

Une nouvelle technique de calcul de la perméabilité équivalente des milieux poreux : la renormalisation simplifiée

Philippe Renard et Gaëlle Le Loc'h

Résumé Cette Note présente une nouvelle technique de calcul de la perméabilité équivalente. L'approche est basée sur la synthèse de deux travaux antérieurs : un algorithme itératif proposé par Le Loc'h (1987) et une formule de composition de moyennes, permettant de prendre en compte l'anisotropie, proposée par Krueel-Romeu (1994).

Mots-clés : Perméabilité équivalente, Milieux poreux, Hétérogénéité.

Abstract **A new upscaling technique for the permeability of porous media: the simplified renormalization**

This paper presents a new technique for upscaling permeability. The approach is based on the merging of two previous works: an iterative algorithm proposed by Le Loc'h (1987) and a composition formula proposed by Krueel-Romeu (1994) to take anisotropy into account.

Keywords: Upscaled permeability, Porous media, Heterogeneity.

IN the context of groundwater flow simulation, one has to solve the classical flow equations [equation (1)]. But in most of the cases, porous media are heterogeneous and the permeability tensor \mathbf{k} varies in space. To take into account this heterogeneity it is common to have to upscale the permeability. This operation consists of the computation of a large scale permeability based on the knowledge of the local permeabilities (see Renard and de Marsily, 1995, for a review).

We propose a new technique to compute the upscaled permeability. The two main assumptions are: (1) the flow is assumed to be uniform (statistically parallel); and (2) the local permeability tensors are supposed to be diagonal and known on a regular grid.

The first step is to group iteratively the cells two by two (Le Loc'h, 1987), and to calculate the permeability of the cell pairs by applying the theoretical results in a one dimensional space. This leads to the harmonic

mean if the cells are in series or the arithmetic mean of if the cells are in parallel (fig. 1). The upscaled permeability is calculated by grouping the cells alternatively in parallel and in series (fig. 2).

If the algorithm starts with a grouping in parallel, the final value obtained at the end of the iterative procedure is denoted c_{\max} . It is always higher than the final value c_{\min} obtained when the algorithm starts with a grouping in series.

The second step is to use these two values in equation (2) to give a unique estimation of the upscaled permeability. This formula is very close to Krueel-Romeu's one (1994). Its physical meaning is that, depending on the anisotropy, the upscaled permeability can be closer to c_{\min} when the flow is perpendicular to the stratification or closer to c_{\max} when the flow is parallel to the stratification. The ratios σ_u , $u \in \{x, y, z\}$ used in equation (3) quantify the anisotropy due to flattened grid (d_x and d_y

represent the size of the cells in direction u and v) as well as the anisotropy of the local permeabilities (which is assumed constant over the whole mesh).

The main difference between equation (2) and Krueel-Romeu's formula is the use of c_{\min} and c_{\max} instead of the Cardwell and Parsons bounds (1945). This is motivated by the fact that the difference between c_{\min} and c_{\max} is smaller than the difference between the Cardwell and Parsons bounds because the iterative algorithm permits to take into account more precisely the spatial distribution of the local permeabilities.

A preliminary test of the technique was conducted on two types of synthetic media (truncated gaussian random function and boolean model) with two block sizes: $128 \times 128 \times 64$ and $16 \times 16 \times 8$ cells. To investigate the effect of anisotropy the cell size was set to $10 \times 10 \times 1$ m. By solving the flow equation under the standard no-flow conditions (a constant head is imposed on two parallel faces and no flow on the other boundaries). We

have been able to compare the fluxes [equation (6)] in the heterogeneous media and in the homogenous equivalent media. We noted [equations (7)-(9)] that under this type of boundary conditions the energy dissipated by the viscous forces in the heterogeneous porous media is proportional to the total flux. Then, figure 3 permits to compare both the fluxes and the energy dissipated for the heterogeneous media and the homogenous equivalent media. This figure shows a good agreement between the quick estimations and the references except for the vertical flow and the large blocks (fig. 3 d).

