Publié dans Travaux de logique 11, 223-234, 1997,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

SPÉCIFICITÉ ET POTENTIALITÉS DE LA LOGIQUE FLOUE

Bernadette BOUCHON-MEUNIER

1. Pourquoi la logique floue?

Le terme «logique floue» a deux acceptions: la première, la plus stricte, la définit comme une extension de la logique classique destinée à raisonner sur des connaissances imparfaites. La seconde, très répandue actuellement, fait référence à tous les développements concernant les théories des sous-ensembles flous et des possibilités. Nous nous intéressons ici à la première acception.

La théorie des sous-ensembles flous a été introduite en 1965 par Lotfi A. Zadeh, professeur à l'Université de Californie à Berkeley, internationalement reconnu pour ses travaux en automatique et théorie des systèmes, qui a éprouvé le besoin de formaliser la représentation et le traitement de connaissances imprécises ou approximatives, afin de pouvoir traiter des systèmes d'une grande complexité dans lesquels sont, par exemple, présents des facteurs humains. Elle a pour but d'assouplir la théorie des ensembles classique, en autorisant un élément d'un univers à appartenir partiellement à une classe donnée de cet univers.

Le concept de sous-ensemble flou a été introduit pour éviter les passages brusques d'une classe à une autre (de la classe «bon» à la classe «mauvais» par exemple) et autoriser des éléments à n'appartenir complètement ni à l'une ni à l'autre (à être «médiocres», par exemple), ou encore à appartenir partiellement à chacune (avec un fort degré à la classe «bon» et un faible degré à la classe «mauvais»). La définition d'un sous-ensemble flou répond au besoin de représenter des connaissances imprécises (une note d'«environ 15/20» ou un élève «relativement bon»). Le caractère graduel des sous-ensembles flous correspond à l'idée que, plus on se rapproche de la caractérisation typique d'une classe, plus l'appartenance à cette classe est forte (il est sûr qu'avec 19/20, un élève est bon, avec 1/20, il est mauvais, mais à partir de quelle note passe-t-il d'une classe à l'autre et un centième de point d'écart entre deux étudiants peut-il les faire appartenir à deux classes différentes?). Rappelons qu'un sous-ensemble flou A de l'univers X est défini par une fonction d'appartenance $f_A: X \rightarrow [0, 1]$. Si celle-ci prend la valeur 1 en au moins un point de X, elle est dite normalisée.

Ainsi, la théorie des sous-ensembles flous conduit-elle à une méthode de représentation des connaissances imparfaites sur un système ou une situation, c'est-à-dire des connaissances soumises à des imprécisions, à l'utilisation de critères qualitatifs, approximatifs, reflétant une absence de rigueur des observateurs ou une flexibilité inhérente au système.

Au delà de la représentation des connaissances, il est nécessaire de mettre au point des méthodes d'exploitation de ces connaissances. Certaines méthodes peuvent être directement déduites de la théorie des sous-ensembles flous. C'est le cas, par exemple, de méthodes de classification, de traitement d'images, de gestion de requêtes imprécises adressées à des bases de données, de calcul sur des quantités floues... Cependant, bien des méthodes d'exploitation de connaissances nécessitent un raisonnement, l'établissement d'une conclusion à partir de données décrivant une situation. C'est le cas, par exemple, pour les systèmes d'aide au diagnostic, les systèmes experts. Raisonner sur des connaissances imparfaites a été l'un des objectifs affichés très tôt par L.A. Zadeh, avec la volonté de proposer un mode de raisonnement qui soit proche du raisonnement humain, puisque les humains sont aptes à fournir des conclusions précises et pertinentes à partir de descriptions approximatives, mal connues, imprécises.

