

Tests d'arbitrage sur options : une analyse empirique des cotations de market-makers*

DAVID ARDIA[†]
Université de Fribourg

Révision finale : Novembre 2006

Résumé: Cet article analyse les opportunités d'arbitrage sur le marché des options ODAX dans un cadre intra-journalier. Les tests d'arbitrage se basent sur la borne inférieure de prix et sur la relation de parité put-call. Pour éliminer le biais de synchronisation et tenir compte des frais de transaction, la méthodologie considère le future comme sous-jacent ainsi que la fourchette de prix. Les résultats montrent de très faibles taux de violation des conditions de non-arbitrage. De plus, les gains d'arbitrages résiduels ne constituent pas de gains substantiels pour les market-makers.

Mots-clés : Options sur indice, tests d'arbitrage, borne inférieure, parité put-call
Classification JEL : G13, G14

Abstract: This article analyses the arbitrage opportunities on the ODAX options market in an intra-daily framework. Tests are based on the prices' lower boundary and on the put-call parity. We consider the futures price for the underlying and the bid-ask spread in order to diminish the synchronisation bias and integrate transaction costs. Our results exhibit a small number of violations. Furthermore, the potential gains are not substantial for market-makers.

Keywords: Index options, arbitrage tests, lower boundary, put-call parity
JEL Classification : G13, G14

1 Introduction

Plusieurs études empiriques ont testé la présence d'opportunités d'arbitrage sur les marchés d'options sur indices. Certains de ces tests se basent sur des modèles théoriques comme ceux de BLACK et SCHOLES (1973), BLACK (1976) ou encore COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979). D'autres, sans faire appel à des modèles d'évaluation, testent simplement les relations entre les prix du marché; ces tests cherchent à déterminer si la prise d'une position permet de dégager un profit certain, sans risque et sans mise de fonds initiale. La relation de

*Cet article est paru dans le no.89 de la revue *Banque et Marchés* (Juillet–Août 2007), pp.45–54, ISSN : 1167-4946. Cette version est reproduite avec la permission de *Banque et Marchés*, copyright © 2007. L'auteur tient à remercier Messieurs O. Guillot, D. Isakov, A. Ossé, O. Besson ainsi que deux arbitres anonymes pour leurs conseils et remarques qui ont permis d'améliorer la première version de cet article. Toutes les erreurs encore présentes sont la seule responsabilité de l'auteur.

[†]Email : david.ardia@unifr.ch ; Address : University of Fribourg, Department of Quantitative Economics, Office PER21-F425, Boulevard de Pérolles 90, CH-1700 Fribourg, Switzerland ; Phone : +41-26-300-82-58 ; Fax : +41-26-300-97-81.

parité *put-call* et la relation de *box spread* sont des relations entre prix d'options découlant de telles considérations.¹

Sur les marchés européens, les études traitent principalement les options sur les indices boursiers suisse, français, anglais, italien et allemand. CHESNEY, GIBSON et LOUBERGÉ (1995) testent les options sur l'indice SMI du marché suisse pour la période 1989-1990. Les tests de la borne inférieure de prix ainsi que de la relation de parité mettent en évidence la présence de violations, même en utilisant des données intra-journalières. Le marché français est testé pour la période 1997-1999 dans une étude de CAPELLE-BLANCARD et CHAUDHURY (2001). Les données intra-journalières mettent en évidence un taux de violation de la borne inférieure de prix de l'ordre de 0.5% tandis que la relation de parité est violée dans 58% des cas. Les violations de la parité *put-call* diminuent significativement lorsque les coûts de transaction sont intégrés aux positions; elles atteignent alors 1.2%. Le marché britannique est analysé par DRAPER et FUNG (2002). Ceux-ci utilisent le future d'indice comme sous-jacent et montrent que les opportunités d'arbitrage sur la relation de parité sont négligeables lorsque l'on tient compte des frais de transaction. Pour le marché italien, les études de CAVALLO et MAMMOLA (2000) et plus récemment BRUNETTI et TORRICELLI (2005) testent les options sur l'indice MIB30. Dans les deux analyses, les transactions intra-journalières indiquent un nombre de violations de la relation de parité de l'ordre de 50% qui diminue à 2% après déduction des frais de transaction. Enfin, MITTNIK et RIEKEN (2000a,b) testent la borne inférieure de prix et la parité *put-call* sur le options ODAX du marché allemand. La période considérée s'étend de 1992 à 1995 et les tests sont conduits sur des transactions intra-journalières. Les taux de violation résiduels après la prise en compte des frais de transaction sont compris entre 2.7% et 0.06% pour la borne inférieure des options selon la période considérée. En ce qui concerne la relation de parité, les taux de violation sont compris entre 44% et 5%. Les auteurs testent les gains potentiels des stratégies d'arbitrage et concluent à leur non-profitabilité, notamment en raison des difficultés à vendre à découvert un panier d'actions répliquant l'indice DAX.

Les résultats des études empiriques entreprises sur les différents marchés d'options sur indices permettent de dégager deux tendances. Il apparaît tout d'abord que les premières études traitant des opportunités d'arbitrage, axées principalement sur les marchés nord-américains, mettent en évidence des taux de violation importants et persistants. De plus, la profitabilité des arbitrage n'est pas négligeable, même après avoir déduit les frais de transaction. Sur les marchés européens, les études plus récentes indiquent également la présence d'opportunités d'arbitrage mais les taux de violation sont clairement plus faibles. De plus, les conclusions quant à la viabilité économique des stratégies d'arbitrage restent contradictoires.

Plusieurs facteurs sont susceptible d'expliquer ces différences. KAMARA et MILLER (1995) soulignent le fait que la majorité des options échangées sur les marchés non européens, sont de type américain. Pourtant, les tests d'arbitrages appliqués à ces données se basent sur des options de type européen; du fait d'un exercice anticipé, les relations de

¹La relation de *box spread* est définie comme une combinaison d'un *call spread* et d'un *put spread*.

prix ne sont pas vérifiées pour ces options. La difficulté à répliquer l'indice sous-jacent, notamment à cause des frais de transaction et des limites des ventes à découvert, permet également d'expliquer la présence d'opportunités d'arbitrage. Ces difficultés sont d'autant plus importantes que l'indice est formé de nombreux constituants, comme c'est le cas pour le S&P100 et le S&P500. Ainsi, lorsque ACKERT et TIAN (2001) utilisent un *tracker* ou le future plutôt que l'indice sous-jacent, les pourcentages de violation diminuent significativement. Sur le marché français, DEVILLE (2003) montre que les déviations de la relation de parité sont significativement réduites après l'introduction d'un tracker répliquant l'indice CAC40. Enfin, les différents résultats sont très sensibles à la fréquence d'observation des données; il apparaît que le problème de synchronisation entre les prix des options et la valeur du sous-jacent a un impact non-négligeable dans les pourcentages de violation. En conséquence, l'utilisation de prix intra-journaliers de l'ordre de la minute, disponibles dans les études les plus récentes, constitue une base plus solide que l'utilisation de prix mensuels ou même journaliers utilisés dans les études antérieures.

