Autour de la conjecture des idempotents

THÈSE
présentée à la faculté des sciences,
pour obtenir le grade de docteur ès sciences,
par

Cédric Béguin

Institut de mathématiques
Rue Émile-Argand 13
2007 Neuchâtel (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Autour de la conjecture des idempotents

de M. Cédric Béguin

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport des membres du jury,

M. A. Valette (directeur de thèse), U. Suter, P. Jolissaint, P. de la Harpe (Genève) et N. Higson (Uni. de Pennsylvanie USA)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 27 mai 1999

Le doyen:

F. Stoeckli

«Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis involuta»

Evariste Galois, 29 mai 1832.

Table des matières

Introduction

Lorsqu'on recherche le moment exact de la naissance d'un problème mathématique, on est souvent confronté à une science approximative, car les questions et problèmes évoluent en suivant le rythme de la connaissance des mathématiciens et la formulation d'un problème peut prendre une longue période avant d'atteindre son état final. Il est cependant fascinant de s'interroger sur le moment où Fermat aurait pu remplir sa marge ou sur cette nuit de mai 1832 durant laquelle Galois griffonna furieusement un héritage d'une valeur inestimable. Il est souvent étonnant de remarquer qu'une question apparemment anodine au départ est parfois transformée par l'histoire mathématique en une source de réflexions d'une richesse insoupçonnée, devenant par là une de ces minutes essentielles, denrées rares dans la vie du mathématicien. Si on devait rechercher l'origine du sujet de cette thèse, il faudrait probablement remonter à 1949 dans un bureau de l'Université de Chicago pour retrouver la fameuse question anodine...

Historique de la conjecture des idempotents

L'histoire commence donc en 1949 dans un bureau de l'Université de Chicago où un professeur-assistant, I.Kaplansky, discute avec un de ses étudiants qui débute sa thèse, R.Kadison. Kaplansky soulève la question suivante : "Existe-t-il une C*-algèbre simple unitale ne possédant pas de projection non-triviale?". La première réaction de Kadison fut de dire que la réponse devait certainement être positive et qu'un exemple devrait pouvoir être construit

sans trop de difficultés... Kaplansky lui fait tout de même remarquer que par exemple une C*-algèbre sans élément nilpotent doit forcément être commutative...

La question tombe alors un peu dans l'oubli, et ne semble pas susciter un intérêt excessif. Kadison parvient à construire une C*-algèbre primitive non-simple sans projection, mais il renonce à rédiger les détails. Cet exemple, complètement détaillé, sera finalement écrit par un étudiant de thèse de Kadison, J.Glimm, en 1962. Glimm semble intéressé d'approfondir la question, mais Kadison l'en dissuade, persuadé que cela ne serait pas très intéressant... Entre-temps la question apparaît pour la première fois en 1958 sous forme écrite dans un article de Kaplansky [72]. Au début de l'année 1966, Kadison séjourne à Aarhus (DK) où il travaille sur un autre sujet. Pendant une pause, repensant à la question de Kaplansky, il réalise alors que la réponse à la question devrait être la C*-algèbre réduite du groupe libre sur plus de deux générateurs ($C_r^*(\mathbf{F}_n)$). Kadison est persuadé qu'il détient le bon candidat même s'il n'a aucune preuve, même de la simplicité... L'année suivante la question de Kaplansky est publiée par Dixmier, dans le cadre de la conférence sur les algèbres d'opérateurs à Bâton Rouge.

De retour en Pennsylvanie en 1969, Kadison surprend lors d'une pause de midi la conversation d'un de ses collègues, R.Powers, qui avait assisté à la Conférence de Bâton Rouge. Recherchant une C*-algèbre unitale simple sans projection, ce dernier expliquait à quel point il avait été surpris de trouver des projections dans les algèbres de rotation irrationnelles A_θ (simples). Kadison engage alors le dialogue avec Powers sur le ton de la plaisanterie :
R.K. : "Tu veux vraiment cette algèbre, moi je la connais!!!"
R.P. : "Quoi ? Mais, où est-ce publié ? Comment cela a-t-il pu m'échapper ?"
R.K. : "Cela ne t'a pas échappé, je connais la réponse, je ne l'ai juste pas encore prouvé... Mais si tu veux, je te la donne, tu fais la preuve et on publie le résultat ensemble..."
Powers accepte le marché et se met d'arrache-pied au travail. Après quelques semaines la simplicité est prouvée, mais Powers ne parvient pas à démontrer l'absence d'idempotents non triviaux et après trois mois renonce car ses

calculs l'ont entraîné trop loin et l'ont presque rendu malade... La première C*-algèbre simple sans projection sera finalement construite par B.Blackadar [28]. En fait ce n'est qu'en 1982 que Pimsner et Voiculescu établissent la première preuve de la conjecture des idempotents pour $C_r^*(\mathbf{F}_n)$ [105]. L'énoncé général de la conjecture des idempotents prend alors sa forme finale : "la C*-algèbre réduite d'un groupe discret sans torsion ne possède pas d'idempotents non triviaux", et en l'honneur de la question de 1949 la conjecture prend le nom de conjecture de Kaplansky-Kadison...