Pour raisonner à partir de connaissances imprécises, il faut aussi être capable de traiter des incertitudes exprimant des doutes non probabilistes, à caractère subjectif, ce que ne permet pas la théorie des sous-ensembles flous. Imaginons la règle précise «si l'élève a au moins 10, il est admis», et cherchons une conclusion sur l'admission d'un élève qui a «à peu près 10» (connaissance imprécise), nous ne pouvons faire mieux qu'énoncer un diagnostic incertain tel que «l'élève est peut-être admis». L.A. Zadeh a donc introduit en 1978 la théorie de possibilités qui complète la théorie des sous-ensembles flous, en proposant une représentation de connaissances incertaines compatible avec celle-ci afin de parvenir à un raisonnement approximatif. Notons qu'imprécision et incertitude sont étroitement liées, «à peu près 10» (imprécis) entraînant par exemple «peut-être plus de 10, peut-être moins de 10» (incertain), et que la compatibilité entre représentation des imprécisions (sous-ensembles flous) et représentation des incertitudes (possibilités) est donc nécessaire.

La théorie des possibilités introduit une double pondération de tout sous-ensemble d'un univers de définition X d'une variable (par exemple la note d'un élève, définie sur [0, 20]) par une mesure de possibilité Π et une mesure de nécessité N indiquant respectivement à quel point il est possible que la valeur (inconnue) de la variable appartienne à ce sous-ensemble et à quel point ceci est certain. On démontre que, si la connaissance sur la valeur de la variable est imprécise, et donc représentée par un sous-ensemble flou A de X, alors $f_A(x)$ indique à quel point il est possible que x soit la vraie valeur de la variable, étant donné la connaissance de A supposé normalisé, c'est-à-dire que $\Pi(\{x\})$ vaut alors $f_A(x)$. C'est ce passage entre flou et possibilités qui établit la compatibilité entre les deux théories.

Théories des sous-ensembles flous et des possibilités sont les deux piliers sur lesquels repose le raisonnement approximatif en logique floue.

2. Comment est introduite la logique floue?

La logique floue a été introduite par Goguen (1969) à partir de la définition d'une grammaire formelle de concepts inexacts, qu'il construit en s'appuyant sur la notion de sous-ensemble flou. Elle a ensuite été présentée par L.A. Zadeh (1983) comme un moyen de raisonner «à la manière des humains», donc en utilisant des connaissances admettant l'imprécision inhérente à la plupart des éléments d'information que les humains manipulent pour raisonner et c'est cette approche qui prévaut actuellement.

Les besoins sous-jacents à l'introduction de logique floue sont liés à la nécessité de raisonner sur des connaissances imparfaites.

– Puisqu'on s'autorise à traiter de l'imprécision, il est nécessaire de manipuler des connaissances vagues, imprécises, approximatives, exprimées avec des mots du langage naturel; remarquons néanmoins que la logique floue n'a pas la prétention de traiter toute la richesse du langage naturel, mais qu'elle prend en compte des granules de connaissances issus d'expressions en langage naturel.

– Il est également nécessaire d'accepter que la vérité soit elle-même modulable: une proposition peut être tout à fait vraie, fausse, relativement vraie, …

– Le raisonnement humain est capable d'éviter les ruptures brusques entre les situations strictement compatibles avec une règle de déduction et les autres situations: par exemple, un service de recrutement qui exige «15/20 en économie» à un examen acceptera vraisemblablement un candidat avec un excellent dossier qui aura seulement 14,98. De même, un système de raisonnement en logique floue doit exploiter des connaissances «voisines» de celles attendues en prémisse d'une règle de déduction, pour fournir une conclusion éventuellement soumise à une incertitude ou à une faible spécificité si la relation de «voisinage» n'est pas très forte, mais pour fournir une conclusion tout de même, ce que ne ferait pas un système en logique ordinaire.

– Les quantificateurs universel et existentiel sont également insuffisants pour représenter les quantificateurs que l'humain manipule. Par exemple, des expressions comme «dans presque tous les cas» ou «dans la majorité des cas» sont très naturelles et doivent pouvoir être prises en compte dans un système de raisonnement en logique floue.