Cet article étudie les opportunités d'arbitrage sur le marché des options sur l'indice DAX dans un cadre intra-journalier. Les tests d'arbitrage se basent sur la borne inférieure des prix d'options et sur la relation de parité put-call. Ainsi, cette analyse s'inscrit dans la continuité des études entreprises par MITTNIK et RIEKEN (2000a,b) en apportant toutefois une contribution méthodologique nouvelle. En effet, contrairement aux données de transactions utilisées dans l'ensemble des études précitées, notre analyse considère les cotations observées par les *market-makers*²; la base de données est constituée de la totalité des cotations des options et des *futures* sur l'indice DAX observées sur le marché Eurex durant le mois d'octobre 2001. Cette base de données unique pour ce marché permet de placer notre analyse au niveau des opérateurs qui scrutent de manière continue leur écrans de contrôle à l'affût d'éventuelles opportunités d'arbitrage. Les clients finaux sont donc ici les *market-makers* et les transactions se font aux bornes affichées des fourchettes de prix.

L'utilisation de cet échantillon de données a des implications majeures. Premièrement, les cotations sont données en temps quasi continu pour les options et les futures, assurant une synchronisation maximale entre les données. Aussi, bien que les options portent sur l'indice DAX, les tests d'arbitrage effectués dans cette étude se basent sur le future d'indice comme sous-jacent, garantissant une meilleure synchronisation et évitant les difficultés liées à la réplification de l'indice et aux contraintes de ventes à découvert. Deuxièmement, les cotations des deux instruments sont constituées de prix *bid* et *ask* déterminés par l'offre et la demande du marché. Ainsi, la fourchette de prix n'est pas négligée ou estimée comme c'est fréquemment le cas, mais bien déterminée par les opérateurs. Dans la mesure où ce *spread* de prix représente le coût de transaction principal des *market-makers*, il est essentiel d'en tenir compte avec exactitude dans les tests d'arbitrage. Troisièmement, le fait de considérer les cotations plutôt que les prix de transaction permet de pallier, au moins partiellement, la prise de position retardée des arbitrages. En effet, la cotation laisse l'opportunité à

²DRAPER et FUNG (2002) utilisent les cotations bid et ask pour déterminer un coût de transaction implicite et les tests d'arbitrage sont conduits sur les prix de transaction.

l'opérateur d'entrer dans la position, tandis que les prix de transaction s'observent *ex-post*: la prise de position devra donc se faire ultérieurement générant ce que KAMARA et MILLER (1995) définissent comme un *immediacy risk*. Il ne s'agit donc pas d'un arbitrage au sens propre du terme puisque un risque potentiel et non-négligeable subsiste.

Les résultats des différents tests mettent en évidence de très faibles taux de violation. Pour la borne inférieure de prix, ces taux sont de l'ordre de 0.075% tandis que pour la relation de parité, ils se situent aux environs de 1.95%. Les pourcentages sont similaires aux taux observés par MITTNIK et RIEKEN (2000a,b) dans le cas de la borne inférieure de prix mais ceux-ci sont plus de deux fois moindre pour la relation de parité.³ De plus, les gains potentiels d'arbitrage sont faibles; de l'ordre de 1.5 points d'indice pour la borne inférieure et 4 points d'indice pour la parité put-call, représentant respectivement 7.5 et 20 euros. Une étude de la typologie des arbitrages montre que ceux-ci apparaissent pour des zones de faible liquidité. L'analyse de robustesse met en évidence une nette diminution des opportunités d'arbitrage lorsque les maturités des options et des futures sont les mêmes. Dans ce cas, l'erreur d'évaluation liée aux dividendes est évitée et le risque de base est éliminé. Les taux de violation ne dépassent alors pas 0.026% pour la borne inférieure de prix et 0.912% pour la relation de parité. Dans ce cas, les taux sont respectivement deux fois et cinq fois inférieurs aux taux observés par MITTNIK et RIEKEN (2000a,b).

La suite de cet article est organisée de la manière suivante: la Section 2 présente la dérivation rigoureuse des tests d'arbitrage sur les bornes inférieures de prix et sur la relation de parité put-call en tenant compte du bid-ask spread. La Section 3 présente les données utilisées pour l'analyse. La Section 4 présente les résultats empiriques et la Section 5 commente la robustesse des résultats. La conclusion est donnée à la Section 6.

2 Tests d'arbitrage

2.1 Bornes inférieures de prix d'options

2.1.1 Option call

Soit c_t le prix en t d'une option call sur future d'indice F_t , d'échéance τ et de *strike* K . La borne inférieure théorique du prix du call est donnée par:

$$e^{-r\tau}(F_t - K)_+ \leq c_t \quad (1)$$

où $(\bullet)_+ := \max(\bullet, 0)$ le prix d'une option ne pouvant être négatif, et r est le taux sans risque (continu). La construction d'un portefeuille d'arbitrage adéquat (Tableau 1) permet de retranscrire l'expression (1) en tenant compte du bid-ask spread. Le *payoff* en T de ce portefeuille est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en t , γ_c , en l'absence

³La comparaison est basée sur le minimum des taux de violation observés par MITTNIK et RIEKEN (2000a,b) sur l'ensemble des périodes considérées, en tenant compte des frais de transaction.

d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle. On en déduit donc que:

$$\begin{aligned}\gamma_c &:= c_t^a + e^{-r\tau}(K - F_t^b) \geq 0 \\ &\Rightarrow_{\text{non négatif}} e^{-r\tau}(F_t^b - K)_+ \leq c_t^a\end{aligned}\quad (2)$$

où c_t^a est le prix ask de l'option call et F_t^b est le prix bid du future (tous deux au temps t). L'expression (2) définit la borne inférieure du prix d'une option call. Il y a violation de cette