From a practical point of view the new simplified renormalization is at least 200 times quicker than a finite element multigrid resolution of the flow equations.

In conclusion, the proposed method appears efficient and accurate to estimate the upscaled permeability in the case of uniform flow conditions – at least for the media tested here.

1. PROBLÉMATIQUE

Ce travail se situe dans le contexte de la modélisation mathématique des écoulements en milieu poreux souterrain. Les équations régissant ce type d'écoulement sont la loi de Darcy (1856) et la loi de conservation du volume pour les fluides supposés incompressibles :

$$(1) \quad \vec{v} = -\mathbf{k} \vec{\nabla}(h) \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{v}) = 0$$

\vec{v} représente la vitesse de filtration, h la charge hydraulique et \mathbf{k} le tenseur de conductivité hydraulique ou perméabilité. L'observation montre que les milieux naturels sont hétérogènes : \mathbf{k} varie dans l'espace. Pour prendre en compte cette hétérogénéité dans un modèle numérique d'écoulement, il est souvent nécessaire de changer d'échelle.

Ainsi, de nombreux auteurs se sont intéressés au calcul de la perméabilité équivalente à partir des perméabilités locales (voir Renard et de Marsily, 1995, pour une synthèse bibliographique). Nous proposons une

nouvelle technique de calcul de la perméabilité équivalente, extrêmement simple et donc très efficace lors du traitement de grandes quantités de données.

Notons tout de suite que la technique a été élaborée pour le cas d'écoulements globalement parallèles et n'a pas encore été testée sous d'autres conditions (écoulement radial par exemple).

2. PRÉSENTATION DE LA TECHNIQUE

Le champ de perméabilité est supposé connu sur une grille régulière. Les tenseurs de perméabilité \mathbf{k} varient d'une maille à l'autre, mais sont supposés diagonaux (cela signifie que les axes principaux d'anisotropie sont supposés être les axes du maillage) et constants dans chaque maille.

Procédure itérative

La méthode que nous proposons ne permet que le calcul des termes diagonaux

du tenseur de perméabilité équivalente :

$$K = \begin{pmatrix} K^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K^{zz} \end{pmatrix}$$

Pour calculer K^u , $u \in (x, y, z)$, l'idée de base (Le Loc'h, 1987) consiste à regrouper les mailles de la grille fine par paquets de deux. Si les mailles sont en série par rapport à la direction u , alors on affecte au paquet la moyenne harmonique des perméabilités directionnelles locales. Si les mailles sont en parallèle, alors on affecte au paquet la moyenne arithmétique des perméabilités directionnelles locales (fig. 1). L'application de regroupements successifs alternativement en parallèle et en série permet de réduire progressivement le nombre de mailles de la grille, jusqu'à ne plus avoir qu'une seule maille (fig. 2).

Si l'on commence par regrouper les mailles en série (dans la direction u), puis à les regrouper en parallèle suivant la (en deux dimensions) ou les (en trois dimensions) direction(s) perpendiculaire(s), et si l'on répète cette opération jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une maille, on obtient une valeur notée c_{min}^{uu} .

Si l'on commence par regrouper les mailles en parallèle, puis si l'on poursuit le regroupement en série en itérant la procédure, on obtient une seconde valeur, toujours supérieure ou égale à la première et notée c_{max}^{uu} .