Ces raisons, parmi les principales pour montrer l'impossibilité de se servir de la logique classique afin de raisonner sur des connaissances imparfaites, conduisent à la logique floue, extension de la logique classique. Des logiques multivaluées ont été introduites et largement développées, à partir des recherches de Lukasiewicz en 1928, pour assouplir la notion de degré de vérité. Mais ces travaux ne s'intéressent pas à l'expression et à la représentation des connaissances imprécises, ils n'ont pas pour vocation de traiter des termes issus du langage naturel et, s'ils ne sont pas étrangers à la logique floue, ils ne sont pas suffisants pour répondre à tous les besoins exprimés plus haut.

3. Qu'est-ce que le raisonnement en logique floue?

Les propositions sont des propositions floues définies à partir d'un ensemble L de variables linguistiques (V, X, T_V), où V est une variable (la qualité, l'âge...), X son univers de définition, T_V un ensemble de caractérisations linguistiques représentées par des sous-ensembles flous de X, et d'un ensemble M de modificateurs linguistiques (transformations de fonctions d'appartenance représentant des adverbes tels que «très», «relativement»...). Reprenant l'exemple précédent, on pourra avoir pour le résultat à un examen V, l'univers X = [0, 20], et choisir T_V = {mauvais, médiocre, bon}, ou un ensemble plus finement décrit en ajoutant «nul» et «excellent». On impose généralement que, pour tout x de X, il existe une caractérisation A de T_V telle que $f_A(x) \neq 0$.

Les propositions floues élémentaires sont de la forme «V est A», où A est dans T_V ou construit à partir d'un élément de T_V à l'aide d'un modificateur (par exemple A = «très B», avec B dans T_V), ou bien A est une valeur précise de X.

La valeur de vérité des propositions appartient à tout l'intervalle [0, 1] et elle est fournie par la fonction d'appartenance de la caractérisation floue utilisée dans la proposition floue. Une valeur de vérité égale à 1 (respectivement à 0) correspond à une proposition absolument vraie (respectivement absolument fausse).

Des quantificateurs flous peuvent être utilisés, qui sont des sous-ensembles flous de l'univers [0, 1].

Dans le cas particulier où toutes les propositions floues sont booléennes, c'est-à-dire qu'elles sont soit absolument vraies, soit absolument fausses, la logique floue est identique à la logique classique. Les sous-ensembles classiques étant des cas particuliers de sous-ensembles flous, cette identité est naturelle: des connaissances précises, correspondant au fait que la variable V prend la valeur précise x_0 de l'univers X (par exemple «la note est de 11/20», ou encore «la décision est d'accepter»), sont associées à des sous-ensembles flous particuliers de X, de fonction d'appartenance égale à 1 en x_0 et à 0 ailleurs.

Des opérateurs logiques sont définis à partir de normes triangulaires pour la conjonction et de conormes triangulaires pour la disjonction (Schweizer, Sklar 1963). Par exemple, la valeur de vérité associée à la conjonction de propositions «V est A et W est B» est $T(f_A(x), f_B(y))$, en tout x de l'univers X de V et y de l'univers Y de W, pour une norme triangulaire T telle que le minimum. De même la valeur de vérité associée à la disjonction de propositions «V est A ou W est B» est $\perp(f_A(x), f_B(y))$, en tout x de X et y de Y, pour une conorme triangulaire $\perp$ telle que le maximum. La valeur de vérité de la négation de «V est A» est définie à partir d'un opérateur monotone décroissant de $f_A(x)$, généralement $1-f_A(x)$. Opérateurs de conjonction et de disjonction sont choisis en liaison l'un avec l'autre pour préserver le maximum des propriétés habituelles en logique classique. C'est le cas par exemple pour min et max, pour $T(a,b) = ab$ et $\perp(a,b) = a+b-ab$, pour $T(a,b) = \max(a+b-1, 0)$ et $\perp(a,b) = \min(a+b, 1)$, ces paires vérifiant les lois de De Morgan pour la négation définie plus haut.

