède une solution unique qui est également solution des équations (4.17–4.20) au sens des distributions.

4.2.2 Algorithme d'Uzawa

Tout comme le problème de Stokes non hydrostatique, le problème hydrostatique, sous sa forme variationnelle, peut être interprété comme un problème d'optimisation (Temam 1984). Parmi les algorithmes de résolution possibles pour ce type de problèmes, l'algorithme d'Uzawa (Arrow et al. 1968) est un algorithme classique qui se prête particulièrement bien au traitement numérique des équations discrétisées. L'algorithme démarre avec un champ de pression $p^0 \in L_2(\Sigma)$ arbitraire. Ensuite, p^m connu, il consiste à résoudre un problème de Dirichlet pour $\mathbf{u}^{m+1} \in H_0^1(\Omega)$ puis à évaluer $p^{m+1} \in L_2(\Sigma)$ de manière explicite:

$$-\mu \Delta \mathbf{u}^{m+1} = -\nabla P^m + \mathbf{g} \in H^{-1}(\Omega) \quad (4.36)$$

$$p^{m+1} = p^m - \alpha \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{m+1} \in L_2(\Sigma) \quad (4.37)$$

avec $\alpha > 0$ un nombre fixé; $H^{-1}(\Omega)$ est l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. Les variables $P^m \in L_2(\Omega)$ et $p^m \in L_2(\Sigma)$ sont liées par la relation

$$\int_{\Omega} P^m \phi d\Omega = \int_{\Sigma} p^m \bar{\phi} d\Sigma, \forall \phi \in D(\Omega), \quad (4.38)$$

où $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact sur Ω .

Si α satisfait la condition

$$0 < \alpha < \frac{2\mu}{h_{max}}, \quad (4.39)$$

alors la solution $\{\mathbf{u}^m, P^m\}$ converge vers la solution $\{\mathbf{u}, P\}$ du problème 1 lorsque $m \rightarrow \infty$ (Zuur 1995b).

Partant d'un champ de pression P^0 arbitraire pour lequel la solution \mathbf{u}^1 de (4.36) ne vérifie pas a priori la contrainte $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, l'algorithme procède à des corrections successives de la pression jusqu'à obtenir, à la limite, une solution \mathbf{u}^∞ satisfaisant cette contrainte. En pratique, le critère d'arrêt de la procédure itérative est

$$\max_{\Sigma} \left| \frac{\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^m}{\lambda} \right| \leq \varepsilon, \quad (4.40)$$

où ε est fixé selon la précision souhaitée pour les résultats et où λ est le rapport de la profondeur locale à la profondeur maximale.³

³L'introduction de λ est destinée à compenser les disparités des valeurs du transport entre zones peu et fort profondes.

4.3 Incompressibilité du champ de vitesse et stabilité numérique

L'algorithme d'Uzawa constitue une méthode de résolution possible parmi d'autres. En fait, la plupart des méthodes de résolution de la théorie des équations de Stokes ou de Navier-Stokes sont applicables aux problèmes avec approximation hydrostatique, moyennant l'adaptation adéquate.

En particulier, les méthodes reposant sur la formulation d'un problème aux limites pour la pression sont populaires dans la modélisation en océan ou mer profonde (Deleersnijder et al. 1995). Ce problème aux limites est associé à une équation de Poisson dérivée des équations originales. Les conditions limites sont directement tirées des mêmes équations mais leur discrétisation requiert un soin particulier (Gresho and Sani 1987); ceci rend leur évaluation parfois délicate. Par rapport à ces méthodes, l'algorithme d'Uzawa présente l'avantage d'évaluations explicites de la pression (équation (4.37)), ne nécessitant aucune condition limite autre que les conditions originales sur la vitesse.

Un autre avantage est la possibilité d'appliquer très aisément une méthode d'accélération à l'algorithme.

Enfin, l'exploitation de l'approximation hydrostatique après décomposition du problème original permet d'optimiser la résolution des équations discrétisées en réduisant le nombre d'opérations (section 4.5).

4.3 Incompressibilité du champ de vitesse et stabilité numérique

La condition cinématique d'incompressibilité $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ est à la base de la formulation de l'algorithme d'Uzawa et sert de critère d'arrêt à la procédure itérative sous la forme (4.40). Lorsque, au terme de M itérations, cette contrainte n'est pas vérifiée par les champs u_1 et u_2 avec suffisamment de précision, l'intégration de la vitesse verticale à l'aide de

$$u_3 = \int_{x_3}^0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dz \quad (4.41)$$

ou de

$$u_3 = -\left(u_1|_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2|_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) - \int_{-h}^{x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dz \quad (4.42)$$

conduit à la violation de la condition d'imperméabilité du fond ou de la surface.

Cela est bien sûr physiquement incorrect mais également préjudiciable, au fil des pas de temps, à la stabilité du modèle. On donne ci-dessous un

exemple de ce phénomène, tiré d'une simulation d'une demi-journée dans le Golfe du Lion en période estivale. Cette simulation a été effectuée avec le PGCM tel que décrit dans la section 4.6. Les conditions et paramètres de la simulation sont précisés dans la section 5.2.1 du chapitre 5.

Pendant les 8 premières heures de la simulation, les champs de vitesse u_1 et u_2 calculés à chaque pas de temps vérifient (4.40) avec $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$. Environ 50 itérations sont nécessaires dans l'algorithme d'Uzawa pour atteindre cette précision et la vitesse normale à une frontière imperméable ne dépasse alors pas 10^{-4} cm/s . Ensuite, durant les 4 heures qui suivent, on limite le nombre d'itérations à 28. Au début, cela affecte apparemment peu les résultats. Puis ceux-ci se dégradent progressivement jusqu'à déstabiliser le modèle. La figure 4.1 permet de suivre, à partir de l'instant $t = 10,5h \simeq 0,44j$ et de 30 en 30 minutes, l'évolution des champs de vitesse et température sur une coupe verticale O-E. Pour une explication détaillée du mode de représentation de cette figure, on se référera à la section 1.1 dans le volume 2.

L'intégration de la vitesse verticale étant effectuée du fond vers la surface (équation (4.42)), on voit que, à partir de $t = 0,46j$, l'imperméabilité de la surface n'est plus vérifiée. Les perturbations de la vitesse verticale ne restent pas localisées uniquement près de la surface; elles s'étendent plus en profondeur. Les mouvements verticaux s'amplifiant, des singularités apparaissent également dans le champ de température et les gradients de poussée ainsi générés conduisent alors à l'"explosion" des résultats.

La même simulation, effectuée en conservant une précision $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$ tout du long, est stable.

Il est donc nécessaire de préserver l'incompressibilité du champ de vitesse en permanence. Une valeur de ε trop grande ou une limitation arbitraire du nombre d'itérations menace la stabilité de la solution calculée. Ce point est particulièrement sensible dans les simulations de situations transitoires où l'ajustement des champs de vitesse aux instants successifs requiert davantage d'itérations.

Figure 4.1: Coupe verticale O-E des champs de vitesse et température sur les 150 premiers mètres de la colonne d'eau depuis l'instant $t = 10,5h \simeq 0,44j$ jusqu'à $t = 12h \simeq 0,50j$.

4.4 Incompressibilité du champ de vitesse et stabilité numérique

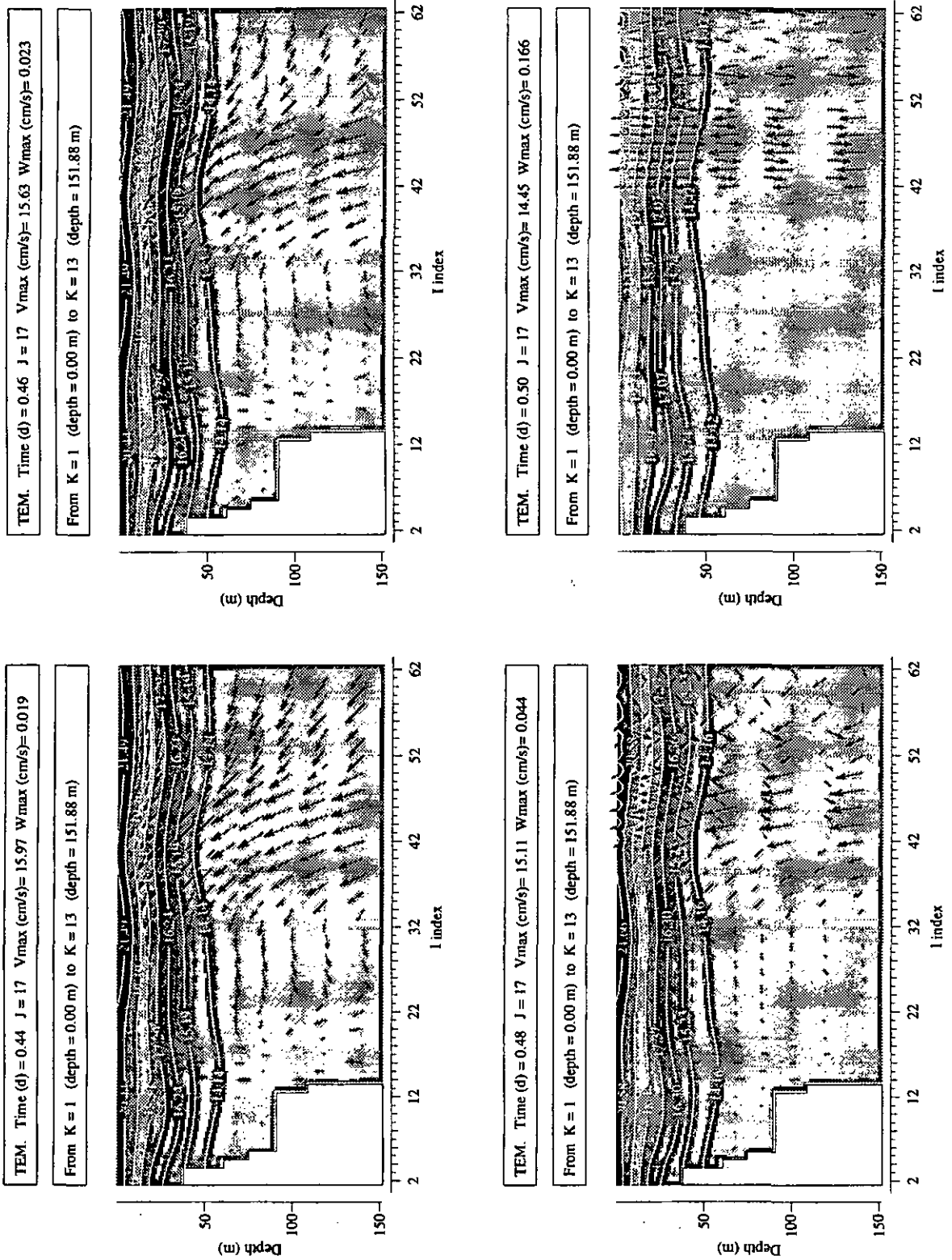


Figure 4.1

4.4 Discrétisation spatiale et formulation du problème de Stokes hydrostatique discret

Pour résoudre numériquement les équations (4.36–4.38), l'espace $H_0^1(\Omega)$ des fonctions \mathbf{u} et l'espace $L_2(\Sigma)$ des fonctions p sont approximés respectivement par des espaces W_h et X_h de dimensions finies. Leurs fonctions \mathbf{u}_h et p_h sont définies sur les domaines Ω et Σ discrétisés au moyen d'une méthode aux différences finies ou éléments finis.

Sans distinguer explicitement l'une ou l'autre méthode, on considérera dans cette section deux types de discrétisations. Les discrétisations du premier type, que l'on qualifiera d'"isotropes", ne privilégient aucune direction spatiale dans Ω , à l'instar des discrétisations que l'on adopterait pour un problème de Stokes classique. Les discrétisations du second type découplent, au moins en partie, les directions horizontales et verticale. On parlera alors de discrétisations "verticalement structurées".

Dans tous les cas, les approximations utilisées sont supposées convergentes c.-à-d. telles que les fonctions $\mathbf{u}_h \in W_h$ et $p_h \in X_h$ convergent vers $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $p \in L_2(\Sigma)$ lorsque $h \rightarrow 0$, h étant une mesure de la taille des mailles ou des éléments.

4.4.1 Discrétisations isotropes

Soient, pour base de W_h , les fonctions (ϕ_{1i}, ϕ_{2i}) , $i = 1, \dots, I$, définies sur Ω , et, pour base de X_h , les fonctions η_j , $j = 1, \dots, J$, définies sur Σ . I et J désignent respectivement le nombre de noeuds à l'intérieur de Ω et le nombre de mailles ou d'éléments dans Σ . La figure 4.2 présente un exemple de discrétisation isotrope d'un domaine Ω 2D par des éléments finis. Les

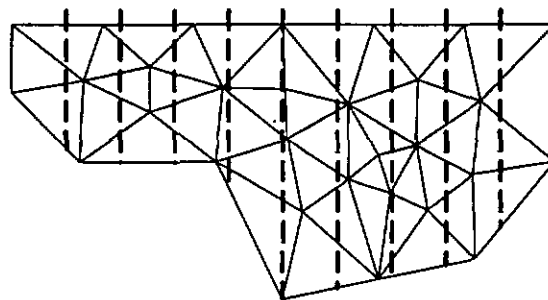


Figure 4.2: Discrétisation isotrope, par des éléments finis triangulaires, d'un domaine Ω 2D pour la vitesse \mathbf{u}_h . La surface Σ 1D est divisée en 10 intervalles pour la pression p_h . Les traits discontinus délimitent les portions de Ω correspondant à cette division de Σ .

4.4 Discrétisation spatiale et formulation du problème de Stokes hydrosta.

fonctions $\mathbf{u}_h = (u_{1h}, u_{2h})$ et p_h sont définies par ⁴

$$u_{1h} = \sum_{i=1}^I u_{1i} \phi_{1i} \quad (4.44)$$

$$u_{2h} = \sum_{i=1}^I u_{2i} \phi_{2i} \quad (4.45)$$

$$p_h = \sum_{j=1}^J p_j \eta_j \quad (4.46)$$

avec u_{1i}, u_{2i} et $p_j \in \mathbf{R}$. On note v_h le vecteur de \mathbf{R}^{2I} réunissant les valeurs de u_{1i} , suivies de celles de u_{2i} , et π_h le vecteur de \mathbf{R}^J rassemblant celles p_j .

Les formes discrètes des différents opérateurs intervenant dans les équations (4.36–4.38) s'obtiennent de manière classique, à partir des formes bilinéaires associées. L'opérateur $-\mu\Delta$ devient ainsi $-\mu\Delta_h$, une matrice $2I \times 2I$ symétrique définie positive, et l'opérateur $\nabla \cdot (\cdot)$ prend la forme d'une matrice $J \times 2I$

$$D_h = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_{11}^1 & \dots & & & & \\ \dots & & & & & \\ \lambda_{j1}^1 & \dots & \lambda_{ji}^1 & \dots & \lambda_{jI}^1 & \dots \\ \dots & & & & & \\ \lambda_{j1}^1 & \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & & \\ \dots & & & & & \dots \end{array} \right), \quad (4.47)$$

avec

$$\lambda_{ji}^k = \int_{\Sigma} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\int_{-h}^0 \phi_{ki} dz \right) d\Sigma, \quad k = 1, 2. \quad (4.48)$$

La matrice adjointe D_h^* ($2I \times J$) est la forme discrète de l'opérateur $-\nabla Q(\cdot)$, où Q est noté pour l'opérateur associant $P \in L_2(\Omega)$ à $p \in L_2(\Sigma)$ par la relation (4.38).

L'algorithme d'Uzawa discret s'écrit donc

⁴Nous supposons ici que la fonction \mathbf{u}_h n'est définie que par ses valeurs aux différents nœuds. Nous ne considérons donc pas des approximations du type

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^I \mathbf{u}_i \phi_i + \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^3 (D_m \mathbf{u})_i \psi_i \quad (4.43)$$

faisant également intervenir les valeurs des dérivées $(D_m \mathbf{u})_i$.

Algorithme 1.

$$-\mu \Delta_h v_h^{m+1} = D_h^* \pi_h^m + g_h, \quad (4.49)$$

$$\pi_h^{m+1} = \pi_h^m - \alpha D_h v_h^{m+1}. \quad (4.50)$$

La procédure est initialisée avec $\pi_h^0 \in R^J$ arbitraire.

La convergence de l'algorithme se démontre de manière analogue au cas continu, si α satisfait (4.39) et pourvu que les approximations W_h et X_h soient compatibles c.-à-d. que $\ker D_h^* = 0$.

On peut évaluer ici le nombre d'opérations requises par cet algorithme. A chaque itération m , l'équation (4.49) est résolue pour ses $2I$ inconnues. L'évaluation du second membre $D_h^* \pi_h^m + g_h$ nécessite $2I * J$ opérations⁵ auxquelles on ajoutera les N opérations nécessaires à la résolution proprement dite du système. Ensuite, avec (4.50), les J composantes de π_h sont évaluées explicitement au prix de $2I * J + 2J$ opérations. Si M dénote le nombre d'itérations m nécessaires pour atteindre la précision souhaitée, le coût total s'élèvera à $M * (N + 4I * J + 2J)$ opérations.

Le nombre d'opérations a été évalué sans tenir compte de la structure particulière des matrices. Celles-ci ne sont pas pleines et selon la méthode de discrétisation, le nombre d'opérations sera réduit de manière plus ou moins importante. On retiendra toutefois que la résolution de (4.49) représente la charge de calcul dominante.

4.4.2 Discrétisations verticalement structurées

Aucun agencement particulier des noeuds dans Ω n'ayant été supposé jusqu'ici, les fonctions de base (ϕ_{1i}, ϕ_{2i}) de W_h sont a priori des fonctions non séparables. Par contre, lorsque les noeuds sont verticalement alignés, les dépendances horizontale et verticale de ces fonctions de bases peuvent être découplées et les fonctions u_{1h} et u_{2h} prennent la forme

$$u_{1h} = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} \varphi_{1i} \sum_{l=\nu+1}^{\nu+L(i)} u_{1l} \omega_{1l}, \quad \nu = \sum_{n=1}^{i-1} L(n) \quad (4.51)$$

$$u_{2h} = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}} \varphi_{2i} \sum_{l=\nu+1}^{\nu+L(i)} u_{2l} \omega_{2l}, \quad \nu = \sum_{n=1}^{i-1} L(n) \quad (4.52)$$

où φ_{1i} et φ_{2i} , $i = 1, \dots, \mathcal{I}$ sont définies sur Σ et ω_{kl} sur chacune des verticales $(-h_i, 0)$ issues des \mathcal{I} noeuds de Σ . $L(i)$ dénombre les noeuds répartis sur

⁵Est compté comme une opération un produit suivi d'une addition.

4.4 Discrétisation spatiale et formulation du problème de Stokes hydrosta.

la i^e d'entre elles; pour ces $L(i)$ noeuds, l'indice l varie de $\nu + 1$ à $\nu + L(i)$. On continuera de noter I le nombre total de noeuds de vitesse dans Ω ; $I = \sum_{i=1}^T L(i)$. Dans le vecteur v_h les valeurs de u_{1l} et u_{2l} sont rangées par valeurs croissantes de l'indice l . Un exemple de discrétisation verticalement structurée est donné dans la figure 4.3.

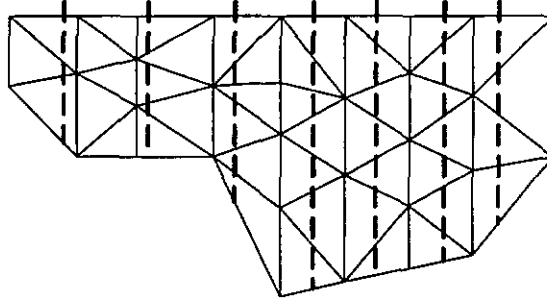


Figure 4.3: Discrétisation verticalement structurée d'un domaine Ω 2D par des éléments finis triangulaires. La discrétisation de Σ et celle de Ω ne doivent pas nécessairement coïncider.

Une telle discrétisation permet de découpler les opérateurs divergence et transport et ainsi de factoriser la matrice D_h . Elle s'écrit comme le produit de deux matrices $D_h = \delta_h S_h$ qui sont

$$\delta_h = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \sigma_{11}^1 & \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ \sigma_{j1}^1 & \dots & \sigma_{ji}^1 & \dots & \sigma_{jI}^1 & \dots & \sigma_{ji}^2 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ \sigma_{J1}^1 & \dots & & & & & & \end{array} \right) \quad (J \times 2I) \quad (4.53)$$

avec

$$\sigma_{ji}^k = \int_{\Sigma} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_{ki} d\Sigma, \quad k = 1, 2 \quad (4.54)$$

et

$$S_h = \left(\begin{array}{cccc|cccc} s_1^1 & \dots & s_{L(1)}^1 & & 0 & & & \\ & 0 & & s_{L(1)+1}^1 & \dots & s_{L(1)+L(2)}^1 & \dots & \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ & 0 & & & 0 & & & \dots & s_l^2 & \dots \end{array} \right) \quad (2I \times 2I) \quad (4.55)$$

avec

$$s_i^k = \sum_{l=\nu+1}^{\nu+L(i)} \int_{-h}^0 \omega_{kl} dz, \quad k = 1, 2. \quad (4.56)$$

Comme toute structuration de maillages, l'alignement vertical des noeuds de vitesse a pour effet d'alléger le traitement numérique des équations. Pour le problème hydrostatique en particulier, il permet également d'optimiser l'algorithme d'Uzawa en exploitant la factorisation de D_h pour réduire le nombre d'opérations effectuées, comme on va le montrer dans la section qui suit.

4.5 Optimisation de l'algorithme de résolution

Dans la formulation de l'algorithme d'Uzawa pour le problème hydrostatique (équations 4.36–4.38), on remarque que, d'une itération à l'autre, l'équation (4.36) à résoudre pour \mathbf{u} ne diffère que par le terme $-\nabla P$, dont la dérivée selon x_3 est nulle presque partout. Le fait est sans doute plus significatif si l'on considère les équations discrètes (algorithme 1): d'une itération à l'autre, seules varient les J valeurs du vecteur π_h , nécessitant néanmoins la résolution d'un système d'équations pour les $2I$ valeurs de v_h .

On montre dans cette section que la décomposition du problème de Stokes hydrostatique en deux problèmes distincts permet de tirer parti de cette particularité en reformulant l'algorithme de sorte que les itérations ne portent plus que sur des variables de même dimension que π_h . Dans le cas d'une discrétisation isotrope, le profit tiré est la réduction du coût marginal des itérations, une fois résolu un système d'équations pour un tableau de dimension $2I \times J$. Dans le cas d'une discrétisation verticalement structurée, le gain est plus important, car cette résolution préalable se limite à un vecteur de dimension $2\mathcal{I}$.

4.5.1 Décomposition du problème de Stokes

Le problème 1 étant linéaire, il peut être décomposé en deux problèmes distincts

Problème 2. Pour g donné dans $L_2(\Omega)$, trouver $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = L(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in H_0^1(\Omega). \quad (4.57)$$

Problème 3. Soit $V_* = \{v_* \in H_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \bar{v}_* = -\nabla \cdot \bar{u} \text{ p.p. dans } \Sigma\}$; pour \bar{u} donné dans $H_0^1(\Omega)$, trouver $u_* \in V_*$, tel que

$$a(u_*, v_*) = 0, \forall v_* \in V_*. \quad (4.58)$$

La résultante $u = \tilde{u} + u_*$ est alors solution du problème 1.

Le problème 2 n'est autre qu'un problème de Laplace classique pour \tilde{u} . Le problème 3 est analogue au problème 1 sauf qu'il est homogène et que l'espace V_* diffère de V par la contrainte sur \bar{v}_* . Le changement d'espace pour les fonctions v_* ne modifie pas la nature du problème. On peut se référer par exemple aux considérations de Temam (1984) dans le traitement de conditions limites non homogènes pour le problème de Stokes classique.

Comme précédemment, la méthode d'Uzawa est utilisée pour résoudre le problème 3. On obtient pour $u_* \in H_0^1(\Omega)$, $P \in L_2(\Omega)$ et $p \in L_2(\Sigma)$ l'algorithme

$$-\mu \Delta u_*^{m+1} = -\nabla P^m, \quad (4.59)$$

$$p^{m+1} = p^m - \alpha(\nabla \cdot \bar{u}_*^{m+1} + r) \quad (4.60)$$

avec P^m et p^m liés par (4.38) et avec

$$r = \nabla \cdot \bar{u}. \quad (4.61)$$

4.5.2 Optimisation pour une discrétisation isotrope

En reprenant pour u_* et p les approximations (4.44–4.46), l'algorithme prend la forme discrète

Algorithme 2.

$$-\mu \Delta_h v_h^{m+1} = D_h^* \pi_h^m, \quad (4.62)$$

$$\pi_h^{m+1} = \pi_h^m - \alpha(D_h v_h^{m+1} + r_h). \quad (4.63)$$

La procédure est initialisée avec $\pi_h^0 \in R^J$ arbitraire.