Prise en compte de l'anisotropie

Finalement, la perméabilité dans la direction u est obtenue en composant ces deux valeurs. L'idée physique sous-jacente est que la perméabilité équivalente tend vers c_{max}^{uu} quand l'écoulement est perpendiculaire aux « strates » créées par l'aplatissement du maillage, et tend vers c_{min}^{uu} quand l'écoulement est parallèle à ces « strates ».

$$(2) \quad K^{uu} = (c_{max}^{uu})^\alpha \cdot (c_{min}^{uu})^{1-\alpha}$$

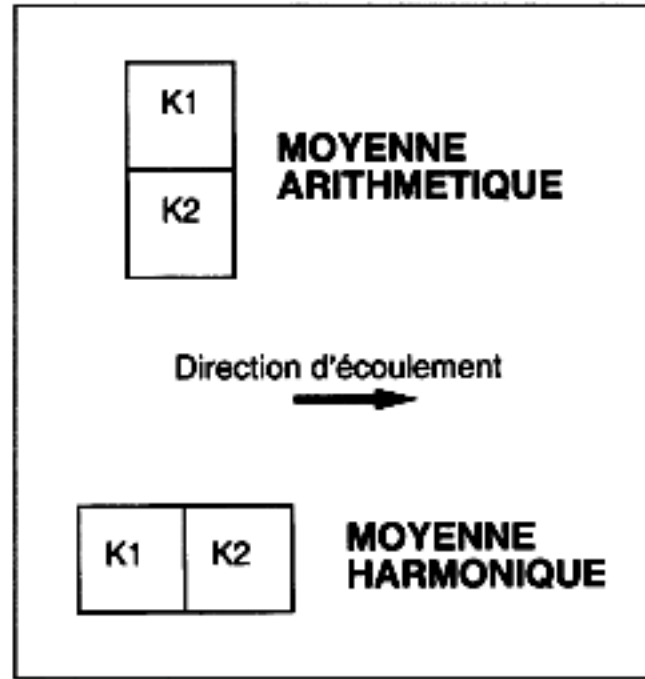


Fig. 1 Association en parallèle ou en série de deux mailles.

Two cells in parallel or in series.

L'exposant α est exprimé en fonction des rapports d'anisotropie a_v^u et a_w^u .

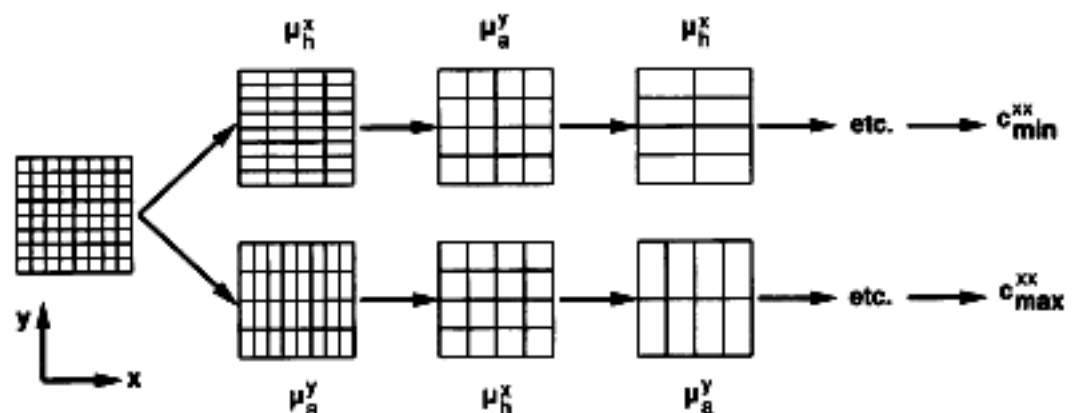
$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha(a_v^u, a_w^u) \\ &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &f(a_v^u) + f(a_w^u) \\ &- 2f(a_v^u)f(a_w^u) \end{aligned} \right\}}{1 - f(a_v^u)f(a_w^u)}, \\ &u \neq v \neq w \in \{x, y, z\} \\ &a_v^u = \frac{k^{vv}}{k^{uu}} \left(\frac{d_v}{d_u} \right)^2, \\ &f(t) = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{t} \end{aligned} \right.$$

d_u et d_v représentent les tailles des mailles de la grille dans les directions u et v et le rapport k^{vv}/k^{uu} l'anisotropie des perméabilités locales.