L'implication floue entre deux propositions floues élémentaires «V est A» et «W est B» est une proposition floue concernant le couple de variables (V, W), dont la valeur de vérité est donnée par la fonction d'appartenance f_R d'une relation floue R entre X et Y définie, pour tout (x, y) de $X \times Y$ par:

$$f_R(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y)),$$

pour une fonction Φ de $[0, 1]\times[0, 1] \to [0, 1]$. De nombreuses formes de Φ ont été introduites, à partir d'extensions de l'implication en logique classique. Citons par exemple

$$f_R(x, y) = \max(1 - f_A(x), f_B(y)),$$

qui représente $\neg$ V est A $\vee$ W est B, ou encore l'implication floue de Lukasiewicz

$$f_R(x, y) = \min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1).$$

L'intérêt d'utiliser de telles implications apparaît dans la définition du modus ponens généralisé. Considérons une règle floue de la forme «si V est A alors W est B» et une proposition floue «V est A′», avec A′ plus ou moins différent de A. Une extension du modus ponens classique doit préserver celui-ci, c'est-à-dire correspondre à l'obtention d'une conclusion «W est B′ » telle que B′ soit identique à B dès que A′ est identique à A. On définit B′ par sa fonction d'appartenance:

$$\forall y \in Y \quad f_{B'}(y) = \sup_{x\in X} F(f_{A'}(x), f_R(x,y)),$$

pour une norme triangulaire F compatible avec l'implication floue R relativement à la préservation du modus ponens. On peut ainsi utiliser $F(a,b) = \max(a+b-1, 0)$ avec les deux implications floues données en exemple.

Ainsi, avec une règle floue telle que «si le résultat de l'examen est bon, alors la candidature est acceptable», et une proposition floue «le résultat de l'examen est relativement bon», où «relativement» est représenté par un modificateur linguistique, le modus ponens généralisé fournira une conclusion «la candidature est B′», où B′ pourra s'interpréter par «à peu près acceptable», forme moins spécifique que «acceptable», ou encore «peut-être acceptable, mais ce n'est pas absolument certain», selon l'implication floue utilisée.

Le schéma du modus ponens généralisé est encore valable lorsque prémisse et conclusion de la règle floue sont la conjonction ou la disjonction de propositions floues élémentaires.

Un tel schéma est le plus répandu dans les systèmes de déduction dans le cadre d'une représentation des connaissances par des ensembles flous.

4. Quelles sont les autres possibilités de raisonner dans un environnement flou?

Dans le cas où l'on ne manipule que des incertitudes non probabilistes, indiquant une absence de fiabilité dans la source d'information, on peut se placer dans un cadre possibiliste sans utiliser de sous-ensemble flou. La logique possibiliste, reposant sur la théorie des possibilités, permet alors de raisonner sur de telles connaissances, en utilisant les degrés avec lesquels il est possible et il est certain que les différentes propositions soient vraies. (Dubois, Prade 1984; 1987). Des liens ont été établis entre logique possibiliste et logique modale et la logique possibiliste a des développements en démonstration de théorèmes.

Le cadre de la théorie des sous-ensembles flous et de la théorie des possibilités permet de généraliser à des connaissances imparfaites d'autres formes de raisonnement, telles que:

- le raisonnement par défaut, pour lequel il est possible d'avoir une approche possibiliste, par exemple (Yager 1987),
- le raisonnement temporel, avec une approche basée sur des intervalles flous du temps (Dubois, Prade 1989),
- le raisonnement syllogistique (Zadeh 1985) où l'on combine des règles floues pondérées par des quantificateurs flous, tels que «pour Q_1 des individus, si V est A alors W est B», «pour Q_2 des individus, si W est B alors S est C», pour quel Q peut-on dire que «pour Q des individus, si V est A alors S est C?», avec par exemple des quantificateurs flous tels que Q_1 = «une majorité», Q_2 = «la presque totalité»...