Si l'on néglige ici les N opérations nécessaires à la résolution du problème 2, le nombre d'opérations requises par l'algorithme 2 est inchangé par rapport à l'algorithme 1.

Une nouvelle formulation de l'algorithme peut toutefois être proposée en exploitant la disparition du terme g_h dans l'équation (4.62) par rapport à (4.49). Ceci permet en effet d'obtenir, à chaque itération, les valeurs de

v_h^{m+1} par le simple produit, avec π_h , d'une solution Θ_h calculée en réponse d'une distribution de pression identitaire.

Strictement équivalent à l'algorithme 2, l'algorithme 3 s'écrit

Algorithme 3.

$$(D_h v_h)^{m+1} = (D_h \Theta_h) \pi_h^m \tag{4.64}$$

$$\pi_h^{m+1} = \pi_h^m - \alpha((D_h v_h)^{m+1} + r_h) \tag{4.65}$$

avec Θ_h ($2I \times J$) solution de

$$-\mu \Delta_h \Theta_h = D_h^* \tag{4.66}$$

La procédure est initialisée avec $\pi_h^0 \in R^J$ arbitraire et, à son terme, les vitesses sont données par

$$v_h^M = \Theta_h \pi_h^{M-1} \tag{4.67}$$

On note que v_h n'est plus évalué à chaque itération mais que l'algorithme calcule directement les valeurs de la divergence du transport ($D_h v_h$). Les itérations ne portent donc plus que sur des vecteurs de dimension J .

Une fois l'équation (4.66) résolue pour Θ_h ($J * N$ opérations) et le produit $D_h \Theta_h$ évalué ($2I * J$ opérations), à chaque itération sont calculés explicitement $(D_h v_h)^{m+1}$ ($J * J$ opérations) puis π_h^{m+1} ($2 * J$ opérations). Avec encore $2I * J$ itérations pour (4.67), le nombre total d'opérations s'élève à $J * N + 4I * J + M * (J * J + 2J)$.

La charge de calcul la plus importante des algorithmes 2 et 3 est la résolution des équations pour v_h ou Θ_h (équations (4.62) ou (4.66)), qui nécessite $M * N$ opérations dans le premier cas et $J * N$ opérations dans le second. Si $M \geq J$, l'algorithme 3 est plus économique et l'économie d'opérations sera d'autant plus importante que la précision requise est élevée puisque la charge de calcul est indépendante du nombre d'itérations M et donc de la précision. Si $M < J$, le surcoût $(J - M) * N$ doit être mis en balance avec l'économie d'opérations réalisée sur les itérations de (4.64) pour préférer l'une ou l'autre formulation.

On notera encore que la substitution de (4.64) dans (4.65) permettrait d'obtenir une équation unique pour la pression. Nous conserverons toutefois les équations sous leur forme présente par souci de lisibilité.

4.5.3 Optimisation pour une discrétisation verticalement structurée

Avec une discrétisation verticalement structurée, les opérateurs divergence et transport sont découplés. En introduisant la factorisation $D_h = \delta_h S_h$ dans l'équation (4.64), on obtient

$$(D_h v_h)^{m+1} = (\delta_h S_h \Theta_h) \pi_h^m \quad (4.68)$$

avec Θ_h solution de

$$-\mu \Delta_h \Theta_h = S_h^* \delta_h^*. \quad (4.69)$$

La charge de calcul principale ($J * N$ opérations) porte, on l'a dit, sur la résolution préalable de cette dernière équation pour Θ_h , un tableau ($2I \times J$). Notant que le produit $(S_h S_h^*)$ définit une matrice ($2I \times 2I$) diagonale

$$diag\left(\sum_{l=\nu+1}^{\nu+L(i)} (s_l^1)^2 + (s_l^2)^2\right) .$$

régulière, l'équation (4.69) multipliée à gauche par S_h peut être modifiée comme suit

$$(S_h(-\mu \Delta_h) S_h^*) (S_h S_h^*)^{-1} S_h \Theta_h = (S_h S_h^*) \delta_h^*. \quad (4.70)$$

La résolution de

$$S_h(-\mu \Delta_h) S_h^* \Psi_h = (S_h S_h^*) \delta_h^* \quad (4.71)$$

pour Ψ_h ($2I$) permet d'évaluer

$$S_h \Theta_h = (S_h S_h^*) \Psi_h. \quad (4.72)$$

La dimension de Ψ_h étant $2I$, la charge de calcul induite par la résolution de (4.71) et l'évaluation de (4.72) est considérablement moindre que les $J * N$ opérations requises par (4.69). Il faut toutefois noter que le calcul de v_h^M (équation (4.77) ci-dessous) au terme de la procédure itérative requiert N opérations. Jusqu'à cette ultime étape, l'algorithme ne manipule que des variables discrétisées dans Σ .

En reprenant les différentes équations, l'algorithme optimisé s'écrit

Algorithme 4.

$$(D_h v_h)^{m+1} = (\delta_h S_h \Theta_h) \pi_h^m \quad (4.73)$$

$$\pi_h^{m+1} = \pi_h^m - \alpha((D_h v_h)^{m+1} + r_h) \quad (4.74)$$

avec

$$(\delta_h S_h \Theta_h) = \delta_h (S_h S_h^*) \Psi_h \quad (4.75)$$

et Ψ_h solution de

$$S_h(-\mu \Delta_h) S_h^* \Psi_h = (S_h S_h^*) \delta_h^* \quad (4.76)$$

La procédure est initialisée avec $\pi_h^0 \in R^J$ arbitraire et, à son terme, les vitesses sont obtenues en résolvant

$$-\mu \Delta_h v_h^M = D_h^* \pi_h^{M-1}. \quad (4.77)$$

4.5.4 Extension des résultats

Le problème de Stokes hydrostatique a été formulé avec des conditions limites de Dirichlet homogènes. Son adaptation au cas de conditions de Neumann en surface, traduisant l'effet de traction du vent sur le fluide, ne pose pas de difficultés. La même remarque s'applique au cas de conditions limites sur des frontières ouvertes. Dans les deux cas, les conditions non homogènes sont intégrées dans la formulation du problème 2 tandis que le problème 3 conserve des conditions limites homogènes, du type Neumann sur Σ .

Lorsque la discrétisation dans le temps des équations d'évolution traite également de manière implicite le terme de Coriolis et/ou un des champs du terme d'advection, on retrouve ces termes dans le problème qui doit être résolu pour la vitesse à chaque pas de temps. L'opérateur portant sur u se compose alors d'une partie symétrique définie positive, la même que précédemment, et d'une partie antisymétrique, issue de ces nouveaux termes. La méthode d'Uzawa reste applicable pour la résolution de ce problème, comme le montre Zuur (1995b). Dans l'algorithme discrétisé apparaît une matrice antisymétrique χ_h , sommée avec $-\mu \Delta_h$. On optimise cet algorithme de la même manière que ci-dessus.

4.6 Configuration du PGCM

4.6.1 Equations pour la vitesse et la poussée

Le schéma utilisé par le PGCM pour la discrétisation dans le temps est le schéma (4.7–4.12), à la différence que les termes de diffusion horizontale de

la quantité de mouvement et de la poussée sont traités de manière explicite.

A l'intérieur d'un pas de temps, les équations à résoudre pour la vitesse sont

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - A_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \mathbf{u}^{n+1} - A_h \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \mathbf{u}^n = -\nabla P^{n+1} + \mathbf{g}, \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_3} = 0, \quad (4.79)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (4.80)$$

et on utilise pour leur résolution une variante de l'algorithme d'Uzawa où l'opérateur pour \mathbf{u} se restreint à $(\frac{1}{2\Delta t} - A_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})$. Le pas de temps Δt étant petit, l'algorithme converge vers une solution proche de celle que l'on aurait obtenue en discrétisant la diffusion horizontale implicitement; l'intérêt de cette variante est qu'elle réduit la taille du problème aux limites pour \mathbf{u} . Le champ de pression P^n obtenu au pas de temps précédent initialise la procédure itérative.

La convergence de l'algorithme est accélérée à l'aide de la méthode Q décrite par Zuur (1995a). Par rapport aux méthodes d'accélération basées sur un paramètre de relaxation optimal, la méthode Q a l'avantage de ne pas nécessiter la détermination préalable d'un spectre qui varie avec A_v .

Après avoir déterminé les vitesses \mathbf{u}^{n+1} , on calcule la poussée b^{n+1} en résolvant, à l'aide d'une méthode directe, l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - K_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) b^{n+1} = s, \quad (4.81)$$

où s rassemble tous les autres termes de (4.12). Dans le code, cette équation (4.81) est résolue pour la température T et la salinité S , et la poussée est déterminée à partir de l'équation d'état.

4.6.2 Approximation aux différences finies sur grille Arakawa-C

La technique des différences finies est utilisée par le PGCM pour la discrétisation du domaine Ω . Celle-ci repose sur une grille Arakawa-C (Arakawa and Lamb 1977) aux mailles parallélépipédiques de dimensions horizontales Δx_1 et Δx_2 constantes et de dimension verticale Δx_3 variable. Dans une grille C, les noeuds et mailles pour les variables u_1 , u_2 , u_3 et P sont décalés dans l'espace (figure 4.4). La discrétisation de Σ découle naturellement de celle de Ω , les

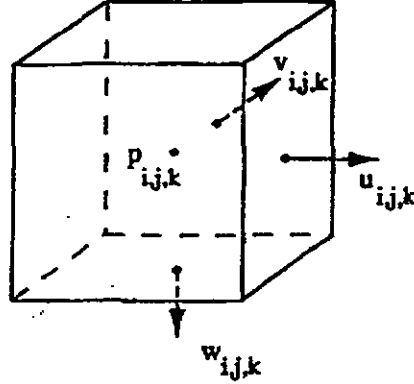


Figure 4.4: Maille de pression centrée sur son noeud P . Les autres noeuds, pour chacune des composantes de la vitesse, sont disposés sur les faces latérales du parallélépipède. Les mailles correspondantes sont centrées sur ces noeuds. Le PGCM utilisant un système d'axes sinistrorsum, la direction verticale pointe vers la bas.

mailles de surface correspondant aux faces supérieures de la première couche de parallélépipèdes.

Les fonctions u_1, u_2, u_3, P et p sont approximées par des fonctions de $L_2(\Omega)$ ($L_2(\Sigma)$ pour p) de la forme

$$u_{1h} = \sum_{ijk} u_{ijk} U_{ijk} \quad (4.82)$$

$$u_{2h} = \sum_{ijk} v_{ijk} V_{ijk} \quad (4.83)$$

$$u_{3h} = \sum_{ijk} w_{ijk} W_{ijk} \quad (4.84)$$

$$P_h = \sum_{ijk} P_{ijk} Q_{ijk} \quad (4.85)$$

$$p_h = \sum_{ij} p_{ij} q_{ij} \quad (4.86)$$

où les fonctions de base $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}, Q_{ijk}$ sont les fonctions caractéristiques des mailles parallélépipédiques de Ω et les fonctions q_{ij} celles des rectangles de Σ . Les fonctions Q_{ijk} constituent également la base pour l'approximation des fonctions de T et de S .

4.6 Configuration du PGCM

Une telle discrétisation est structurée dans les trois directions de l'espace et on exploite cette structure en numérotant les fonctions de base à l'aide du triple index ijk .

L'opérateur différence finie dans la direction i est défini par

$$(\delta_i \phi)(x) = \frac{\phi(x + \frac{1}{2} \Delta x_i) - \phi(x - \frac{1}{2} \Delta x_i)}{\Delta x_i}. \quad (4.87)$$

De la même manière que pour des éléments finis, on obtient les formes discrètes des équations de quantité de mouvement en introduisant les approximations (4.84) et (4.87) dans les formes bilinéaires associées à chacun des termes. La procédure est analogue pour les équations de température et salinité. Pour le détail des équations discrétisées du PGCM, on se référera à (Zuur 1991; Zuur 1995b).

4.6.3 Implémentation de l'algorithme de résolution optimisé

La résolution des équations de quantité de mouvement représente la charge de calcul la plus importante du PGCM. La discrétisation adoptée étant verticalement structurée, la version discrète de l'opérateur différentiel ($\frac{1}{2\Delta t} - A_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$) dans l'équation (4.78) ne lie que des valeurs de la vitesse sur une même verticale et prend la forme d'une matrice blocs tridiagonale symétrique définie positive. En substituant cette matrice à $-\mu \Delta_h$ dans l'algorithme 4, on obtient la forme de l'algorithme de résolution tel qu'il a été implémenté dans le code numérique. Pour le calcul de Ψ_h (équation (4.76)), il suffit d'inverser la matrice $S_h(-\mu \Delta_h) S_h^*$ devenue diagonale, et pour celui de v_h^M (équation (4.77)), une méthode directe est utilisée.

Par rapport à une même version non optimisée de l'algorithme (de la forme de l'algorithme 1), le coût de la résolution des équations (4.78–4.80) pour les simulations dans le Golfe du Lion a été réduit d'un facteur 8, ⁶ revenant à un niveau comparable au coût du calcul des champs scalaires (T et S). Le coût total du code a ainsi été réduit dans la même proportion.

4.6.4 Discrétisation des conditions limites

Les limites du domaine discrétisé Ω_h correspondent à des faces latérales de mailles de pression P . Le bord $\partial\Omega_h$ est donc constitué de la réunion de

⁶Sur une machine à registres vectoriels (NEC SX-3/24R), le gain mesuré par rapport à cette même version non optimisée et non vectorisée a atteint un facteur 40.

portions de surfaces planes rectangulaires, horizontales ou verticales. C'est sur $\partial\Omega_h$ que sont prescrites les conditions limites du problème discret, sous la forme de conditions de Dirichlet ou de Neumann.⁷

Selon que les conditions limites sont associées à des opérateurs différentiels traités de manière explicite ou implicite, elles servent soit à évaluer g et s dans les équations (4.78) et (4.81) soit à fermer les problèmes aux limites correspondant à ces équations. Dans la catégorie des conditions limites "implicites" se trouvent les conditions de Neumann spécifiant la traction du vent et les flux de chaleur et de sel en surface, la condition de Dirichlet de non glissement et les conditions de Neumann annulant les flux thermohalins au fond et, enfin, la condition de Dirichlet pour le transport normal sur le bord de Σ_h .

Les valeurs de la vitesse normale sur les frontières entrantes sont déterminées à l'aide d'un sous-modèle local (voir section 3.5.3) reposant sur l'équation (3.91) qui, discrétisée dans le temps, devient

$$\frac{1}{2\Delta t} u_1^{n+1} - A_v \frac{\partial^2 u_1^{n+1}}{\partial x_3^2} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1} + r^n \quad (4.88)$$

où u_1 désigne la vitesse normale. Le terme $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_1}$ étant fixé de telle sorte que $\overline{u_1^{n+1}}$ prenne la valeur prescrite par la condition limite sur le transport normal, il reste, pour u_1^{n+1} , à résoudre

$$\left(\frac{1}{2\Delta t} - A_v \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) u_1^{n+1} = g_b, \quad (4.89)$$

avec la même méthode directe que pour les scalaires.

La distinction entre parties entrantes et sortantes des frontières ouvertes s'opère sur la base de u_1^n .

4.7 Paramètres de discrétisation pour le Golfe du Lion

Le domaine Ω couvrant la région du Golfe du Lion s'inscrit dans parallépipède de $283,5 \text{ km} \times 175,5 \text{ km} \times 2532 \text{ m}$. Un plan horizontal est divisé en 63×39 mailles de $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 4,5 \text{ km}$ de côté. Verticalement, l'épaisseur des mailles Δx_3 varie selon une loi de puissance 2, de 4 m en surface à 170 m

⁷Les conditions de radiation formulées dans les sections 3.3.4 et 3.5.3 se discrétisent aisément sous l'une ou l'autre forme.

4.7 Paramètres de discrétisation pour le Golfe du Lion

au-dessus des fonds les plus bas. Au total 40 mailles couvrent la hauteur de 2532m.

Les équations sont intégrées dans le temps avec un pas Δt de 90s. A l'intérieur d'un pas de temps, les itérations de l'algorithme sont répétées jusqu'à satisfaire (4.40) avec $\epsilon = 0,510^{-3}$. Dans les conditions de simulation du Golfe du Lion, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la précision ϵ est de l'ordre de 70 lorsque le forçage est stationnaire mais peut dépasser 200 dans les pas de temps qui suivent une variation de ce forçage.

Les simulations à méso-échelle effectuées dans le Golfe du Lion couvrent une durée de temps réel de 6 à 8 jours (voir chapitre 5). Pour ce type de simulations, avec les résolutions spatiale et temporelle précisées ci-dessus, le rapport temps CPU / temps réel est de 45 *min*/1 *j* sur une machine VAX 7000 AXP et de 7 *min*/1 *j* sur NEC SX-3/24R.

Chapitre 5

Simulations dans le Golfe du Lion: résultats et analyse

L'objet du présent chapitre est l'analyse de processus hydrodynamiques à méso-échelle induits par le vent et de leur influence sur le transport particulaire. Les simulations effectuées ne visent pas à reproduire des situations particulières de la circulation mais à mettre en évidence les caractéristiques de celle-ci en réponse à des conditions de forçage typiques. Une meilleure compréhension des processus significatifs est leur finalité.

Des épisodes de vent de quelques jours sont, à l'échelle saisonnière, des événements impulsionsnels. La réponse à ces événements étant variable selon la saison, son analyse nécessite un cadre de référence propre à chaque saison. Été et hiver sont ici considérés. Les descriptions de circulations "moyennes" pour les mois de juillet et de février constitueront les cadres de référence des simulations en période de vent.

Plusieurs simulations ont été effectuées à partir des conditions initiales relatives à ces deux mois. Pour rappel, ces conditions initiales sont tirées des résultats d'un modèle inverse utilisant des données climatologiques de température et salinité (section 3.5).

La première simulation calcule, à partir des conditions initiales du mois de juillet, l'évolution des différents champs sur une période de 12 heures de temps réel, en l'absence de tout forçage par le vent (section 5.2). Des traits caractéristiques de la circulation estivale apparaissent dans la solution et le champ de vitesse obtenu après ces 12 heures est considéré comme représentatif d'une circulation "moyenne" pour le mois de juillet. Après avoir figé ce champ de vitesse, on intègre alors les trajectoires de particules en suspension sur des périodes de temps allant jusqu'à trois mois. Différents points sources et vitesses de chute sont considérés.

L'hypothèse de stationnarité des courants relativise les conclusions que l'on peut tirer des résultats à cette échelle de temps. Toutefois, la comparaison des trajectoires permet en évidence la très grande diversité des "schémas" de dispersion et de mesurer l'influence de différents facteurs sur le transport des particules.

Deux simulations à méso-échelle sont ensuite effectuées dans diverses conditions de vents typiques. La première (section 5.3) couvre une période de huit jours. Durant quatre jours, le vent souffle uniformément du secteur NO (330°), à vitesse constante (15m/s), puis il est coupé les quatre jours suivants. Après avoir identifié les processus hydrodynamiques engendrés par cet épisode de vent, on montre que ces processus ont une influence déterminante sur le transport des particules de par l'amplitude importante des mouvements horizontaux mais aussi verticaux du fluide. Dans la seconde simulation (section 5.4), un vent dont l'orientation et l'intensité varient dans l'espace et le temps force la circulation durant six jours. Des manifestations spécifiques naissent de ces variations, qui permettent d'expliquer certains phénomènes observés par vent du NO.

Une deuxième série de simulations est consacrée à la période hivernale. Comme précédemment, la première d'entre elles calcule une circulation moyenne pour le mois de février (section 5.5). Suivent alors deux simulations à méso-échelle forcées par des épisodes de vent du NO (section 5.6) et du SE (section 5.7) analogues à celui de la section 5.3. La comparaison des résultats obtenus avec ceux des simulations estivales met en évidence les caractéristiques hydrodynamiques propres à chaque saison et les changements qui en découlent pour le transport des particules.

<i>mois</i>	T_h	<i>forçage par vent</i>	T_p	<i>champ d'advection des part.</i>
juillet	0,5 j	nul	90 j	stationnaire
juillet	8 j	NO (4 j) puis nul	8 j	évolutif
juillet	6 j	variable	—	évolutif
février	0,5 j	nul	90 j	stationnaire
février	8 j	NO (4 j) puis nul	8 j	évolutif
février	8 j	SE (4 j) puis nul	8 j	évolutif

Tableau 5.1: Tableau synoptique des différentes simulations effectuées. Pour chacune d'elles on précise le mois de référence, la durée de la simulation hydrodynamique (T_h), le type de forçage par le vent, la durée de la simulation de transport (T_p) et le caractère stationnaire ou évolutif du champ de vitesse utilisé pour l'intégration des trajectoires des particules.

5.1 Conditions et paramètres de simulation

Le tableau 5.1 résume les simulations effectuées.

Les figures illustrant les résultats de chacune des simulations sont rassemblées et décrites dans le volume 2. Certaines d'entre elles sont discutées en détail dans le présent chapitre.

5.1 Conditions et paramètres de simulation

Nous réunissons dans cette section les conditions et paramètres des simulations effectuées.

5.1.1 Conditions initiales et limites

La formulation des conditions limites repose sur une distinction entre frontières "entrantes" et "sortantes". Sur les frontières sortantes un sous-modèle local sert à déterminer les valeurs de la vitesse normale. Cette formulation des conditions limites ainsi que celles des conditions initiales a été explicitée dans les sections 3.3.4 et 3.5 du chapitre 3. Seules doivent encore être précisées ici les valeurs de température et salinité utilisées sur les frontières entrantes. Dans le cas des simulations de circulations moyennes (sections 5.2.1 et 5.5.1), ces valeurs sont celles tirées du modèle inverse. Dans le cas des autres simulations, forcées par le vent, elles sont continûment ajustées pour annuler le gradient normal.

5.1.2 Flux thermiques et halins en surface

Les flux thermiques en surface ont été évalués de manière à équilibrer, à l'instant initial, les flux advectifs de chaleur aux frontières latérales du domaine. Des valeurs de $130Wm^{-2}$ et de $-36Wm^{-2}$ ont été ainsi obtenus pour les mois de juillet et février respectivement. Le flux thermique du mois de juillet est certainement sous-évalué puisque, à cette époque de l'année, la température moyenne des eaux du Golfe du Lion augmente. Les flux halins ont été fixés à zéro.

Dans le cadre des simulations effectuées ici, ces approximations sont satisfaisantes.

5.1.3 Equation d'état

L'équation d'état utilisée est celle qui a été définie par l'UNESCO en 1981 et dont on peut trouver l'expression dans (Gill 1982).

5.1.4 Coefficients de viscosité et diffusivité turbulentes

La paramétrisation des flux turbulents sur le modèle de la diffusion moléculaire est classique (Pedlosky 1987). Elle vise à intégrer l'effet diffusif de fluctuations aléatoires causées par la présence de nombreux tourbillons de différentes tailles, dans les caractéristiques moyennes de l'écoulement. Cette paramétrisation introduit les coefficients de viscosité et diffusivité turbulentes A_h , A_v , K_h et K_v .

La turbulence étant une propriété de l'écoulement, ces coefficients dépendent normalement de la forme particulière de celui-ci. Parmi les facteurs affectant la turbulence géophysique, la stratification joue un rôle déterminant (Monin 1991). Plus la stratification est intense, plus les mouvements turbulents sont inhibés et le mélange réduit. Si au contraire elle est instable, elle constitue une source d'énergie pour un processus de convection verticale et la turbulence se développe de manière intensive. Un cisaillement de l'écoulement moyen, tel celui qu'engendre l'action du vent sur les couches superficielles du fluide, renforce les mouvements turbulents. Le nombre (sans dimension) de Richardson

$$Ri = N^2 / \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \right\|^2, \quad (5.1)$$

avec N la fréquence de Brunt-Vaisala, met en balance les effets de la stratification et du cisaillement vertical du fluide.