Table 1: Construction du portefeuille d'arbitrage γ_c

	t	Payoff en T		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat call	c_t^a	$F_T - K$	0	0
Vente future	0	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} K$	K	K	K
Total	γ_c	0	0	$K - F_T > 0$

Le Tableau 1 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne inférieure de prix d'une option call. Le payoff étant positif ou nul, la valeur du portefeuille en t se doit d'être positive ou nulle sous peine d'arbitrage. Le prix F_T est un prix de clôture à la date T d'échéance de l'option; les prix bid et ask sont donc confondus. On remarque que l'échéance du future peut être supérieure ou égale à celle de l'option considérée.

borne lorsque:

$$\gamma_{c+} := e^{-r\tau}(F_t^b - K)_+ - c_t^a > 0$$

et gain d'arbitrage de γ_{c+} points d'indice.

2.1.2 Option put

Soit p_t le prix en t d'une option put sur future d'indice F_t , d'échéance τ et de strike K . La borne inférieure théorique du prix du put est donnée par:

$$e^{-r\tau}(K - F_t)_+ \leq p_t \quad (3)$$

Là encore, la construction d'un portefeuille d'arbitrage adéquat (Tableau 2) permet de retranscrire l'expression (3) en tenant compte du bid-ask spread. Le payoff en T de ce portefeuille est positif ou nul dans tous les états de la nature. Sa valeur en t , γ_p , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit être positive ou nulle. On en déduit:

$$\begin{aligned}\gamma_p &:= p_t^a + e^{-r\tau}(F_t^a - K) \geq 0 \\ &\Rightarrow_{\text{non négatif}} e^{-r\tau}(K - F_t^a)_+ \leq p_t^a.\end{aligned}\quad (4)$$

L'expression (4) définit la borne inférieure du prix d'une option put. Il y a violation lorsque:

$$\gamma_{p+} := e^{-r\tau}(K - F_t^a)_+ - p_t^a > 0$$

pour un gain d'arbitrage de γ_{p+} points d'indice.

Table 2: Construction du portefeuille d'arbitrage γ_p

	t	Payoff en T		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat put	p_t^a	0	0	$K - F_T$
Achat future	0	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} F_t^a$	F_t^a	F_t^a	F_t^a
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} K$	$-K$	$-K$	$-K$
Total	γ_p	$F_T - K > 0$	0	0

Le Tableau 2 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver la borne inférieure de prix d'une option put. Voir le bas du Tableau 1 pour les détails.

2.2 Relation de parité put-call

Soit c_t et p_t deux options évaluées en t , de maturité τ et de strike K sur le même future sous-jacent F_t . La relation de parité put-call est définie par:

$$e^{-r\tau}(F_t - K) = c_t - p_t. \quad (5)$$

La construction de portefeuilles d'arbitrage adéquats (Tableaux 3 et 4) permet de traduire l'expression (5) en deux inégalités en tenant compte du bid-ask spread.

2.2.1 Cas no.1

Dans tous les états de la nature, la valeur du portefeuille d'arbitrage (Tableau 3) est nulle en T . Sa valeur en t , γ_1 , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle, soit:

$$\gamma_1 := c_t^a - p_t^b + e^{-r\tau}(K - F_t^b) \geq 0. \quad (6)$$

Il y a violation de la parité put-call lorsque $\gamma_1 < 0$ et gain d'arbitrage de $|\gamma_1|$ points d'indice.

Table 3: Construction du portefeuille d'arbitrage γ_1

	t	Payoff en T		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Achat call	c_t^a	$F_T - K$	0	0
Vente put	$-p_t^b$	0	0	$F_T - K$
Vente future	0	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$	$F_t^b - F_T$
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$	$-F_t^b$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} K$	K	K	K
Total	γ_1	0	0	0

Le Tableau 3 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver le premier cas de la parité put-call en tenant compte du spread de prix. Voir le bas du Tableau 1 pour les détails.

2.2.2 Cas no.2

Dans tous les états de la nature, la valeur du portefeuille d'arbitrage (Tableau 4) est nulle en T . Sa valeur en t , γ_2 , en l'absence d'opportunité d'arbitrage, doit donc être positive ou nulle, soit:

$$\gamma_2 := p_t^a - c_t^b + e^{-r\tau}(F_t^a - K) \geq 0. \quad (7)$$

Il y a violation de la parité put-call lorsque $\gamma_2 < 0$ et gain d'arbitrage de $|\gamma_2|$ points d'indice.

Table 4: Construction du portefeuille d'arbitrage γ_2

	t	Payoff en T		
		$F_T > K$	$F_T = K$	$F_T < K$
Vente call	$-c_t^b$	$K - F_T$	0	0
Achat put	p_t^a	0	0	$K - F_T$
Achat future	0	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$	$F_T - F_t^a$
Dépôt de cash	$e^{-r\tau} F_t^a$	F_t^a	F_t^a	F_t^a
Emprunt de cash	$-e^{-r\tau} K$	$-K$	$-K$	$-K$
Total	γ_2	0	0	0

Le Tableau 4 présente la construction du portefeuille d'arbitrage permettant de dériver le second cas de la parité put-call en tenant compte du spread de prix. Voir le bas du Tableau 1 pour les détails.

3 Données

3.1 Le marché allemand

L'indice du marché allemand DAX, ou Deutscher Aktienindex, est un indice composé des trente plus grosses capitalisations boursières allemandes. Il s'agit d'un indice pondéré par les capitalisations boursières des titres le composant. Les dividendes versés par les sociétés sont réinvestis dans l'indice: il s'agit d'un *total return index*. Le *trading* est réalisé en temps réel par le système électronique *Xetra* de la bourse de Frankfurt.

