Publié dans Travaux de logique 19, 29-72, 2008,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

NÉCESSITÉ ET FÉCONDITÉ DES DÉFINITIONS : FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES NOMBRES DE RICHARD DEDEKIND (1831-1916)

Hourya BENIS SINACEUR

Mon étude concerne principalement les célèbres mémoires de Richard Dedekind sur les nombres réels (1872) et les nombres entiers (1888). Naturellement, je m'autorise le recours à tout autre écrit de Dedekind qui apporte un éclairage sur ces deux mémoires[1]. Je me fonde également sur les *Œuvres* de Bernhard Riemann (1826-1866), mais ici dans la seule mesure où elles ont inspiré à Dedekind son exigence de poser des définitions explicites et générales ou abstraites pour des concepts considérés par d'autres comme « donnés » et pour des démonstrations qui soient, de ce fait, plus rigoureuses[2]. L'objectif de cette étude est

---

1 Il s'agit de *Continuité et nombres irrationnels* (en abrégé *Continuité*) et de *Que sont et à quoi servent les nombres ?* (en abrégé *Nombres*). J'ai commis une nouvelle traduction française, avec notes et introductions, de ces deux textes ainsi que des autres travaux de Dedekind qui s'y rapportent dans un volume en cours d'impression, R. Dedekind (à paraître 2008).

2 J'ai une dette générale envers le livre de José Ferreirós, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics* (Birkhäuser Verlag, 1999, 2e éd. 2007), qui montre le rôle des travaux de Riemann dans l'élaboration de la théorie des ensembles par Dedekind et Cantor. J'utilise ici les travaux de Riemann suivants : Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, 1852, reproduite dans le volume des *Gesammelte mathematische Werke* de Riemann édité par Heinrich Weber et Richard Dedekind en (1876, 2e éd. 1892, 3-48). Über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihe, Habilitationsschrift, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Band XIII, 1868, reproduite dans *Gesam. math. Werke*, 2e éd., 227-271. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Band XIII, reproduite dans *Gesam. math. Werke*, 2e éd., 272-

de montrer quel type de préoccupations a nourri un des principaux initiateurs de définitions axiomatiques pour des théories abstraites et le créateur, avant et avec Georg Cantor (1845-1918), de la théorie des ensembles. Il est clair que je me place dans le cadre usuel des théories mathématiques qui, même axiomatisées, ne s'inscrivent pas dans les contraintes d'un langage logique formalisé.

1. Précisions terminologiques

Conformément à l'usage courant des mémoires et traités de mathématiques allemands du XIX^{e} siècle, Dedekind utilise le plus souvent le terme '*Erklärung*' pour 'définition'. Une inspection, même rapide, de *Nombres*, montre qu'un théorème [*Satz*] est toujours précédé d'une *Erklärung* et suivi d'un *Beweis*. Lorsque Dedekind entend « expliquer » quelque chose, il emploie le verbe '*erläutern*' et le substantif '*Erläuterung*'. Ainsi, à ma connaissance, '*Erklärung*' ne signifie jamais chez Dedekind 'explication'. Une définition ne sert pas à expliquer mais à déterminer la compréhension et délimiter l'extension d'un concept. En revanche, il faut relever que Dedekind use aussi du terme '*Definition*'. Ainsi, le fait-il dans sa leçon d'habilitation de 1854. De même, dans la préface de *Continuité*, où l'objectif déclaré est d'obtenir une « véritable définition de l'essence de la continuité » [*eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit zu gewinnen*], d'obtenir donc une définition « réelle », et pas seulement une définition « nominale » consistant à simplement fixer le sens du terme en question. De même encore, au paragraphe 9 de *Nombres*, où est introduit « le théorème de la définition par induction », le fameux théorème

287. J'utilise aussi la traduction française par Laugel, intitulée *Œuvres mathématiques de Riemann* (1968).

126, qui définit et justifie une procédure de définition, laquelle consiste à *engendrer* itérativement les éléments qu'elle définit. Enfin, dans la lettre à Lipschitz du 27 Juillet 1876, Dedekind évoque les définitions d'Euclide en répondant à la question de savoir si celles-ci impliquent logiquement ou non la continuité du plan euclidien. Ces occurrences ne présentent pas entre elles une homogénéité spécifique évidente, qui permettrait d'apercevoir une nuance précise entre '*Erklärung*' et '*Definition*'.

Cependant, la citation de ces quelques passages permet déjà, même à ce simple niveau terminologique, d'apercevoir les caractères principaux de la définition, à savoir qu'elle vise à exprimer l'essence de ce dont elle est la définition, qu'elle consiste à engendrer ou créer ce qu'elle définit[3], et qu'elle implique logiquement certaines propriétés mais d'autres non : ainsi certaines propriétés tenues pour évidentes sont en réalité absentes étant données les définitions posées. Nous allons compléter ce premier tableau par quelques autres traits. L'ensemble nous montrera ce que Dedekind attendait des définitions et nous donnera, en même temps, un aperçu, fondé sur l'examen de ses écrits, de sa position épistémologique sur les entités et les procédures mathématiques. Nous en conclurons que cette position est loin d'être une sorte de logicisme, pour peu que l'on donne à ce terme son sens propre, qui est le suivant : le logicisme soutient que les mathématiques sont une extension de la logique et sont réductibles à elle. Ce qui implique qu'entités primitives et propriétés mathématiques fondamentales, le nombre en particulier, seraient de nature purement logique. De plus, le logicisme, celui de Gottlob Frege (1848-1925) en particulier, se

3 'Créer' et 'définir' sont souvent employés ensemble ou l'un pour l'autre. À propos des nombres réels, par exemple, Dedekind écrit « la définition ou la création du nombre irrationnel doit être fondée uniquement sur des phénomènes que l'on puisse déjà constater clairement *dans le domaine R* [des nombres rationnels] », Sur la théorie des nombres algébriques, Introduction, note.

double d'un présupposé ontologique assumant l'existence en soi d'objets logiques indépendants de la pensée que nous en avons et de la formulation que nous en donnons[4]. Le nombre serait un objet de ce type.

Bien entendu, mon but est principalement de mettre en question l'identification rapide ou le rapprochement simplificateur que l'on fait souvent entre les conceptions de Dedekind et de Frege, pour marquer au contraire des différences essentielles entre elles.

2. Définir les nombres

2.1. Au début de son mémoire *Sur les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie*, Bernhard Riemann commence par observer que les géomètres supposent usuellement donnés le concept d'espace et les concepts sur lesquels se fondent les constructions dans l'espace. On n'en donne en général, écrit-il, que des définitions nominales et on exprime par des axiomes leurs déterminations essentielles[5]. Or, c'est le concept d'espace

---

4 Je conviens bien sûr que, comme me l'a fait observer Michael Detlefsen, être indépendant de notre esprit et être indépendant d'une formulation donnée sont deux caractéristiques distinctes, et cela pas seulement d'un point de vue frégéen. Pour Dedekind le concept de nombre est « une émanation directe des pures lois de la pensée » (*Nombres*, 1ère préface) ; définir ce concept c'est aussi le créer ; la définition consiste en la formulation explicite de ses propriétés « essentielles », c'est-à-dire celles à partir desquelles toutes les autres peuvent être déduites. Mon article développe ce qu'en raccourci on peut exprimer en disant 1°) pour Dedekind, le concept de nombre n'est pas indépendant de la pensée ; 2°) définir ou créer ce concept consiste à formuler ses propriétés essentielles.

5 « Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen in Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten ». Ce célèbre mémoire lu le 10 Juin 1854, à l'occasion de son *Habilitation*, est édité à titre posthume, ainsi que celui sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, par Dedekind en 1868 et reproduit dans *Gesam. math. Werke*. À propos du second mémoire de 1854, Dedekind souligne en note que la publication se justifie autant par le contenu du mémoire que par la manière dont son auteur traite « les principes les plus importants de l'Analyse infinitésimale ». Dedekind y trouva une impulsion

lui-même, « resté en friche d'Euclide à Legendre », qu'il faut soumettre à un travail d'analyse. Les grandeurs spatiales sont un cas particulier du concept général de « grandeurs étendues de plusieurs dimensions » (concept d'un espace abstrait)[6], lequel est à construire à partir du concept encore plus général de grandeur. Riemann va donc *définir* le concept d'espace abstrait comme grandeur étendue de plusieurs dimensions, de manière *intrinsèque*, c'est-à-dire sans référence à un espace particulier dans lequel la multiplicité multidimensionnelle, ou variété, serait plongée. Cette définition intrinsèque suppose la dissociation des concepts d'étendue et de métrique, une même étendue pouvant recevoir diverses métriques[7]. D'où la nécessité de déterminer le nombre de dimensions et la métrique choisie. Celle-ci s'appuie sur un

> « système de déterminations métriques simples, au moyen desquelles les rapports métriques de l'espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions [vraies] concernant ces rapports sont des conséquences nécessaires » (*Gesam. math. Werke*, 2e éd., 283-284 ; trad. Laugel, 294-295)

Ainsi un espace quelconque est intrinsèquement déterminé par trois propriétés :

- le nombre *n* de ses dimensions, qui permet de déterminer la position d'un point de l'espace,

---

pour ses réflexions sur la continuité, ainsi du reste que Georg Cantor pour sa propre définition des grandeurs réelles, publiée elle aussi en 1872 (Dedekind n'a eu connaissance du mémoire de Cantor que peu avant la publication de *Continuité* et le signale dans sa préface).

6 « Der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grösse, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind ». On utilise usuellement aujourd'hui le terme 'variété', qui désigne un espace topologique abstrait. Les variétés, ou espaces courbes, permettent de travailler dans un cadre plus large que celui des espaces vectoriels, dénommés parfois « espaces euclidiens » ou « espaces plats ».

7 On ne saurait trop souligner la fécondité mathématique et la portée épistémologique de cette dissociation.

- sa courbure constante (positive, nulle ou négative) ou variable : le plan euclidien a une courbure constante nulle, la sphère une courbure constante positive,
- sa métrique, i.e. l'expression de la distance de 2 points exprimée en fonction de la courbure : pour une courbure α constante on obtient l'expression :

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}\ ;$$

dans le cas particulier le plus simple, celui du plan euclidien, α est nulle et on a

$$ds = \sqrt{\sum (dx)^2}\,.$$

On sait l'importance de ces définitions qui, aux dires d'Hermite[8], dépassent infiniment la question du 5^e postulat d'Euclide, résolue par Lobachevsky et Bólyai. Elles généralisent en effet l'idée de géométrie non euclidienne et introduisent la géométrie sphérique (ou elliptique selon la dénomination de Felix Klein) à courbure constamment positive, dans laquelle la somme des angles d'un triangle est supérieure à 2 droits. Il est bien connu que le concept d'espace non euclidien a joué un rôle dans la genèse de la théorie de la relativité générale : Einstein utilisa le « continuum espace-temps », espace non euclidien à quatre dimensions, de Hermann Minkowski (1864-1909).

Dedekind fait pour les nombres ce que Riemann a fait pour l'espace. Au lieu de les accepter sans définition préalable, ce qui était notamment le cas des quantités irrationnelles dont les spécimens connus n'étaient attestés que par certaines constructions géométriques, ou comme intuitivement donnés, ce qui était généralement celui des nombres entiers positifs, il va s'atteler à la tâche d'en donner une définition mathématique intrinsèque,

---

8 Préface à l'édition française, *Œuvres mathématiques de Riemann.*

qui ne se rapporte ni à l'espace ni au temps de notre expérience physique.