D'autres types de raisonnement, que l'on rencontre en intelligence artificielle par exemple, peuvent être étendus à des connaissances imparfaites. C'est le cas des méthodes de généralisation, par exemple, qui sont issues du fonctionnement naturel des êtres humains pour obtenir une conclusion sur une situation donnée, étant donné les connaissances déjà acquises et l'expérience passée. On suppose donné un ensemble d'objets ou de situations connus décrits à l'aide d'attributs (un ensemble de candidats, décrits par leur âge, leur note à l'examen, le nombre de langues parlées...) et affectés d'une classe ou d'une décision (candidature acceptable, candidature inacceptable, par exemple) dans le passé. Cet ensemble constitue une base d'apprentissage, dont on se sert pour identifier la classe ou la décision à prendre en présence d'un nouveau cas (nouveau candidat, par exemple, dont on connaît les valeurs des attributs.

Les notions de ressemblance, d'analogie, de similitude entre situations, sous-jacentes à la généralisation des résultats connus sur la base d'apprentissage à tout nouveau cas, conduisent à penser qu'une représentation floue des connaissances peut être intéressante. De plus, lorsqu'on a à faire avec des connaissances numériques, il est toujours délicat de faire une différence entre deux situations dont les descriptions sont «voisines» et d'établir des seuils brutaux au-delà desquels une décision à prendre doit changer. La difficulté est encore accrue lorsque toutes les situations ne sont pas décrites avec des valeurs d'attribut du même type, par exemple lorsque certaines notes sont indiquées comme «bonnes» et d'autres avec des valeurs précises. Pour toutes ces raisons, on est amené à utiliser une représentation des connaissances floues dans différents schémas de généralisation.

Le premier mode de raisonnement par généralisation, le raisonnement inductif, ou apprentissage à partir d'exemples, recherche les attributs les plus significatifs relativement à la prise de décision souhaitée et les ordonne par ordre d'importance décroissante dans un arbre de décision. Chaque nœud de l'arbre est ainsi associé à un test sur un attribut, chaque arc issu de ce nœud étant associé à une valeur du test. Par exemple, pour un nœud associé à la note à l'examen, chaque branche pourra être associée respectivement à «approximativement supérieure à 14», «approximativement inférieure à 14», représentés par des sous-ensembles flous de [0, 20]. Les sommets terminaux de l'arbre correspondent à une décision identifiée. Pour chaque nouveau cas, on compare la valeur de l'attribut aux nœuds successifs de l'arbre avec celle indiquée dans le test. Le résultat est un degré de compatibilité entre 0 et 1, propagé jusqu'aux sommets terminaux de façon à déterminer avec quel degré de satisfiabilité une décision peut être prise (Bouchon-Meunier, Marsala, Ramdani 1996).

Le deuxième de ces modes est le raisonnement à partir de cas ou le raisonnement par analogie, proches l'un de l'autre. On cherche dans la base d'apprentissage la situation qui ressemble le plus à la nouvelle situation à traiter et l'on propose une décision à partir de la décision qui a été prise pour cette situation antérieure. Pour déterminer à quel point deux situations se ressemblent, on utilise des relations floues de ressemblance (Bouchon-Meunier, Valverde 1993) ou des mesures de comparaison de valeurs floues (Bouchon-Meunier, Rifqi, Bothorel 1996).

Un autre mode de généralisation est le raisonnement à partir de prototypes. On cherche dans la base d'apprentissage des familles de situations se ressemblant, on en détermine un prototype et la nouvelle situation sera rapprochée du prototype auquel elle ressemble le plus. Ici encore, la comparaison de valeurs floues d'attributs s'impose et la tâche de recherche de prototype peut être envisagée dans un environnement flou, une candidature retenue étant par exemple caractérisée par «plutôt jeune, avec une bonne note générale, et une excellente note en économie» (Rifqi 1996).