Les futures FDAX cotés sur le marché Eurex portent sur le sous-jacent DAX. La valeur du contrat est de 25 euros par point d'indice. La cotation se fait en points d'indice, à la décimale près. Le mouvement minimal de prix est de 0.5 point d'indice, ce qui représente donc une valeur de 12.5 euros. Le spectre d'échéances comprend les trois mois les plus proches contenus dans le cycle des mois de mars, juin, septembre et décembre (cycle C). L'échéance a lieu le troisième vendredi du mois, s'il s'agit d'un jour ouvrable. Dans le cas contraire, le jour d'expiration est le jour ouvrable précédent immédiatement le vendredi. Le prix à l'échéance est déterminé par la moyenne des valeurs prises par l'indice DAX entre 13h21 et 13h30. Le *cash settlement* est basé sur le prix à l'échéance et est versé le jour ouvrable suivant immédiatement le dernier jour de cotation du future. Les heures de cotations débutent à 9h et se terminent à 17h30 CET. Il n'existe pas de limites de position sur les futures FDAX. Les marges sont constituées d'une marge initiale couvrant une variation

donnée du sous-jacent ainsi que d'appels/restitutions de marges quotidiens déterminés par la chambre de compensation de l'Eurex.

Les options ODAX cotées sur le marché Eurex portent également sur l'indice DAX. La valeur de contrat d'option est de 5 euros par point d'indice. La cotation des options se fait en points d'indice, à la décimale près. Le mouvement minimal de prix est de 0.1 point, représentant donc une valeur de 0.5 euros. Les options sont de type européen, c'est-à-dire qu'une option ne peut être exercée qu'à l'échéance. Les mois d'expirations sont les trois mois calendaires les plus proches, les trois mois suivants contenus dans le cycle C ainsi que les deux mois suivants du cycle juin et décembre. Les maturités s'étendent donc sur 1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 et 24 mois. Le jour d'échéance est le troisième vendredi du mois. Les prix d'exercice sont au nombre de 9 pour les maturités inférieures à 6 mois, de 5 pour les maturités comprises entre 7 et 12 mois et de 5 pour les échéances comprises entre 13 et 24 mois. Ainsi, pour chaque mois d'expiration, au moins 5 prix d'exercice sont définis. La graduation des prix d'exercice est de 25, 50, 100 et 200 points d'indice selon les échéances. La valeur de l'indice à l'échéance est définie par la moyenne des valeurs prises par l'indice entre 13h21 et 13h30. Le cash settlement se fait le jour ouvrable suivant immédiatement le dernier jour de cotation de l'option. Les cotations débutent à 9h et se terminent à 17h30. Tout comme pour les futures FDAX, il n'existe pas de limites de position sur les options ODAX. Les marges sont déterminées quotidiennement par la chambre de compensation de l'Eurex sur la base des paramètres déterminés par la méthode *risk-based margining*.

3.2 Échantillon

La période d'observation s'étend du lundi 01/10/2001 au vendredi 26/10/2001, soit 26 jours dont 20 ouvrables. L'échantillon de données est composé de l'ensemble des cotations bid et ask des options et des futures sur l'indice DAX observés par les market-makers sur le marché Eurex durant cette période (Tableau 5). Les cotations ont été enregistrées par un institut financier privé qui traite du négoce d'options. Il s'agit là d'une base de données unique pour ce marché qui permet de placer notre analyse au niveau des market-makers. La plage d'observation journalière débute à 10h pour finir à 12h et reprend de 14h à 17h CET. La fréquence des cotations est de l'ordre de la seconde. Les options considérées sont de maturités octobre, novembre, décembre 2001, mars, juin, septembre et décembre 2002, ainsi que juin 2003. L'échéance maximale est de 663 jours, soit la durée séparant le premier jour d'observation à l'échéance des options juin 2003. Les strikes cotés sont compris entre 2000 et 9600 points d'indice. Les futures sont de maturités décembre 2001, mars et juin 2002. Notons encore que les cotations aberrantes sont éliminées de l'échantillon selon une méthodologie similaire à celle proposée par MITTNIK et RIEKEN (2000a,b).

3.3 Taux d'intérêt

Les taux d'intérêt utilisés pour les différentes évaluations se basent sur des taux *Libor* sur l'euro extraits de Datastream (Thomson Corporation). Le spectre d'échéances considéré

Table 5: Nombre de cotations

	Options DAX	Futures DAX
cotations totales	737'974	368'454
cotations call	415'492	-
cotations put	322'482	-

s'étend de 1 à 12 mois. Ces taux sont par convention des taux simples (*actual/360*).

Dans un premier temps, les taux sont transformés en taux simples (*actual/365*). Sur la base des nouveaux taux, une simple structure par terme est créée par interpolation. Celle-ci s'étend donc de 1 à 12 mois. Les taux d'échéances inférieures à un mois sont également déterminés par interpolation, cette fois entre 0 et le taux Libor 1 mois. Pour les échéances supérieures ou égales à 12 mois, le taux 12 mois est sélectionné. Formellement, le taux $\hat{r}_t(\tau)$ déterminé par interpolation est donné par:

$$\hat{r}_t(\tau) := \begin{cases} R_{t,\underline{\tau}} + \left(\frac{R_{t,\bar{\tau}} - R_{t,\underline{\tau}}}{\bar{\tau} - \underline{\tau}} \right) \times (\tau - \underline{\tau}) & \text{pour } \tau < 1 \\ R_{t,1} & \text{pour } \tau \geq 1 \end{cases}$$

où $R_{t,\underline{\tau}}$ et $R_{t,\bar{\tau}}$ sont les taux Libor en t correspondant aux échéances standards $\underline{\tau}$ et $\bar{\tau}$ englobant l'échéance cible. Dans un deuxième temps, le taux \hat{r}_t est transformé en un taux continu (annuel) donné par:

$$r_t(\tau) := \ln(1 + \hat{r}_t(\tau)\tau)/\tau$$

Le taux r_t sera utilisé par la suite pour les différentes évaluations.