La paramétrisation retenue pour les coefficients de viscosité et diffusivité verticales A_v et K_v repose sur la mesure du Richardson. Initialement développée par Pacanowski et Philander (1981) pour les modèles d'océans tropicaux, elle a été également utilisée dans des modèles marins (Friedrich and Stanev 1988). Elle s'écrit,

$$A_v = \frac{A_{v0}}{(1 + \alpha Ri)^n} + A_{vb}, \quad (5.2)$$

$$K_v = \frac{A_v}{(1 + \alpha Ri)} + K_{vb}, \quad (5.3)$$

lorsque la stratification est stable, c.-à-d. $Ri > 0$. A_{vb} et K_{vb} sont des valeurs de seuil et A_{v0} , α et n , des paramètres ajustables. Les valeurs utilisées pour les simulations sont $A_{vb} = 10 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, $K_{vb} = 1 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, $A_{v0} = 500 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, $\alpha = 5$ et $n = 2$. En cas d'instabilité locale, A_v et K_v sont donnés par

$$A_v = 100 A_{vb}, \quad (5.4)$$

$$K_v = 100 K_{vb}. \quad (5.5)$$

On reproduit ainsi le mélange intense qu'un mouvement de convection verticale provoque, sans que la stabilité du modèle ne soit menacée.

5.2 Circulation moyenne estivale (juillet)

Cette paramétrisation simple de la diffusion turbulente verticale permet de prendre en compte les effets de la stratification des couches de surface dans la formation d'une couche de mélange par le vent. Des modèles de fermeture turbulente plus complexes recourent à des paramétrisations plus fines (Mellor et Yamada (1982) en décrivent plusieurs types) mais leur coût est important et la calibration de leurs nombreux paramètres parfois délicate (Deleersnijder et al. 1995).

Pour les coefficients de viscosité et diffusivité turbulentes horizontales A_h et K_h , il est d'usage d'utiliser des valeurs constantes, à défaut de paramétrisation physique des flux turbulents. Comme mentionné dans la section 2.1.3, la classe des valeurs généralement utilisées dans les modèles est très large. Pedlosky (1987) donne des estimations de A_h entre $10^5 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ et $10^8 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Les valeurs de A_h et K_h ont été fixées à $10^6 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ dans la simulation de la section 5.4 et à $10^7 \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ dans les autres simulations.

5.2 Circulation moyenne estivale (juillet)

5.2.1 Simulation hydrodynamique

Pour cette première simulation, le modèle calcule l'évolution des champs de vitesse, température et salinité, en l'absence de vent, sur 12 heures de temps réel, soit 480 pas de temps de 90s. Les conditions initiales correspondent aux données climatologiques ¹ du mois de juillet.

Durant ces 12 heures, les différents champs s'ajustent progressivement. En fait les champs scalaires, température et salinité, ne sont que peu modifiés et c'est surtout le champ de vitesse qui évolue. Le processus d'ajustement du champ de vitesse met en oeuvre des mécanismes divers dont les temps caractéristiques vont de l'instant à plusieurs jours.

Dès le premier pas de temps, la pression s'ajuste de manière à ce que le champ de vitesse soit à divergence nulle ². Ensuite, la distribution de la poussée étant déterminée par le champ de densité, les vitesses tendent progressivement à équilibrer la composante barocline des forces de pression. L'état de la circulation obtenu après 12 heures est proche de l'équilibre géostrophique au large, mais s'en éloigne sensiblement ailleurs où l'influence de la topographie est importante.

¹Les "données climatologiques" font référence ici (et dans la suite) aux résultats du modèle inverse.

²Si une surface libre était utilisée, l'ajustement ne serait pas instantané mais s'opérerait par la génération d'ondes de gravité de surface.

La figure 2.2 du volume 2 présente différentes coupes horizontales et verticales des champs de vitesse, température et salinité. Rappelons que ces coupes décrivent un état instantané non stationnaire et qu'elles portent donc la trace de processus transitoires, tels les oscillations d'inertie, auxquels les vitesses verticales sont particulièrement sensibles.

Deux structures hydrodynamiques majeures peuvent être identifiées dans la figure 5.1. La première est le courant LP traversant le Golfe du Lion de part en part dans un flux du NE au SO. Sa vitesse est de l'ordre de 15 à 20 *cm/s* en surface; elle décroît ensuite avec la profondeur pour atteindre des valeurs de quelques *cm/s* à 300 ou 400 *m* et de un à deux *cm/s* à partir de 1000 *m*. Les valeurs de vitesses sont relativement faibles en surface par rapport à des relevés courantométriques instantanés. Elles s'expliquent par l'absence de tout forçage par le vent mais aussi par le fait que la distribution initiale de densité résulte d'un calcul reposant sur une compilation de données issues de mesures effectuées dans des conditions diverses, et que les gradients de poussée s'en trouvent nécessairement atténués. Assez large en entrant dans le golfe, le courant LP s'écoule en décrivant des méandres, pour se resserrer et accélérer à proximité de la côte espagnole en quittant le domaine. Cet écoulement intègre une composante verticale instantanée non négligeable: l'ordre de grandeur des vitesses verticales est de 0,01 *cm/s* en certains endroits.

La deuxième structure hydrodynamique majeure est un tourbillon anticyclonique formé sur la partie SO du plateau continental. Centré en bordure du plateau à hauteur du canyon de Lacaze-Duthiers, il alimente un courant orienté au N le long des côtes du Roussillon (pour la localisation du canyon et des différentes régions littorales, on se référera à la figure 1.1). Sur une importante partie de la colonne d'eau, le coeur du tourbillon correspond à un maximum local de température ³, provoqué par un enfoncement des isothermes (figure 5.1). Ce tourbillon détermine la circulation de toute la partie occidentale du plateau tandis que le reste du plateau est sous l'influence d'une branche du courant LP, de faible intensité, s'écoulant le long du littoral nord. Les observations in situ et les photos satellites confirment l'existence de cette structure.

On retrouve dans la colonne d'eau les différentes masses d'eau du Golfe du Lion. Sous l'eau d'origine atlantique pour laquelle la stratification estivale des couches de surface est marquée, on retrouve l'eau intermédiaire levantine, caractérisée par ses maxima de température et salinité vers les 400 *m* de profondeur. A 2000 *m* et au-delà, la densité de l'eau est quasi-homogène,

³sur une coupe horizontale

5.2 Circulation moyenne estivale (juillet)

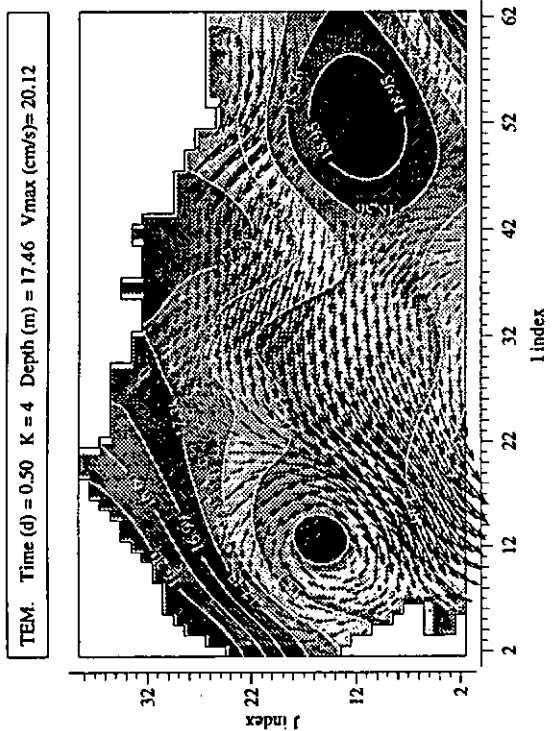
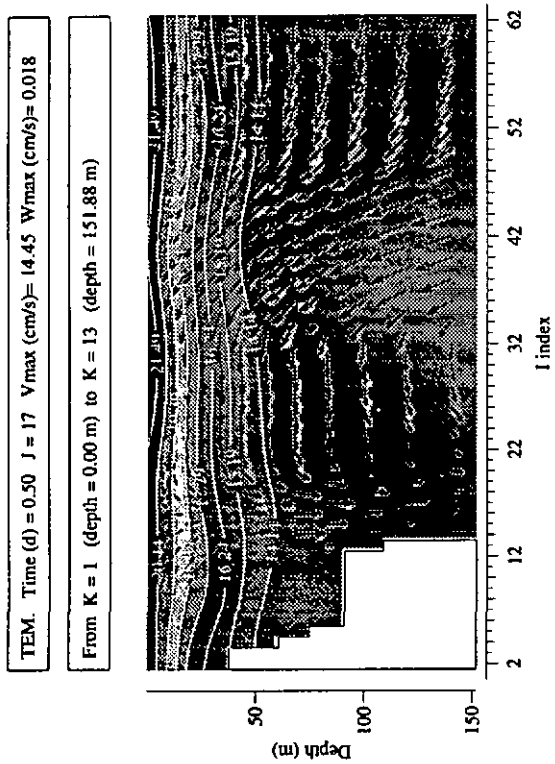
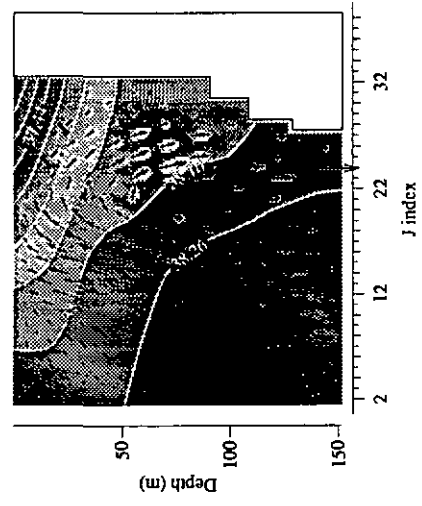
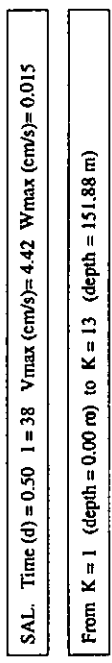


Figure 5.1: Coupes horizontale ($K = 4$) et verticales (O-E, $J = 17$ et S-N, $I = 38$) des champs de vitesse et température ou salinité.



avec des valeurs de température comprises entre $12,72^{\circ}\text{C}$ et $12,74^{\circ}\text{C}$, et des valeurs de salinité entre 38,40 et 38,42, typiques de l'eau méditerranéenne profonde.

Les champs obtenus dans cette première simulation décrivent un état du fluide et de son écoulement au mois de juillet. Si les champs de température et salinité, du moins dans leur état initial, peuvent être interprétés comme une moyenne statistique d'observations, ce n'est pas le cas du champ de vitesse qui est le résultat d'un calcul purement dynamique et n'a donc pas valeur statistique de moyenne au sens strict du terme. Ceci doit être noté en particulier pour la vitesse verticale, dont des variations importantes peuvent être induites localement par de faibles variations relatives des vitesses horizontales. L'état décrit sera toutefois considéré comme représentatif d'une "circulation moyenne" pour un mois de juillet et constituera une situation de référence pour les simulations qui suivent.

5.2.2 Transport de particules

Dans la section 1.2 du chapitre 1, une estimation des temps de résidence de particules dans la colonne d'eau sur la base des valeurs de leurs vitesses de chute a montré que ces temps de résidence peuvent varier de l'heure à plusieurs années. Pour des particules aux vitesses de chute inférieures à $0,25\text{m/h}$ ⁴, le temps de résidence dans une colonne d'eau de 200m de hauteur dépasse la durée d'un mois. La circulation influe donc davantage sur les trajectoires de particules de cette catégorie que sur celles des particules de diamètre ou densité plus importants dont les sites de déposition sont proches des points sources.

Afin de mesurer cette influence à l'échelle de l'ordre du mois, nous avons déterminé les trajectoires de particules depuis plusieurs points sources dans le Golfe du Lion, sur une période de 90 jours. Le champ de vitesse obtenu ci-dessus détermine l'advection stationnaire des particules par le fluide sur la totalité des 90 jours.

L'effet d'épisodes transitoires à méso-échelle sera analysé dans la section 5.3.2.

Le calcul du transport repose sur une procédure simple. Des particules, caractérisées par leur vitesse de chute, sont relâchées à un débit constant pendant une période de temps déterminée en une maille du domaine discrétisé (la position initiale de chaque particule dans la maille est fixée aléatoirement). Leurs trajectoires sont alors intégrées à partir de la vitesse d'advection à laquelle s'additionne la vitesse de chute. Cette procédure a été appliquée

⁴c.-à-d., pour donner un ordre de grandeur de leur taille, des particules dont le diamètre évalué par la formule de Stokes atteindrait $9\mu\text{m}$

5.2 Circulation moyenne estivale (juillet)

dans une étude du transport de particules dans le Lac de Neuchâtel (Suisse) (Thunus et al. 1994).

De la combinaison des paramètres vitesse de chute et localisation du point source résultent une infinité de cas de figure potentiels. Parmi ceux-ci, six ont été retenus. Six cas d'étude combinant trois points sources et, pour chacun d'eux, deux vitesses de chute ont été retenus. Le tableau 5.2 mentionne pour chacun d'eux la localisation du point source et la valeur de la vitesse de chute. Les paramètres et les résultats des simulations de transport sont décrits dans le volume 2. Les figures présentées permettent de suivre le déplacement d'ensemble des particules sur les 90 jours de la simulation.

	<i>localisation du point source</i>	<i>vitesse de chute</i>
A	proximité de l'embouchure du Rhône	0,04 m/h
B	proximité de l'embouchure du Rhône	0,16 m/h
C	zone SO du plateau continental	0,08 m/h
D	zone SO du plateau continental	0,16 m/h
E	courant LP (limite E du Golfe)	0,06 m/h
F	courant LP (limite E du Golfe)	0,00 m/h

Tableau 5.2: Localisation des points sources et vitesses de chute des particules pour les six cas de transport considérés.

Cette série de simulations a montré la diversité et la complexité des schémas de dispersion possibles pour les particules en suspension. La vitesse de chute est un paramètre essentiel qui conditionne directement le temps de résidence des particules dans la colonne d'eau. Plus le temps de résidence est long, plus l'influence de l'advection par le fluide est marquée. La composante verticale de la vitesse du fluide joue également un rôle important puisqu'elle affecte directement, comme la vitesse de chute, le mouvement vertical des particules. Nous allons détailler quelque peu l'influence de la vitesse de chute et de l'advection par le fluide sur la base de résultats extraits des simulations.

L'influence la plus directe de la vitesse de chute sur la dispersion de particules relâchées en un même point est l'éloignement plus ou moins important du site de dépôt des particules. Dans le cas de particules relâchées en surface, non loin de l'embouchure du Rhône, le plateau continental est une zone privilégiée pour le dépôt des particules. En règle générale, les sites de dépôt sont d'autant plus proches du point source que la vitesse de chute est importante, comme l'illustre la comparaison des cartes de sédimentation de la figure 5.2. L'écoulement n'étant pas uniforme spatialement, il n'y a pas de simple relation de proportionnalité entre éloignement des sites de dépôt

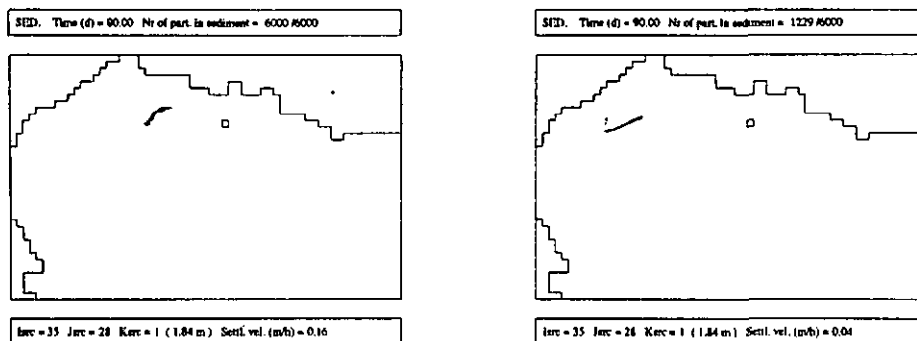


Figure 5.2: Distribution dans le sédiment de particules relâchées en surface non loin de l'embouchure du Rhône. A gauche, la vitesse de chute des particules est de $0,16m/h$; à droite, elle est de $0,04m/h$.

et valeurs des vitesses de chute. On constate en effet qu'une réduction d'un facteur 4 de la vitesse de chute n'a pas multiplié d'autant la distance couverte par les particules. Dans ce cas particulier, c'est la circulation anticyclonique sur la partie occidentale du plateau qui ralentit puis stoppe la progression vers l'ouest des particules les plus fines (figure 5.2).

Lorsque les courants présentent localement une forme complexe, c.-à-d. lorsque leur orientation ou leur intensité varie de manière appréciable sur de courtes distances, la vitesse de chute revêt également une importance particulière du fait qu'elle réduit ou accentue l'influence de l'une ou l'autre structure hydrodynamique particulière. La figure 5.3 montre le cas de deux types de particules relâchées dans la partie SO du plateau continental qui est sous l'influence directe du tourbillon anticyclonique. La vitesse de chute des particules est $0,16m/h$ dans le premier cas et $0,08m/h$ dans le second. On voit que le tourbillon entraîne rapidement les particules dans un mouvement circulaire. Le changement de trajectoire des particules les plus véloces ($0,16m/h$) précède celui des particules les plus lentes ($0,08m/h$) et, alors que les premières se déposent rapidement sur le plateau à quelques dizaines de *km* au N de leur point source, les autres, en majeure partie, poursuivent leur migration, emportées par le courant LP le long de la pente continentale. Des particules issues d'un même point source mais de vitesses de chute différentes peuvent donc prendre des trajectoires complètement divergentes.

Outre son influence sur le champ de vitesse verticale, la topographie joue un rôle indirect sur la dispersion des particules. Les fortes variations de profondeur (en particulier au niveau de la pente continentale) permettent en effet à des particules proches dans la colonne d'eau soit de se déposer sur le plateau soit d'être entraînées plus en profondeur par le courant jusqu'à éventuellement quitter le Golfe du Lion. Les sites de dépôt de particules relâchées

5.2 Circulation moyenne estivale (juillet)

quasiment au même endroit peuvent donc être très éloignés.

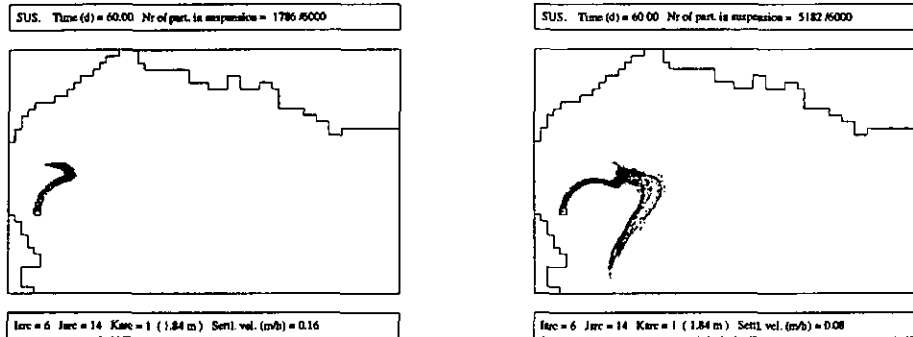


Figure 5.3: Distribution des particules en suspension provenant d'un point source situé en surface, dans la partie SO du plateau, 60 jours après que les premières particules aient été relâchées. A gauche, la vitesse de chute des particules est de $0,16\text{m/h}$; à droite, elle est de $0,08\text{m/h}$.

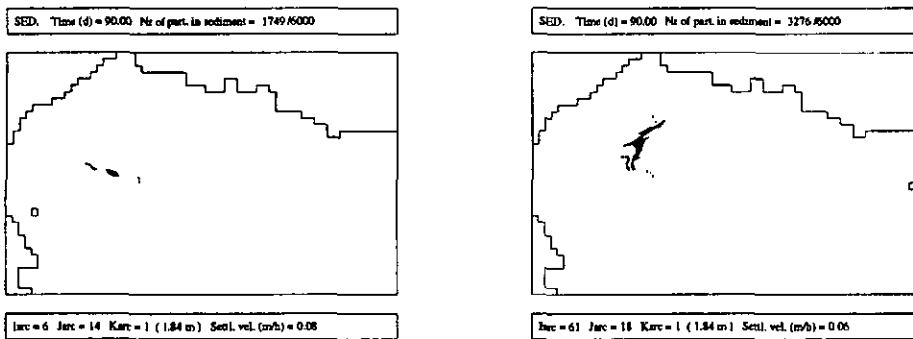


Figure 5.4: Distribution dans le sédiment de particules relâchées depuis deux points sources différents. Le premier (à gauche) est situé quasi à la limite SO du plateau tandis que le second (à droite) est situé à l'extrémité est du Golfe du Lion. Malgré l'éloignement très important des points sources, les sites de déposition sont très proches.

La proposition réciproque est également vérifiée: un même site de déposition peut réunir des particules de sources très éloignées. A l'appui de cette proposition, la figure 5.4 montre que les sites de déposition de matériel provenant des extrémités ouest et est du Golfe du Lion sont très proches. Le rôle de l'advection horizontale à grande échelle apparaît ici déterminant.

La composante verticale de l'advection joue également un rôle important pour la dispersion des particules. Au même titre que la vitesse de chute, elle affecte le temps de résidence des particules dans la colonne d'eau puisqu'elle peut en accélérer ou en ralentir la chute. La succession de ralentissements et d'accélération du mouvement vertical des particules provoque la formation

de zones tampons dans la colonne d'eau plus ou moins marquées. Dans la figure 5.5, on montre la distribution verticale moyenne des particules relâchées près de l'embouchure du Rhône avec des vitesses de chute de $0,04m/h$ et $0,16m/h$. On remarque que le fluide a accéléré globalement la chute

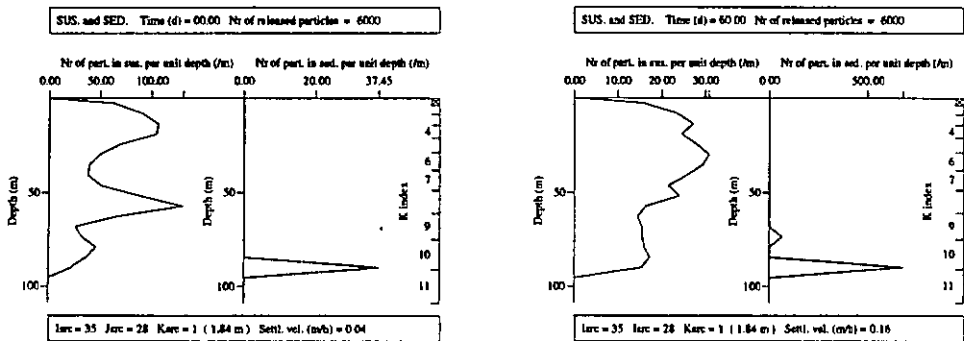


Figure 5.5: Distribution verticale à l'instant $t = 60j$ des particules en suspension et dans le sédiment de particules relâchées depuis le même point source situé à proximité de l'embouchure du Rhône. A gauche, la vitesse de chute des particules est de $0,04m/h$; à droite, elle est de $0,16m/h$.

des particules puisque, dans le premier cas ($0,04m/h$), on retrouve certaines d'entre elles déjà sur le fond après 60 jours. En l'absence d'advection verticale, la profondeur des premières particules relâchées n'aurait pas dépassé les $57m$ et la distribution verticale des particules en suspension aurait été uniforme avec une valeur de densité ⁵ $d_0 = 104,2$ particules par mètre. On note au contraire la présence de deux pics marqués vers $20m$ et $60m$ de profondeur. Ils correspondent à des zones tampons dont la formation résulte de la succession d'un ralentissement de la chute en amont et d'une accélération en aval. Pour le deuxième pic, la densité est triplée par rapport aux valeurs relevées $15m$ plus haut ou plus bas. Dans le second cas la vitesse de chute est plus importante ($0,16m/h$) et l'influence relative de l'advection verticale est donc moindre. Cela se traduit par une courbe de densité plus régulière, avec des valeurs plus proches de la densité d_0 de $26,0$ particules par mètre que l'on aurait obtenue avec une vitesse verticale du fluide nulle.

Sur des périodes de temps de plusieurs semaines, les courants peuvent transporter les particules sur de longues distances. Le courant LP en particulier, qui traverse le Golfe du Lion de part en part, est un vecteur essentiel pour le matériel particulaire. On en mesure l'intensité sur la figure 5.6 où les trajectoires de particules relâchées dans le courant LP à l'entrée du Golfe du

⁵Le vocable "densité" se rapporte ici à un nombre de particules par unité de profondeur. Pour plus de détail sur le mode de représentation des distributions verticales des particules, se référer à la section 1.3 du volume 2.

5.3 Circulation (juillet) par vent du NO

Lion couvrent, en 30 jours, des distances de l'ordre de 200km. Cette intensité diminuant avec la profondeur, l'extension des panaches est maximale à proximité de la surface.