2.2. Dedekind avait le projet global de définir les entiers positifs, puis à partir d'eux les entiers négatifs, puis par extensions successives les fractions, les irrationnelles et les imaginaires. Mais de son vivant, il a publié seulement le mémoire sur la définition des nombres réels (*Continuité* 1872) et celui sur la définition des nombres entiers (*Nombres* 1888). Le premier atteste la conscience, en cette fin du XIX^{e} siècle, de la nécessité d'une définition des réels supprimant la circularité logique enveloppée dans les définitions en usage des concepts de limite, continuité et convergence. Dedekind note que l'on présente souvent le Calcul différentiel comme calcul sur des grandeurs continues sans que l'on ait jamais défini ce qu'est une grandeur continue. Comme l'on sait, cette lacune est comblée à peu près au même moment par Dedekind, Charles Méray (1835-1911), Georg Cantor, Karl Weierstrass (1815-1897). Mais ces trois derniers auteurs s'écartent peu de la tradition : ils définissent les *grandeurs* réelles en se fondant sur les concepts et les intuitions de l'Analyse réelle, principalement ceux de limite et de convergence. Or Dedekind bute sur l'idée d'une grandeur variant constamment et bornée par une limite, qu'il ne trouve rien moins que simple[9]. Après une longue réflexion, Dedekind écarte le concept de grandeur et le contexte géométrique associé, pour présenter une définition des *nombres* réels fondée sur la struc-

9 La critique de la notion de grandeur variable se trouvait déjà chez Bolzano, *Les Paradoxes de l'infini*, § 12, trad. fr. Paris : Seuil (1993, 68) : « ce que les mathématiciens appellent une *grandeur variable* n'est pas, à proprement parler, une grandeur, mais tout simplement le concept, la pure *représentation* [*Vorstellung*] d'une grandeur, et précisément telle qu'elle ne représente pas seulement une grandeur unique, mais un ensemble infini de grandeurs différentes les unes des autres, distinctes par leur valeur, i.e. par leur *grandeur* » (soulignements de Bolzano). Dedekind n'a connu cet ouvrage qu'après la publication de *Continuité*, Cantor lui en ayant envoyé un exemplaire en 1882, en même temps qu'un extrait *des Nouveaux essais sur l'entendement humain* de Leibniz. Le même genre de critique se retrouvera plus tard dans les *Grundgesetze* de Frege.

ture algébrique de corps totalement ordonné des nombres rationnels ; cette définition, loin de *présupposer* le concept de limite, permet au contraire de le dériver[10]. Ainsi est défini pour la première fois ce que, par contraste avec le continu géométrique des analystes et leur définition de fonction continue, nous appelons le « continu arithmétique », lequel apparaît comme l'extension maximale du corps des nombres rationnels conservative de l'ordre naturel de ce dernier[11]. En commentant son travail Dedekind écrit :

> la théorie des nombres irrationnels, que j'ai conçue à l'automne 1858 [...] est fondée sur le phénomène présent dans le domaine des nombres rationnels (§4) auquel j'ai donné le nom de coupure et que j'ai en premier étudié de manière précise ; elle culmine dans la démonstration de la continuité du nouveau domaine des nombres réels (§5. IV). (*Nombres*, première préface)

10 En fait Dedekind a évolué sur ce point. Dans sa leçon de 1854 (*Gesam. math. Werke*, III ; trad.fr. 2008 à paraître), il affirme qu'avec les nombres irrationnels apparaît en même temps le concept de limite. Il va même jusqu'à défendre l'idée que ce concept est nécessaire pour permettre le passage de l'opération de différentiation à celle d'intégration et inversement. Mais dans *Continuité*, le concept de nombre irrationnel est défini, en premier, par le procédé de la coupure, et celui de limite est dérivé de cette définition. Ce changement capital donne la mesure de la « révolution » épistémologique accomplie par Dedekind. Celle-ci était d'ailleurs préparée par la leçon que Dedekind a reçu de son maître et ami, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) : un théorème d'algèbre ou d'analyse peut s'énoncer comme un théorème sur les nombres entiers.

11 Dedekind est le premier à parler explicitement, et cela dès 1854, de « *nombre* irrationnel » et de « *nombre* réel », même si on peut rétrospectivement faire remonter les premières ébauches, non thématisées et non justifiées, d'arithmétisation du continu à l'algébriste arabe Al-Karajî, né vers 953 et mort vers 1029 (*cf.* Christian Houzeld 2008, 97-110). Les expressions de Dedekind indiquent par elles-mêmes son objectif : fonder les procédés de l'analyse réelle sur un concept purement arithmétique, un concept qui soit logiquement antérieur aux notions de variation continue, de limite et de convergence, et donc défini indépendamment d'elles et pouvant servir, inversement, à les définir. Weierstrass parle encore de « *grandeur* irrationnelle » ou de « *grandeur* numérique » [*Zahlengrösse*], cette dernière expression étant également utilisée par Cantor ; ces deux auteurs considéraient le concept de limite comme primitif et nécessaire à la définition des grandeurs réelles, dont la nature supposée géométrique n'était pas mise en question.

Contrairement à ses contemporains et à son maître Riemann, Dedekind détourne son attention du concept de grandeur et l'élimine purement et simplement de la définition des nombres réels.

Une coupure dans l'ensemble des rationnels est une partition de cet ensemble en deux sous-ensembles complémentaires : le sous-ensemble A des nombres inférieurs à un certain nombre rationnel, disons m, le sous-ensemble B des nombres supérieurs à m. Quant à m lui-même, qui « engendre » la coupure, il peut indifféremment appartenir à A ou à B. Pour abstraite qu'elle soit, cette notion de coupure paraît à Dedekind bien plus simple que celle de grandeur croissant constamment mais non au-delà de toute limite[12]. Les nombres rationnels, la droite géométrique et les nombres réels ont tous trois la propriété de la coupure, à savoir qu'un élément de chacun de ces ensembles opère une coupure de l'ensemble. Mais seuls les réels et, par voie de conséquence logique, la *droite numérique*, possède la propriété inverse, à savoir qu'à toute coupure de l'ensemble correspond un élément de l'ensemble. Cette propriété inverse est le caractère discriminant du continu numérique. C'est pourquoi Dedekind y place « l'essence » de la continuité[13]. Et si nous voulons que la *droite géométrique* soit considérée comme continue, alors il faut stipuler explicitement pour elle un axiome géométrique de continuité, ce dont Cantor convient parfaitement[14].

12 Lettre à Weber du 8 Novembre 1878, trad. fr. dans R. Dedekind (à paraître en 2008).

13 Dedekind explique cela à Cantor, qui ne voyait pas bien pourquoi Dedekind plaçait « l'essence » de la continuité dans la propriété réciproque de la propriété de la coupure (lettre du 18 Mai 1877, dans la *Correspondance avec Cantor*). Dedekind et Cantor avaient des projets réellement différents : tandis que le premier cherche à dégager la notion d'ordre de celle de mesure et de métrique, le second a besoin d'écarter la notion d'ordre pour parvenir à une notion *abstraite* de métrique.

14 Cantor écrit en 1882 : « Die *Hypothese der Stetigkeit des Raumes* ist also nichts anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Korrespondenz zwischen die dreidimensionalen *rein arithmetischen Kontinuum* (x, y, z) und

Comme Dedekind l'écrit à Cantor, sa méthode de définition des *nombres* réels permet de passer directement des nombres rationnels aux nombres réels sans faire le détour par le géométrique. Et cela est d'autant plus important que même

> dans les travaux sur la géométrie, le nom de continuité est certes courant mais n'est jamais l'objet d'une définition claire, qui, seule, le rendrait utilisable dans une démonstration. (*Nombres*, première préface)

Pour lui, le continu numérique *fonde* la continuité analytique au sens où 1°) il peut être défini indépendamment d'elle et 2°) de cette définition peut être dérivée une des propositions suffisant à caractériser la continuité analytique (*Continuité* § 7). Par ailleurs, comme Dedekind y insiste à plusieurs reprises, la continuité géométrique n'est pas affaire de perception, mais de définition. Ce en quoi il est fidèle à la méthode de Riemann, bien qu'il se distingue par son projet fondamental de concevoir et de privilégier des définitions purement arithmétiques, tandis que Riemann revendique le recours à « l'intuition géométrique » et trouve son inspiration dans la réflexion sur les phénomènes et résultats de physique. Cependant Riemann remarque judicieusement que pour les rapports métriques, qui concernent les grandeurs continues, l'expérience n'est pas pertinente, car elle ne peut donner naissance à des propositions exactes ; alors que pour les rapports d'étendue (i.e. la détermination du nombre de dimensions), qui concernent les grandeurs discrètes, nous partons de l'expérience pour énoncer des propositions qui ne sont peut-être pas totalement certaines mais qui ne sont jamais inexactes[15]. Dedekind radicalise cette observation sur le continu

der Erscheinungswelt zugrunde gelegten Raume », *Abh. math. und philos. Inhalts*, 56 (soulignements de Cantor). La correspondance bijective en question est le contenu de l'axiome posé par Cantor dans sa définition des grandeurs numériques en 1872 (*Abh.*, 97).

15 *Gesam. math. Werke*, 2ᵉ éd., 284 ; trad. Laugel, 295. Un peu plus loin Riemann explicite pourquoi l'expérience est en défaut dans une variété continue : « il semble que les concepts

en le considérant en lui-même, dissocié de la métrique. Dissocier la continuité de la métrique marque l'originalité propre de Dedekind par rapport à Riemann.

Dedekind destitue, en effet, la vision de son privilège abusif : *en fait*, d'après lui, je *ne vois pas* la continuité de la ligne, je *mets en pensée la continuité dans la ligne* en posant explicitement un axiome géométrique dont elle dérive. Et c'est la définition des nombres réels qui nous permet de *penser* le continu que la géométrie *ne permet pas* de percevoir. Pour Dedekind la propriété de continuité n'est pas *fondée sur* l'intuition, qui n'offre au plus qu'une occasion de penser, c'est un concept qui sert à distinguer la catégorie particulière des espaces continus dans la catégorie plus large des espaces quelconques. En particulier, comme Dedekind est le premier à le montrer, l'espace euclidien, tel que défini par Euclide, *n'est pas* continu. Dans ses lettres à Lipschitz, Dedekind prouve rigoureusement, en effet, qu'aucun des postulats d'Euclide, ni aucune de ses assomptions tacites, ne contraignent à admettre la continuité de la ligne et du plan euclidiens. On peut en effet, comme Dedekind le relève le premier, effectuer toutes les constructions euclidiennes en se donnant seulement l'ensemble des nombres réels algébriques, dont Dedekind et Cantor ont montré le caractère dénombrable, c'est-à-dire non continu. L'espace euclidien est donc plein d'*invisibles* discontinuités. Ce qui durant des siècles est passé pour une évidence justifiant les démarches analytiques appuyées sur le mouvement d'un point mobile ou sur l'idée de variation continue d'une grandeur doit donc être justifié ; le continu géométrique ne m'est pas donné par intuition, c'est lui aussi un concept mathématique qui a besoin d'être défini.

---

empiriques sur lesquels sont fondées les déterminations métriques de l'espace, le concept de corps solide et celui de rayon lumineux, perdent leur validité dans l'infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux principes de la Géométrie [euclidienne] ».