5. Conclusion

Il convient d'utiliser la logique floue lorsque des imperfections entachent la connaissance dont nous disposons pour raisonner. Elle est aussi intéressante toutes les fois que des informations numériques et des informations qualitatives, symboliques, linguistiques, doivent être traitées simultanément. C'est même le seul cadre formel dans lequel un tel traitement est possible. C'est également le seul cadre dans lequel puissent être traitées des imprécisions et des incertitudes, et il autorise également le traitement d'incomplétudes dans les connaissances.

Raisonner en logique floue peut avoir plusieurs facettes. La plus communément répandue est la déduction par modus ponens généralisé dans une extension de la logique classique. Mais le fait de rechercher un raisonnement proche du raisonnement humain conduit à d'autres facettes, dans lesquelles l'imprécis, l'approximatif, sont pris en compte au même titre que la ressemblance, l'analogie. La richesse de la théorie des ensembles flous, d'une part, de la théorie des possibilités, d'autre part, conduit à bien des formes de raisonnement, dont toutes n'ont pas encore été explorées profondément, et dont nous avons tenté de donner un panorama aussi général que possible, bien que non exhaustif.

CNRS - LAFORIA
Université Paris VI - Boîte 169
4, place Jussieu -
F - 75252 PARIS CEDEX 05

Références

BOUCHON-MEUNIER B. (1993). *La logique floue*. Paris: P.U.F, Que Sais-je? n° 2702, 2e éd. 1994.

BOUCHON-MEUNIER B. (1995). *La logique floue et ses applications*. Paris: Addison Wesley.

BOUCHON-MEUNIER B., RIFQI M., BOTHOREL S. (1996) Towards general measures of comparison of objects. *Fuzzy Sets and Systems* 84. 2, 143-153.

BOUCHON-MEUNIER B., MARSALA C., RAMDANI M. (1993). Inductive learning and fuzziness. *Scientia Iranica* 2.4, 289-298, 1996.

BOUCHON-MEUNIER B., VALVERDE L. (1993). Analogical reasoning and fuzzy resemblance. In: B. Bouchon, L. Valverde, R.R. Yager (eds.), *Intelligent Systems with Uncertainty*. Amsterdam: Elsevier.

DUBOIS D., PRADE H. (1984). The management of uncertainty in expert systems: the possibilistic approach. *Proc. 10th Triennal IFORS Conference*. Dordrecht: North Holland, 949-964.

DUBOIS D., PRADE H. (1987). *Théorie des possibilités, applications à la représentation des connaissances en informatique*. Paris: Masson, 2e éd.

DUBOIS D., PRADE H. (1989). Processing fuzzy temporal knowledge. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 19, 729-744.

GOGUEN J.A. (1969). The logic of inexact concepts, *Synthese* 19, 325-373.

RIFQI M. (1996). *Mesures de comparaison, typicalité et classification d'objets flous: théorie et pratique*. Thèse de l'Université Paris VI.

SCHWEIZER B., SKLAR A. (1963). Associative functions and abstract semigroups. *Publications Mathematicae Debrecen* 10, 69-81.

YAGER R.R. (1987). Using approxiate reasoning to represent default knowledge. *Artificial Intelligence* 31, 99-112.

YAGER R.R., OVCHINNIKOV S., TONG R.M., NGUYEN H.T. (1987). *Fuzzy Sets and Applications, Selected Papers by L.A. Zadeh*. London: John Wiley & Sons.

ZADEH L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338-353.

ZADEH L.A.(1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* 1, 2-28

ZADEH L.A. (1983) The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. *Fuzzy Sets and Systems* 11, 199-227.

ZADEH L.A. (1985). Syllogistic reasoning in fuzzy logic and its application to usuality and reasoning with dispositions, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics* SMC 15, 754-763.