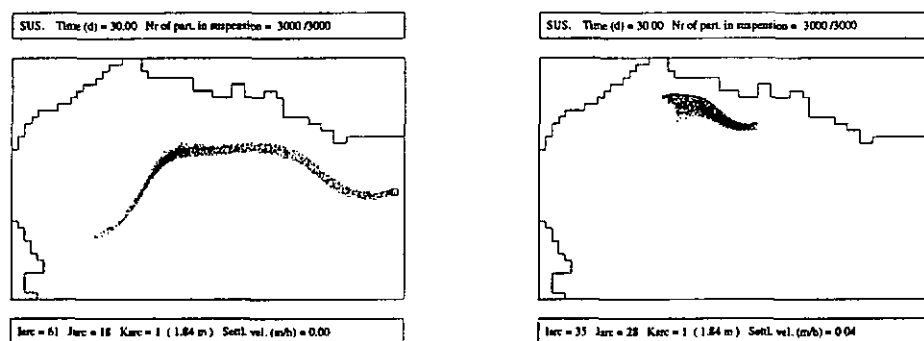


Figure 5.6: Distribution horizontale à l'instant $t = 30j$ des particules en suspension relâchées en surface, à l'entrée du Golfe du Lion dans le courant LP. A gauche, la vitesse de chute des particules est nulle; à droite, elle est de $0,06m/h$.

Rappelons que le champ d'advection considéré dans toutes ces simulations est stationnaire. En conditions réelles, sur des périodes de plusieurs semaines ou plusieurs mois, la variabilité de la circulation est importante, spécialement à la méso-échelle où le vent induit des mouvements de grande amplitude dans la partie supérieure de la colonne d'eau. Ceci relativise les conclusions que l'on peut tirer des résultats décrits ci-dessus et justifie l'étude de l'influence de tels épisodes sur la circulation et la dispersion des particules, présentée dans les sections qui suivent.

5.3 Circulation (juillet) par vent du NO

Après que la circulation moyenne du mois de juillet ait été décrite dans la section précédente, la présente section étudie l'effet d'un épisode de vent du NO dans les mêmes conditions estivales.

Les vents du NO sont les vents prédominants sur la région du Golfe du Lion. Le quadrant allant de 285° à 015° N comporte à lui seul 54% des observations de vents, calmes exclus (Ascensio et al. 1977). Sur la partie occidentale du golfe souffle la Tramontane, débouchant de la plaine entre les Pyrénées et le Massif Central tandis que sur la partie septentrionale souffle le Mistral, descendant depuis la vallée du Rhône (figure 5.7). Des épisodes tempétueux de un à quatre jours, voire davantage, se produisent en moyenne

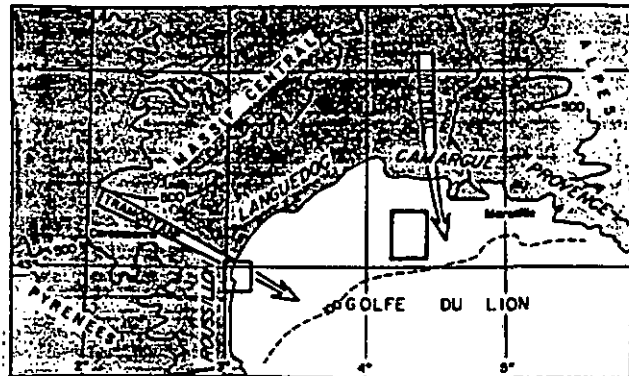


Figure 5.7: Configuration morphologique des zones littorales du Golfe du Lion et orientation schématique des vents.

une dizaine de fois par été (Millot 1979). Les phénomènes hydrodynamiques qu'ils engendrent sur le plateau continental, spécialement les upwellings côtiers, sont particulièrement intenses. Millot (1979, 1981) a étudié ces processus de manière approfondie sur la base d'images satellites et de mesures in situ. Nous allons en résumer les caractéristiques principales.

La manifestation la plus spectaculaire des upwellings est sans doute le refroidissement des eaux de surfaces qu'ils induisent. La figure 5.8 représente une distribution spatiale moyenne de la température de surface par vent du NO, résultant de la compilation de 15 photos satellites. Les zones froides

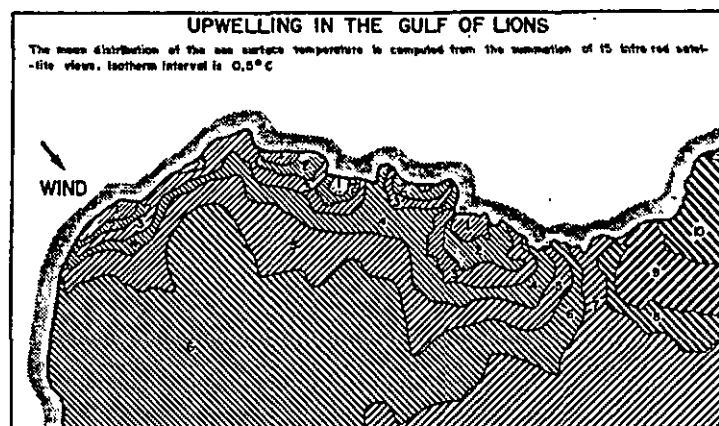


Figure 5.8: Distribution moyenne de la température de surface obtenue par addition de 15 photos satellites. Les gradients horizontaux de température sont atténués du fait de l'opération d'addition (de Millot et Wald (1981)).

le long du littoral, du Languedoc à la Provence (figure 5.7) sont clairement identifiables. Au coeur des upwellings, la température est inférieure de 3°C

5.3 Circulation (juillet) par vent du NO

environ par rapport aux eaux chaudes du large. Selon l'intensité de la stratification, on peut observer localement des variations allant jusque 5°C .

A une échelle plus fine, Millot identifie 5 ou 6 zones d'upwelling dont la localisation le long des portions rectilignes de la côte est plus ou moins constante. Outre la morphologie de la côte, l'orientation locale du vent joue également un rôle important dans la localisation des upwellings. Ainsi, pour celui de Valras (celui situé le plus à l'ouest sur la figure 5.8), l'orientation de la Tramontane varie de 270° à 315° entre deux points situés respectivement au N et au S de la zone d'upwelling et distants de seulement 45km . Ce changement d'orientation a pour effet de confiner latéralement l'upwelling. Lorsque le vent souffle avec force durant plusieurs jours, le littoral nord tout entier est soumis à un large upwelling et les eaux sont également refroidies à hauteur des caps et baies. Sur la même figure, on note encore l'extension vers le large de langues d'eau plus froide à hauteur des zones d'upwelling les plus larges. Ce phénomène est plus net sur la figure 5.9 qui représente la distribution moyenne de température de surface tirée de 8 autres vues satellites. La forme de la langue suggère la présence d'une circulation anticyclonique dans la partie SO du Golfe du Lion. A l'appui de cette hypothèse, des mesures courantométriques à 5 ou 10m sous la surface indiquent une orientation des courants vers le N le long du littoral du Roussillon (vitesse moyenne de l'ordre de 10cm/s) alors que, plus au large, le courant est orienté au SSE (vitesse moyenne de l'ordre de 20cm/s). D'autres observations révèlent aussi la présence de circulations horizontales complexes ou inattendues.



Figure 5.9: Distribution moyenne de la température de surface obtenue par addition de 8 photos satellites prises un ou deux jours après le début d'épisodes de Mistral et Tramontane durant les mois de juillet et août 1977 et 1978 (de Millot (1979)).

La simulation qui suit ainsi que celle de la section 5.4 permettront de retrouver un certain nombre de ces processus.

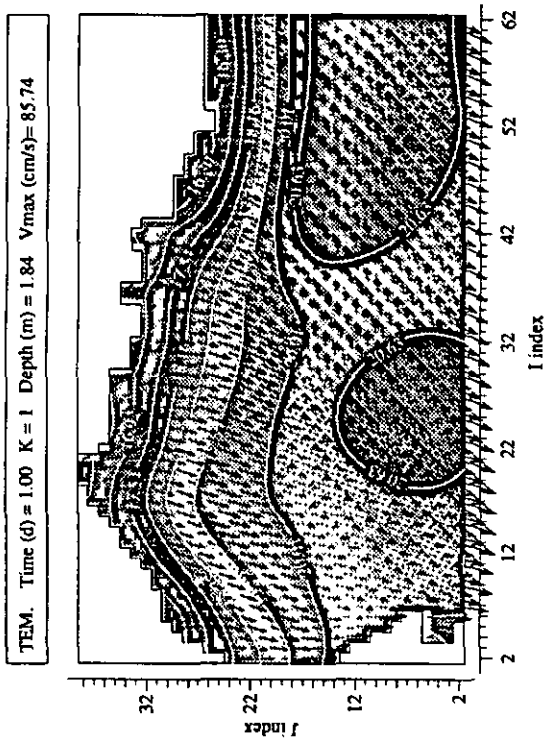
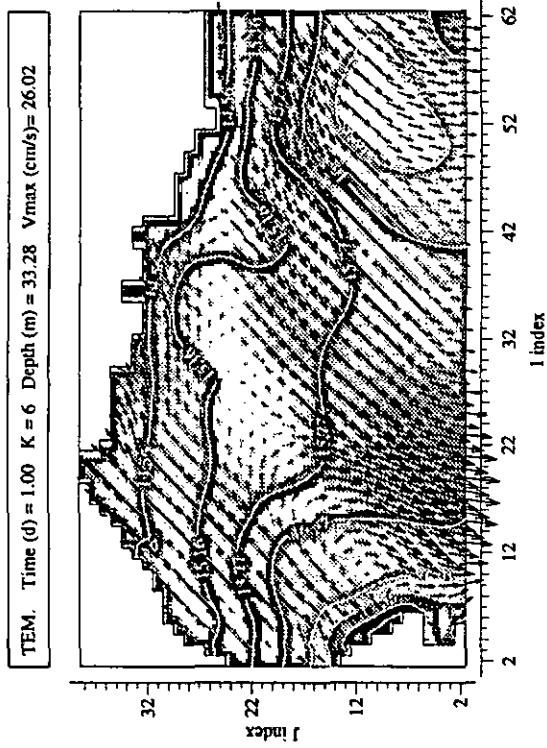
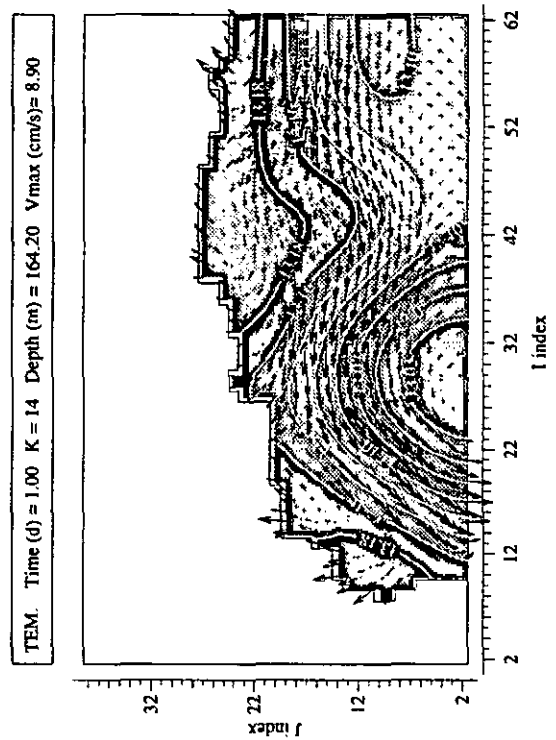


Figure 5.10: Coupes horizontales des champs de vitesse et température à différentes profondeurs après un jour de vent du secteur NE (330°).



5.3.1 Simulation hydrodynamique

La simulation effectuée ici vise à déterminer la réponse hydrodynamique à un vent persistant du NO auquel succède une période de calme.

Pour ce faire, on schématise le forçage en fixant un champ de vent uniforme. Le vent souffle à 15m/s du secteur NO (330°) durant les 4 premiers jours de la simulation. Les 4 jours qui suivent, le vent est coupé. Les effets d'une distribution non uniforme du champ de vent et de ses variations d'intensité seront examinés dans la section 5.4.

Le vent affecte en premier lieu la circulation de surface en entraînant le fluide dans un mouvement orienté au SSO (figure 5.10, coupe $K = 1$). Une couche d'Ekman, dans laquelle les courants sont déviés vers la droite par rapport à la direction du vent (c'est un effet de la force de Coriolis), s'est développée sous la surface. Cette déviation, théoriquement de 45° à la surface, augmente avec la profondeur, alors que l'amplitude des vitesses diminue. Tout le long du littoral N, le flux de surface s'accompagne d'upwellings. Les downwellings apparaissent sur les côtes du SO.

Sous cette circulation de surface, la balance des flux est assurée sur le plateau continental par un contre-courant orienté au NE et qui se prolonge le long du littoral. L'alimentation de ce contre-courant est double. Les masses d'eau advectées proviennent, d'une part, de la zone de downwelling à l'extrémité SO du plateau et, d'autre part, du large, par le biais de remontées d'eau le long de la pente continentale (figure 5.10, coupe $K = 14$). Selon le dessin et l'orientation de la pente, le flux vertical est plus ou moins intense. Bien qu'avec une maille de $4,5\text{km}$ de côté la résolution des canyons soit grossière, le champ de vitesse calculé montre une intensification du flux vertical au niveau du canyon de Lacaze-Duthiers. Sur la figure 5.11, où l'on peut visualiser la tête du canyon en $I = 10-11$, les vitesses verticales maximales en période de vent sont relevées à l'aplomb du canyon. Elles sont importantes (de l'ordre de $0,05\text{cm/s}$) et provoquent une inflexion des isothermes.

En examinant le champ de température en surface (figure 5.10, coupe $K = 1$), on retrouve globalement la carte des isothermes tirées des photos satellites (figure 5.8), c.-à-d. les eaux froides des upwellings localisées le long du littoral N et des eaux plus chaudes ailleurs. On constate toutefois que des zones distinctes d'upwelling ne peuvent être identifiées et que la zone côtière à l'est de Toulon ($I > 54$) n'en fait généralement pas partie. Deux raisons peuvent expliquer ces différences. Primo, à l'échelle de ces zones d'upwelling, la résolution de la côte par le modèle est relativement grossière. Secundo, le vent est uniforme en amplitude et direction et les variations locales ne sont

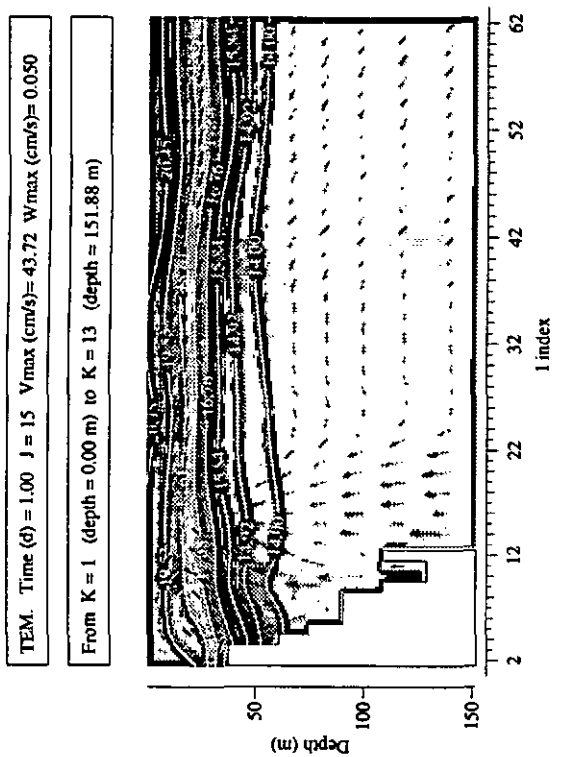
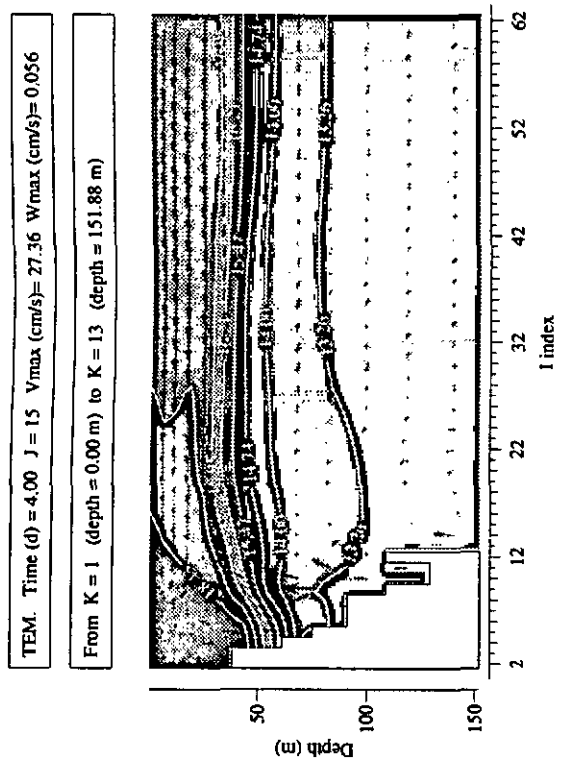
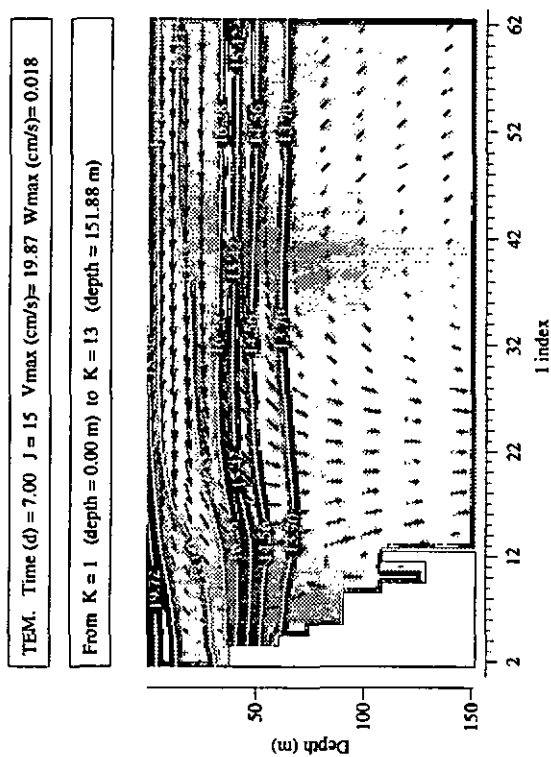


Figure 5.11: Coupes verticales O-E des champs de vitesse et température dans les 150 premiers mètres de la colonne d'eau, après un jour de vent de secteur NO (330°), après 4 jours de vent et après 3 jours supplémentaires sans vent.



pas prises en compte.

Les épisodes de vent affectent également la structure hydrologique de la colonne d'eau par l'action de mélange induite dans les couches superficielles. Les mouvements d'upwelling, en advectant des eaux plus denses en surface, facilitent leur brassage avec les eaux moins denses environnantes. L'évolution du champ de température dans les coupes verticales successives de la figure 5.11 permet de mettre en évidence cette action de mélange. Après seulement un jour de vent, la stratification est encore bien marquée. Trois jours plus tard, toute stratification a disparu dans les 35 à 40 premiers mètres de la colonne d'eau. Lorsque le vent est coupé, la stratification des couches superficielles se reforme progressivement sous l'action du flux de chaleur atmosphérique.

Durant la période de relaxation qui suit un épisode de vent, la distribution de la densité contrôle la circulation sur le plateau continental. Le vent a en effet provoqué une forte pente des isothermes et les courants tendent alors à rétablir, sous l'action des forces de poussée, l'équilibre du champ de densité (figure 5.12). Il en résulte, le long des côtes du Roussillon et du Languedoc, un courant côtier orienté au N ou NE dans la partie supérieure de la colonne d'eau et au S ou SO au fond (voir également les coupes horizontales de vitesse dans le volume 2.) Au large, les courants décrivent un mouvement de rotation à la fréquence d'inertie. La simulation de la section 5.4 permettra une analyse plus détaillée des oscillations d'inertie.

5.3.2 Transport de particules

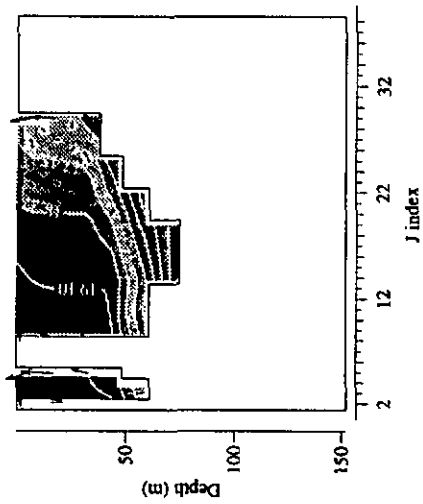
L'étude de l'influence de la circulation sur le transport des particules à l'échelle de temps de l'ordre du mois a fait l'objet précédemment de plusieurs simulations en conditions stationnaires (cas A à F, figures 2.4 à 2.9 du volume 2). Le rôle des structures hydrodynamiques majeures, à savoir le courant LP et le tourbillon anticyclonique de la partie occidentale du golfe, y a été mis en évidence.

A la méso-échelle, d'autres structures hydrodynamiques, générées par le vent, sont apparues. Ce sont la couche d'Ekman de surface, les upwellings et les downwellings ainsi que le contre-courant du plateau continental sous la couche d'Ekman. De par l'amplitude horizontale et/ou verticale des mouvements qui les accompagnent, elles influencent fortement la dispersion du matériel particulaire.

Six nouvelles simulations de transport permettant de mesurer cette influence ont été effectuées. Durant les 8 jours de la simulation hydrodynamique

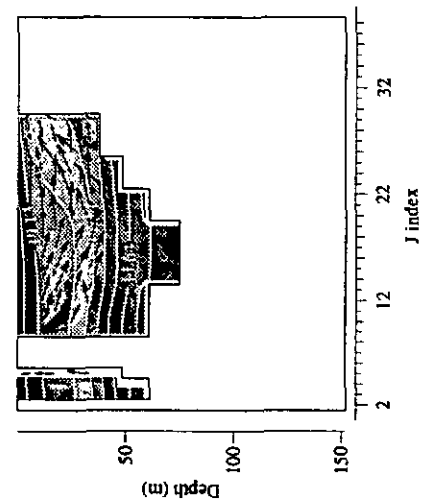
TEM. Time (d) = 4.00 I = 5 Vmax (cm/s) = 30.93 Wmax (cm/s) = 0.081

From K = 1 (depth = 0.00 m) to K = 13 (depth = 151.88 m)



TEM. Time (d) = 7.00 I = 5 Vmax (cm/s) = 6.93 Wmax (cm/s) = 0.008

From K = 1 (depth = 0.00 m) to K = 13 (depth = 151.88 m)



TEM. Time (d) = 5.00 I = 5 Vmax (cm/s) = 12.56 Wmax (cm/s) = 0.010

From K = 1 (depth = 0.00 m) to K = 13 (depth = 151.88 m)

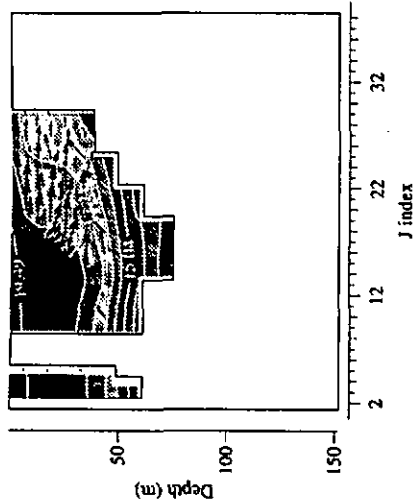


Figure 5.12: Coupes verticales S-N des champs de vitesse et température à l'extrémité ouest du plateau continental, après 4 jours de vent du secteur NO (330°), puis 1 et 3 jours plus tard durant lesquels le vent n'a plus soufflé.

5.3 Circulation (juillet) par vent du NO

mique, des particules ont été relâchées continuellement en différents points et leurs trajectoires ont été calculées comme précédemment, mais avec un champ de vitesse évolutif. Durant les 4 premiers jours, le vent souffle donc avec une vitesse constante, puis le calme revient durant les 4 autres jours qui suivent. Les résultats des cas G à L correspondant à ces simulations sont décrits dans le volume 2.

Nous allons ici décrire les effets majeurs des épisodes de vent du NO sur le transport des particules.