D'une manière générale, différentes définitions peuvent être envisagées selon le point de vue adopté (arithmétique, géométrique, topologique, etc.). *Continuité* propose une définition par des propositions structurellement identiques à celles qui définissent le continu arithmétique. En ce sens, celui-ci est logiquement le *fondement* de celui-là, même si l'on a longtemps considéré ce dernier comme premier ou plus intuitif. Cela n'engage pas nécessairement une priorité *ontologique* du nombre sur l'espace, mais montre en tout cas que le point de vue arithmétique suffit pour une définition rigoureuse de la notion de continuité. Dedekind défend la priorité *épistémologique* du nombre sur l'espace, ou plus exactement la priorité épistémologique de l'arithmétique sur la géométrie et l'analyse.

2.3. Le deuxième écrit publié par Dedekind témoigne d'une singularité plus remarquable encore. Dedekind se propose en effet de définir ce que les mathématiciens de son époque tenaient non seulement pour indéfini mais pour indéfinissable, car donné par l'intuition (Poincaré, Brouwer), ou par l'expérience (Helmholtz) ou même par Dieu (Kronecker[16]). Or Dedekind va montrer que le concept de nombre n'est pas primitif et peut être déduit de concepts plus généraux, qui peuvent tout aussi bien s'appliquer à autre chose qu'à des nombres. C'est le début de la théorie des ensembles, fondée sur la considération d'ensembles infinis et le concept d'application quelconque d'un ensemble dans un autre, qui généralise le concept de fonction, définitivement dissocié de l'expression par laquelle se calcule la valeur de la fonction pour une valeur donnée de la variable. Pour une

16 On connaît la célèbre formule dont Heinrich Weber (1842-1913), dans sa notice nécrologique, nous dit que Leopold Kronecker (1823-1891) a fait sa devise : « Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est fabriqué par l'homme ». Kronecker ne croyait pas en l'existence des nombres transcendants, rejetait violemment la théorie des ordinaux transfinis de Cantor, et refusait la construction des réels proposée par Weierstrass ainsi que la construction par les coupures de Dedekind. Il manifesta une vive opposition à Cantor, à Dedekind et même à Weierstrass qui fut un de ses amis. Pour plus de détails, voir Jacqueline Boniface (2002).

définition mathématique intrinsèque du nombre, Dedekind remonte ainsi à ce qui est, pour lui, la racine même des processus de pensée : le travail de la pensée, qui est de faciliter la vie, n'est jamais aussi fructueusement réalisé que par le concept de nombre. « Tout être pensant est arithméticien [*ein Zahlen-Mensch*] » écrit-il, signifiant par là que compter et manipuler des nombres est le mode de penser le plus fondamental et le plus utile[17]. Ce mode de penser s'exprime en les termes, à la fois très généraux et précis mathématiquement, d'ensemble [*System*] et de « représentation » [*Abbildung*], ce dernier terme étant aujourd'hui traduit par 'application', ce qui change complètement son humus sémantique.

Jusque là, on vivait sur la définition d'Euclide : le nombre entier, c'est-à-dire entier positif supérieur à deux ou dyade, est une « multitude composée d'unités ». Mais dans le contexte de cette définition[18], source de difficultés pour l'effectuation des opérations arithmétiques au sens moderne, l'on pourrait difficilement justifier un énoncé aussi simple que 'deux et deux font quatre'. On sait d'ailleurs que Descartes considérait un tel énoncé comme « intuitif » et irréductible[19]. On sait aussi que Leibniz a montré que cet énoncé peut être démontré à partir des

17 Il est intéressant d'apprendre que des recherches archéo-anthropologiques actuelles (notamment celles de Clarisse Herrenschmidt) confirment que les hommes ont inventé des signes pour compter en même temps qu'ils ont inventé des signes pour écrire.

18 Elle est liée aux discussions platoniciennes sur le statut des objets mathématiques et aux critiques qu'y adressa Aristote. L'unité est à comprendre dans sa coloration métaphysique de monade ; de même deux est une dyade, trois une triade, etc. De plus une unité est un indivisible, ce qui exclut les fractions du domaine du nombre. Quant à multitude (πληθος) il signifie une quantité indéterminée, arbitraire (mais non illimitée), le nombre étant une multitude déterminée d'unités. Le nombre est « mesuré » par l'unité ; l'opération de mesure est ainsi au fondement du nombre. *Cf.* les remarques et commentaires de B. Vitrac (1990-2001, livre V, vol. 2, 15-19 et livre VII, vol. 2, 247-251 et 275-279).

19 *Règles pour la direction de l'esprit*, III^{e} règle, La Pleiade, 43-44. Descartes précise que par intuition il entend non pas « le témoignage changeant des sens » ou « le jugement trompeur de l'imagination », mais « la conception ferme d'un esprit pur et attentif, qui naît de la seule lumière de la raison et qui, étant plus simple, est par suite plus sûre que la déduction même ».

définitions de 1, 2, 3, 4 et des propriétés de l'égalité[20]. Dedekind renoue donc avec la perspective « formaliste » leibnizienne, ayant par ailleurs comblé une lacune de la théorie euclidienne des proportions par sa définition des nombres réels[21]. *Nombres* s'ouvre sur la maxime : « ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. Si évidente que semble cette exigence, on ne peut absolument pas encore, à mon avis, la considérer comme satisfaite… ». Dedekind aurait bien pu bien ajouter : « ce qui est définissable ne doit pas être admis sans définition ». Sans quoi les démonstrations pourraient être lacunaires, voire circulaires ou impossibles.

3. Définition créative

Selon Dedekind, définir c'est *créer*. On connaît la formule célèbre de la première page de *Nombres* : « les nombres sont de libres créations de l'esprit humain ». Nous allons voir que, dans cette phrase, par 'nombres' Dedekind désigne ceux qu'il va définir dans son mémoire, non les nombres familiers acceptés sans définition ou rapportés à l'intuition externe ou interne. Dans la troisième préface de *Nombres*, Dedekind souligne « la force créatrice par laquelle l'esprit crée à partir d'éléments déterminés un nouvel élément déterminé, à savoir le système des éléments considérés », insistant encore sur ce qu'il considère comme une des opérations fondamentales de l'esprit : la capacité de regarder une multiplicité comme une.

20 Leibniz (1966, livre IV, chapitre VII, § 10).

21 Sur la question récurrente de savoir si Dedekind a fait *plus* qu'Euclide, ou seulement la même chose par d'autres moyens (cette dernière vue est l'opinion spontanée des mathématiciens praticiens qui passent sous silence le long travail de l'histoire et, pour paraphraser une boutade célèbre de Claude Chevalley, produisent ou travaillent du neuf en digérant – annulant – totalement le passé), voir les lettres de Dedekind à Lipschitz et mon commentaire (à paraître 2008).

L'idée de création est une constante de la pensée de Dedekind. Elle est déjà présente au § 1 de *Continuité* :

> compter n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs, dans laquelle chaque individu est défini par son prédécesseur immédiat ; l'acte le plus simple est le passage d'un individu déjà créé au nouvel individu, à créer, qui le suit.

De même on l'a vu, le mathématicien « confère » *(ibidem*, § 3) la continuité à un espace par une définition appropriée, les concepts mathématiques d'espace et de continuité n'étant pas indissociablement et nécessairement liés. Contrairement à l'opinion dominante, Dedekind a montré que l'on peut fort bien concevoir un espace discontinu, le concept d'espace en général n'étant pas restreint aux seuls espaces continus[22]. Et le plus connu des espaces discrets n'est-il pas justement l'ensemble des entiers naturels ? C'est pourquoi le continu a besoin d'être défini par une propriété discriminante.

Les définitions définissent ou concernent des « concepts » plutôt que des objets ou des choses. Dedekind ne spécifie pas ce qu'il entend par 'concept' [*Begriff*], mais il est clair qu'il s'agit d'un *point de vue*[23], ou d'une opération de l'esprit établissant un lien, une correspondance entre une chose et une autre. Encore faut-il ajouter qu'une fois créés, les concepts peuvent être identifiés par leurs extensions : ainsi deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont exactement les mêmes éléments. À vrai dire, pour Dedekind, la capacité de liaison de deux choses, ou de

22 Reconnaissant l'apport original de Dedekind, Cantor lui écrit : « à la suite de nos recherches, et des résultats auxquels nous sommes parvenus, vous et moi, indépendamment l'un de l'autre... il était établi que, pour construire le concept d'espace, il n'y a aucune nécessité interne de se représenter ce dernier comme partout continu ; vous attirez expressément l'attention sur ce point dans votre mémoire sur la continuité » (lettre du 15 avril 1882).

23 *Cf. Nombres*, définition 2 : « Il arrive très fréquemment que des choses différentes *a, b, c...* soient, pour un motif quelconque, saisies sous un point de vue commun, réunies en pensée ; on dit alors qu'elles forment un *système S* ; on nomme les choses *a, b, c...* les *éléments* du système *S* ».

représentation [*Abbildung*][24] d'une chose par une autre, est plus fondamentale et primitive que celle de réunir en pensée différentes choses sous un même point de vue[25]. Mais la racine commune des deux opérations de l'esprit est, en un sens ou en un autre, de considérer comme substituables l'une à l'autre sous certaines conditions des choses différentes.

Peut-être, pour fixer les idées, est-il utile de rappeler brièvement qu'en philosophie ancienne et classique, le concept est un terme général de la langue auquel correspond une entité mentale qui ne se réduit pas à son support linguistique et correspond à un ou plusieurs objets extérieurs, son référent pour employer un terme usuel aujourd'hui. Il y a plusieurs façons de déterminer les rapports des termes de la triade objet (référent ou extension du concept)-signification (compréhension du concept)-langue. Une tendance commune aux logicismes et scientismes consiste à identifier la signification avec le référent. La philosophie traditionnelle a défendu une conception référentielle du langage et du sens en considérant le discours comme le lieu de la vérité sur l'être. Une tendance symétrique consiste négliger la dimension référentielle en considérant la signification comme immanente au langage et produite par l'activité linguistique ; la nature de la signification est discursive ou symbolique ; son origine se trouve dans le jeu des oppositions, associations, différences entre les signes, les mots, les phrases, les textes. C'est notamment

24 'Représentation' est la traduction littérale et historiquement correcte de '*Abbildung*'. C'est elle que l'on trouve aussi bien dans un texte en français de Zermelo, datant de 1909, que dans le paragraphe que Bertrand Russell (1872-1970) consacra à Dedekind dans *The principles of mathematics* I, chap. XXX, 1903. Les mathématiciens ont pris ensuite l'habitude d'utiliser 'application' et '*map*' ou '*mapping*' (*cf.* mon commentaire dans R. Dedekind (à paraître 2008).