L'expression de α est inspirée de Krueel-Romeu (1994). La différence majeure réside dans les valeurs que l'on pondère. Krueel-

Fig. 2 Illustration en deux dimensions de la procédure itérative de calcul de c_{min}^{xx} et c_{max}^{xx} . μ_a^y représente l'opérateur moyenne arithmétique selon la direction y , μ_h^x la moyenne harmonique selon la direction x .

Example in two dimensions of the iterative procedure used to compute c_{min}^{xx} and c_{max}^{xx} . μ_a^y represents the arithmetic mean along the y direction, μ_h^x the harmonic mean along the x direction.



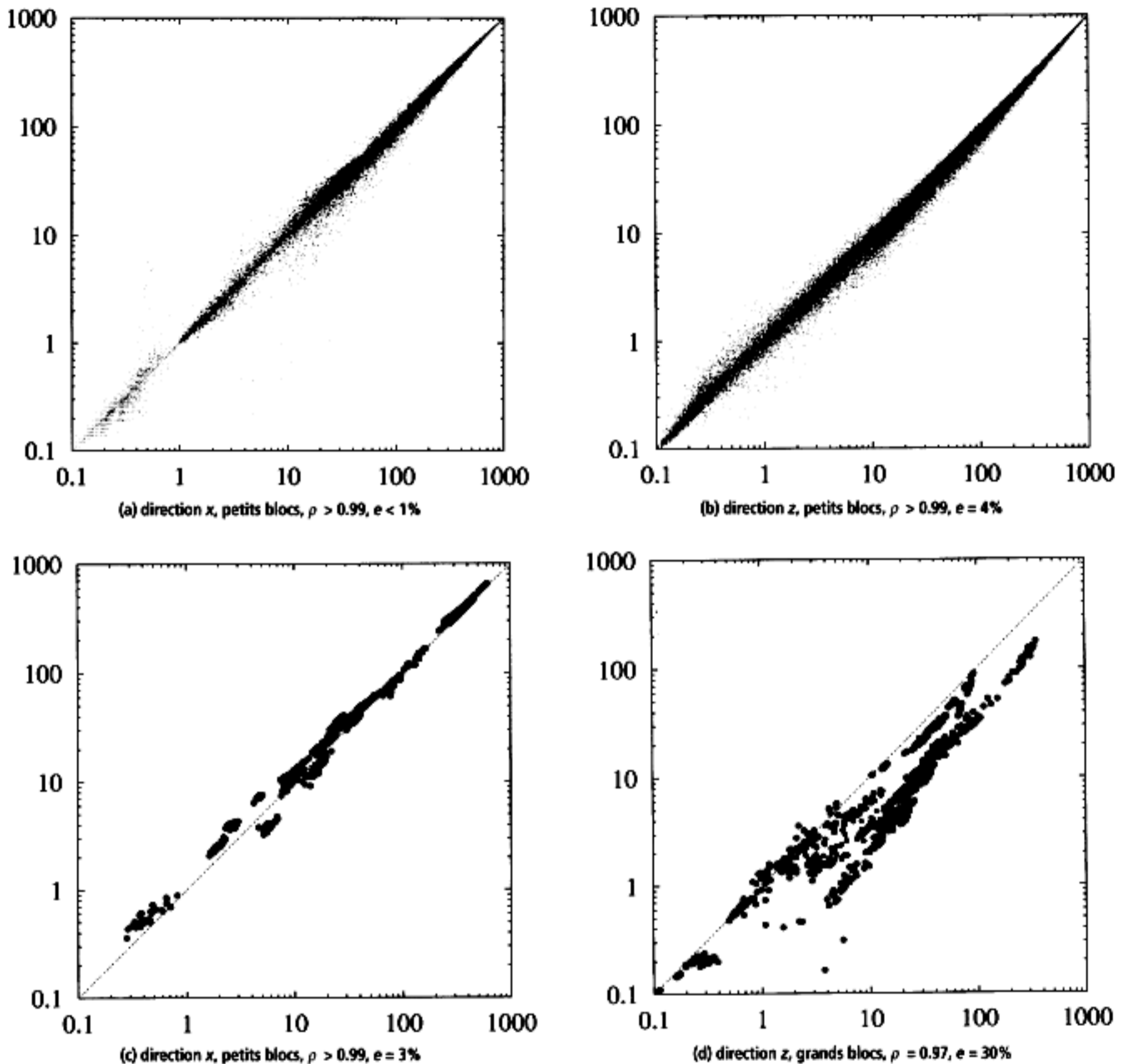


Fig. 3 Légende page suivante.

Caption on following page.

Romeu emploie les bornes de Cardwell et Parsons (1945), alors que nous employons ici les deux valeurs c_{\max}^{nn} et c_{\min}^{nn} . Ces valeurs ont l'avantage de présenter un écart plus faible que les bornes de Cardwell et Parsons. En effet, le calcul itératif permet une meilleure prise en compte de l'agencement spatial des perméabilités locales. Par contre,

c_{\max}^{nn} et c_{\min}^{nn} ont l'inconvénient de ne pas être des bornes théoriques de la perméabilité équivalente.

3. TEST DE LA MÉTHODE

Nous allons tester sur des milieux synthétiques tri-dimensionnels si cette technique

vérifie (au moins statistiquement) les deux critères que sont l'égalité des flux sur le milieu hétérogène et sur le milieu homogène équivalent (condition nécessaire) et l'égalité des énergies dissipées (condition suffisante) (Indelman et Dagan, 1993).

Deux modèles de milieux aléatoires ont été utilisés : les gaussiennes seuillées (Galli *et al.*, 1994) et le modèle booléen (Matheron, 1967). Environ deux mille milieux aléatoires comprenant $128 \times 128 \times 64$ mailles et un contraste maximum de perméabilité de 10^3 ont été ainsi créés. Plus de soixante mille « petits blocs » de taille $16 \times 16 \times 8$ mailles ont ensuite été extraits des « grands blocs ». La taille des mailles a été fixée à $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ pour évaluer l'effet de l'anisotropie.