3.4 Sélection et ajustement du sous-jacent

Les prix qui composent l'échantillon de données sont des cotations d'options sur indice. Toutefois, les tests d'arbitrage présentés s'appliquent à des options sur future d'indice. En effet, les futures et les options sur l'indice DAX étant cotés sur le même marché, en temps quasi continu, les nouvelles informations sont intégrées instantanément dans les prix des futures et des options. Toutefois, le fait de considérer les futures comme sous-jacents plutôt que l'indice lui-même pose un problème de sur- ou sous-évaluation si les échéances des options et des futures ne coïncident pas. Ce biais d'évaluation n'est pas négligeable. De plus, une différence entre échéances implique un risque de base pour les opérateurs.⁴

Une option sur future d'indice a théoriquement le même prix qu'une option sur indice lorsque les maturités du future et de l'option sont les mêmes. La comparaison est donc consistante pour les maturités existantes à la fois pour les futures et les options. Cependant,

⁴ACKERT et TIAN (2001) ne mettent pas en évidence une différence significative des taux d'arbitrage lorsque les maturités sont semblables ou différentes. Toutefois, ils remarquent que les volumes de transactions sont plus importants pour les options dont la maturité coïncide avec le future, indiquant que les opérateurs sont conscients du risque de base.

pour une date donnée, le nombre de maturités disponibles pour les options est de huit alors qu'il n'est que de trois pour les futures. Sur la période d'observation, les différences entre échéances apparaissent pour les mois d'octobre et novembre 2001, septembre et décembre 2002 et juin 2003. Pour parvenir à une évaluation correcte, un future *ajusté* a donc été défini. En considérant une maturité T d'une option, le future dont l'échéance est la plus proche possible (égale ou supérieure) de la maturité de l'option et qui est coté avant l'option est sélectionné. Un prix de future ajusté est ensuite défini en actualisant le future sélectionné au taux *forward* sur la période différentielle (échéance du future et échéance de l'option). Ce future ajusté est donné par:

$$F_t(\tau) := e^{[r_t(\tau)\tau - r_t(\tau_2)\tau_2]} F_t(\tau_2)$$

où $r_t(\tau)$ et $r_t(\tau_2)$ sont les taux d'intérêt en t valables pour un horizon τ , respectivement τ_2 ($\tau_2 > \tau$). Dans le cas où les maturités d'options existent également pour les futures, le facteur d'actualisation est égal à l'unité et n'a aucun impact sur le prix du marché; c'est notamment le cas pour les échéances décembre 2001, mars et juin 2002.

Cette méthodologie possède néanmoins un désavantage; elle élimine de l'échantillon toutes les options dont l'échéance est lointaine car il n'existe alors pas de future d'échéance supérieure pouvant être sélectionné. L'échantillon ainsi constitué ne possède plus d'option long terme. Notons toutefois que les market-makers couvrent en pratique leur position avec le future d'indice. Si celui-ci n'existe pas, ce qui est le cas pour les options long terme, les opérateurs se couvrent avec un *forward* traité en OTC. Les difficultés pour se procurer les données OTC et le manque de liquidité de ces instruments permettent de justifier l'élimination de ces options de notre analyse.

3.5 Moneyness et échéance

Le future sélectionné selon la méthodologie décrite à la Section 3.4 permet désormais de considérer la notion de *moneyness*. Ce concept est introduit pour quantifier l'écart entre le prix du sous-jacent et le strike. Soit une option de strike K sur le sous-jacent F_t , le moneyness en t est défini par $m_t := K/F_t$. Le fait de considérer le moneyness m_t plutôt que le strike K permet de se placer dans un repère qui évolue avec le prix du sous-jacent. Pour $m_t = 1$, les options sont dites à la monnaie ou *at-the-money* (ATM). Les options call sont dites en dehors de la monnaie ou *out-of-the-money* (OTM) lorsque $m_t > 1$ [dans ce cas, les options put sont dites dans la monnaie ou *in-the-money* (ITM)]. Pour $m_t < 1$ les options call sont ITM et les options put OTM.

La Figure 3.5 a) présente l'activité de cotations, définie par le nombre de cotations, relativement à l'échéance et au moneyness des options. Elle met en évidence les différentes bandes d'activité de cotations correspondantes aux différentes échéances des options. Le premier bloc de gauche correspond aux échéances comprises entre un et trois mois. Les deux bandes suivantes correspondent aux échéances mars et juin 2002. L'activité de trading est importante pour les options proches de la monnaie ($0.8 \leq m_t \leq 1.2$) dont l'échéance

est inférieure à 180 jours. Les Figures 3.5 b) et 3.5 c) montrent clairement que les options call et put liquides sont des options ATM et OTM; ces options sont fortement échangées car leur valeur intrinsèque est faible relativement à leur valeur spéculative. Malgré cette activité centrée, on remarque un nombre non négligeable de cotations pour les calls ITM dont l'échéance est comprise entre un et deux mois. L'activité sur les options put ITM est également marquée pour des échéances comprises entre 60 et 90 jours.

Fig. 3.5 a) Total

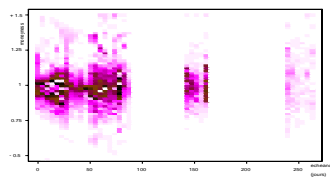
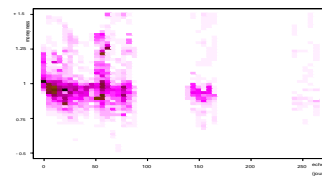
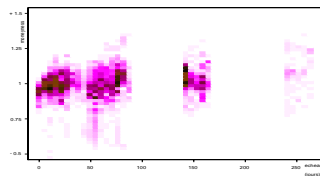


Fig. 3.5 b) Calls

Fig. 3.5 c) Puts



La Figure 3.5 a) présente l'activité de cotations pour les options ODAX sur l'ensemble de l'échantillon, en fonction de leur échéance (en jours) et de leur moneyness $m_t := K/F_t$. La Figure b) [respectivement c)] présente les résultats pour les options call [respectivement put]. Les graphiques sont obtenus par interpolation bivariable sur les mesures effectuées. Les zones les plus foncées indiquent les niveaux d'activité les plus élevés.

4 Résultats empiriques

Les tests de la borne inférieure de prix et de la relation de parité ont été appliqués aux cotations des options ODAX présentées à la Section 3. Pour éliminer au maximum le biais de synchronisation des données, deux sélections distinctes de futures sous-jacents ont été faites, selon les tests d'arbitrage effectués.

En ce qui concerne les tests de la borne inférieure (Equations 2 et 4), les futures intégrés dans les tests sont les cotations sélectionnées conformément à la méthodologie de la Section 3.4. Il s'agit donc de la cotation du future FDAX de maturité supérieure ou égale à l'option dont la cotation précède directement la cotation de l'option. Ce future est ensuite ajusté si sa maturité n'est pas la même que la maturité de l'option.