25 *Nombres*, première préface : « Si l'on cherche exactement ce que nous faisons en dénombrant [*zählen*] un ensemble [*Menge*] ou en comptant un nombre [*Anzahl*] de choses, on est conduit à considérer la capacité de l'esprit à relier des choses à des choses, à faire correspondre une chose à une chose, ou à représenter [*abbilden*] une chose par une autre, capacité sans laquelle aucune pensée en général n'est possible ».

le point de vue du structuralisme linguistique et du nominalisme philosophique. Une position intermédiaire consiste à ne réduire la signification ni à son référent ni à son signifiant et à la considérer pour elle-même. Dans cette option, dont une variante est constituée par le conceptualisme des Anciens et une autre par la tradition sémantique des Modernes, la signification est le propre du concept, distinct lui aussi du mot ou du signe et distinct de la chose. Pour les conceptualistes, le concept est le fruit d'une opération mentale repérant et reliant des propriétés réelles des choses. La philosophie kantienne est une réinterprétation du conceptualisme : le concept y devient constitutif de l'objectivité scientifique, qui est davantage l'affaire des humains que la spéculation sur les inconnaissables choses en soi. C'est à elle que se rattache, *modulo* des aménagements non négligeables, non seulement Dedekind, mais toute l'école d'algèbre et de topologie abstraites issue de ses travaux. L'insistance sur la fécondité des concepts mathématiques a conduit les historiens à parler de « mathématique conceptuelle », reprenant cette expression aux mathématiciens eux-mêmes [*die begriffliche Mathematik*][26].

Pour Dedekind, c'est bien toute l'affaire de *la pensée* mathématique que de construire[27], de créer [*schaffen, erschöpfen*] des concepts qui cristallisent des idées nouvelles, des points de vue neufs, y compris sur un « objet » aussi vieux que l'espace ou le nombre. C'est en ce sens que Riemann proposait la création ou la « génération du concept d'une multiplicité étendue [variété] à plusieurs dimensions »[28]. C'est en ce sens que Dedekind écrit à Lipschitz qu'il ne prétend pas avoir inventé un nouvel objet ou un nombre irrationnel qui ne fût déjà connu des mathéma-

26 *Cf.* Sinaceur (1991, deuxième partie, chap. II, § 2).

27 En un sens général et non au sens de Kronecker, où il est exigé d'une définition qu'elle permette d'examiner « en un nombre fini d'essais si elle est applicable ou non à une grandeur donnée » (Boniface 2002, 140).

28 « Die Erzeugung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit », *Gesam. math. Werke*, 2^{e} éd., 274.

ticiens ; ce dont il revendique la paternité c'est une nouvelle définition qui utilise le phénomène connu de la coupure pour prouver que les nombres réels peuvent être définis dans leur ensemble, et *compte tenu de la propriété de continuité de leur domaine*, en se fondant exclusivement sur l'arithmétique des nombres rationnels, qui forment, eux, un domaine discontinu[29]. En somme, ce qu'il a inventé c'est le concept arithmétique de nombre réel. Et, à l'instar de l'espace abstrait de Riemann, ou de celui de surface de Riemann que je ne fais qu'évoquer en passant, ce concept ouvre des perspectives inédites, tout en clôturant un lent et sinueux mouvement d'arithmétisation, dont j'ai signalé plus haut qu'il a commencé au moins au X[e] siècle, avec les travaux de Al-Karajî. L'originalité propre de Dedekind est la création d'un concept général, celui de *domaine continu de nombres*, correspondant à des phénomènes mathématiques connus mais antérieurement appréhendés au coup par coup et à travers la manipulation des grandeurs, notamment des grandeurs incommensurables comme celle de la diagonale du carré de côté égal à 1 ou du rapport π de l'aire d'un cercle à son rayon, ou, plus récemment à travers la considération de grandeurs variables

29 Lettre à Lipschitz du 27 Juillet 1876 : « Je n'ai jamais cru avoir mis au jour, dans mon écrit, un seul nouveau phénomène ou un quelconque nouvel objet de la recherche mathématique. Le phénomène de la coupure est évoqué dans presque tous les manuels d'arithmétique, lorsqu'il est question de représenter avec une approximation arbitraire des nombres irrationnels par des nombres rationnels (en quoi, il est vrai, on commet toujours une faute logique majeure). Je n'ai pas davantage prétendu avoir inventé par ma définition des nombres irrationnels un quelconque nombre qui ne fût déjà auparavant plus ou moins clairement conçu dans l'esprit de n'importe quel mathématicien … La tendance globale de mon écrit, je crois l'avoir clairement décrite dans mon introduction et dans le § 3 ; elle est plutôt de simplement utiliser le phénomène généralement connu de la coupure pour prouver (ce qui n'avait jamais été fait à ma connaissance) que sur la seule base de l'Arithmétique des nombres rationnels, donc sans recourir au concept assez compliqué et obscur de grandeur, les nombres irrationnels peuvent être définis d'un seul coup et – ce qui est le plus important – dans leur complétude (continuité), propriété qui est suffisante et, en même temps, indispensable pour édifier de manière absolument rigoureuse et scientifique l'arithmétique des nombres réels ». Extrait de la trad. fr. incluse dans R. Dedekind (à paraître 2008).

tendant continûment vers une limite. Ce qu'il crée ce n'est pas un objet inconnu des mathématiciens mais un concept nouveau d'un objet connu et non totalement maîtrisé à certains égards. Dedekind précise à Lipschitz qu'à supposer que l'on s'en tienne aux grandeurs, « le concept d'un domaine *continu* de grandeurs » ne se trouve ni chez Euclide ni chez aucun des mathématiciens postérieurs[30]. Le concept de Dedekind n'a rien à voir avec ce que nous supposons être objet de notre perception ou ce que nous croyons trouver, rétrospectivement, dans *Les Éléments* d'Euclide. Dedekind a montré en effet qu'Euclide présuppose *seulement* un espace archimédien ; cela ne suffit évidemment pas à rendre cet espace continu. Hilbert (1862-1943) l'a bien compris, qui adjoint à l'axiome d'Archimède un axiome d'inextensibilité, inspiré par l'œuvre de Dedekind, pour exprimer la continuité de la ligne ou du plan euclidien[31]. Hilbert souligne que le deuxième axiome n'est pas une conséquence logique du premier et que celui-ci, seul, ne suffit pas pour retrouver le plan *cartésien* de notre géométrie analytique habituelle. Notons au passage la différence, explicitée par Dedekind et expressément formulée par Hilbert, entre un plan euclidien et un plan cartésien, donc entre la géométrie d'Euclide et la géométrie analytique des modernes.

Le rôle des nouveaux concepts, et donc des définitions, est majeur dans le progrès des mathématiques. Ce sont eux et elles qui modifient notre perspective sur les objets ou les problèmes, à commencer par les plus anciennement connus comme l'espace et le nombre. Il n'est donc pas question, dans un souci de « pureté », de les éliminer ou de les réduire aux anciens

30 « … si loin que j'ai poussé l'investigation, on n'arrive *jamais* à la *continuité* de l'espace comme à une condition inséparablement liée à la Géométrie d'*Euclide* ; son système tout entier est conservé même sans la continuité – un résultat qui en étonne plus d'un et m'a semblé, pour cette raison, digne de mention » (Lettre à Lipschitz du 6 Juillet 1876, trad. fr. à paraître 2008).

31 *Die Grundlagen der Geometrie*, chap. I, § 8.

concepts, faussement réputés « simples ». Au contraire il faut les introduire là où la nécessité, c'est-à-dire la solvabilité d'un problème, s'en impose. Dans la première préface à *Nombres*, Dedekind écrit que :

> les progrès les plus grands et les plus féconds en mathématiques … sont dus avant tout à la création et à l'introduction de nouveaux concepts, qui sont rendues nécessaires par le fréquent retour de phénomènes complexes difficiles à maîtriser par les anciens concepts.

Et Dedekind de préciser que loin de vouloir réduire, selon le vœu de Kronecker, tous les théorèmes à des propositions arithmétiques n'impliquant que les quatre opérations rationnelles, il s'agit, au contraire, de construire *à partir des entiers naturels* des concepts plus généraux, susceptibles donc de s'appliquer à d'autres sortes de nombres : ainsi le concept d'entier algébrique[32], ou à des domaines dont les éléments ne sont pas des nombres, mais, par exemple, des fonctions ou des éléments *quelconques*.

4. Propriétés caractéristiques internes

4.1. Pour Dedekind, comme dans la perspective du conceptualisme, un concept est un contenu de pensée, une entité mentale créée pour organiser (structurer) les choses et le monde. Ces créations ne sont ni subjectives ni arbitraires. Elles sont objectives. Pour les Anciens, l'objectivité tient à ce qu'un concept signifie une propriété réelle d'un être ou d'un objet référent.

32 On appelle algébrique un nombre qui est solution d'un polynôme à coefficients rationnels. Un entier algébrique est racine d'un polynôme à coefficients entiers et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. *Cf.* l'article en français de Dedekind Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1ère série, tome 11 (1876) et 2e série, tome 1 (1877) ; partiellement reproduit dans les *Gesam. math. Werke*, III, 262-296. L'introduction est reproduite (à paraître 2008).

Pour Dedekind, l'objectivité vient d'une part de ce que les créations de concepts émanent (plus ou moins directement) des « lois de la pensée » et s'y conforment, et d'autre part, de ce qu'elle sont soumises à des contraintes de cohérence interne, d'ajustement[33] aux concepts affines, de généralité, de simplicité, de fécondité. Dedekind avait en gros une compréhension kantienne de l'entendement, comme à la fois créateur et législateur. Mais il n'accepte pas la médiation kantienne des formes pures de l'intuition que sont l'espace et le temps et ne dit rien de l'introduction par Kant de la perspective transcendantale, qui détourne l'attention de la chose en soi vers le phénomène physique et sensible et, en même temps, pose les conditions de possibilité d'une connaissance objective du phénomène ancrée dans l'expérience. Pour Dedekind la construction des concepts se fait dans la pensée, non dans l'intuition[34]. Mais la pensée rationnelle est « par nature » objective[35]. « L'empire des nombres est créé dans notre esprit », écrit-il dans sa première préface à *Nombres*, en renvoyant au § 3 de *Continuité*. Comme je l'ai observé plus haut, Dedekind est ainsi un des illustres promoteurs de la « mathématique conceptuelle », par opposition à la fois à la mathématique de l'intuition et à celle des algorithmes. Plutôt que de

33 Dedekind écrit dans sa *Leçon* de 1854 : « Cet ajustement des définitions au gré des lois ou des vérités découvertes, dans lesquelles elles jouent un rôle, constitue le plus grand art du systématicien [i.e. axiomaticien] ».

34 L'intérêt tout particulier porté par Charles Sanders Peirce (1839-1914) à *Nombres* de Dedekind s'explique notamment par le fait que Peirce soutenait que nous n'avons aucun pouvoir d'intuition, et que toute connaissance est déterminée par des connaissances antérieures. Dans une note de 1904 Peirce écrivit « Quiconque souhaite comprendre la logique des entiers devrait commencer par le petit livre de Dedekind ».

35 Cantor a élevé des doutes quant à la légitimité logique de l'opération qui consiste à considérer une multiplicité comme un tout. Dans sa lettre à Dedekind du 28 juillet 1899, il constate « qu'une pluralité peut être constituée de telle sorte que l'admission de "l'être simultané" [*Zusammensein*] de *tous* ses éléments conduit à une contradiction, de sorte qu'il est impossible de concevoir cette pluralité comme une unité, comme un "objet achevé" ». Malgré cela, Dedekind maintient sa confiance en cette « force créatrice » par laquelle l'esprit crée un système à partir d'une multiplicité (3[e] préface de *Nombres*, 1911).

trop appuyer sur ces oppositions[36], mieux vaut souligner le « conceptualisme postkantien » de Dedekind, ce qui permettra de différencier nettement sa position épistémologique du logicisme de Bernhard Bolzano (1781-1848) ou de Gottlob Frege, pour qui les nombres sont des objets en soi, existant indépendamment de, et antérieurement à toute activité de l'esprit.