Pour chaque milieu, les équations régissant les écoulements [équation (1)] sont résolues sous des conditions aux limites de type perméamètre – charges imposées sur deux faces parallèles, flux nuls sur les autres faces [équations (4)-(5)] – par une méthode numérique de type éléments finis.

$$(4) \quad \begin{cases} h = 0 & \text{sur une face } \Gamma_1, \\ h = 1 & \text{sur } \Gamma_2 \text{ parallèle à } \Gamma_1 \end{cases}$$

$$(5) \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

sur les quatre autres faces que l'on regroupe sous le nom Γ_u .

\vec{n} est le vecteur normal unité (perpendiculaire à Γ_u). La solution numérique obtenue sur la grille fine est considérée comme la référence ; pour la comparer au résultat de la méthode proposée, nous étudions maintenant les deux critères cités précédemment.

Flux total

Le flux total traversant le milieu est défini par l'équation suivante :

$$(6) \quad Q = \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\gamma = \int_{\Gamma_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\gamma.$$

Énergie dissipée

L'énergie dissipée par les forces de viscosité dans le milieu poreux pour un fluide supposé incompressible et par unité de

temps (puissance consommée) est quant à elle définie par Matheron (1967) :

$$(7) \quad E = \rho g \cdot \int_{\Omega} -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} h) \, d\omega$$

Ω représente le volume de milieu poreux, ρ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. On remarque que cette intégrale peut être décomposée par partie (Njifenjou, 1993) :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{E}{\rho g} = \int_{\Gamma} h \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\gamma \\ \quad - \int_{\Omega} f \cdot \text{div}(\vec{v}) \, d\omega, \\ \text{div}(\vec{v}) = 0, \\ \Rightarrow \frac{E}{\rho g} = \int_{\Gamma} h \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\gamma \end{cases}$$