Dans le cas de la parité put-call, du fait de l'utilisation d'options call et put de mêmes caractéristiques, la méthodologie de test est différente. Chaque jour d'observation est fragmenté en créneaux horaires d'une durée de cinq minutes.⁵ Sur les 60 intervalles ainsi définis, on considère les derniers prix cotés des options call et put de mêmes caractéristiques. Le future sélectionné est cette fois le dernier prix coté à l'intérieur de l'intervalle. Tout comme pour le test des bornes inférieures, il doit être de maturité supérieure ou égale à l'option. Il est ensuite ajusté si sa maturité est différente de celle de l'option. Les tests de la relation de parité put-call (Equations 6 et 7) sont alors appliqués aux 16'348 observations de l'échantillon ainsi créé (Tableau 7).

4.1 Analyse globale

Les résultats des arbitrages de la borne inférieure (Tableau 6) mettent en évidence un taux global de violations de l'ordre de 0.075% des cotations. Sur la totalité des cotations de calls, les violations γ_{c+} s'élèvent à 0.011%. Les cotations des puts présentent un taux de violation γ_{p+} de 0.159%. Concernant les violations de la relation de parité (Tableau 7), les pourcentages sont supérieurs. Sur la totalité des observations, les proportions d'opportunités d'arbitrage sont de l'ordre de 1.95%. La majorité des violations s'observe pour γ_2 , avec des proportions de l'ordre de 1.43%, contre 0.52% pour γ_1 .

Table 6: Bornes inférieures

	n	%
taille échantillon	706'846	100
nb calls	399'547	57
nb puts	307'299	43
violations totales	532	0.075
violations γ_{c+}	44	0.011
violations γ_{p+}	488	0.159

Table 7: Relation de parité

	n	%
taille échantillon	16'348	100
violations totales	320	1.957
violations γ_1	85	0.520
violations γ_2	235	1.437

Le Tableau 6 présente l'échantillon du test des bornes inférieures de prix, ainsi que les résultats globaux des violations γ_{c+} et γ_{p+} . La colonne n indique le nombre absolu d'observations et de violations. La colonne % indique le pourcentage relativement au total. Les pourcentages γ_{c+} et γ_{p+} sont donnés relativement au nombre de calls et de puts. Le Tableau 7 présente l'échantillon du test de la relation de parité, ainsi que les résultats globaux relatifs aux violations γ_1 et γ_2 .

Ces premiers résultats indiquent donc de très faibles proportions d'opportunité d'arbitrage liées à la borne inférieure de prix et à la relation de parité put-call. Une typologie des violations observées ainsi qu'une analyse des gains potentiellement réalisables pourra donner une information plus précise quant à leur l'origine. Une analyse relative au moneyness et à l'échéance des options arbitrables est donc posée.

⁵La plage temps de cinq minutes est choisie pour garder une synchronisation importante entre les cotations et pour augmenter les nombre de paires différentes (strikes et échéances). Les mêmes tests appliqués à des plages temps d'une minute mettent en évidence des taux de violation similaires pour les options liquides.

4.2 Analyse échéance-moneyness

4.2.1 Borne inférieure, violations γ_{c+} et γ_{p+}

Les Tableaux 8 et 9 décrivent les violations de la borne inférieure par intervalles de moneyness et d'échéances. La distribution des violations relativement au moneyness montre que celles-ci apparaissent uniquement pour des options ITM; on distingue clairement la distribution en diagonale dans le Tableau 8. Les plus fortes proportions apparaissent pour des options put dont le moneyness est supérieur à 1.15, donc clairement dans la monnaie. Cette zone met en évidence 453 violations, soit 3% des options cotées dans cet intervalle de moneyness. Les gains moyens réalisés sur l'ensemble des moneyness sont de l'ordre de 1.5 points d'indice, soit environ 7.5 euros. Aucune tranche ne met en évidence une moyenne excédentaire. On note également que la borne inférieure des options call est moins fréquemment violée, malgré la présence de 39 violations groupées dans la zone de moneyness 0.9 - 0.95.

Table 8: Violations γ_{c+} et γ_{p+} par intervalles de moneyness

m_t	violations γ_{c+}					violations γ_{p+}				
	n	%	Σ	μ	σ	n	%	Σ	μ	σ
< 0.80	2	0.06	4.31	2.15	0.11	-	-	-	-	-
0.80 - 0.85	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.85 - 0.90	1	0.01	1.26	1.26	-	-	-	-	-	-
0.90 - 0.95	39	0.10	65.85	1.69	4.03	-	-	-	-	-
0.95 - 1.00	2	0.00	4.61	2.31	2.48	-	-	-	-	-
1.00 - 1.05	-	-	-	-	-	13	0.03	15.67	1.21	1.37
1.05 - 1.10	-	-	-	-	-	16	0.10	28.18	1.76	1.39
1.10 - 1.15	-	-	-	-	-	6	0.06	3.99	0.67	0.50
1.15 - 1.20	-	-	-	-	-	88	1.18	132.90	1.51	1.07
> 1.20	-	-	-	-	-	365	1.80	557.78	1.53	1.49
Total	44	0.01	76.04	1.73	3.81	488	0.16	738.53	1.51	1.41

Le Tableau 8 présente les statistiques de violations des bornes inférieures de prix relativement au moneyness $m_t := K/F_t$. La mesure n indique le nombre absolu de violations observées. Le nombre relatif indiqué par le % est un pourcentage donné relativement au nombre total de cotations observées dans l'intervalle de moneyness considéré. La valeur 0.00 indique que le pourcentage est inférieur à 0.01%. La somme Σ , la moyenne μ ainsi l'écart-type σ des gains d'arbitrage observés sont donnés en points d'indice.

Au niveau des maturités (Tableau 9), les violations apparaissent pour des options dont l'échéance est inférieure à 20 jours. La faible valeur spéculative des options de courte échéance est susceptible d'expliquer la présence de ces opportunités d'arbitrage. La borne des options call est violée en quasi totalité le jour même de l'échéance. Pour les options put, 389 violations sont observées pour les échéances court terme (moins de 20 jours), ce qui représente 2% des options put cotées. Les gains par tranches d'échéances n'excèdent pas les 2.96 points d'indice, soit environ 15 euros; les violations sur les options long terme dégagent des gains légèrement supérieurs, de l'ordre de 2.3 points en moyenne. On peut remarquer toutefois la présence d'une violation γ_{c+} dégagant un gain clairement supérieur, d'une valeur de 25.67 points d'indice. Il s'agit cependant d'un cas isolé.