4.2. Un concept mathématique est le produit d'un travail, le résultat d'une création [*Erschöpfung*], qui tient évidemment compte des accomplissements antérieurs – d'où la promotion de la perspective historique dans les travaux de Dedekind[37] –, mais ce résultat a une essence [*Wesen*] et des propriétés [*Eigenschaften*]. Compte tenu du fait de sa création, l'essence d'un concept n'est pas à comprendre au sens traditionnel, fixiste et *a priori*. L'essence ne précède pas sa définition, mais lui est contemporaine. Pour autant, il ne peut être question de définition seulement nominale ou notationnelle, ni de définition contextuelle ou par l'usage. La définition doit expliciter un caractère distinctif et discriminant, *qui demeurait jusque là*

36 Il faut prendre, en effet, ces oppositions *cum grano salis*. Dedekind ne nie pas le rôle de l'intuition comme ingrédient circonstanciel de la création de concepts, il refuse seulement que l'on puisse *fonder* sur elle des définitions et des démonstrations. De même, pour lui, les concepts n'éliminent absolument pas les formules et les calculs, ils les *précèdent* seulement et permettent de les anticiper (voir plus loin sa conception de la théorie des nombres algébriques). Inversement un défenseur de l'intuition comme Poincaré a fort bien mis en valeur la fécondité du concept de groupe, et un partisan des méthodes algorithmiques comme Kronecker n'a pas manqué de poursuivre brillamment l'œuvre de Galois (1811-1832) sur la résolution des équations algébriques par la considération, structurale, des extensions de corps et d'inaugurer la théorie des extensions abéliennes des corps de nombres algébriques, ou théorie du corps de classes, développée plus tard par Hilbert.

37 Certains mathématiciens contemporains de Dedekind étaient sensibles à cette perspective. Commentant l'apport des innovations de Riemann, Felix Klein explique le progrès mathématique par ce qu'il appelle « la continuité historique », laquelle est explicitée de la manière suivante : « Les mathématiques pures progressent à mesure que les problèmes connus sont approfondis en détail d'après des méthodes nouvelles. À mesure que nous comprenons mieux les anciens problèmes, les nouveaux se présentent d'eux-mêmes » (*Œuvres mathématiques de Riemann*, XXI).

ignoré ou obscur[38], elle doit donc déterminer un nouveau concept et prescrire une nouvelle pratique. Dedekind s'en explique clairement dans le passage suivant :

> Je me souviens avant tout, écrit-il, d'un beau passage des *Disquisitiones Arithmeticae*, art. 76 où Gauss parle du théorème de Wilson en rappelant que Waring plaçait la difficulté de le démontrer dans le défaut d'une notation adéquate. À notre avis, observe Gauss, de telles vérités devraient être extraites de concepts plutôt que de notations. Ces derniers mots, pris au sens général, expriment une grande pensée scientifique, la préférence de ce qui est interne par rapport à ce qui est externe. Cette opposition se retrouve dans presque tous les domaines des mathématiques ; que l'on pense à la théorie des fonctions et à la définition Riemannienne d'une fonction par ses propriétés caractéristiques internes, desquelles découlent avec nécessité les modes de présentation externes». (*Gesam. math. Werke* II, 54-55)[39]

Dedekind a, pour sa part, imprimé pareille orientation à la théorie des nombres algébriques, qui n'atteint son plus haut degré de perfection, selon lui, que si on y cherche à :

> tirer les démonstrations, non plus du calcul, mais immédiatement des concepts fondamentaux caractéristiques, et d'édifier la théorie de manière qu'elle soit, au contraire, en état de prédire les résultats du calcul ». (*Gesam. math. Werke*, III, 296)

38 Ainsi sont conciliées deux idées : le constat du caractère *progressif* de la connaissance mathématique et l'exigence de dégager les caractères *essentiels* des concepts mathématiques.

39 Dans cet article de 1895 sur le fondement de la théorie des idéaux, Dedekind fait allusion à la Dissertation de 1851 de Riemann, Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, où apparaît le concept de surface de Riemann. Par « modes de présentation externes » Dedekind signifie, conformément au texte de Riemann (§ 20), les *expressions* qui donnent la valeur d'une fonction pour chaque valeur de son argument. Riemann visait à obtenir « la figuration d'une fonction (c'est-à-dire sa valeur pour toute valeur de son argument) indépendamment d'une méthode pour déterminer la fonction au moyen des opérations sur les grandeurs ». (*Gesam. math. Werke*, 2e éd., 38-39)

Une bonne définition *crée* donc le concept qui caractérise l'essence d'un fait ou d'une situation mathématique pas encore ou mal *caractérisée*, et en *explicite* les propriétés *internes*, i.e. inhérentes à son essence. Plus précisément, une définition crée un concept dans la mesure même où elle consiste à isoler le petit nombre de ses propriétés essentielles, et à les énoncer explicitement en guise de point de départ des démonstrations connues comme de celles dont on n'avait pas idée auparavant. Ainsi, « il s'agit de fournir une caractéristique [*Merkmal*] précise de la continuité, utilisable comme base de véritables déductions »[40]. De même, « l'essence d'un système simplement infini N consiste en l'existence d'une représentation φ de N et d'un élément 1 satisfaisant les conditions suivantes… »[41] : suivent les quatre « conditions caractéristiques »[42] qui définissent non seulement la suite des entiers naturels mais tout système ordonné simplement infini, et à partir desquelles on peut déduire tous les théorèmes *arithmétiques*. La validité de ces théorèmes ne s'arrête donc pas à ce que nous avons l'habitude d'appeler « arithmétique », puisqu'ils s'appliquent aussi bien à un système ordonné simplement infini dont les éléments seraient autres que « nos » entiers naturels familiers. Une définition essentielle est donc une définition non pas d'objet, mais de structure, éventuellement commune à *divers* domaines *possibles* d'objets. La *nature* des objets de ces domaines possibles n'intervient pas dans la définition. C'est pourquoi Dedekind demande qu'une définition caractérise univoquement (à un isomorphisme près) « l'essence » d'un domaine d'objets.

Or, en logique, une définition est créative si, introduite dans une théorie déductive, elle permet de déduire syntaxiquement au moins une thèse non déductible dans la théorie sans ladite défi-

---

40 *Continuité*, § 3.

41 *Nombres*, définition 71.

42 L'expression est de Dedekind : *Nombres*, démonstration du théorème 72. Je reproduis ces conditions *infra* en 5.5.

nition[43]. Cela est bien le cas de la définition de la continuité par Dedekind, qui permet de démontrer, dans le cadre d'une théorie arithmétique, le théorème selon lequel toute suite de nombres réels, croissante et majorée, admet une limite et, à partir de là, tous les autres théorèmes de l'analyse réelle. Concomitamment émerge le concept de corps ordonné par un ordre continu. C'est aussi le cas de la définition par induction[44] qui prouve, au lieu de seulement les supposer, l'existence et l'unicité de l'application qui définit l'addition, et par suite l'existence et l'unicité des applications qui définissent les autres opérations arithmétiques fondamentales[45]. L'arithmétique des entiers naturels apparaît alors comme un ensemble dont les éléments et les opérations sur ces éléments sont engendrés inductivement. Dans ce cas, la définition est non seulement créative, mais constructive, non pas au sens strict de Kronecker, mais au sens où elle procède pas à pas, sans pour autant s'arrêter à un nombre fini d'opérations.

5. Définition indirecte : par conditions nécessaires et suffisantes

5.1. Dans sa Leçon de 1854, Dedekind avait souligné que l'introduction de nouveaux concepts est liée à « un caractère distinctif de l'édification systématique de la mathématique », entendant par « édification systématique » le fait d'isoler les définitions de leurs conséquences logiques et d'ajuster les défi-

43 *Cf.* l'article « Définition créative » de R. Zuber (1990, 568) et, pour une définition formelle, celui de Pierre Joray « Logicisme et définition explicite » (2005, 47).

44 *Nombres*, théorème 126.

45 Le théorème 126 de Nombres répond par avance à la critique formulée par Frege en 1884 au § 6 des *Grundlagen der Arithmetik* – dont Dedekind ne prend connaissance qu'en 1889 –, puis en 1903 dans les *Grundgesetze*, II, §§ 139-147. Frege rejette les définitions créatives qui se contentent d'introduire de nouvelles notions sans en démontrer, au préalable, l'existence et l'unicité.

nitions préalablement connues aux lois ou vérités découvertes ensuite, pour arriver enfin à énoncer les quelques conditions nécessaires et suffisantes, ou axiomes, qui déterminent un concept par la possibilité de démontrer à partir d'elles les autres propriétés de ce concept.

> Le systématicien, écrit-il, forme certains concepts ...qui interviennent comme définitions dans la science et grâce auxquels il est en mesure d'énoncer les vérités générales reconnaissables dans la diversité infinie du particulier[46].

Il ajoute qu'il « arrive que les concepts introduits ... , ayant été conçus au départ trop étroits ou trop larges, aient besoin d'une modification pour pouvoir étendre leur efficacité, leur portée, à un domaine plus grand »[47]. Former un concept c'est dégager une structure : de groupe, d'anneau, d'idéal, de corps ordonné, de treillis, etc. Par exemple, l'extension des entiers naturels que constitue l'ensemble des entiers relatifs a une structure de groupe, l'extension que constitue l'ensemble des fractions a une structure de corps ; c'est même, comme le note explicitement Dedekind, un corps « premier », c'est-à-dire qu'il est contenu dans tout corps de nombres (d'où le rôle fondamental joué par le corps des rationnels). Engendrer les entiers relatifs ou les nombres rationnels à partir des entiers naturels, ou encore définir les nombres réels à partir des rationnels, relève

---

46 On a là l'expression du point de vue axiomatique abstrait. Par exemple, la caractérisation de la continuité doit être telle qu'on puisse en déduire les propriétés de la droite mais aussi de *différents* domaines continus linéaires. De fait, Dedekind a construit un système d'éléments, les coupures, satisfaisant les caractéristiques d'un domaine continu linéaire, que ce domaine soit une droite du plan cartésien ou un ensemble de nombres.

47 Frege critiquera cette manière d'ajuster progressivement des définitions à des extensions successives du domaine pour lequel elles étaient conçues initialement (*Grundgesetze*, II, §§ 56-57). Pour lui une définition, une fois dégagée, demeure l'expression préalable et inchangée de la détermination du sens et de la référence d'un terme. Pour Dedekind, au contraire, définitions, concepts, problèmes et solutions sont inscrits dans « la continuité historique ».

certes de ce qu'on appelle parfois une définition génétique. On voit bien ici qu'une méthode génétique s'allie fort bien avec le point de vue structural. Énoncer explicitement les propositions qui, à titre de définitions, déterminent une structure permet d'établir ce que Dedekind entend par une théorie logiquement « irréprochable », où l'on peut déduire sans lacune et sans redondance les propositions vraies relatives aux éléments d'un domaine réalisant ladite structure. C'est bien entendu, dans le langage actuel, une théorie axiomatique abstraite, plutôt qu'une théorie logique proprement dite.