Un premier effet est associé à la présence de la couche d'Ekman de surface. Les courants induits par le vent ayant leur amplitude maximale juste sous la surface, ils provoquent une advection rapide des particules qui s'y trouvent. C'est le cas de particules relâchées près de l'embouchure du Rhône avec une vitesse de chute de $0,24\text{m/h}$ et qui, en quatre jours, ont couvert une distance de près de 150km (figure 5.13, à gauche). Il faut cependant ici noter que les vitesses des particules sont moindres au début de leur trajectoire du fait de la proximité de la côte qui réduit localement l'amplitude du courant. La

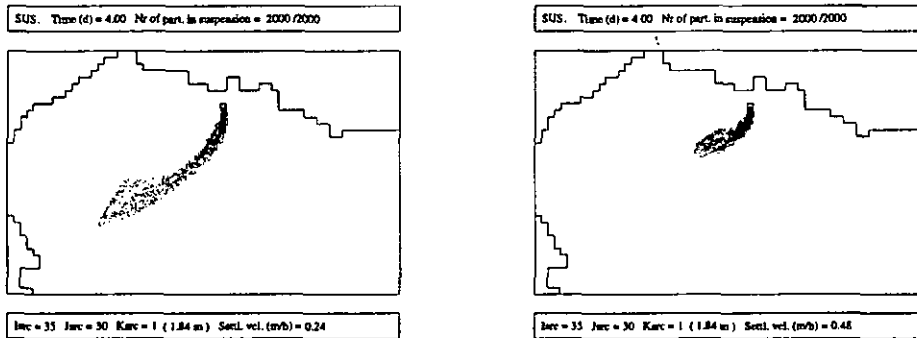


Figure 5.13: Distribution des particules en suspension 4 jours après que les premières d'entre elles aient été relâchées en surface non loin de l'embouchure du Rhône. A gauche, la vitesse de chute des particules est de $0,24\text{m/h}$; à droite, elle est de $0,48\text{m/h}$.

progression des particules se ralentit au fur et à mesure que les particules s'enfoncent dans la colonne d'eau, en même temps que leurs trajectoires s'infléchissent vers la droite. Cette inflexion résulte de la structure en spirale des vitesses dans une couche d'Ekman. Des particules relâchées en des points sources situés au même endroit mais distants d'une dizaine de mètres en hauteur prendront donc des trajectoires différentes. Cet effet sera d'autant plus marqué que leur chute est lente puisqu'alors elles resteront plus de temps à un même niveau de profondeur et s'éloigneront davantage. Au contraire, plus grande est la vitesse de chute, plus vite les particules traversent la couche

d'Ekman et se retrouvent sous celle-ci où la vitesse du fluide est généralement moins importante (figure 5.13, à droite).

Dans les zones d'upwellings, la vitesse verticale du fluide est de l'ordre de plusieurs dixièmes de mm/s , c.-à-d. de l'ordre du m/h . Des particules dont la vitesse de chute est moindre sont donc susceptibles de remonter la colonne d'eau sur quelques jours. Dans le cas de particules relâchées vers $70m$ de profondeur à quelques km de la côte, moins de 4 jours avec vent ont suffi pour que certaines d'entre elles se retrouvent en surface (figure 5.14). Selon

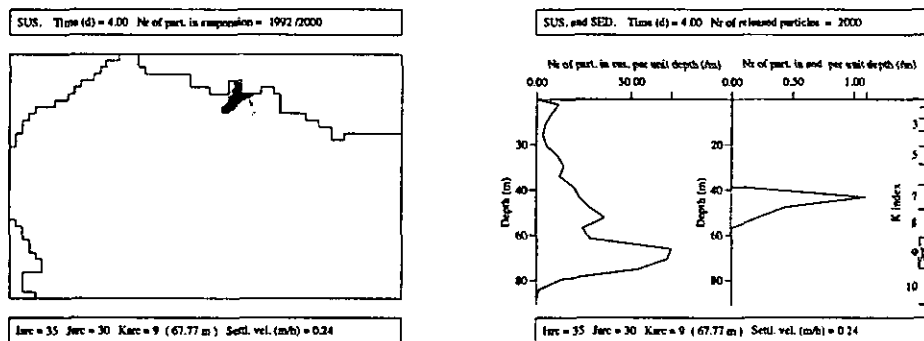


Figure 5.14: Distributions horizontale et verticale des particules en suspension après 4 jours de vent. Le point source est situé en profondeur ($68m$) et la vitesse de chute des particules est de $0,24m/h$.

les conditions de vent et l'évolution de la circulation dans les heures et jours qui suivent, ce matériel peut alors soit être advecté horizontalement dans une couche de surface, soit se redéposer sur le fond à proximité de la côte. Si des coups de vent intense se succèdent rapidement, on observera un mouvement de va-et-vient vertical des particules dans la colonne d'eau.

Dans une zone de downwelling, la chute des particules est accélérée. L'extension verticale des downwellings étant toutefois limitée, notamment en raison de la stratification, les particules retrouvent une vitesse de chute moins importante à la base de la zone du downwelling. Il en résulte une augmentation de la densité de particules à la profondeur correspondante (figure 5.15). Sur cette même figure, on observe le déplacement des particules entraînées par le contre-courant orienté au NE. Le courant près du fond a une orientation identique (figure 5.16). On avait relevé dans l'analyse des champs de vitesse de la section précédente que des remontées d'eau le long de la pente continentale alimentaient ce courant de fond. On retrouve la trace de ce mouvement vertical dans la figure 5.16 où, sous son action, des particules provenant d'un point source situé quelques mètres au dessus du fond se maintiennent à ce niveau de profondeur et peuvent ainsi être déplacées horizontalement. Ce mouvement de contre-courant est susceptible de ramener vers sa source du

5.3 Circulation (juillet) par vent du NO

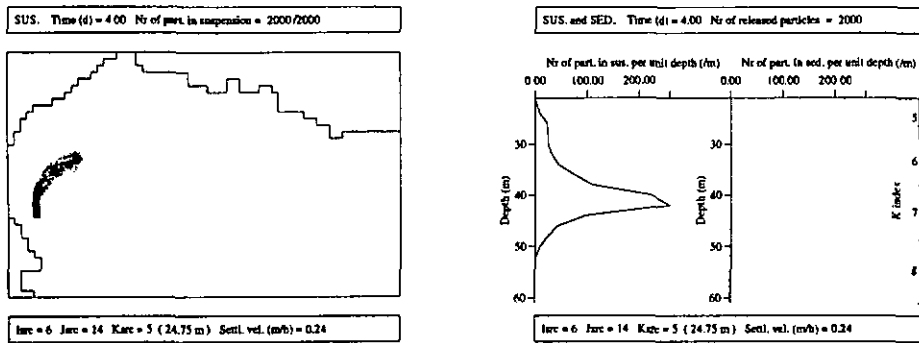


Figure 5.15: Distributions horizontale et verticale des particules en suspension après 4 jours de vent. Le point source est situé à 25m de profondeur à proximité d'une zone de downwelling et la vitesse de chute des particules est de 0,24m/h.

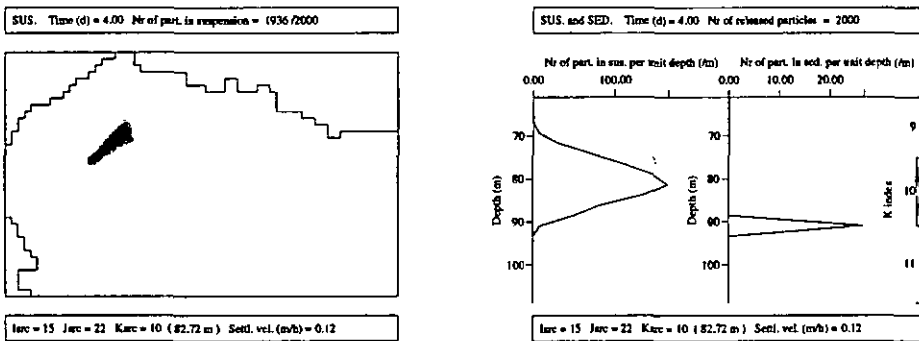


Figure 5.16: Distributions horizontale et verticale des particules en suspension après 4 jours de vent. Le point source est situé sur le plateau continental à 83m de profondeur à hauteur de l'isobathe des 100m. La vitesse de chute des particules est de 0,12m/h.

matériel qui aurait été transporté au préalable dans le sens inverse par la circulation de surface.

Un dernier effet des épisodes de vent, mais certainement pas des moindres, doit être souligné. C'est l'effet de dispersion des particules qu'ils provoquent à grande échelle. Pour l'illustrer, on a repris la distribution des particules obtenues après 60 jours avec le champ de vitesse stationnaire (cas F) et l'on a calculé son évolution sur une période de deux jours dans des conditions de vent identiques à celles des simulations ci-dessus, à savoir un vent constant de 15m/s du NO (330°). La figure 5.17 permet de mesurer la dispersion provoquée par le vent en seulement deux jours.

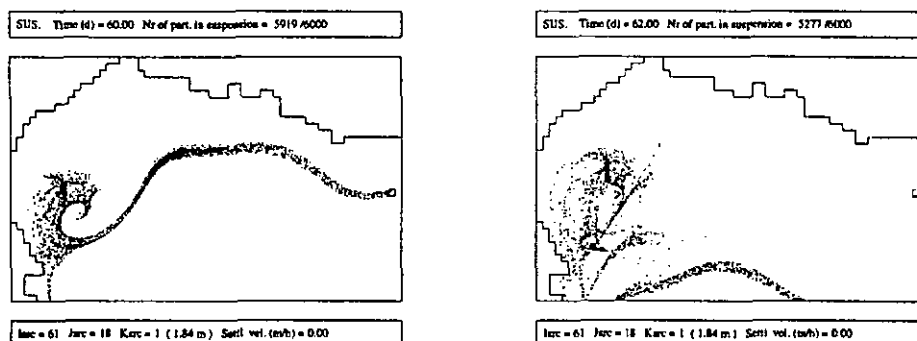


Figure 5.17: Distributions horizontales de particules en suspension avant et après un coup de vent du NO de deux jours. Les particules n'ont pas de vitesse de chute propre.

5.4 Circulation (juillet) par vent variable

Le champ de vent du NO (330° , $15m/s$) utilisé pour la simulation de la section 5.3.1 était uniforme spatialement et constant durant les 4 jours où il a soufflé. Les conditions de vent réelles sont cependant beaucoup plus complexes, à la fois du point de vue de la distribution spatiale et de l'évolution du vent. Mistral et Tramontane soufflent généralement de concert, mais pas nécessairement avec la même orientation et intensité. Ainsi, le secteur de la Tramontane est plus incliné vers l'ouest que celui du Mistral, qui se rapproche du nord. A cette distribution globale, se superposent des variations locales, parfois très importantes: on a cité en introduction de la section 5.3 des variations de 45° sur une distance de $45km$. A certains endroits, notamment là où Mistral et Tramontane débouchent sur le Golfe du Lion, elles correspondent à un élargissement du champ de vent en forme d'éventail.

Ensuite, durant un épisode de vent du NO qui peut durer plusieurs jours, l'intensité du vent varie, généralement selon le cycle diurne: l'après-midi et le début de soirée par exemple sont des périodes favorables à la réalisation de vitesses maximales (Ascensio et al. 1977). Ces variations d'intensité sont importantes car elles génèrent des oscillations d'inertie (Millot and Crépon 1981), comme on a pu en observer dans la simulation précédente après que le vent ait été coupé.

La simulation hydrodynamique de cette section doit permettre d'analyser les effets induits sur la circulation par ces variations spatiales et temporelles.

A cette fin, un champ de vent non uniforme et évolutif a été défini. Il a servi de forçage pour une durée de 6 jours. La figure 5.18 montre son évolution de 12 en 12 heures. Le vent souffle du NO pendant 4 jours, puis est coupé le

5.4 Circulation (juillet) par vent variable

5e jour, puis souffle à nouveau, cette fois du secteur E, le 6e jour. Le champ des 24 premières heures restitue globalement la déflexion du Mistral et de la Tramontane que mettent en évidence les observations et les résultats de modèles atmosphériques. A partir du 2e jour et durant le restant de l'épisode

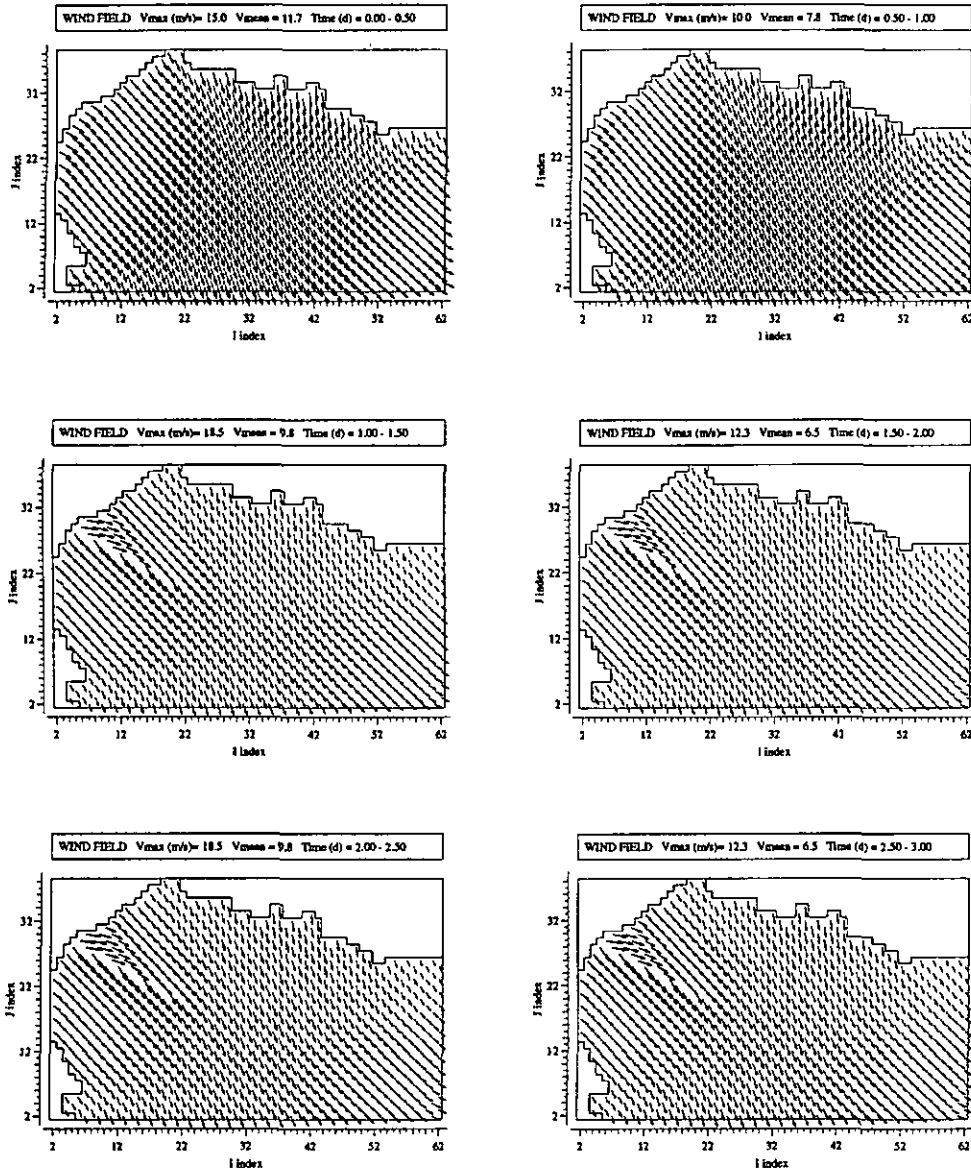


Figure 5.18: Evolution du champ de vent de 12 en 12 heures sur une durée de six jours. Comme pour la représentation des champs de vitesse du fluide, la longueur des vecteurs est ajustée dans chaque figure selon la vitesse maximale. Les valeurs des vitesses maximales et moyennes sont mentionnées. La suite de la figure se trouve à la page 120.

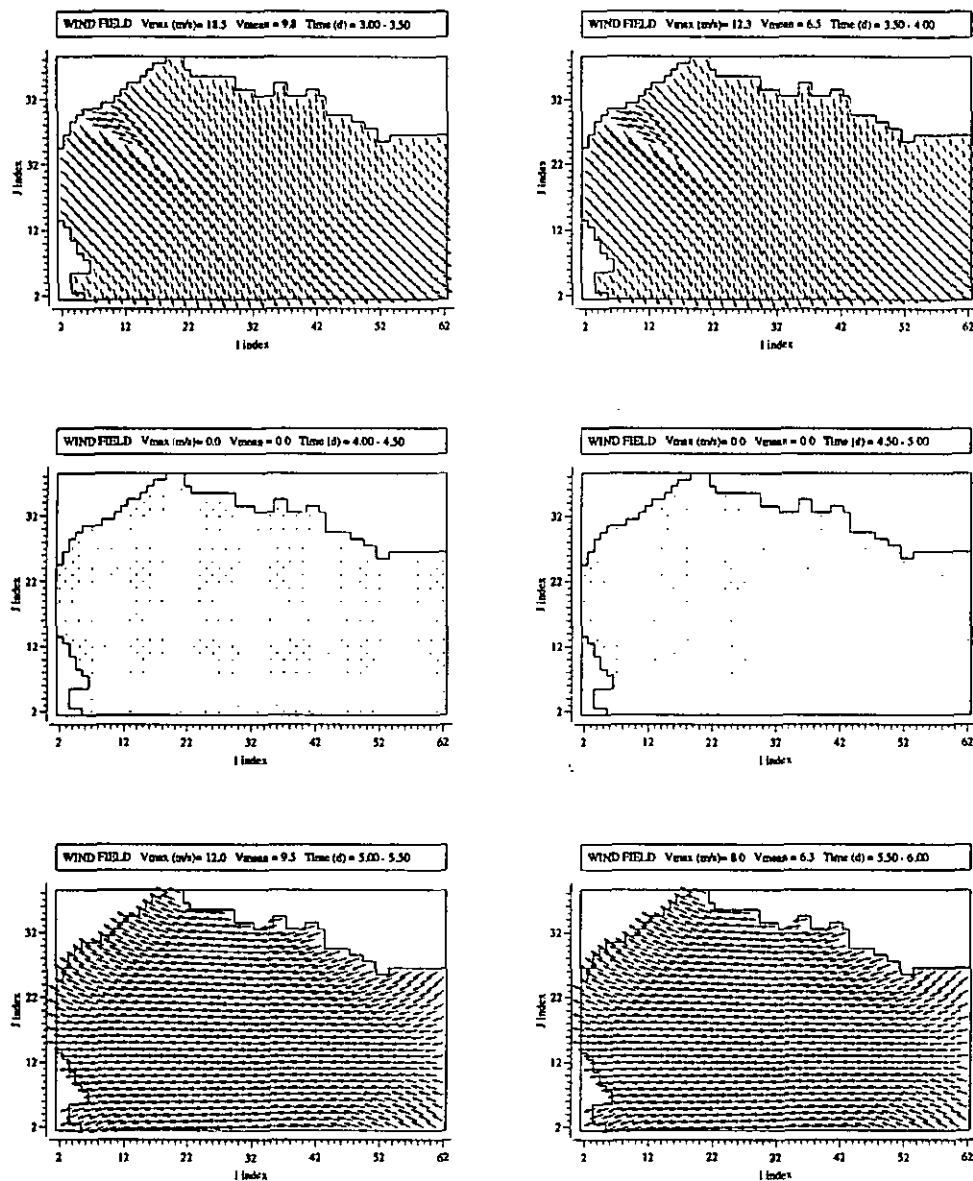


Figure 5.18: suite.

de vent du NO, on lui superpose une structure locale visant à reproduire schématiquement des variations d'orientation observées dans cette région du Golfe du Lion. Chaque jour, l'intensité du vent est modulée: celle-ci est uniformément réduite de 33% à la mi-journée.

Afin de marquer davantage la thermocline et d'approcher ainsi les conditions d'une colonne d'eau mélangée dans sa partie supérieure, on a modifié la stratification initiale. Les conditions initiales de température correspon-

5.4 Circulation (juillet) par vent variable

dent au champ obtenu dans la simulation de la section 5.2.1 ⁶ dont on a homogénéisé à 21°C les valeurs dépassant 18°C.

Les résultats de la simulation hydrodynamique sont présentés dans le volume 2. Nous détaillons ci-dessous les effets des variations spatiales et temporelles du forçage sur la circulation.

5.4.1 Localisation et intensité des upwellings

Par rapport à la simulation avec vent uniforme et constant, deux différences marquantes sont apparues dans la distribution du champ de température de surface (figure 5.19). La première est la disparition de la zone d'upwelling à l'est de Toulon ($I > 54$); le cap Sicié ($I = 53$) marque ici la limite orientale des zones d'upwelling. Cette différence résulte de l'orientation plus au nord du vent sur cette partie de la côte.

La seconde différence est la signature plus nette des zones d'upwelling et en particulier de celle de Valras (la plus à l'ouest sur la figure 5.19). Cela tient à la fois de l'intensification initiale de la thermocline et de l'orientation de la Tramontane qui favorise le développement de l'upwelling à cet endroit. L'extension des eaux froides vers le large est renforcée à partir du 2^e jour par la distribution locale du vent, sans toutefois qu'il ne se forme une véritable langue comme on a pu en observer dans les photos satellites (figure 5.9).

5.4.2 Circulation anticyclonique

L'orientation non uniforme du vent ainsi que ses variations d'intensité sont deux facteurs clés pour la formation d'une circulation anticyclonique sur la partie occidentale du Golfe du Lion par vent du NO.

La rotation du courant de surface induite par celle du vent apparaît clairement sur la figure 5.19: de SE à hauteur de l'upwelling de Valras, le courant tourne progressivement pour s'orienter au SSO à la limite sud du Golfe. Cet effet du vent n'est pas une surprise mais il est intéressant de noter qu'il participe à l'intensification du courant LP. Un courant de surface orienté au N, c.-à-d. contre le vent, le long des côtes du Roussillon pour "fermer" la circulation anticyclonique est lui a priori plus inattendu.

Un contre-courant vers le N a déjà été observé dans la simulation précédente (section 5.3.1), mais localisé sous la couche d'Ekman de surface ou après que le vent ait été coupé. Dans ce dernier cas, il accompagnait les oscillations d'inertie des courants du large. Lorsque le vent varie, sans que

⁶simulation sur une période de 12 heures avec vent nul

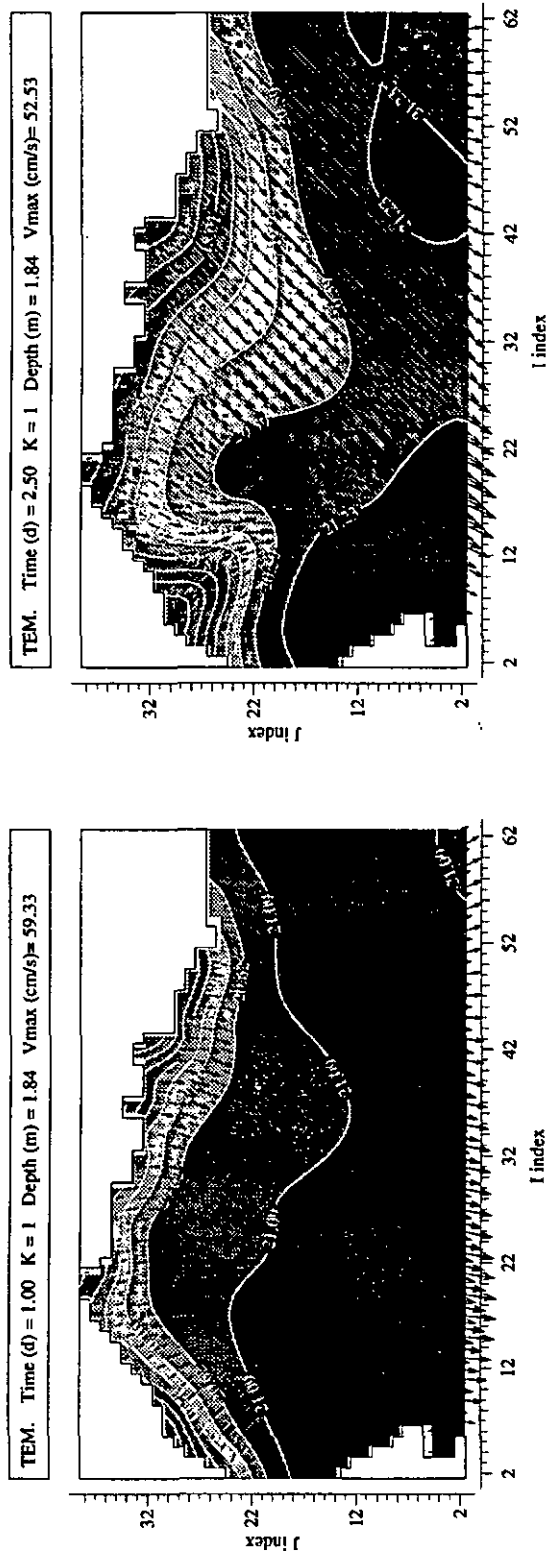


Figure 5.19: Coupes horizontales des champs de vitesse et température en surface après 1 jour et 2,5 jours de vent du NE. L'évolution du vent est décrite par la figure 5.18.