Γ représente la surface frontière de Ω . L'équation (8) est générale, avec les conditions aux limites utilisées elle se simplifie encore :

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{E}{\rho g} &= \int_{\Gamma_1} 0 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_2} 1 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\gamma \\ &+ \int_{\Gamma_u} h \cdot (0) \, d\gamma = Q \end{aligned}$$

Discussion

Dans le cas des conditions aux limites choisies [équations (4)-(5)], les critères de flux ou d'énergie sont égaux à une constante multiplicative près. La figure 3 montre que les flux calculés par la méthode proposée et ceux calculés par éléments finis sont très voisins dans la majorité des cas. L'erreur la plus forte (fig. 3d) se produit pour un écoulement perpendiculaire à la direction d'aplatissement, lorsque le nombre de mailles est important (grands blocs).

Temps calculs

L'emploi de la renormalisation simplifiée permet une nette réduction des temps calculs. Ainsi, sur les grands blocs (environ un

Fig. 3 Comparaison des flux – proportionnels aux énergies dissipées dans le cas particulier étudié – calculés par renormalisation simplifiée en abscisses et les valeurs de référence en ordonnées. ρ représente le coefficient de corrélation linéaire du nuage et e le pourcentage moyen d'erreur.

Comparison of the fluxes – proportional to the dissipated energy in the case studied – calculated by using the simplified renormalization (x-axis) and the reference values (y-axis). ρ represents the linear correlation coefficient and e the mean relative bias.

million de mailles), la résolution numérique par élément fini avec une technique multi-grille, particulièrement efficace pour les grands systèmes d'équations, est de l'ordre de 200 fois plus lente que la renormalisation simplifiée (Galli *et al.*, 1996).

4. CONCLUSION

Une nouvelle méthode a été proposée. Elle s'est révélée efficace et peu biaisée dans les conditions d'écoulements étudiés et pour les milieux testés.

Remerciements. Nous remercions G. Pédro d'avoir accepté de présenter cette Note et la Commission des Communautés Européennes qui a financé ce travail à travers le projet Joule II Geoscience.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CARDWELL, W.T. et PARSONS, R.L., 1945. Average permeabilities of heterogeneous oil sands, *Trans. Am. Inst. Min. Met. Pet. Eng.*, p. 34-42.
- DARCY, H., 1856. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Victor Dalmont, Paris.
- GALLI, A., BEUCHER, H., LE LOC'H, G., DOLIGEZ, B. et HERESIM GROUP, 1994. The pros and cons of the truncated Gaussian method, ARMSTRONG, M. et DOWD, P., éd., *Geostatistical simulation*, Kluwer Academic Publishers, p. 217-233.
- GALLI, A., GOBLET, P., GRIFFIN, D., LEDOUX, E., LOC'H, G.L., MACKAY, R. et RENARD, P., 1996. Upscaling of flow and transport related parameters, Rapport Technique LHM/96/RP/11, École des Mines de Paris, CIG, Fontainebleau.
- INDELMAN, P. et DAGAN, G., 1993. Upscaling of permeability of anisotropic heterogeneous formations, I, the general framework. *Water Res. Res.*, 29(4), p. 917-923.
- KRUEL-ROMEY, R., 1994. Écoulement en milieu hétérogène : prise de moyenne de perméabilité en régimes permanent et transitoire, *Thèse*, Université Paris-VI, 243 p.
- LE LOC'H, G., 1987. Étude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles, *Thèse*, École des Mines de Paris, 199 p.
- MATHERON, G., 1967. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*, Masson, Paris, 164 p.
- NJIFENJOU, A., 1993. Éléments finis mixtes hybrides duaux et homogénéisation des paramètres pétrophysiques - Application à l'étude numérique d'écoulement en milieu poreux, *Thèse*, Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris-VI), 255 p., Technip.
- RENARD, P. et DE MARSILY, G., 1995. Calculating equivalent permeability: A review, *Adv. Water Res.* (à paraître).