Table 9: Violations γ_{c+} et γ_{p+} par intervalles d'échéances

τ	violations γ_{c+}					violations γ_{p+}				
	n	%	Σ	μ	σ	n	%	Σ	μ	σ
0	41	1.29	46.88	1.14	0.98	21	0.49	32.49	1.55	1.27
1-5	1	0.01	1.26	1.26	-	22	0.10	19.86	0.90	1.08
6-10	1	0.00	25.67	25.67	-	202	1.01	236.06	1.17	1.21
11-20	-	-	-	-	-	144	0.43	222.89	1.55	1.03
21-50	-	-	-	-	-	6	0.01	9.67	1.61	1.76
51-100	1	0.00	2.23	2.23	-	51	0.05	104.74	2.05	2.27
101-200	-	-	-	-	-	2	0.01	5.93	2.96	3.53
>200	-	-	-	-	-	40	0.55	106.89	2.67	1.37
Total	44	0.01	76.04	1.73	3.81	488	0.16	738.53	1.51	1.41

Le Tableau 9 présente les statistiques de violations des bornes inférieures de prix relativement à l'échéance τ (en jours) de l'option. Voir le bas du Tableau 8 pour les détails.

4.2.2 Relation de parité put-call, violations γ_1 et γ_2

Les Tableaux 10 et 11 présentent les résultats des violations de la relation de parité put-call par intervalles de moneyness et d'échéances. Une première analyse du nombre absolu de violations relativement au moneyness montre que celles-ci se présentent pour des options proches de la monnaie. Mais en rapportant le nombre absolu d'arbitrages au nombre d'observations contenues par tranches de moneyness, le résultat s'inverse et devient analogue au résultat de la borne inférieure. Là encore, il semble que les zones de moindre liquidité mettent en évidence de plus forts taux de violation. Les violations sont de l'ordre de 1.3% à 4.49% pour les observations dont le moneyness est inférieur à 0.9. Pour les moneyness plus élevés, ces proportions sont comprises entre 0.73% et 2.99%; le nombre d'observations est toutefois moindre. Les profits potentiels sont de l'ordre de 4.63 points pour γ_1 et de 3.24 points pour γ_2 , soit environ 25 et 15 euros. On remarque dans le cas de la violation γ_1 , deux moyennes de gains nettement supérieures, pour les zones de moneyness 1.05-1.10 et inférieures à 0.8. Toutefois, le nombre de violations est très faible.

Table 10: Violations γ_1 et γ_2 par intervalles de moneyness

m_t	violations γ_1					violations γ_2				
	n	%	Σ	μ	σ	n	%	Σ	μ	σ
< 0.80	3	3.75	32.41	10.80	7.61	3	3.75	4.83	1.61	1.44
0.80-0.85	4	1.50	4.88	1.22	0.71	12	4.49	37.20	3.10	2.12
0.85-0.90	10	1.33	22.48	2.25	1.66	10	1.33	37.50	3.75	5.82
0.90-0.95	21	0.91	73.94	3.52	3.10	31	1.35	151.61	4.89	7.10
0.95-1.00	19	0.32	39.08	2.06	2.07	80	1.36	181.35	2.27	3.34
1.00-1.05	10	0.21	23.93	2.39	2.33	52	1.08	124.45	2.39	2.98
1.05-1.10	9	0.57	186.34	20.70	23.02	30	1.90	174.97	5.83	4.71
1.10-1.15	4	1.00	2.09	0.52	0.38	12	2.99	45.05	3.75	5.16
1.15-1.20	4	2.88	6.38	1.59	1.78	3	2.16	3.69	1.23	1.05
> 1.20	1	0.73	2.00	2.00	-	2	1.46	1.08	0.54	0.02
Total	85	0.52	393.53	4.63	9.49	235	1.43	761.72	3.24	4.43

Le Tableau 10 présente les statistiques de violations de la relation de parité relativement au moneyness $m_t := K/F_t$ des options. Voir le bas du Tableau 8 pour les détails.

L'analyse des violations relativement à l'échéance de l'option montre une dispersion plus importante que pour les violations des bornes inférieures. Il semble que les pourcentages de violation les plus importants apparaissent cette fois pour des échéances inférieures

à 50 jours.

Table 11: Violations γ_1 et γ_2 par intervalles d'échéances

τ	violations γ_1					violations γ_2				
	n	%	Σ	μ	σ	n	%	Σ	μ	σ
0	1	0.82	0.69	0.69	-	4	3.28	27.82	6.96	2.41
1-5	9	0.70	36.93	4.10	5.59	14	1.08	31.92	2.28	3.65
6-10	5	0.40	12.96	2.59	1.61	62	4.96	127.02	2.05	2.88
11-20	7	0.30	18.31	2.62	2.30	75	3.25	184.79	2.46	3.03
21-50	25	0.72	218.24	8.73	16.21	47	1.36	186.94	3.98	4.33
51-100	28	0.48	92.64	3.31	3.39	28	0.48	194.39	6.94	7.96
101-200	7	0.41	8.54	1.22	1.20	4	0.24	8.29	2.07	1.95
> 200	3	0.80	5.22	1.74	1.78	1	0.27	0.56	0.56	-
Total	85	0.52	393.53	4.63	9.49	235	1.43	761.72	3.24	4.43

Le Tableau 11 présente les statistiques de violations de la relation de parité relativement à l'échéance τ (en jours) des options call et put. Voir le bas du Tableau 8 pour les détails.

5 Robustesse

Les résultats de la Section 4 mettent en évidence une majorité de violations γ_{p+} et γ_2 . Cette distribution de violations peut être expliquée par la construction du future ajusté. En effet, l'actualisation a été faite sans tenir compte des dividendes versés en fin d'année. Le future ajusté est par conséquent meilleur marché; les bornes (4) et (7) auront donc tendance à être plus fréquemment violées relativement aux bornes (2) et (6). L'analyse des violations relativement à l'écart entre l'échéance des futures et des options confirme cette hypothèse. La totalité des violations lorsque le future est ajusté est de 0.261% pour la borne inférieure de prix et de 3.59% pour la relation de parité put-call. Dans les cas où les maturités entre options et futures sont identiques, les taux de violation atteignent alors respectivement 0.026% et 0.912%.⁶ Pour pallier cette sous-évaluation du future ajusté, il faudrait donc considérer le future $\hat{F}_t(\tau)$ défini par:

$$\hat{F}_t(\tau) := e^{q(\tau_2 - \tau)} F_t(\tau)$$

où q est le taux de dividende instantané (donné annuellement) versé sur la période différentielle $\tau_2 - \tau$. Toutefois, ce taux de dividende doit lui aussi être évalué et est, par conséquent, sujet à des erreurs d'estimation.