5.4 Circulation (juillet) par vent variable

nécessairement sa vitesse tombe à zéro, on observe également des oscillations du courant. La figure 5.20 permet de suivre l'évolution du vecteur vitesse en un point situé sous la surface (6,1m de profondeur) à proximité de la côte. Durant les 12 premières heures, le courant se développe progressivement. Sous la surface (6,1m), il est orienté au SE puis tourne au SO. A 12h, l'amplitude du vent est réduite de 33% et la rotation s'accélère; la période du mouvement de rotation durant les 12h qui suivent correspond à la période inertielle. Durant ces 12h, le courant moyen est orienté au NNO. La vitesse du vent réaugmente ensuite, provoquant une intensification et une nouvelle rotation du courant, plus lente. L'épisode de vent du NO se poursuit jusqu'à la fin du 4e jour avec des variations d'intensité toutes les 12 heures.

Systématiquement, le courant s'oriente davantage au N dans les périodes qui suivent une réduction de la vitesse du vent. Les variations d'intensité du vent concourent donc à la formation d'un contre-courant côtier le long des côtes du Roussillon.

La figure 5.21 présente des coupes horizontales des champs de vitesse et température au temps $t = 3j$, soit à la fin d'une période de vent moins intense. Si le contre-courant n'est pas bien marqué directement sous la surface ($K = 1, \sim 2m$), il est en revanche bien apparent dès les 6m de profondeur⁷. A 33m, il a toujours la même orientation et entraîne les eaux plus chaudes provenant de la zone de downwelling. Le moteur de ce contre-courant est la force de poussée qui, dès que l'intensité du vent diminue, tend à faire retrouver au fluide un état d'équilibre. Ce mécanisme est fondamentalement identique à celui mis en oeuvre lorsqu'une période de calme suit un épisode de vent (voir section 5.3.1).

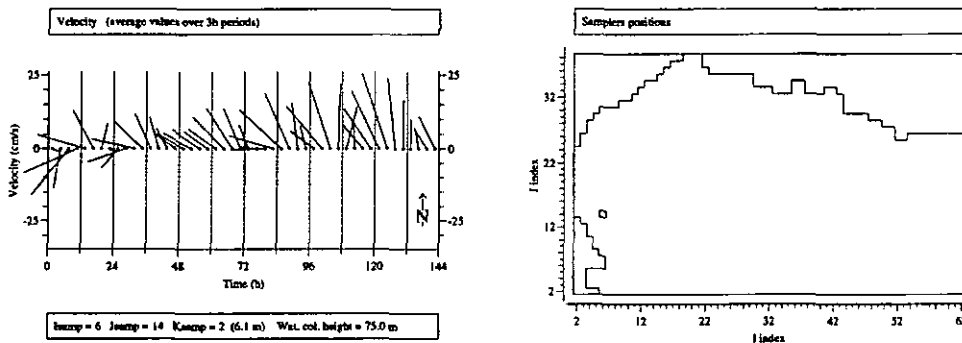


Figure 5.20: Diagramme vecteur du courant à 6,1m de profondeur en un point repéré sur la carte à droite. L'épisode de vent du NE correspond aux 4 premiers jours de la simulation.

⁷Cette profondeur correspond plus ou moins à la profondeur d'immersion des courantomètres dont les mesures ont été évoquées dans la section 5.3.

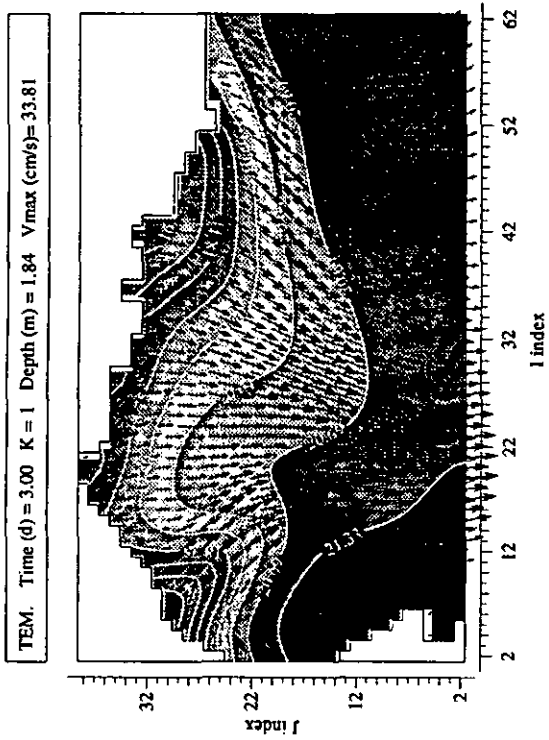
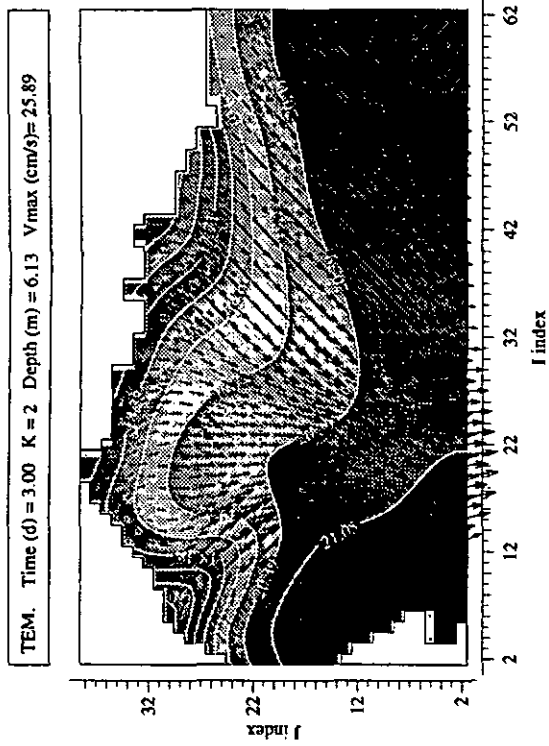
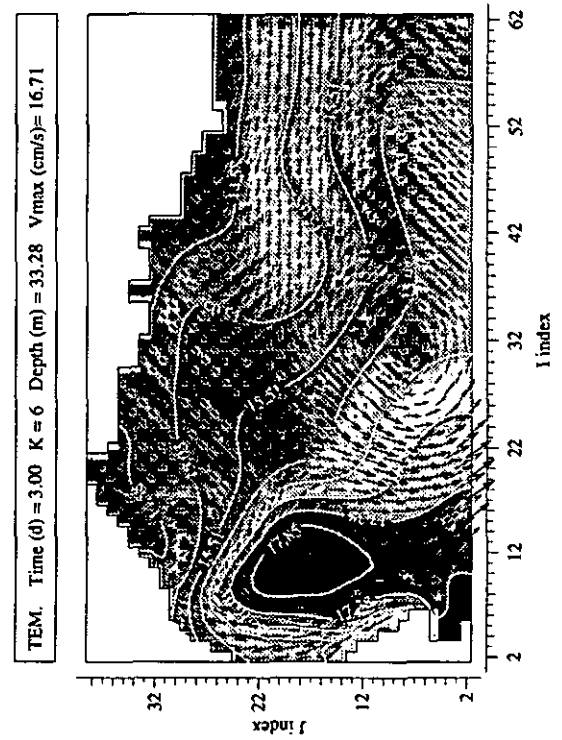


Figure 5.21: Coupes horizontales des champs de vitesse et température à 2m, 6m et 33m de profondeur au temps $t = 3j$.



5.4 Circulation (juillet) par vent variable

Les épisodes de vent du NO, Mistral et Tramontane, sont donc à la base du développement de la circulation anticyclonique estivale, à la fois par leur action d'entraînement des couches de surface, et par les changements profonds qu'ils induisent dans la distribution de densité.

5.4.3 Oscillations d'inertie et ondes internes

Des oscillations d'inertie sont générées par les variations du vent. La manifestation la plus spectaculaire de ces oscillations est sans doute la rotation des courants, particulièrement visible dans les couches de surface lorsque le vent est coupé. On l'observe également après une variation d'intensité du vent (figure 5.20). Toutefois tant que celui-ci souffle, les oscillations se superposent à un signal moyen. La figure 5.22 montre l'évolution des composantes O-E et S-N du courant correspondant au diagramme vecteur. Les oscillations

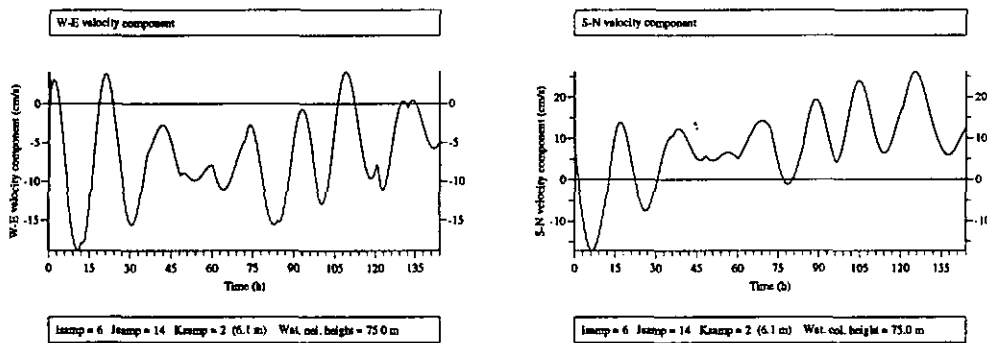


Figure 5.22: Evolution des composantes O-E (à gauche) et S-N (à droite) de la vitesse à 6m de profondeur au point (6, 14).

d'inertie y apparaissent clairement, ainsi que l'intensification de la composante vers le N. On note aussi les interférences provoquées par les variations d'intensité du vent qui se produisent toutes les 12 heures.

Les oscillations d'inertie affectent également le mouvement vertical.

Elles apparaissent clairement sur la figure 5.23 où l'on suit l'évolution ponctuelle de la vitesse verticale. Les interférences se manifestent ici par le ralentissement ou l'accélération des oscillations (la durée séparant deux maxima ou minima successifs varie au cours du temps). Près de la surface, l'amplitude des mouvements verticaux est relativement faible ($\sim 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}$). Plus bas dans la colonne d'eau, l'amplitude augmente. A 33,3m, elle atteint $\sim 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s}$. Ces oscillations verticales du fluide sont la manifestation d'ondes internes, générées ici par des variations d'intensité du vent.

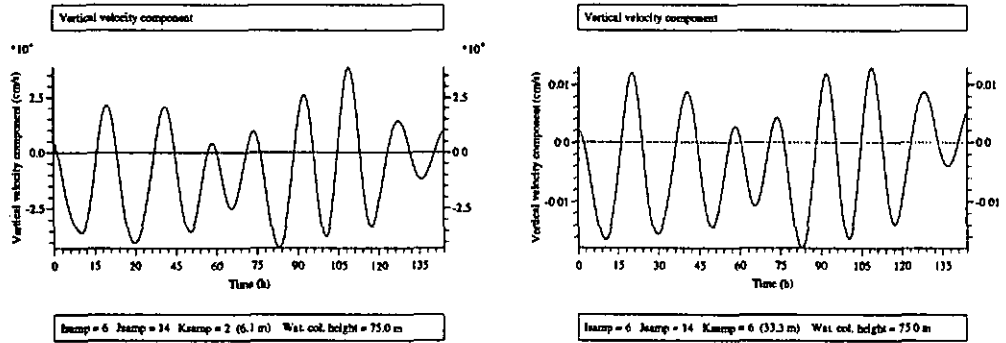


Figure 5.23: Evolution de la vitesse verticale à 6m (à gauche) et 33m (à droite) de profondeur.

Dans un fluide stratifié, les ondes internes provoquent un déplacement vertical de la thermocline. La figure 5.24 permet d'en retrouver la trace dans les signaux de température. Si près de la surface (6m) la trace des oscillations

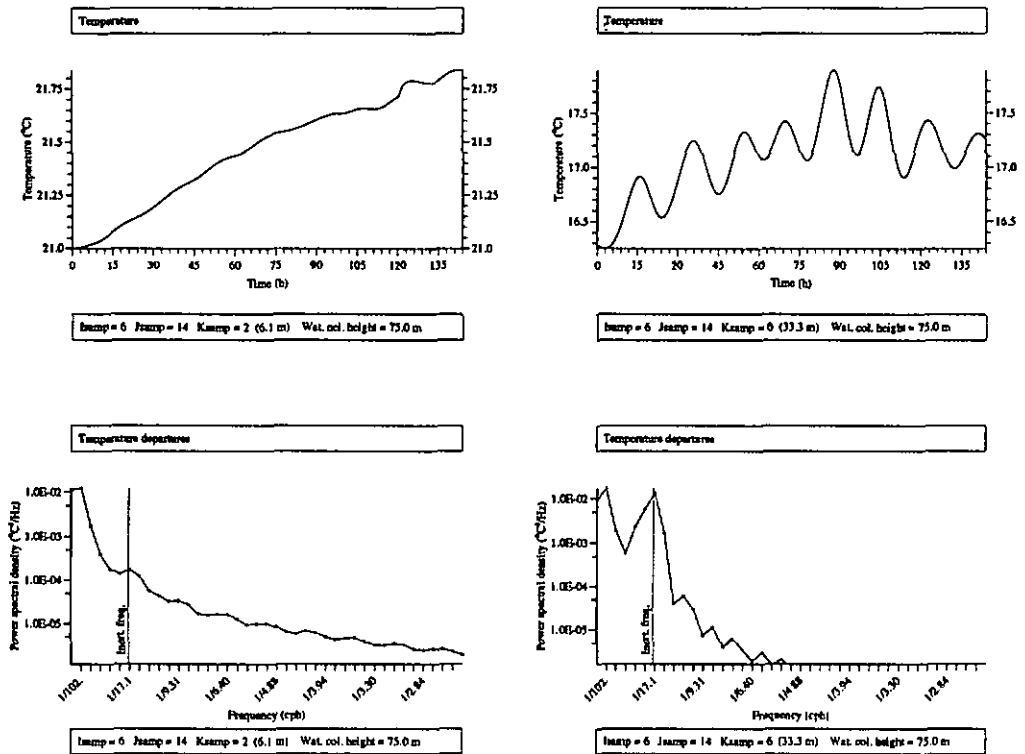


Figure 5.24: Evolution de la température à 6m (à gauche, en haut) et 33m (à droite, en haut) de profondeur et densités spectrales de puissance correspondantes (en bas).

5.5 Circulation moyenne hivernale (février)

est très peu marquée, à 33m elle l'est beaucoup plus. Ces oscillations se superposent à des variations plus lentes résultant, dans le premier cas, de l'échauffement progressif des couches superficielles par les flux thermiques atmosphériques et, dans le second, par des mouvements de downwelling ou d'upwelling qui provoquent l'enfoncement ou le relèvement de la thermocline dans la colonne d'eau.

Sur la même figure 5.24, on a représenté les courbes de densité spectrale de puissance décrivant le spectre des signaux de température. Ces courbes ont été calculées à partir d'une transformée de Fourier du signal de température dont on a retiré la moyenne (Press et al. 1992). Pour le signal de température à 6m, l'évolution de basse fréquence liée à l'échauffement de surface domine le spectre. On distingue tout de même un léger pic à la fréquence d'inertie. Pour le signal de température à 33m, le maximum de puissance correspondant à la fréquence d'inertie est beaucoup plus marqué. En fait, les courbes de densités spectrales de puissance présentent quasi systématiquement un maximum (local si les modulations de basse fréquence dominant) à la fréquence d'inertie, traduisant l'omni-présence des oscillations d'inertie dans les processus de méso-échelle.

5.5 Circulation moyenne hivernale (février)

5.5.1 Simulation hydrodynamique

Afin de mettre en évidence les caractéristiques principales de la circulation hivernale dans le Golfe du Lion, une simulation analogue à celle de la section 5.2.1 a été effectuée à partir des conditions initiales correspondant aux données climatologiques du mois de février.

Cette simulation couvre une durée de 12 heures, sans forçage de vent. Les coupes de la figure 2.34 dans le volume 2 en représentent la solution.

Par rapport à la simulation du mois de juillet, l'évolution principale est la disparition de la stratification thermique des couches superficielles (figure 5.25). La température de l'eau est relativement homogène au large mais elle varie de manière importante sur le plateau continental. La structure des surfaces isotermes est d'ailleurs remarquable: celles-ci sont quasi verticales sur le plateau continental, depuis la surface jusqu'au fond, et elles marquent, en bordure du plateau, une limite avec les eaux du large (coupe $J = 17$). Exception faite de la zone de dilution du Rhône, les eaux les plus froides sont également les moins chargées en sel et les variations de densité pour les eaux du plateau restent faibles.

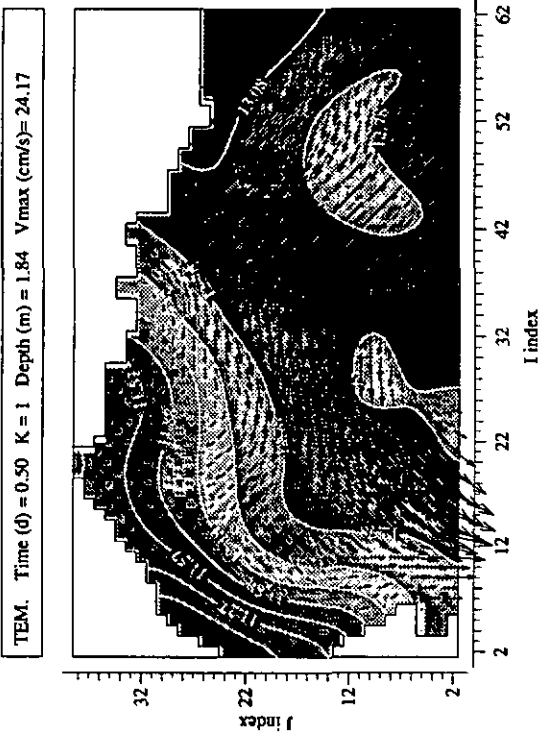
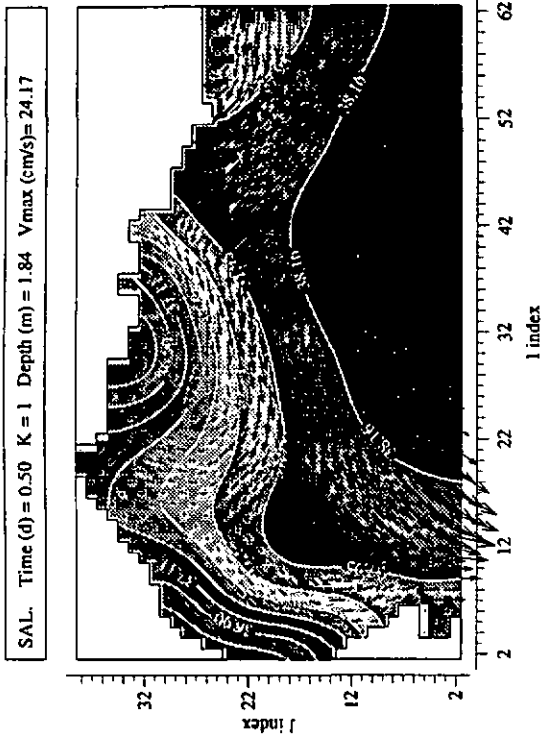
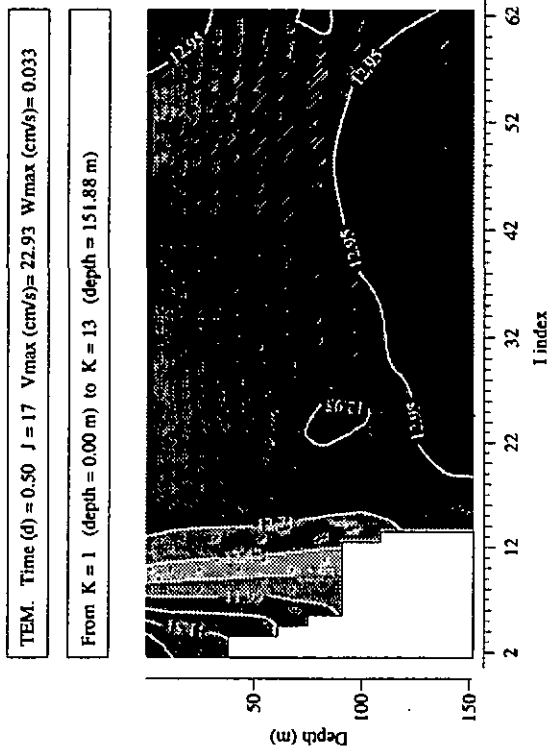


Figure 5.25: Coupes horizontales de champs de vitesse, température et salinité en surface ($K = 1$) et coupe verticale O-E ($J = 17$) des champs de vitesse et température après 12h de simulation en l'absence de forçage par le vent.



Deux structures hydrodynamiques majeures avaient été identifiées dans la circulation en période estivale: le courant LP et un tourbillon anticyclonique sur la partie occidentale du golfe. Le premier est toujours présent, avec une intensité légèrement accrue. Le second a, lui, totalement disparu; l'intensité des courants sur le plateau est peu importante et leur orientation variable.

Mis en relation avec les faibles variations de densité sur le plateau, ce résultat confirme le rôle essentiel des forces de poussée dans le développement et le maintien d'une circulation anticyclonique sur le plateau du Golfe du Lion.

5.5.2 Transport de particules

Les trajectoires de particules relâchées en différents points ont été calculées sur la base du champ de vitesse obtenu ci-dessus, maintenu constant sur une période de 90 jours.

Les résultats de trois cas d'étude (cas M, N et O) dont les paramètres (localisation du point source et vitesse de chute des particules) sont identiques à ceux des cas A, C et F respectivement, figurent dans le volume 2.

Par rapport à la simulation estivale, la différence la plus significative dans le transport des particules est liée à la disparition du tourbillon anticyclonique dans la partie occidentale du Golfe du Lion. Cela modifie profondément les trajectoires des particules dans cette région et notamment de celles relâchées à l'extrémité SO du plateau (figure 5.26). En présence du tourbillon, les particules étaient entraînées dans un mouvement anticyclonique et se déposaient plus au N sur le plateau ou, dans le cas des plus fines, rejoignaient le courant LP qui les emportaient vers le sud (figure 5.3). Ici le courant entraîne les particules directement vers le sud, quelle que soit leur vitesse de chute.

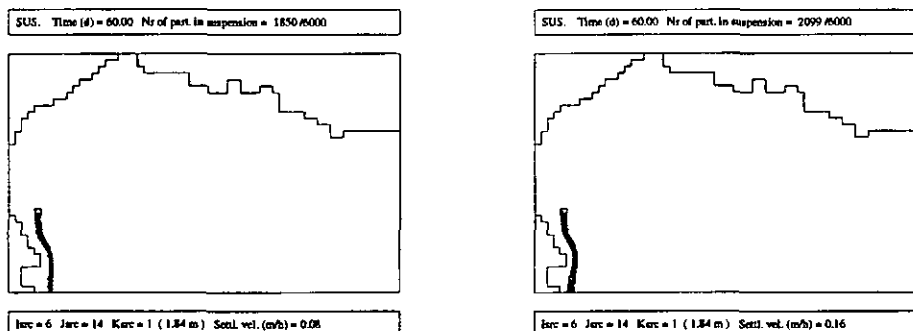


Figure 5.26: Distribution des particules en suspension, 60j après qu'elles aient été relâchées en surface à l'extrémité SO du plateau continental. A gauche, la vitesse de chute des particules est de 0,16m/h; à droite, elle est de 0,08m/h.

5.6 Circulation (février) par vent du NO

C'est l'hiver que les vents du NO atteignent leur force maximale. On relève parfois des vitesses dépassant 25m/s (Ascensio et al. 1977). C'est aussi l'hiver que les épisodes venteux durent le plus. Lorsqu'ils entraînent des masses d'air polaire ou continental froid et sec, Mistral et Tramontane peuvent souffler durant plusieurs semaines (Millot 1990).

La simulation qui suit étudie la réponse à un forçage du vent du NO en période hivernale.

5.6.1 Simulation hydrodynamique

Afin de pouvoir comparer situations estivale et hivernale, des conditions de vent analogues à celles de la simulation du mois de juillet (section 5.3.1) ont été utilisées pour la simulation qui suit.