5.2. À propos de la manière de définir un ensemble Dedekind note que :

> très souvent un système *S* n'est pas directement défini en nommant un à un chacun de ses éléments, mais indirectement, par des conditions nécessaires et suffisantes qu'une chose doit satisfaire pour être élément de *S*. (*Cf.* Dangers de la théorie des systèmes, Dedekind à paraître 2008)

Les conditions nécessaires et suffisantes (CNS) constituent ainsi des « définitions indirectes ». Indirectes au sens où elles n'exhibent pas directement et individuellement les éléments. La définition définit « en un seul coup » *tous* les éléments ou, plus exactement, la structure de l'ensemble auquel appartiennent ces éléments. Dedekind est systématiquement à la recherche de CNS pour caractériser une structure. C'est ainsi qu'il procède pour la suite des entiers naturels, pour les nombres réels, pour le concept d'idéal[48].

Les CNS déterminent l'exacte compréhension du concept concerné, l'extension du concept étant constituée par divers

48 *Cf.* Sur la théorie des nombres entiers algébriques (Dedekind à paraître 2008), Dedekind souligne que les deux propriétés qu'il énonce constituent les CNS pour qu'un sous-ensemble *I* d'un anneau *A* commutatif soit un idéal, à savoir les sommes et les différences de deux éléments de *I* sont des éléments de *I* et tout produit d'un élément de *I* par un élément de *A* est un élément de *I*.

modèles, attendus ou éventuellement, comme on le reconnaîtra plus tard, non attendus (non standard). Le choix des CNS n'est ni arbitraire ni réduit à une unique possibilité. On peut le voir sur les différents essais de définir le zéro et les nombres négatifs que l'on a retrouvés dans le *Nachlass* de Dedekind. Les dates, assez éloignées les unes des autres, des fragments manuscrits montrent l'intérêt constant de Dedekind pour les questions de définition. Quant aux différentes méthodes employées, elles attestent que Dedekind admet la possibilité de plusieurs définitions, chacune impliquant un contexte mathématique spécifique. Il n'y a donc pas une seule définition correcte, et chacune est solidaire d'un contenu, d'un objectif et d'un cadre déductif particuliers.

On sait notamment que Dedekind donne deux définitions de l'infini et du fini. La première consiste à juger discriminante une propriété reconnue de l'infini et à la poser comme définition (*Nombres*, 64), ce qui a nécessité, de l'aveu de Dedekind, un vrai « labeur »[49] : un système *S* est infini s'il « est semblable à une de ses parties propres », c'est-à-dire s'il existe une bijection de *S* sur une de ses parties propres ; sinon il est fini. La seconde, énoncée dans la seconde préface de *Nombres* (1893), part au contraire du fini pour définir l'infini : « un système *S* est fini s'il peut être représenté (appliqué) dans lui même de manière à ce qu'aucune partie propre de *S* ne soit représentée dans *S* lui-même ; dans le cas contraire, le système *S* est dit infini». Dedekind s'en tient à sa première définition ; il trouve plus aisé de définir les nombres à partir d'elle[50]. Bien plus tard, cepen-

49 Cantor, qui connaissait cette propriété, n'a commencé à la donner comme *définition* qu'après la publication de *Nombres*.

50 Autre exemple, Dedekind admet bien la définition cantorienne des nombres réels par des suites de Cauchy de nombres rationnels, mais celle-ci reste dans l'horizon de l'Analyse classique tandis que sa méthode de définition par les coupures, présentes déjà dans le domaine des nombres rationnels, fonde l'Analyse sur l'Arithmétique. Dedekind met en valeur la structure *algébrique* ordonnée du corps des réels, tandis que le concept fondamental pour Cantor est celui de distance, qui est d'ordre *métrique*. Contrairement à

dant, Alfred Tarski (1901-1983) fera observer que les déductions de Dedekind enveloppent un usage tacite de l'axiome du choix. Il donnera du fini une définition équivalente à la deuxième définition de Dedekind et, en se fondant sur les axiomes de Zermelo (1871-1953) moins l'axiome de l'infini et moins l'axiome du choix, en déduira « sans aucune difficulté les théorèmes les plus importants sur les ensembles finis »[51].

En ce qui concerne les nombres négatifs, l'un des fragments manuscrits, datant des années 1890, définit les nombres négatifs comme classes de congruence de paires ordonnées d'entiers naturels, montrant le rôle de la théorie des congruences de Gauss dans l'émergence du point de vue de *la généralité*, que Dedekind renforça significativement par sa considération de structures abstraites[52] L'autre fragment, probablement écrit avant 1872, utilise la méthode connue de définition des nombres négatifs comme paires de nombres naturels. Les rationnels y sont introduits de la même manière. L'intérêt de ce fragment est de montrer clairement que Dedekind utilisait les termes 'analyse' et 'synthèse' au sens des anciens géomètres[53], et de per-

celle de Cantor, la complétude, au sens de Dedekind, du corps des réels n'est pas une complétude métrique. Plus généralement, Dedekind envisage l'étude de structures algébriques ordonnées, de treillis par exemple, alors que Cantor cherche à donner une définition abstraite du concept de distance, qui anticipe la définition par Felix Hausdorff (1868-1942) et Maurice Fréchet (1878-1973) des espaces métriques.

51 Sur les ensembles finis, 45-46, 92.

52 La traduction française se trouve dans Dedekind (à paraître 2008).

53 C'est l'article de W. Sieg et D. Schlimm (2005, 154) qui a attiré mon attention sur ce fait. Sur analyse et synthèse au sens de Pappus et de Proclus voir le bref exposé de M. Caveing dans Euclide, *Les Éléments* 1, 144-148 : « en cherchant les conditions *nécessaires* [souligné par moi] d'une situation qu'on suppose réalisée, l'analyse permet de découvrir les étapes obligées du raisonnement, soit qu'on ne les connaisse pas encore, soit qu'on veuille le perfectionner et être assuré de n'en avoir point omis ». C'est une remontée vers les antécédents, éventuellement jusqu'aux principes initiaux. Si l'analyse mène à une contradiction, alors l'hypothèse est rejetée. Sinon, on tâche d'opérer la synthèse, qui est une descente vers les conséquents ; c'est par excellence la méthode de preuve ; elle consiste en effet à montrer que les conditions dégagées sont aussi des conditions *suffisantes* de ce qui est à prouver. Caveing conclut que la distinction de l'analyse et de la synthèse « est fondée dans

mettre ainsi une meilleure compréhension de ce que Dedekind a écrit à Keferstein le 27 février 1890 à propos de la genèse de *Nombres* :

> Il s'agit d'une *synthèse* [souligné par moi] élaborée après un long travail et appuyée sur une *analyse* [souligné par moi] antérieure de la suite des nombres naturels telle qu'elle s'offre à notre considération de manière pour ainsi dire empirique. Quelles sont les propriétés fondamentales, mutuellement indépendantes, de cette suite *N*, i.e. ces propriétés qui ne sont pas dérivables les unes des autres et dont toutes les autres sont des conséquences ? Et comment faut-il les dépouiller de leur caractère spécifiquement arithmétique, pour les subordonner aux concepts généraux et aux activités de l'entendement, *sans* lesquels nulle pensée n'est possible et *grâce* auxquels le fondement est donné pour des démonstrations sûres et complètes et pour la formation de définitions de concepts non contradictoires ? (Trad. fr. des Lettres à Keferstein dans Dedekind à paraître 2008)

Ce texte montre clairement l'importance de l'analyse d'une situation donnée pour en dégager des définitions non contradictoires et abstraites, i.e. dont le domaine d'application n'est pas déterminé *a priori*, en vue d'obtenir, par synthèse, des démonstrations qui en tirent les conséquence de manière « sûre et complète ». Les définitions doivent assurer la possibilité de démonstrations « complètes », c'est-à-dire syntaxiquement sans lacunes et, en même temps, permettre de déduire *toutes* les propositions vraies de l'arithmétique, c'est-à-dire assurer la complétude[54] de la théorie, une théorie consistant précisément en la réunion des définitions et de leurs conséquences logiques.

---

le mode de fonctionnement des déductions à partir d'hypothèses, dans le champ déductif d'un système démonstratif où la dissymétrie est fermement maintenue entre énoncés liminaires (ou principes) et énoncés dérivés ».

54 Rappelons que Riemann cherchait de même « les systèmes de déterminations métriques simples, au moyen desquels les rapports de l'espace sont *complètement* [souligné par moi] déterminés, et dont *toutes* [souligné par moi] les propositions [vraies] concernant ces rapports sont des *conséquences nécessaires* [souligné par moi] » (Über die Hypothesen…,

Si Dedekind définit les nombres, c'est pour les inscrire dans un cadre axiomatique tel qu'il n'y ait pas de hiatus entre définition de concepts et effectuation d'opérations arithmétiques. Cette fois encore, c'est un point sur lequel Dedekind corrige l'axiomatique euclidienne, dont on sait le problème qu'y posent des définitions qui ne servent pas de base à la déduction ni à la construction d'autres définitions qui peuvent constituer cette base. Dedekind supprime les définitions purement descriptives[55], ainsi que la distinction entre définitions et postulats puisque ses définitions consistent précisément en ensembles de CNS, que l'on peut appeler sans distinction « axiomes » ou « postulats »[56]. Chez Dedekind, il y a donc ajustement des définitions aux opérations et aux théorèmes relatifs à ces opérations : des définitions de concepts découlent les définitions d'opérations dont découlent les théorèmes. Les théorèmes ne sont pas *inclus* dans les définitions, ils s'en *déduisent* par une procédure ampliative qui enrichit la compréhension du concept défini.

5.3. Les définitions abstraites à la Dedekind doivent être distinguées de ce qu'on appelle d'ordinaire, en philosophie des

trad. Laugel, 294). Aujourd'hui on distingue essentiellement complétude sémantique et complétude syntaxique (certains auteurs rajoutent d'autres distinctions, qui éclairent le contexte historique de la genèse de cette notion complexe). Une théorie déductive T non contradictoire, formulée dans un langage L, est complète sémantiquement si T a un modèle M tel que pour *tout* énoncé F de L, F est déductible dans T si et seulement s'il est vrai dans M. T est complète syntaxiquement si pour tout énoncé F de L, ou bien F ou bien sa négation est déductible dans T. Ces deux définitions ne sont logiquement équivalentes que pour un langage logique du premier ordre. Les notions de langage logique et les distinctions entre logiques d'ordres différents sont étrangères à Dedekind.

55 P. Joray m'a fait remarquer que la définition de système rappelée dans ma note 23 *supra* est bien purement descriptive. C'est exact. Dedekind décrit une opération fondamentale de l'esprit qui, en termes modernes, correspond mathématiquement au passage de a à $\{a\}$. Or, ce passage pose effectivement une difficulté logique. La définition d'un ensemble qui soit à la fois opératoire et dénuée de cette difficulté n'arrivera qu'avec l'axiomatisation de la théorie des ensembles par Zermelo en 1908.

56 On sait que Frege maintient, au contraire, la différence entre postulat (ou axiome) et définition, celle-ci censée, seule, établir le sens et la référence d'un terme.

mathématiques, une « définition par abstraction »[57]. De ce dernier genre de définition il est question lorsqu'à partir d'une entité *a*, on définit une nouvelle entité *fa* au moyen d'une relation d'équivalence sur le domaine auquel appartient *a*. Par exemple si *a* est une droite du plan euclidien, on peut définir la direction *fa* de *a* en utilisant la relation de parallélisme entre droites du plan. On détermine ainsi une partition du plan en classes d'équivalence telles que *fa* = *fb* si et seulement si *a* et *b* sont parallèles. C'est ainsi que Frege définit l'orientation d'une droite au § 64 des *Grundlagen der Arithmetik* (1884). On considère parfois que les définitions par abstraction sont une variété de définitions contextuelle ou d'usage, puisqu'au lieu d'offrir une proposition synonyme ou coextensive au *definiendum*, elles indiquent les conditions d'égalité de deux entités le représentant.