Pour ce qui est des taux d'intérêt employés dans les différents tests, ils constituent une bonne approximation des taux utilisés par les opérateurs dans la mesure où les maturités considérées sont inférieures à une année. Les market-makers utilisent en effet des taux *deposit* pour les échéances inférieures à trois mois. Pour les échéances supérieures ils utilisent les *euro-futures* liquides et les taux *swap* pour les échéances jusqu'à dix ans.

D'autres facteurs, liés cette fois au fonctionnement même du marché, sont également susceptibles d'expliquer la présence de violations résiduelles, à savoir les coûts de transaction, les commissions et les taxes. L'ensemble de ces facteurs structurels permettent de

⁶Les taux de violation des arbitrages γ_{c+} et γ_1 sont très proches pour les options dont l'échéance correspond au future, et les options dont l'échéance est différente. Cela semble indiquer que la présence des arbitrages n'est pas le résultat d'un risque de base mais bien d'une sous-évaluation du future ajusté.

comprendre pourquoi les professionnels, conscients des opportunités d'arbitrage, n'entrent pas dans les positions.

6 Conclusion

Les premières études empiriques traitant des opportunités d'arbitrage sur les marchés d'options sur indices mettent en évidence des taux élevés de violation de la borne inférieure de prix et de la relation de parité. La présence de ces opportunités d'arbitrage peut être expliquée par la difficulté à répliquer l'indice sous-jacent, l'impossibilité de vendre à découvert ses constituants et la non-synchronisation des données. Les études plus récentes appliquées aux marchés européens évitent partiellement ces problèmes en utilisant des prix intra-journaliers et en intégrant les coûts de transaction aux positions. Les violations diminuent alors significativement. Toutefois, les conclusions quant à la rentabilité des stratégies restent contradictoires.

L'échantillon considéré dans cette étude permet d'observer les arbitrages au niveau des market-makers et par conséquent d'écartier de tels biais. La base de données comprend l'ensemble des cotations d'options et de futures d'indice DAX observés sur le marché Eurex durant le mois d'octobre 2001; il s'agit là de données uniques pour ce marché. Les tests se basent sur le futur d'indice comme sous-jacent ce qui implique une meilleure synchronisation des données et permet les ventes à découvert. De plus, l'utilisation des cotations bid et ask permet d'intégrer le coût implicite de la fourchette de prix dans les arbitrages, sans faire d'autres hypothèses sur les frais de transaction.

Les tests appliqués aux cotations des market-makers mettent en évidence des taux de violation de l'ordre de 0.075% pour la borne inférieure de prix et de 1.95% pour la relation de parité. De plus, les pourcentages observés apparaissent pour des zones de forts et faibles moneyness et ce pour de faibles échéances. L'analyse de robustesse met en évidence une nette diminution des opportunités d'arbitrage lorsque les maturités des options et des futures sont les mêmes. Dans ce cas, l'erreur d'évaluation liée aux dividendes est évitée et le risque de base est éliminé. Les taux de violation ne dépassent alors pas 0.026% pour la borne inférieure de prix et 0.912% pour la relation de parité; ces taux sont respectivement deux fois et cinq fois inférieurs aux taux minimums observés par MITNIK et RIEKEN (2000a,b) sur le même marché.

En conclusion, les opportunités d'arbitrage sont quasi inexistantes pour les deux tests considérés. De plus, les gains d'arbitrage sont très faibles et ne constituent pas de gains substantiels pour les market-makers en raison de coûts structurels non négligeables.

References

ACKERT, L. F. et Y. S. TIAN (2001): "Efficiency in Index Options Markets and Trading in Stock Basket", *Journal of Banking and Finance*, 25, p.1607–1634.

- BLACK, F. (1976): “The Pricing of Commodity Contract”, *Journal of Financial Economics*, 3, p.167–179.
- BLACK, F. et M. SCHOLES (1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*, 81, p.637–654.
- BRUNETTI, M. et C. TORRICELLI (2005): “Put-Call Parity and Cross-market Efficiency in the Index Options Markets: Evidence from the Italian Market”, *International Review of Financial Analysis*, 15(1), p.508-532.
- CAPELLE-BLANCARD, G. et M. CHAUDHURY (2001): “Efficiency Tests of the French Index (CAC 40) Options Market”, *McGill Finance Research Centre Working papers*. SSRN.
- CAVALLO, L. et P. MAMMOLA (2000): “Empirical Tests of Efficiency of the Italian Index Options Market”, *Journal of Empirical Finance*, 7, p.173–193.
- CHESNEY, M., GIBSON, R. et H. LOUBERGÉ (1995): “Arbitrage Trading and Index Option Pricing at Soffex: An Empirical Study using Daily and Intradaily Data”, *Finanzmarkt und Portofolio Management*, 9, p.35–59.
- COX, J. C., ROSS, S. A. et M. RUBINSTEIN (1979): “Option Pricing: A Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics*, 7, p.229–263.
- DEVILLE, L. (2003): “Impact de l’introduction du tracker Master Share CAC40 sur la relation de parité call-put”, *Banque et Marchés*, 62, p.50–67.
- DRAPER, P. et FUNG J. K. W. (2002): “A Study of Arbitrage Efficiency Between the FTSE-100 Index Futures and Options Contracts”, *The Journal of Futures Markets*, 22(1), p.31–58.
- KAMARA, A. et T. W. MILLER (1995): “Daily and Intradaily Tests of European Put-Call Parity”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(4), p.519–539.
- MITTNIK, S. et S. RIEKEN (2000a): “Lower Boundary Violations and Market Efficiency: Evidence from the German DAX-Index Options Market”, *Journal of Futures Markets*, 20(5), p.405–424.
- MITTNIK, S. et S. RIEKEN (2000b): “Put-Call Parity and the Informational Efficiency of the German DAX-index Options Market”, *International Review of Financial Analysis*, 9, p.259–279.