Le vent souffle donc du secteur NO (330°) à vitesse constante (15m/s) durant 4 jours puis s'apaise pour les 4 jours suivants (vitesse nulle).

Dans les grands traits, la réponse de la circulation au forçage du vent du NO est proche de celle obtenue pour le mois de juillet: en surface, les courants sont orientés au SSO; sous la couche de surface, un contre-courant, orienté au NE, se développe sur le plateau continental. Ces courants et contre-courants relient les zones d'upwelling et de downwelling situées tout le long du littoral N pour les premières et sur les côtes au SO pour les secondes (figure 5.27). Lorsque le vent cesse de souffler, le champ de vitesse se met à tourner à la fréquence d'inertie.

Des différences notables apparaissent toutefois par rapport à la situation estivale, dues à l'absence de stratification des couches superficielles. La première est la disparition de la signature thermique des upwellings dans le champ de température de surface (coupes $K = 1$ après 1 ou 4 jours de vent). Les upwellings ont plus ou moins la même intensité que précédemment mais ils advectent des masses d'eau dont la température ne varie que peu sur 30 ou 50m de profondeur.

La deuxième différence est la diminution de la vitesse du courant en sur-

Figure 5.27: Coupes horizontales de champs de vitesse et température après 1 et 4j de vent du NO (330°) à 15m/s , puis 3j plus tard durant lesquels le vent n'a plus soufflé.

5.6 Circulation (février) par vent du NO

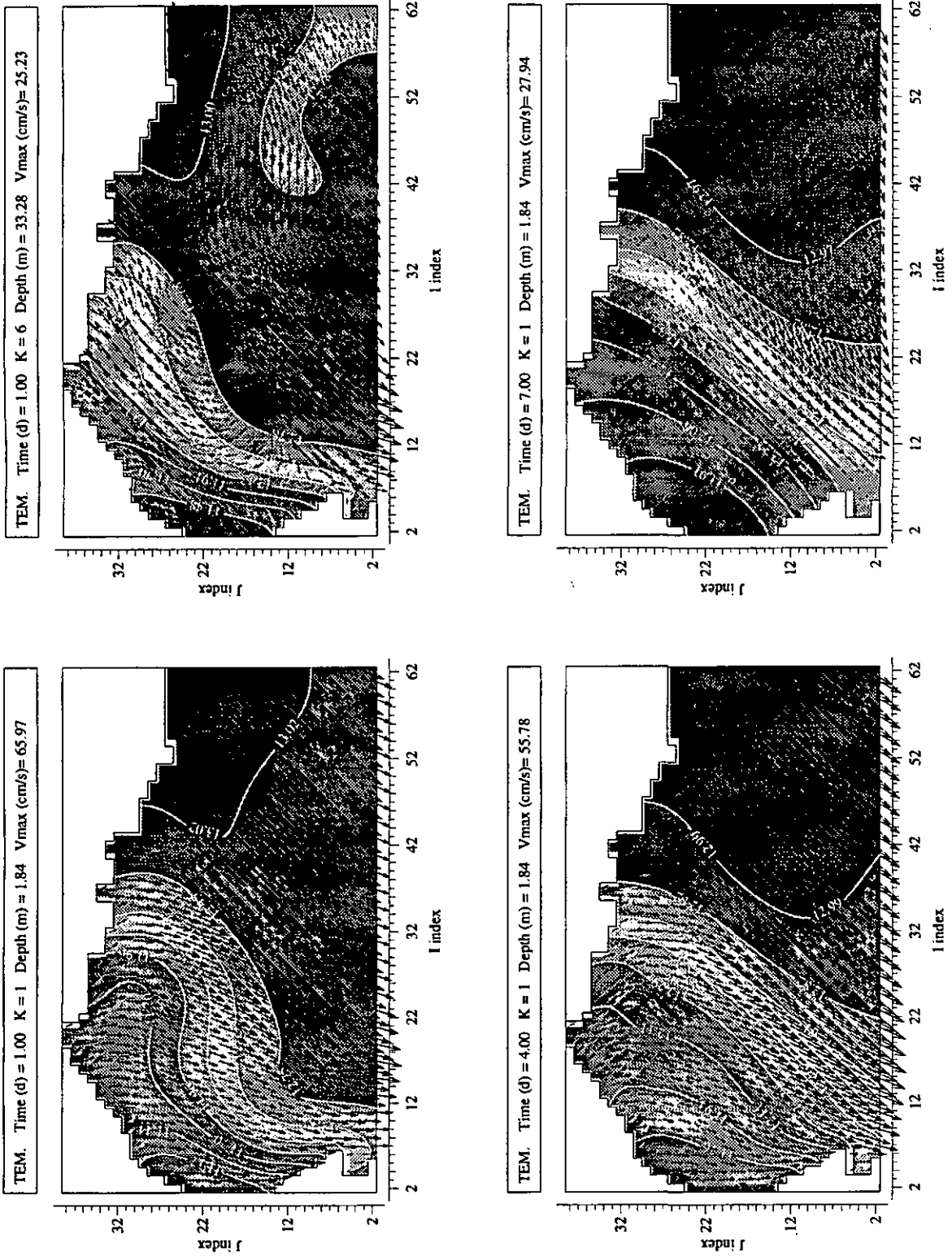


Figure 5.27

face. Après un jour, la vitesse ne dépasse pas 66cm/s alors qu'elle a atteint $85,74\text{cm/s}$ pour le mois de juillet (voir figure 5.10). Au 4^e jour de vent, les vitesses sont du même ordre, quelle que soit la saison. Cette différence résulte du fait qu'en été la stratification des couches superficielles, par son action inhibitrice sur les mouvements turbulents, limite la diffusion verticale de quantité de mouvement. Lorsque le vent continue de souffler, la stratification s'estompe puis disparaît et la vitesse en surface diminue.

La troisième différence est liée au contre-courant du plateau continental (coupe $K = 6$). Il ne s'étend pas le long du littoral N au-delà de Marseille ($I = 43$) et ne reprend pas tout le flux de downwelling sur la côte SO, dont une bonne partie s'en va vers l'est rejoindre le courant LP. Lorsque le vent est coupé, le contre-courant disparaît et les vitesses sur le plateau sont faibles (figure 5.27), alors qu'en été il perdurait, entretenu par les forces de poussée.

Enfin, en l'absence de stratification, les oscillations d'inertie affectent la circulation de manière sensiblement différente. La figure 5.28 permet de comparer l'évolution de la vitesse verticale en un même point du fluide, à 33m , pour les simulations du mois de juillet et février. Au début de la période de vent correspond dans les deux cas une augmentation rapide de la vitesse verticale: en moins de $5h$, un maximum est atteint. L'évolution dans les 4 jours qui suivent diffère alors. En été, des ondes internes de fréquence égale à la fréquence d'inertie provoquent des mouvements verticaux de grande amplitude, alors qu'en hiver, la vitesse verticale s'ajuste en 12 heures environ puis évolue lentement. Lorsque le vent est coupé, les oscillations réapparaissent dans les deux cas, avec une amplitude moindre toutefois en hiver. Ces oscillations sont induites par le mouvement de rotation libre du courant dans les quelques premières dizaines de mètres de la colonne d'eau: selon l'orientation du courant par rapport au relief continental, le mouvement du fluide sera tantôt ascendant, tantôt descendant.

5.6.2 Transport de particules

Les effets majeurs des épisodes de vent du NO sur le transport des particules sont similaires à ceux décrits en période estivale. Ce sont l'advection rapide des particules dans les couches superficielles, la remontée de matériel vers la surface dans les zones d'upwelling, l'accélération de la chute des particules dans les zones de downwelling, l'entraînement des particules dans une direction opposée à celle de la circulation de surface par des contre-courants et la dispersion à grande échelle que ces épisodes de vent peuvent provoquer.

Les figures relatives aux cas P à S dans le volume 2 illustrent la plupart de ces effets.

Des différences ont toutefois été observées, en particulier dans la partie

5.6 Circulation (février) par vent du NO

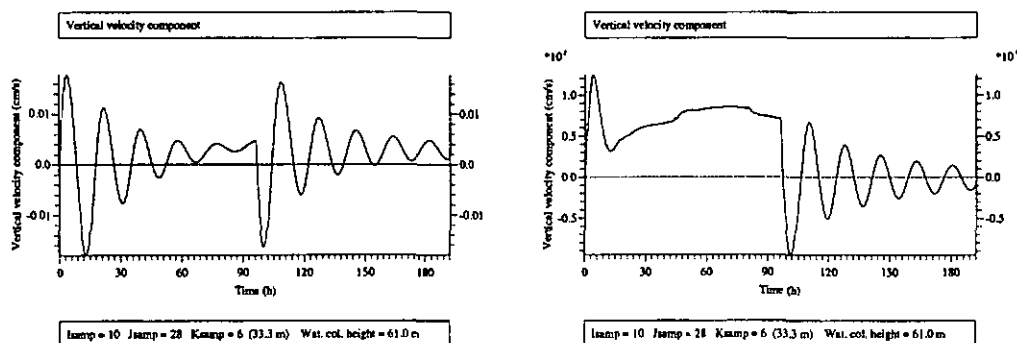


Figure 5.28: Evolution de la vitesse verticale au point (10, 28, 6) durant un épisode de vent du NO (4 jours) suivi de 4 jours de calme, en juillet (à gauche) et en février (à droite). Les échelles verticales sont ajustées selon l'amplitude maximale de chacun des signaux.

SO du plateau continental où, sous la couche de surface, les courants n'ont pas partout la même intensité ni direction. La figure 5.29 permet de comparer les trajectoires de particules issues d'un point source situé dans cette région, à 25m de profondeur. En juillet, le contre-courant a déplacé des particules

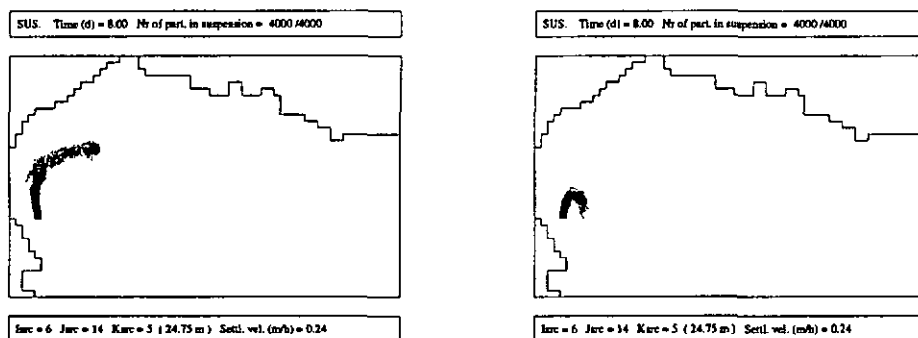


Figure 5.29: Distribution horizontale des particules en suspension au terme des épisodes de vent du NO (4 jours de vent suivis de 4 jours de calme), en juillet (à gauche) et en février (à droite).

vers le NE sur une distance de 70km environ. En hiver, le déplacement des particules est moindre et les trajectoires bifurquent vers le sud. Dans le premier cas, les particules ont toutes les chances de se retrouver dans le sédiment du plateau tandis que dans le second, elles sont susceptibles d'être emportées par le courant LP plus au sud.

5.7 Circulation (février) par vent du SE

Le secteur de vent SE est le deuxième secteur de vent en fréquence après le secteur NO (Ascensio et al. 1977). Les vents forts du SE sont rares en été; ils soufflent surtout de l'automne au printemps et leur vitesse peut atteindre $25m/s$ lors de tempêtes. Par rapport à la circulation induite par vent du NO, les observations sont peu nombreuses mais font état d'une circulation intense (Millot 1990).

5.7.1 Simulation hydrodynamique

Une simulation par vent du SE a été effectuée dans des conditions de forçage analogues à celles de la simulation par vent du NO. Le vent souffle à vitesse constante ($15m/s$) du secteur SE (150°) pendant quatre jours puis le calme revient durant les quatre jours qui suivent.

Les résultats de la simulation montrent, globalement, une inversion des structures hydrodynamiques dans la partie supérieure de la colonne d'eau par rapport aux résultats obtenus par vent du NO: le courant de surface est orienté vers le N, les zones de downwelling sont localisées le long du littoral N et celles d'upwelling sur les côtes SO. Alors que les vents du NO ont tendance à renforcer l'écoulement du courant LP vers le SO, ceux du SE lui opposent donc un flux de surface orienté au N (figure 5.30, coupe $K = 1$). Entre la couche de surface et les couches plus profondes où la circulation reste dominée par le courant LP, apparaît une zone de transition où les courants s'organisent de manière complexe (figure 5.30, coupe $K = 6$).

5.7.2 Transport de particules

On a calculé le transport de particules relâchées aux mêmes points sources que dans la simulation par vent du NO (section 5.6.2). Quatre nouveaux cas (cas T à W) ont donc été analysés. Les figures tirées de ces résultats sont rassemblées dans le volume 2.

Les structures hydrodynamiques étant globalement inversées par rapport à la simulation par vent du NO, le transport des particules s'en trouve fortement modifié. Ainsi par exemple, les particules relâchées en surface le long du littoral N, au lieu d'être emportées vers le SO, sont au contraire confinées par le courant à proximité des côtes. Le mouvement de downwelling du fluide y accélère leur chute et elles se déposent alors rapidement.

5.7 Circulation (février) par vent du SE

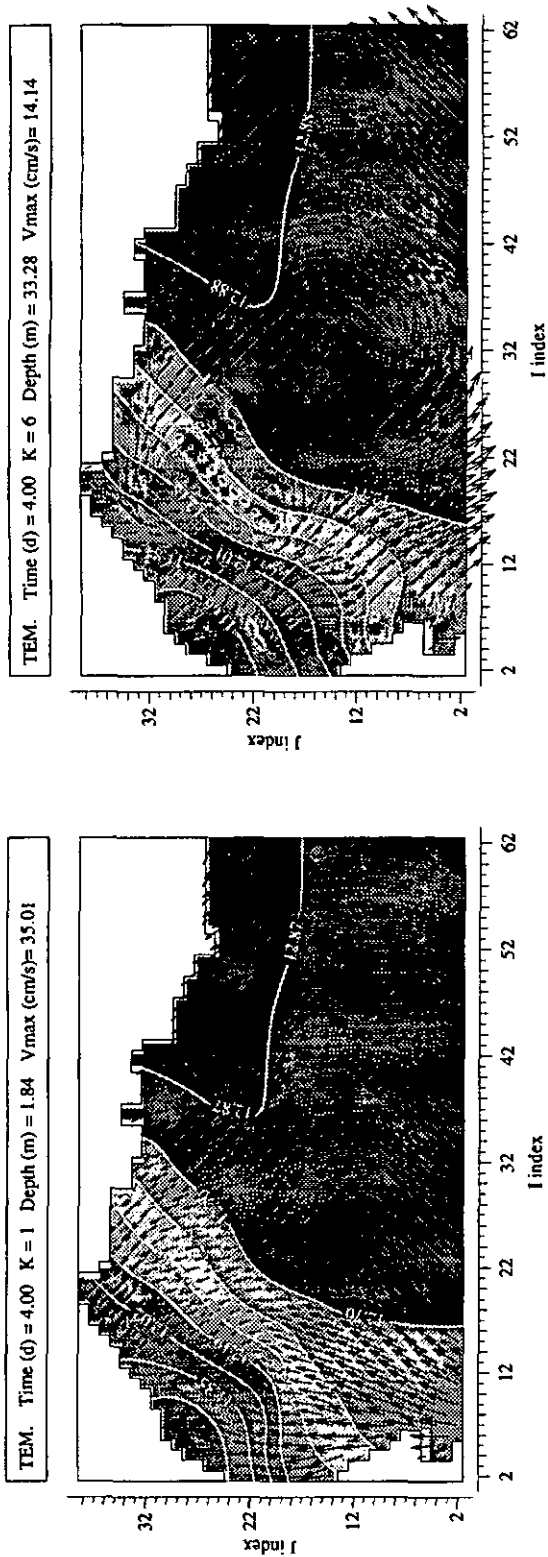


Figure 5.30: Coupes horizontales des champs de vitesse et température en surface (coupe $K = 1$) et à $33m$ de profondeur (coupe $K = 6$) après $4j$ de vent constant ($15m/s$) du secteur SE (150°).

Les mouvements de downwelling peuvent également être importants en bordure du plateau, à l'extrémité supérieure de la pente continentale. La figure 5.31 montre le cas de particules relâchées à quelques mètres au-dessus du fond, non loin de la limite du plateau. Durant les deux premiers jours, les particules sont entraînées vers le S par le courant de fond. Leur chute est accélérée mais de manière encore modérée (leur vitesse de chute est plus ou moins triplée). Après 4 jours, certaines particules arrivées en bordure du plateau ont atteint 200m de profondeur, soit 80m de plus que deux jours auparavant. La vitesse verticale moyenne correspondante pour ces particules est environ $1,7m/h \simeq 0,05cm/s$. Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que celles qu'on a pu relever dans des zones de downwelling côtier.

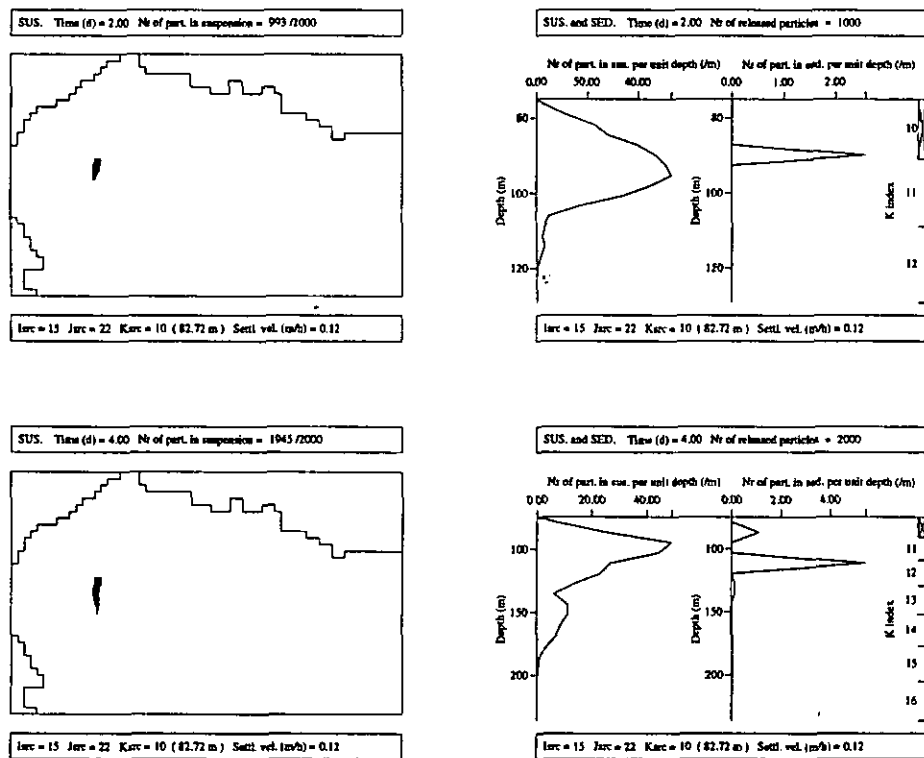


Figure 5.31: Distributions horizontale et verticale des particules en suspension 2 jours et 4 jours après qu'elles aient été relâchées de leur point source situé à 83m de profondeur près de la limite du plateau continental.

Chapitre 6

Synthèse et conclusions

6.1 Rappel du contexte de l'étude

Le programme de recherche EUROMARGE s'est fixé pour objectif (voir chapitre 1) l'identification des facteurs contrôlant le fonctionnement des écosystèmes des marges continentales et de la manière dont ces facteurs interagissent pour produire la grande variabilité observée.

Des études antérieures (programme ECOMARGE (1990)) ont déjà souligné l'importance du forcing hydrodynamique et du transport particulaire qu'il induit. Les expériences effectuées depuis sont venues la confirmer, en mettant l'accent sur le rôle des processus à méso-échelle (Canals et al. 1995).

Les moyens mis en oeuvre dans le cadre d'EUROMARGE se sont concentrés sur les mesures de terrain. Une double stratégie a été appliquée. Elle repose, d'une part, sur la surveillance à long terme de sites clés à l'aide de courantomètres et de pièges à particules ¹ et, d'autre part, sur des croisières couvrant toute la région d'étude afin d'obtenir des instantanés de la distribution et la composition des particules.

La modélisation hydrodynamique vient compléter cette approche de terrain. Elle doit apporter une meilleure compréhension des processus qui gouvernent le transport des particules en facilitant la description et l'analyse. A ce titre, elle constitue un support précieux à l'interprétation des données récoltées sur le terrain. Le couplage modèle de transport / modèle hydrodynamique doit permettre de mesurer l'influence de ces processus sur le transport.

¹Dans le Golfe du Lion les sites de mouillage principaux sont situés au large de Perpignan (canyon de Lacaze-Duthiers) et au large de Marseille.

6.2 Approche et développements originaux

Notre approche, centrée sur la méso-échelle, s'est inscrite dans cette perspective. A cet effet, nous avons utilisé un modèle de circulation générale, le PGCM, auquel a été couplée une routine permettant d'intégrer les trajectoires de particules. Les développements originaux que nous avons apportés au modèle ont concerné tout d'abord la formulation des conditions limites aux frontières ouvertes; l'étude du problème aux limites des équations primitives non visqueuses lui a servi de base. Cette formulation a ainsi permis d'éliminer les effets indésirables de couches limites artificielles. Ensuite, parallèlement aux modifications apportées au modèle numérique par Zuur (1995b), nous avons élaboré et implémenté une optimisation de l'algorithme de résolution exploitant l'approximation hydrostatique; la méthode d'optimisation repose sur le principe général de décomposition d'un problème différentiel linéaire en ses parties homogènes et non homogènes et sur la structure verticale de la discrétisation spatiale du domaine de résolution.

Les modifications et l'optimisation de la partie numérique du modèle ont visé et atteint un double objectif: la résolution précise des vitesses verticales et la réduction du coût de calcul. La résolution des vitesses verticales, qui fait rarement l'objet d'un soin particulier dans les modèles de circulation générale, est pourtant a priori aussi importante que celles des vitesses horizontales, tout défaut de l'une affectant l'autre par continuité de l'écoulement. Elle l'est a fortiori lorsque le champ de vitesse calculé par le modèle sert à déterminer les flux de matériel particulaire dont les vitesses de chute sont du même ordre de grandeur que les vitesses verticales. Avec le schéma numérique adopté dans le PGCM, l'incompressibilité de l'écoulement est vérifiée à chaque pas de temps et les vitesses verticales ne nécessitent aucun "post-traitement" tel que l'application d'un filtre, toujours sujette à caution.

Le second objectif, la réduction du coût de calcul, est essentiel si l'on désire conserver un outil pratique. Quelles que soient les ressources informatiques dont on dispose, le temps de calcul, plus que l'espace mémoire, constitue généralement le facteur limitatif des simulations numériques. Une réduction de temps de calcul est donc toujours profitable. L'optimisation que nous avons développée et implémentée dans l'algorithme a permis de substituer à des itérations portant sur des champs 3D des itérations ne portant que sur des champs 2D. Le coût marginal des itérations effectuées à l'intérieur d'un pas de temps a ainsi été réduit drastiquement. Avec la résolution spatiale verticale et la précision utilisées pour nos simulations, le temps de calcul total de ces dernières a été divisé par huit.

Le choix d'un modèle de transport simple relève également de la volonté

de préserver au modèle le caractère d'un outil aisé à mettre en oeuvre. Les particules sont caractérisées par leur vitesse de chute et leurs trajectoires sont déterminées en additionnant les mouvements d'advection par le fluide et de chute propre. Ce modèle simple permet de mesurer l'influence relative des différents processus hydrodynamiques sur le transport des particules, indépendamment d'autres processus physiques, chimiques ou biologiques. Prendre en compte ces derniers revient, du point de vue du transport, à traduire en variations de la vitesse de chute les changements de densité, de taille, de forme, de nature ou de structure superficielle du matériel qu'ils induisent.

6.3 Synthèse des principaux résultats

Le modèle (hydrodynamique et de transport de particules) décrit ci-dessus a servi à mettre en évidence et à interpréter les processus majeurs de la dynamique à méso-échelle du Golfe du Lion. Les principaux résultats de l'analyse des simulations hydrodynamiques sont les suivants.