L'opération mentale d'abstraction de Dedekind consiste à dépouiller les éléments de tel ensemble considéré de tout caractère particulier. Par exemple, étant donné un ensemble « simplement infini » (i.e. dénombrable) totalement ordonné, on retiendra seulement le fait que les éléments de l'ensemble sont distincts les uns des autres et on ne considérera que les relations établies par la relation d'ordre. Dans ces conditions on appellera « nombres » ces éléments, ainsi « libérés de tout [autre] contenu », et c'est d'eux, non des nombres familiers à chacun, qu'on dira qu'ils sont « une libre création de l'esprit humain »[58]. Ainsi se confirme l'idée que la définition des entiers naturels par Dedekind est bien la création d'un nouveau concept à partir du concept anciennement admis sur la base d'une définition non opératoire ou d'une intuition indéfinie. Dans le deuxième

57 Quant à l'expression 'définition par abstraction', Giuseppe Peano (1858-1932) semble le premier à l'utiliser dans ses *Notations de logique mathématique*, Introduction au *Formulaire de Mathématiques*, Turin, Guadagnini, 1894. En se référant à Peano, et à titre de justification pour ce genre de définition, Bertrand Russell a introduit le « principe d'abstraction », *The principles*, chap. XXVI, § 210.

58 *Cf. Nombres*, définition 73.

brouillon de *Nombres*, Dedekind est encore plus explicite[59] : «Par cette abstraction, les éléments originairement donnés n de N sont transformés en *nouveaux* [souligné par moi] éléments n, c'est-à-dire en nombres (et donc N lui-même est transformé en un nouveau système abstrait N). Ainsi on peut dire à bon droit que les nombres doivent leur être à un acte de création libre de l'esprit. Mais du point de vue de l'expression il est plus commode de parler des nombres comme étant les éléments originaires du système N et de négliger tout simplement le passage de N à N, qui est lui-même une représentation distincte [i.e. une application injective]. Par là rien d'essentiel n'est changé et rien n'est subrepticement obtenu de manière illicite, comme on s'en convaincra à l'aide des théorèmes sur la définition par induction ». Ainsi, bien que nous ayons créé avec Dedekind les nombres *en tant qu'*éléments d'un système abstrait N, nous continuerons, vu l'existence d'une bijection entre N et N, à parler des nombres originairement donnés : c'est un abus de langage dont les mathématiciens sont coutumiers ; l'accepter et le pratiquer indique que la structure abstraite n'est pas destinée à éliminer notre modèle concret des nombres naturels, mais à en expliquer la structure d'une manière abstraite, qui conviendrait aussi bien à d'autres éléments que des nombres. Certains auteurs appellent « l'abstraction dedekindienne » une telle procédure de définition à un isomorphisme près[60]. En termes actuels, il s'agit de la définition d'une classe de modèles isomorphes d'une même structure, n'importe quel modèle constituant un représentant de la classe, et non de la partition d'un ensemble en classes d'équivalence, dont chacune a un représentant différent d'un représentant quelconque d'une autre classe.

59 Cité par Reck (2003, 405) et par Sieg & Schlimm (2005, 152).

60 *Cf.* Tait (1986, 369, note 12).

Le produit de l'abstraction dedekindienne est un concept ou une structure[61], qui opère une bifurcation, tout en maintenant une liaison structurelle, entre définitions abstraites et modèles concrets. Ainsi la droite géométrique n'est continue, dans la perspective arithmétique de Dedekind, qu'en tant que modèle du continu numérique, celui-ci étant lui-même étant un modèle d'un continu quelconque à une dimension. Ainsi les nombres naturels sont un modèle de la structure d'ensemble dénombrable totalement ordonné. Dedekind est à l'origine de l'axiomatique abstraite comme de la liaison constante de celle-ci avec des modèles la réalisant, double vue qui se retrouvera dans *Les fondements de la géométrie de Hilbert*, avant de constituer l'axe explicite de la théorie des modèles de Tarski.

5.4. Contrairement à ce que l'on dit parfois, les définitions par axiomes sont, du point de vue logique, non pas des définitions implicites, mais bien des définitions explicites, puisqu'elles consistent en un ensemble d'énoncés de CNS déterminant expressément la structure abstraite considérée ou, en d'autres termes, déterminant la compréhension et l'extension possible du concept considéré. L'expression 'définition implicite' vient de Gergonne (1771-1859), qui la présente comme une « phrase qui donne l'intelligence de l'un des mots dont elle se compose au moyen de la signification connue des autres ». Gergonne compare cette sorte de définitions à la détermination des inconnues dans un système d'équations algébriques et demande que ces définitions renvoient univoquement à un seul référent. Or, dans le meilleur des cas, une définition axiomatique détermine une structure à un isomorphisme près (théorie catégorique) ou à une équivalence élémentaire près (théorie complète

61 Deux mots en français pour le seul terme '*Begriff*' que la génération de mathématiciens allemands de la deuxième moitié du XIX^{e} siècle (Riemann, Dedekind, Hilbert, Emmy Nœther, B.L. van der Waerden pour n'en citer que quelques-uns) utilisaient pour désigner les structures (algébriques ou topologiques) abstraites. D'où l'expression rencontrée plus haut de « *begriffliche Mathematik* ».

au sens où les propositions du premier ordre vraies dans un modèle sont vraies dans n'importe lequel des modèles de la théorie sans qu'il existe nécessairement une bijection entre les domaines sous-jacents aux différents modèles).

En logique moderne on peut définir une définition implicite comme suit. Pour un langage L, P un nouveau symbole de relation, et un ensemble consistant $E(P)$ d'énoncés de $L \cup (P)$, $E(P)$ définit P implicitement si deux modèles quelconques de $E(P)$ ont la même interprétation de P.

Il est clair que pour Dedekind il n'est pas question de définition implicite ni au sens de Gergonne ni au sens actuel. En revanche, la conjonction C des quatre axiomes de la définition 71 de *Nombres* détermine exactement le sens et l'extension du concept de nombre ordinal[62]. Elle constitue une définition explicite puisqu'on peut poser l'équivalence logique de C avec la propriété « être un nombre ordinal ».

5.5. Définitions existentielles : non-contradiction

Dedekind a manipulé des classes infinies d'éléments, des classes de congruence ou des classes de fonctions, sans éprouver le besoin ni d'affirmer la prétention à l'existence ni de justifier l'usage de l'infini actuel. De même en 1872, il n'hésite pas à considérer l'ensemble infini de *tous* les nombres rationnels ou l'ensemble infini de *tous* les nombres réels. Dans la même ligne de pratique, il n'y a, à première vue, pas plus de problème à considérer l'ensemble infini de tous les nombres entiers. D'autant plus que Dedekind n'imaginait pas, au premier abord, que le produit direct d'une activité rationnelle de la pensée puisse enfermer une contradiction. Le nombres entiers naturels, étant une « émanation directe » des lois de l'esprit humain, étaient apparemment à l'abri de pareille difficulté logique. Mais

62 Je reproduis ces axiomes plus bas en 5.5.

lorsqu'il en vient à définir les entiers naturels comme modèle de la structure abstraite d'ensemble simplement infini, totalement ordonné, il est conduit à poser la question de l'existence de systèmes infinis. Les polémiques autour de l'infini actuel, alimentées par le développement de la théorie des ensembles de Cantor et ses justifications métaphysiques du transfini d'un côté, les anathèmes jetés sur cette théorie de l'autre, notamment par Kronecker, n'ont sans doute pas été étrangères au besoin de produire une justification logique irréfutable de l'existence d'ensembles infinis. *Les paradoxes de l'infini* de Bolzano, dont le § 13 vise à fournir une preuve de l'existence d'un ensemble infini actuel, et dont Dedekind prend connaissance en 1882, avant donc la version définitive de *Nombres*, ont probablement joué, par ailleurs, un rôle inducteur.

Quoiqu'il en soit, Dedekind ajoute donc à une première esquisse, qui ne la contenait pas, une preuve de l'existence de systèmes infinis (théorème 66 de *Nombres*), dont il déduit l'existence de systèmes simplement infinis (théorème 72). Dans sa lettre à Keferstein du 27 février 1890, Dedekind défend sa preuve contre la critique de son correspondant et résume sa démarche ainsi : « Une fois reconnus, dans mon analyse (71, 73), les caractères essentiels d'un système simplement infini, dont le type abstrait est la suite N des nombres, la question se posait de savoir s'il *existe* un tel système dans le monde de nos pensées. Sans preuve logique d'existence, on ne saurait décider si le concept d'un tel système ne contient pas éventuellement de contradictions internes. D'où la nécessité de telles preuves (66, 72 de mon écrit) ». Dans la perspective épistémologique de Dedekind, cette preuve est apparue nécessaire, car les ensembles sont, par définition, des *êtres de pensée*[63]. Il faut donc savoir s'il existe des ensembles infinis « dans le monde de nos pensées », et c'est exactement à cette question que répond cette « preuve

63 *Nombres*, définition 2.

d'existence », qui aurait dû confirmer la conviction de Dedekind selon laquelle la pensée est structurellement arithmétique et peut toujours, par une application [*Abbildung*], représenter une chose par une autre et passer d'une multiplicité *a*, *b*, *c*, ... à un ensemble {*a*, *b*, *c*, ...} d'éléments. Malheureusement, ce passage d'éléments multiples à un ensemble les réunissant en pensée, est sujet à une difficulté logique, qui sera levée par l'axiome de séparation [*Aussonderungsaxiom*] de Zermelo. Mais même indépendamment de cela, cette « preuve » n'en est pas une[64] ; elle ne démontre rien et ne fait qu'appliquer au « monde de nos pensées », dont l'admission comme ensemble est source de paradoxe, ainsi que Cantor l'a vainement fait observer à Dedekind, le procédé qui servira plus loin à définir un « système simplement infini » et la suite des entiers naturels (définitions 71 et 73). Dedekind y utilise en effet le concept de chaîne[65], celui d'application injective et la sélection d'un élément distingué. Selon la définition 71, l'essence d'un système simplement infini N consiste dans l'existence d'une application φ de N dans lui-même et d'un élément distingué, noté 1, tels que les quatre conditions suivantes soient satisfaites :

1°) $\varphi(N) \subset N$,

2°) $N = 1_0$,

3°) 1 n'est pas contenu dans $\varphi(N)$,

4°) φ est semblable (injective)[66].

On observera qu'un exemple (ou modèle) d'un système simplement infini est précisément la suite des entiers naturels, φ étant interprétée par la fonction successeur. Mais la définition 73 précise que les entiers naturels consistent en la *structure*

64 *Cf.* l'analyse de Jean-Pierre Belna (1996, §§ 5 et 6, 36-45).

65 Si l'on désigne par f une application quelconque (pas forcément injective) de E dans E, on dit qu'une partie A de E est une chaîne de E par rapport à f, si l'image $f(A)$ est contenue dans A. Dedekind note A_0 l'intersection de toutes les chaînes de E contenant A, qui est la plus petite des chaînes contenant A.