1. Les vents du NO, Mistral et Tramontane, apparaissent comme des moteurs de la circulation du Golfe du Lion. De par le transport d'Ekman orienté au SSO qu'ils induisent dans les couches superficielles, ils renforcent au large le courant LP. Ils génèrent également des upwellings le long du littoral N, de Valras à Toulon, et des downwellings sur la côte SO. Il résulte de ces mouvements une circulation intense sur le plateau continental où un contre-courant se développe sous la couche de surface. L'alimentation de ce contre-courant est double. Les masses d'eau advectées proviennent, d'une part, de la zone de downwelling à l'extrémité SO du plateau et, d'autre part, du large, par le biais de remontées d'eau le long de la pente continentale. Selon le dessin et l'orientation de la pente, le flux vertical est plus ou moins intense.
2. En période estivale, des forces de pression barocline nées des gradients thermiques provoqués par les mouvements d'upwelling et de downwelling entretiennent le contre-courant, qui peut alors persister plusieurs jours après que le vent ait cessé de souffler. Une distribution non uniforme du vent ainsi que des variations de son intensité concourent par ailleurs à le renforcer le long des côtes du Roussillon et à former ainsi une circulation anticyclonique sur la partie occidentale du Golfe du Lion. En hiver par contre, le contre-courant est confiné plus en profondeur sur le plateau et disparaît une fois le vent apaisé.
3. Les différentes structures hydrodynamiques décrites (transport d'Ekman, upwellings, downwellings et contre-courant) se retrouvent éga-

lement par vent du SE, mais globalement inversées. Toutefois, à la différence de la situation par vent du NO, le transport d'Ekman contre-carre le mouvement du courant LP et une circulation complexe se développe sous la couche de surface. Sur le fond du plateau continental, les courants sont globalement orientés vers le large.

4. Un autre élément de la dynamique du Golfe du Lion est le processus d'ajustement accompagnant les variations d'intensité du vent. Les oscillations d'inertie y jouent un rôle prépondérant. Elles se manifestent de la manière la plus spectaculaire lorsque le forçage du vent cesse brutalement. Les vitesses décrivent alors dans les couches superficielles un mouvement de rotation à la fréquence d'inertie. En rencontrant le relief, le courant tournant génère un flux vertical pulsé à la même fréquence. Lorsque le vent n'est pas coupé mais simplement réduit (ou intensifié), les oscillations d'inertie se superposent au signal moyen du courant.
5. Dans un fluide stratifié, des ondes internes sont générées par les variations de vent: alors qu'en période hivernale on observe un rapide ajustement au forçage d'un vent constant, en été par contre, des oscillations verticales de large amplitude persistent plusieurs jours. Le spectre de ces ondes internes est dominé par la fréquence d'inertie.

Des simulations du transport des particules, on retiendra tout d'abord la grande diversité des "schémas" de dispersion résultant de l'action combinée de l'advection par le fluide et de la chute propre des particules. Lorsque le temps de résidence des particules dans la colonne d'eau dépasse plusieurs semaines, les courants peuvent transporter le matériel sur de très longues distances. La complexité des structures hydrodynamiques multiplie alors les trajectoires possibles, avec pour conséquence que les sites de dépôt de particules relâchées en un même point peuvent être très éloignées et qu'un même site de dépôt peut réunir des particules de sources très distantes l'une de l'autre. A l'échelle de temps de l'ordre du mois ou davantage, les coups de vent de quelques jours apparaissent comme des événements impulsionsnels. Malgré leur durée limitée, l'influence de ces événements sur le transport est marquée, du fait de l'amplitude importante et variable des mouvements horizontaux et verticaux.

Nous synthétisons ci-dessous les effets sur le transport des processus hydrodynamiques majeurs. Certains de ces effets ont été directement mis en évidence par les simulations de transport; d'autres résultent de l'analyse hydrodynamique. Les points 1 à 5 qui suivent sont à mettre en relation avec les points 1 à 5 définis auparavant.

6.3 Synthèse des principaux résultats

1. Le déplacement des particules dans les couches superficielles entraînées par le Mistral et la Tramontane est rapide. Dans les zones de downwelling, la chute des particules est accélérée. Elle est au contraire ralentie, voire renversée dans les zones d'upwelling. Lors d'un coup de vent prolongé, des particules peuvent ainsi remonter toute la colonne d'eau en quelques jours. Au niveau de la marge également, où des mouvements ascendants du fluide ont pu être mesurés en période de tempête (Durrieu de Madron 1992), les courants sont susceptibles de provoquer la resuspension de la matière particulaire.
2. Une conséquence attendue de la disparition de la circulation anticyclonique sur la partie occidentale du Golfe du Lion en hiver est un dépôt moindre sur le plateau et une augmentation du flux de matière vers la marge. Les mesures de flux de matières effectuées dans le canyon de Lacaze-Duthiers avec des pièges à particules ont révélé une forte augmentation² des flux à cette saison (Monaco et al. 1990). Monaco et al. attribuent ce phénomène aux variations saisonnières du courant LP et à l'augmentation hivernale des charges particulaires du Rhône et des autres rivières du littoral. Il faut sans doute ajouter à ces causes la variation saisonnière de la circulation dans la partie occidentale du plateau.
3. A la rupture de pente, des mesures de turbidité montrent un détachement des couches néphéloïdes de fond du plateau continental. Ce détachement entraîne la formation, depuis les têtes de canyons, de couches néphéloïdes intermédiaires dans la colonne d'eau (Durrieu de Madron et al. 1990). Les courants de fond observés en période de vent du SE participent probablement à la formation de ces couches intermédiaires.
4. Les oscillations d'inertie ont une période de 17,5h environ dans le Golfe du Lion. Elles impriment un mouvement de rotation dans le déplacement des particules. Sur une période d'inertie, le déplacement net résultant reste toutefois modéré. Les mouvements verticaux que les oscillations engendrent sont par contre susceptibles de remobiliser du matériel déposé sur le relief.
5. Ces mouvements verticaux sont renforcés en été du fait des ondes internes. Les observations montrent que la concentration de leur énergie dans les têtes de canyons y provoquent souvent la resuspension de particules (Gardner 1989).

²d'un facteur de 3 à 8 selon la profondeur des pièges

6.4 Conclusions et perspectives

Nous avons utilisé un modèle numérique avec le but d'apporter une meilleure compréhension des processus hydrodynamiques qui gouvernent le transport de particules.

La "philosophie" de notre approche a été de conserver un modèle simple, qui ne soit pas simpliste, et d'en élargir le champ d'application. Avec une résolution numérique rigoureuse, ce modèle offre des garanties de robustesse. Cette qualité est indispensable pour son application dans une région telle que le Golfe du Lion, largement ouverte à ses limites et pour laquelle aucune validation directe n'est possible.

On a élargi le champ d'application du modèle en multipliant les simulations dans des conditions de forçage variables. Pour une meilleure exploitation du très grand volume de données générées par le modèle, l'interprétation des résultats s'est appuyée sur des modes de représentation divers. Elle a ainsi permis d'apporter un éclairage nouveau sur plusieurs observations.

Une représentation plus détaillée de la dynamique (des masses d'eau et des particules) du Golfe du Lion requiert une étude quantitative plus approfondie. Dans sa forme actuelle ³, le modèle constitue une base solide pour une telle étude. Les développements futurs devraient porter en priorité sur l'assimilation, au sens large, des données.

En préalable à des simulations de transport, il sera tout d'abord nécessaire d'identifier les différentes sources de particules et d'évaluer précisément la charge de matière apportée par chacune d'elles en fonction de classes de vitesses de chute. Cela impliquera notamment l'évaluation des flux de matière du courant LP.

Ensuite, la durée des simulations hydrodynamiques devra être allongée. Etant donnés les temps de résidence des particules fines, une image statistiquement significative de leur dispersion ne pourra être dégagée qu'à partir de simulations menées sur des périodes de temps dépassant plusieurs semaines. La comparaison des résultats obtenus avec des conditions de simulation variables a souligné la grande sensibilité de la circulation à méso-échelle au forçage du vent et à la distribution en densité des masses d'eau. On devra donc disposer de données météorologiques et hydrologiques appropriées, c.-à-d. dont la résolution corresponde à celle du modèle, et prêter une attention particulière à leur assimilation.

Les simulations à long terme posent également le problème de données

³c.-à-d. avec son niveau de paramétrisation actuel

adéquates pour la prescription des conditions limites en mer ouverte. Une solution techniquement élégante permettant de s'affranchir localement de ce problème de données consisterait à élargir le domaine de résolution au-delà des limites du Golfe du Lion, par exemple au bassin Nord-Baléares voire à la Méditerranée Occidentale, en adoptant une discrétisation de plus en plus grossière au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la région du Golfe du Lion. Sur les frontières ouvertes du domaine étendu, la prescription de conditions limites se trouverait ainsi allégée du fait d'une résolution spatiale moindre. De plus, un biais des valeurs utilisées pour ces conditions limites aurait des répercussions moindres dans la région d'intérêt. Cette solution permettrait aussi de mieux évaluer les flux de matière associés au courant LP, à condition de pouvoir identifier les sources de matériel en amont du Golfe du Lion.

Du point de vue numérique, la méthode des éléments finis se prête idéalement à un tel maillage de taille variable. Son coût est plus élevé que celui d'une méthode aux différences finies (à nombres de noeuds identiques) mais elle permet une modulation plus fine de la résolution spatiale. Le facteur coût est actuellement l'inconvénient majeur de la méthode des éléments finis et doit être pesé avec les avantages qu'elle apporte.

A l'image du programme transnational JGOFS évoqué en introduction (voir chapitre 1), la majorité des programmes de recherche en océanographie s'inscrivent désormais dans la perspective d'une meilleure compréhension des changements du climat et des bilans de matière associés (flux de carbone). Il s'agit là d'un défi majeur pour l'océanographie car le rôle de l'océan dans l'évolution globale du climat est encore largement méconnu.

En particulier, l'interface de la mer avec l'atmosphère et les interactions avec les continents restent des énigmes. L'importance des couplages entre les dynamiques de l'atmosphère, des continents et de l'océan ne fait plus de doute: les perturbations épisodiques du climat provoquées par El Niño en sont sûrement l'exemple le plus spectaculaire.

Ainsi la compréhension des transferts aux interfaces air-mer et terre-mer figure au premier plan des préoccupations des océanographes et des météorologues. Leur démarche devra donc s'appuyer sur l'observation conjointe des couches océaniques et atmosphériques pour identifier les mécanismes de couplage. L'identification de ces mécanismes ainsi que l'accroissement continu des capacités des calculateurs devraient permettre, à l'aide de modèles numériques couplant les différentes dynamiques, de mieux comprendre les facteurs contrôlant l'évolution de notre climat et les échanges dans les biogéocycles.

Le champ d'application des modèles à l'échelle régionale comme à l'échelle planétaire est, on le voit, encore vaste et offre matière à de nombreux développements.

Références

- Aloisi, D. C., C. Millot, A. Monaco, and H. Pauc (1979). Dynamique des suspensions et mécanismes sédimentologiques sur le plateau continental du Golfe du Lion. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* 289, 879–882.
- Antontsev, S. N., A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov (1990). *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*. Studies in Mathematics and its Applications. Amsterdam: North-Holland.
- Arakawa, A. and V. R. Lamb (1977). Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics* 17, 74–265.
- Arrow, K., L. Hurwicz, and H. Uzawa (1968). *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford: Stanford University Press.
- Ascensio, E., C. Bordreuil, M. Frasse, A. Orioux, and D. Roux (1977). Une approche des conditions météorologiques sur le Golfe du Lion. *Ann. Inst. océanogr.* 53, 155–169.
- Asper, V. L. (1986). *Accelerated Settling of Marine Particulate Matter by "Marine Snow" Aggregates*. Ph. D. thesis, MIT/WHOI.
- Baba, J. and P. D. Komar (1981). Settling velocities of irregular grains at low Reynolds numbers. *Journal of Sedimentary Petrology* 51(1), 121–128.
- Beckers, J.-M. (1996). 3D numerical simulation of the circulation and tracer dispersion in the Gulf of Lions. *Continental Shelf Research*. Submitted.
- Bennett, A. F. (1992). *Inverse Methods in Physical Oceanography*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Béthoux, J. P. (1980). Mean water fluxes across sections in the Mediterranean Sea, evaluated on the basis of water and salt budgets and observed salinities. *Oceanologica Acta* 3, 79–88.

- Béthoux, J. P., L. Prieur, and J. H. Bong (1988). Le courant ligure au large de Nice. *Oceanologica Acta Special Issue*(9), 59–67.
- Brasseur, P., J. M. Beckers, J. M. Brankart, and R. Schoenauen (1996). Seasonal temperature and salinity fields in the Mediterranean Sea: Climatological analysis of an historical data set. *Deep Sea Research*. In press.
- Brasseur, P. and J. Haus (1991). Application of a 3-D variational inverse model to the analysis of ecohydrodynamic data in the Northern Bering and Southern Chukchi Seas. *Journal of Marine Systems* 1, 383–401.
- Cahn, A. (1945). An investigation of the free oscillations of a simple current system. *J. Meteorol.* 2, 113–119.
- Camerlengo, A. L. and J. J. O'Brien (1980). Open boundary conditions in rotating fluids. *Journal of Computational Physics* 35, 12–35.
- Canals, M., J. L. Casamor, A. M. Calafat, and J. Sorribas (Eds.) (1994). *EUROMARGE-NB Progress Report, First Annual Report, MAST II Programme*. EC. Compiled by Research Group on Marine Geosciences, University of Barcelona, 3 vols.
- Canals, M., A. Monaco, A. Dinet, S. Heussner, R. Buscail, A. M. Calafat, X. Durrieu de Madron, F. Nyffeler, J. A. Sanchez-Cabeza, V. Thunus, J. L. Casamor, F. Gadel, A. Palanques, A. Grehan, and P. Puig (1995, November). Transfer of matter and benthic response in the Northwestern Mediterranean continental margins. In M. Weydert, E. Lipiatou, R. Goñi, C. Fragakis, M. Bohle-Carbonell, and K.-G. Barthel (Eds.), *Marine Sciences and Technologies, Second MAST days and EU-ROMAR market*, Brussels, pp. 421–431. Commission of the European Communities.
- Chapman, D. C. (1985). Numerical treatment of cross-shelf open boundaries in a barotropic coastal ocean model. *Journal of Physical Oceanography* 15, 1060–1075.
- Chorin, A. J. and J. E. Marsden (1993). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* (Third ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Christer, B. and V. Johansson (1991). Well-posedness in the generalized sense for the incompressible Navier-Stokes equation. *Journal of Scientific Computing* 6(2), 101–127.
- Courant, R. and D. Hilbert (1962). *Methods of Mathematical Physics, Partial Differential Equations*, Volume 2. New York, London: Interscience Publishers.

- Crépon, M. and M. Boukthir (1987). Effect of deep water formation on the circulation of the Ligurian Sea. *Annales Geophysicae* 5B, 43–48.
- Deleersnijder, E., J. M. Beckers, J. M. Campin, M. El Mohajir, T. Fichefet, and P. Luyten (1995, April). Some mathematical problems associated with the development and use of marine models. Technical Report 77, Institut d'Astronomie et de Géophysique Georges Lemaître, Université Catholique de Louvain.
- Deleville, S., C. Millot, and L. Mortier (1995, May). Modélisation de la circulation induite par le vent dans le Golfe du Lion. In M. Crépon (Ed.), *Colloque sur la dynamique océanique côtière*, Paris, pp. 86–90. Comité National Français de Géodésie et Géophysique.
- Dietrich, D. E., M. G. Marietta, and P. J. Roache (1987). An ocean modeling system with turbulent boundary layers and topography: numerical description. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 7, 833–855.
- Dinet, A. (1993). EUROMARGE 94. Proposition de campagne à la mer, Observatoire Océanologique de Banyuls.
- Durrieu de Madron, X. (1992). Hydrography and nepheloid structures in the Grand-Rhône canyon. *Continental Shelf Research* 14(5), 457–477.
- Durrieu de Madron, X., F. Nyffeler, and C. H. Godet (1990). Hydrographic structure and nepheloid spatial distribution in the Gulf of Lions continental margin. See ECOMARGE (1990), pp. 915–929.
- Eckart, C. (1960). *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*. Oxford: Pergamon Press.
- ECOMARGE (1990). Particle fluxes and ecosystem response on a continental margin. *Continental Shelf Research* 10(9–11).
- Friedrich, H. J. and E. V. Stanev (1988). *Parameterization of Vertical Diffusion in a Numerical Model of the Black Sea*, pp. 151–167. In (Nihoul and Jamart 1988).
- Gardner, W. D. (1989). Baltimore canyon as a modern conduit of sediment to the deep sea. *Deep Sea Research* 36, 323–358.
- Gill, A. E. (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Volume 30 of *International Geophysical Series*. London: Academic Press.
- Gresho, P. M. and R. L. Sani (1987). On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 7, 1111–1145.

- Guo, D.-J. and Q.-C. Zeng (1995). Open boundary conditions for a numerical shelf sea model. *Journal of Computational Physics* 116, 97–102.
- Haltiner, G. J. and R. T. Williams (1980). *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology* (Second ed.). New York, Chichester: John Wiley & Sons.
- Heywood, J. G. (1990). *Open Problems in the Theory of the Navier-Stokes Equations for Viscous Incompressible Flow*, pp. 1–22. In (Heywood et al. 1990).
- Heywood, J. G., K. Masuda, R. Rautmann, and V. A. Solonnikov (Eds.) (1990). *The Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Methods*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Hsieh, W. W. and A. E. Gill (1984). The Rossby adjustment problem in a rotating, stratified channel, with and without topography. *Journal of Physical Oceanography* 14, 424–437.
- Hua, B.-L. (1981). *Modélisation numérique d'upwellings côtiers à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Application au Golfe du Lion*. Ph. D. thesis, Université de Paris 6.
- Israeli, M. and S. A. Orszag (1981). Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics* 41, 115–135.
- Johns, B., P. Marsaleix, C. Estournel, and R. Véhil (1992). On the wind-driven coastal upwelling in the Gulf of Lions. *Journal of Marine Systems* 3, 309–320.
- Lacombe, H. (1965). *Cours d'Océanographie Physique*. Paris: Gautbier-Villers.
- Lacombe, H. and P. Tchernia (1972). *Caractères hydrologiques et circulation des eaux en Méditerranée*, pp. 25–36. In (Stanley 1972).
- Ladyzhenskaya, O. A. (1969). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow* (Second ed.), Volume 2 of *Mathematics and Its Applications*. New York, London, Paris: Gordon and Breach.
- Lal, D. (1977). The oceanic microcosm of particles. *Science* 198(4321), 997–1009.
- Lions, J. L. and G. Prodi (1959). Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris* 248, 3519–3521.
- Lions, J.-L., R. Temam, and S. Wang (1991a). New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *The Institute for*

- Applied Mathematics and Scientific Computing, Indiana University-Bloomington* (9113).
- Lions, J.-L., R. Temam, and S. Wang (1991b). On the equations of the large-scale ocean. *The Institute for Applied Mathematics and Scientific Computing, Indiana University-Bloomington* (9117).
- Marchioro, C. and M. Pulvirenti (1994). *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Marsaleix, P. (1993). *Modélisation tridimensionnelle de la circulation océanique dans le Golfe du Lion*. Ph. D. thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse.
- Mehta, A. J. (1984). *Characterization of cohesive sediment properties and transport processes in estuaries*, pp. 290–326. In *Lecture Notes on Coastal and Estuarine Studies* (Mehta 1986).
- Mehta, A. J. (Ed.) (1986). *Proc. Workshop Cohesive Sediment Dynamics, Tampa, Florida*. Lecture Notes on Coastal and Estuarine Studies. New-York: Springer-Verlag.
- Mellor, G. L. and T. Yamada (1982). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 20(4), 851–875.
- Millot, C. (1979). Wind induced upwellings in the Gulf of Lions. *Oceanologica Acta* 2(3), 261–274.
- Millot, C. (1987). Circulation in the Western Mediterranean Sea. *Oceanologica Acta* 10, 143–149.
- Millot, C. (1990). The Gulf of Lions' hydrodynamics. See ECOMARGE (1990), pp. 885–894.
- Millot, C. and M. Crépon (1981). Inertial oscillations on the continental shelf of the Gulf of Lions, observations and theory. *Journal of Physical Oceanography* 11, 639–657.
- Millot, C. and L. Wald (1981). *Upwelling in the Gulf of Lions*, pp. 160–166. In (Richards 1981).
- Monaco, A., P. Biscaye, J. Soyer, R. Pocklington, and S. Heussner (1990). Particle fluxes and ecosystem response on a continental margin: the 1985-1988 Mediterranean ECOMARGE experiment. See ECOMARGE (1990), pp. 809–839.
- Monaco, A., T. Courp, S. Heussner, J. Carbonne, S. W. Fowler, and B. Déniaux (1990). Seasonality and composition of particulate fluxes during

- ECOMARGE — I, Western Gulf of Lions. See ECOMARGE (1990), pp. 959–987.
- Monin, A. S. (1991). *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Müller, P., D. J. Olbers, and J. Willebrand (1978). The IWEX spectrum. *Journal of Geophysical Research* 83, 479–500.
- Nihoul, J. C. J. (1980). *Basic Equations of Geophysical Fluid Dynamics and their application to ocean-atmosphere weather and climate models*. London: Imperial College.
- Nihoul, J. C. J. and B. Jamart (Eds.) (1988). *Small-Scale Turbulence and Mixing in the Ocean*. Elsevier Oceanography Series. Amsterdam, New York: Elsevier.
- Norbury, J. and M. J. P. Cullen (1985). A note on the properties of the primitive hydrostatic equations of motion. *Quart. J. R. Met. Soc.* 111, 1135–1137.
- O'Brien, J. J. (Ed.) (1986). *Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Olinger, J. and A. Sundström (1978). Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. *Siam J. Appl. Math.* 35(3), 419–446.
- Orlanski, I. (1976). A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics* 21, 251–269.
- Pacanowski, R. C. and S. G. H. Philander (1981). Parameterization of vertical mixing in numerical models of tropical oceans. *Journal of Physical Oceanography* 11, 1443–1451.
- Pedlosky, J. (1987). *Geophysical Fluid Dynamics* (Second ed.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Phillips, O. M. (1977). *The Dynamics of the Upper Ocean* (Second ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery (1992). *Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Richards, F. A. (Ed.) (1981). *Coastal Upwelling*. Coastal and Estuarine Sciences. Washington: American Geophysical Union.
- Røed, L. P. and C. K. Cooper (1986). *Open Boundary Conditions in Numerical Ocean Models*, pp. 411–436. In (O'Brien 1986).

- Rosby, C. G. (1937). On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, I. *Journal of Marine Research* 1, 15–28.
- Rosby, C. G. (1938). On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, II. *Journal of Marine Research* 2, 239–263.
- Shanks, A. L. and E. W. Edmondson (1990). The vertical flux of metazoans (holoplankton, meiofauna, and larval invertebrates) due to their association with marine snow. *Limnology and Oceanography* 35(2), 455–463.
- Stanley, D. J. (Ed.) (1972). *The Mediterranean Sea*. Stroudsburg: Dowden, Hutchinson & Ross.
- Sundström, A. and T. Elvius (1979). Computational problems related to limited-area modelling. *GARP Publ. Ser.* 17.
- Teisson, C. and B. Latteux (1986). A depth-integrated bidimensional model of suspended sediment transport. In S. Y. Wang, H. W. Shen, and L. Z. Zeng (Eds.), *Proc. 3rd Int. Symp. River Sedimentation*, Volume 3, Jackson, Mississippi, pp. 421–430. School of Engineering.
- Temam, R. (1984). *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis* (Third ed.). Studies in Mathematics and its Applications. Amsterdam: North-Holland.
- Thunus, V., E. Zuur, P. Lambert, and C.-H. Godet (1994). A numerical simulation of transport and sedimentation of suspended particles in Lake Neuchâtel. *Eclogae geol. Helv.* 87(2), 385–402.
- Van Leussen, W. and J. M. Cornelisse (1993). The determination of the sizes and settling velocities of estuarine flocs by an underwater video system. *Netherlands Journal of Sea Research* 31(3), 231–241.
- Zajaczkowski, W. M. (1987). Some leakage problems for ideal incompressible fluid motion in domains with edges. *Partial Differential Equations Banach Center Publications* 19, 383–397.
- Zuur, E. A. H. (1991). The PROSPER General Circulation Model, an adapted form of the Sandia Ocean Modelling Method: a numerical description. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 13, 251–263.
- Zuur, E. A. H. (1995a). Time-step sequences for parabolic differential equations. *Applied Numerical Mathematics* 17, 173–186.

- Zuur, E. A. H. (1995b). The use of a reformulation of the hydrostatic approximation Navier-Stokes equations for geophysical fluid problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 21, 549–570.