66 Peano a repris ces axiomes sous une forme et avec des notations différentes.

abstraite définie, indépendamment de « la constitution particulière des éléments » du système simplement infini considéré, par les quatre CNS ci-dessus. Le *nouveau* concept d'entier naturel défini par Dedekind consiste donc en la conjonction des CNS qui n'impliquent que les notions ensemblistes de sous-ensemble propre, de chaîne et d'application injective.

La tentative infructueuse de Dedekind de prouver l'existence d'un système infini a dicté à Zermelo la nécessité d'un axiome de l'infini et a ouvert le cycle des travaux logiques de Hilbert sur la consistance et la complétude de l'arithmétique des entiers et des réels[67].

Conclusion

Bien des auteurs rangent Dedekind dans le camp des logicistes, faisant, à tort, peu de différence entre lui et Frege. Dedekind, il est vrai, a affirmé que seule la logique permettait de fonder rigoureusement la science des nombres ; il a insisté à plusieurs reprises sur la nécessité d'observer les règles logiques pour des preuves mathématiques rigoureuses au lieu d'en appeler à l'intuition, dont il a prouvé sur l'exemple de l'analyse de l'espace euclidien qu'elle pouvait être trompeuse ; il a même présenté l'Arithmétique, l'Algèbre et l'Analyse comme une partie de la logique. Il a abordé le problème de la non-contradiction des définitions, a exigé qu'un ensemble d'axiomes pour une théorie soit complet au sens logique. Néanmoins, il n'est pas exact de qualifier Dedekind de logiciste. Je le montre en détail dans mes notes introductives aux différents écrits de Dedekind que j'ai réunis dans *La création des nombres*. Qu'il me suffise donc ici de citer brièvement quatre raisons essentielles qui

67 Sur la connexion des travaux de Hilbert avec ceux de Dedekind voir les travaux de Wilfried Sieg, notamment les articles publiés en 1999 et 2002.

s'opposent à la qualification de logiciste dans le cas de Dedekind.

D'abord, comme nous l'avons vu, Dedekind affirme certes *l'objectivité* des concepts mathématiques, mais il ne la justifie nulle part par l'existence d'*objets* logiques ou mathématiques *a priori* et indépendante des opérations de l'esprit. Sans quoi, il n'aurait pas constamment parlé de créativité et de progrès en mathématiques. La justification de l'objectivité repose, pour lui, sur la rationalité de la pensée mathématique[68], sur des contraintes internes aux méthodes et à la généralisation des concepts, ainsi que sur ce que Felix Klein a appelé « la continuité historique », c'est-à-dire le caractère à la fois cumulatif et rétroactif de l'acquis.

Ensuite, tout en insistant sur la nécessité pour les mathématiciens de construire des théories déductives (ou axiomatiques), Dedekind n'a pas considéré pour elle-même la relation de déduction et n'a jamais prétendu, comme Frege, réduire le calcul à la déduction[69]. La logique, comprise du reste en un sens général et antérieur aux précisions apportées par la logique mathématique, était pour lui *le moyen* de la rigueur, non *la base* des mathématiques. Une comparaison de son concept de chaîne et de la définition frégéenne de la fonction successeur, montre que loin de ramener la relation d'ordre de la suite des entiers naturels à celle de succession logique, Dedekind a réduit le concept de nombre à celui d'ensemble ordonné, et la notion d'ordre, à son tour, au concept de chaîne. Or celle-ci est construite avec les concepts d'ensemble et d'application.

Ce qui nous conduit à énoncer la troisième raison : les concepts primitifs de *Nombres* sont des concepts ensemblistes.

---

68 Bien que cette rationalité doive éventuellement être soumise au test logique de non-contradiction, il n'est pas absurde de distinguer entre rationalité et logique proprement dite.

69 Ce qui était le programme de *l'Idéographie* de Frege : « réduire le concept de succession dans une suite à celui de succession logique, pour, de là, passer au concept de nombre » (Avant-propos).

Dedekind n'a donc pas produit une définition logique du nombre, mais une définition qui respecte les règles de la logique. Les propriétés qui servent à caractériser les nombres réels ou continu arithmétique : relation d'ordre total dense, possédant la propriété de la coupure et sa réciproque sont toutes des propriétés mathématiques, irréductibles à des propriétés purement logiques. La même chose vaut pour les entiers naturels, on vient de le voir en 5.5. Dans le premier volume de ses *Grundgesetze* (1893), Frege remarque que Dedekind a écrit que l'Arithmétique est une partie de la logique, mais qu'il n'a absolument pas réalisé son programme, puisqu'il a réduit le concept de nombre, non pas à des notions logiques, mais à des notions mathématiques. Dedekind avait, de son côté, observé que Frege et lui-même divergeaient sur la nature du concept de nombre[70]. Les deux auteurs sont donc d'accord sur le fait de leur divergence concernant la rôle de la logique et la définition du nombre.

Enfin, quatrième raison, Dedekind manipule la notion extensionnelle de système et fait un usage non logique du terme 'concept', qui désigne systématiquement chez lui des entités, des structures ou des méthodes mathématiques. Or Frege critique à maintes reprises la notion d'ensemble[71], lui préfère celle de concept dont il fait un terme technique de logique. Selon Frege, « un concept est une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité »[72]. Dedekind, on l'a vu, prend concept au sens d'opération ou d'entité mentale, ce qui ne l'empêche pas

70 *Nombres*, 2e préface.

71 *Cf.* par exemple, Frege (1884, § 45, trad. frç., 175) : « le nombre ne naît pas de l'addition d'une chose à une autre, et l'attribution d'un nouveau nom après chacune de ces adjonctions ne fait rien à l'affaire. Les expressions 'multiplicité', 'ensemble', 'pluralité' sont, par leur indétermination, inaptes à apporter quelque lumière sur le nombre ». Mais, bien entendu, attribuer un nouveau nom n'est pas ce que fait Dedekind. Ce qui l'intéresse c'est le concept désigné par le nom ou le signe. Pour ne prendre qu'un exemple, la définition de la « définition par induction » du théorème 126 de *Nombres* inaugure l'important domaine de la récursivité.

72 *Funktion und Begriff*, publié par Frege en 1891 ; trad. frç. (1971).

d'établir une théorie extensionnelle de ces entités. Pour autant, il ne défend pas plus que Frege un point de vue psychologiste. Les « lois de la pensée » ont pour lui la même objectivité mathématique qu'elles en avaient pour George Boole (1815-1864)[73]. Ou, plus exactement, Dedekind a mathématisé à sa manière propre ce qu'il a considéré comme les opérations les plus fondamentales de l'entendement. Son conceptualisme postkantien n'est ni un psychologisme empirique, et cela en dépit du malheureux « théorème 66 », ni un subjectivisme transcendantal, et cela en dépit du leitmotiv de la création des concepts mathématiques comme constitutifs de l'objectivité et du progrès. Et si, pour finir, l'on se restreint à la seule considération du rapport entre mathématiques et logique, il serait plus juste de parler de « l'arithmétisme ensembliste » de Dedekind, par contraste avec le logicisme de Frege.

Je remercie Michael Detlefsen et Pierre Joray pour leurs remarques, qui m'ont permis d'améliorer mon texte sur certains points.

73 *An Investigation Into the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* est publié en 1854.

Références bibliographiques

BONIFACE Jacqueline (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*. Paris : Ellipses.

BELNA Jean-Pierre (1996). *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. Paris : Vrin.

CANTOR Georg (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. E. Zermelo (éd.) [reproduction Hilsdeheims : Olms, 1966].

CAVEING Maurice (1982). Quelques remarques sur le traitement du continu dans les *Éléments* d'Euclide et la *Physique* d'Aristote. In : *Penser les mathématiques*. Paris : Seuil, 145-166 [collection Points Sciences].

DEDEKIND Richard (1930-1932). *Gesammelte mathematische Werke, I, II, III*. E. Nœther & R. Fricke (éds). Öystein Ore : Braunschweig, Vieweg.

DEDEKIND Richard (1937). Correspondance avec Cantor. J. Cavaillès & E. Nœther (éds) sous le titre *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Paris : Hermann [trad. fr. in : Cavaillès, *Philosophie mathématique*. Paris : Hermann, 1962].

DEDEKIND Richard (2008). *La création des nombres*. H. Benis Sinaceur (éd.). Paris : Vrin (à paraître).

DESCARTES René. *Règles pour la direction de l'esprit*. Paris : Gallimard, La Pléiade, 33-119.

EUCLIDE (1990-2001). *Les Éléments*. M. Caveing & B. Vitrac (éds). Paris : PUF, 4 vols.

FREGE Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematischen Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau : Köbner [trad. fr. Paris : Seuil, 1969].

FREGE Gottlob (1891) Funktion und Begriff [trad. fr. in : *Écrits logiques et philosophiques*. Paris : Seuil, 1971].

FREGE Gottlob (1893, 1903). *Die Grundgesetze der Arithmetik.* Jena : Verlag Hermann Pohle, 2 vols.

GERGONNE Joseph (1818). Essai sur la théorie des définitions. *Annales de mathématiques pures et appliquées* IX, 1-35.

HILBERT David (1899). *Die Grundlagen der Geometrie.* Leipzig : Teubner [10e éd. augmentée par P. Bernays, Stuttgart, 1968 ; trad. fr. par P. Rossier. Paris : Dunod, 1971].

HOUZEL Christian (2008). L'analogie entre théorie des nombres et théorie des fonctions. In : M.-J. Durand-Richard (sous la dir.), *L'analogie dans la démarche scientifique.* Paris : L'Harmattan, 97-110.

JORAY Pierre (2005). Logicisme et définition explicite. In : *Le logicisme catégoriel.* Université de Neuchâtel : Travaux de logique 16, 37-58.

LEIBNIZ Wilhelm Gottfried (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris : Garnier-Flammarion.

RECK Erich H. (2003). Dedekind's structuralism : an interpretation and partial defense. *Synthese* 137, 369-419.

RIEMANN Bernhard (1876). *Gesammelte mathematische Werke.* R. Dedekind et H. Weber (éds). Leipzig : Teubner [2e éd. 1892. Trad. fr. L. Laugel, *Œuvres mathématiques de Riemann.* Paris : A. Blanchard, 1897 ; nouveau tirage, 1968].

SIEG Wilfried (1990). Relative consistency and admissible domains. *Synthese* 84, 259-297 [reproduit dans J. Ferreirós & J.J. Gray (eds), *The architecture of modern mathematics.* OUP, 2006, 339-368].

SIEG Wilfried (2002). Beyond Hilbert's Reach ? In : D. Malament (ed.), *Reading Natural Philosophy - Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics.* Chicago : Open Court Press, 363-405.

SIEG Wilfried & SCHLIMM Dirk (2005). Dedekind's Analysis of Number : systems and axioms. *Synthese* 147, 121-170.

SINACEUR (Benis) Hourya (1991). *Corps et modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle.* Paris : Vrin [2e éd. 1999].

TAIT W. W. (1986). Truth and proof : The Platonism of mathematics. *Synthese* 69, 341-370.

TAIT W. W. (1997). Cantor versus Frege and Dedekind : On the concept of number. In : W. W. Tait (ed.), *Early analytic philosophy*. Chicago : Open Court Press, 213-248.

TARSKI Alfred (1924). Sur les ensembles finis. *Fundamenta mathematicae* 6, 45-95.

ZUBER Richard (1990). Article Définition créative. In : *Encyclopédie philosophique universelle, Les Notions philosophiques*, Dictionnaire 1. Paris : Presses Universitaires de France, 568.