L'histoire ci-dessus a été transmise en septembre 1997 par R.Kadison à l'auteur, qui tient chaleureusement à l'en remercier.

Description du travail

Le lecteur l'aura compris, cette thèse va s'articuler autour de la conjecture des idempotents.

Le premier chapitre permettra de faire quelques rappels élémentaires sur les C*-algèbres de groupes, la K-théorie des C*-algèbres et la conjecture des idempotents ainsi que sur sa grande soeur, la conjecture de Baum-Connes. Le lecteur familier avec ces notions pourra bien entendu sauter ce chapitre, alors que le lecteur novice, s'il ne trouvera certainement pas tous les détails nécessaires à la compréhension de la matière traitée pourra utiliser les références lorsqu'il le jugera nécessaire.

Le second chapitre sera en fait une application de la conjecture des idempotents en analyse harmonique. On utilisera le fait que lorsque la conjecture des idempotents est vérifiée, elle implique la connexité des spectres des éléments de la C*-algèbre réduite du groupe. On utilisera cela pour calculer le spectre de l'opérateur d'adjacence sur le graphe de Cayley du groupe de Heisenberg discret dans sa présentation standard. On verra également comment cet opérateur est étroitement lié à l'opérateur de Harper H_θ, bien connu par les

physiciens. On montrera également certaines interprétations combinatoires que prennent les coefficients de $H_\theta^k = (U_\theta + U_\theta^* + V_\theta + V_\theta^*)^k$ dans A_θ.

Le troisième chapitre s'intéressera lui à des idempotents dans les C*-algèbres de certains groupes de Lie. Par un résultat de Connes analogue au théorème d'isomorphisme de Thom, le groupe de K-théorie K_0 de la C*-algèbre d'un groupe de Lie simplement connexe, résoluble est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si le groupe est de dimension paire et est nul s'il est de dimension impaire. On essaiera de déterminer le rôle en K-théorie que jouent les projections construites par Kaniuth et Taylor dans l'algèbre de tels groupes. On montrera par exemple que certaines projections construites dans le cas de la composante connexe du groupe des affinités de $\mathbb{R}$ engendrent K_0. La K-théorie du groupe complet des affinités sera également calculée ; comme ce groupe est non connexe, le calcul ne découle pas du résultat de Connes.

Le principal résultat de ce travail sera contenu dans le quatrième chapitre consacré à l'étude de la K-théorie de la C*-algèbre réduite des groupes à un relateur, qui sera calculée de manière directe. La conjecture de Baum-Connes sera également prouvée, et par corollaire, la conjecture des idempotents (dans le cas sans torsion).

Dans le cinquième chapitre on se demandera si le résultat du chapitre précédent pourrait être un corollaire du résultat de Higson et Kasparov affirmant que la conjecture de Baum-Connes est vérifiée pour les groupes ayant la propriété de Haagerup. On ne pourra pas répondre entièrement à cette question ; on montrera cependant que les groupes à un relateur à centre non trivial ont la propriété de Haagerup. On s'intéressera également à d'autre formes de moyennabilités faibles pour les groupes à un relateur, prouvant entre autres qu'ils sont K-moyennables et que s'ils ont plus de trois générateurs ils ne sont pas intérieurement moyennables. On terminera par quelques mots sur la simplicité de la C*-algèbre réduite.

Remerciements

Dans la terminologie française, le directeur de thèse est appelé le «père mathématique». Peut-être jamais cette terminologie n'aura été aussi bien adaptée que dans mon cas. Non seulement je n'aurais strictement rien pu accomplir sans l'aide de mon directeur de thèse Alain Valette, mais en plus je crois lui avoir donné bien plus de fil à retordre qu'il ne l'avait imaginé au départ. Si des parents ont la chance d'avoir des enfants sans histoire, ce n'a de loin pas été mon cas, et je voue une infinie reconnaissance à Alain Valette de toujours avoir été d'une totale disposition à mon égard, même lorsque je devais finir par l'irriter avec mes problèmes extra-mathématiques. J'aimerais ici lui exprimer toute ma gratitude d'avoir empêché les pires années de ma vie personnelle de se transformer en échec professionnel. Je lui souhaite de tout mon coeur que ses «enfants» suivants soient des enfants modèles...

Outre mon directeur de thèse Alain Valette, trois personnes ont collaboré plus particulièrement à l'élaboration de certains résultats de cette thèse. Je tiens à les remercier et je les citerai dans l'ordre chronologique de nos collaborations. Tout d'abord Hela Bettaieb avec qui j'ai travaillé sur les résultats du chapitre 4, obtenant entre autre la K-théorie des groupes à un relateur sans torsion, calculs qui m'ont permis la généralisation à tous les groupes à un relateur, ensuite Tullio Ceccherini-Silberstein avec qui j'ai écrit une grande partie du chapitre 5 et finalement Florian Martin qui m'a apporté son aide pour le chapitre 3.

Je tiens également à exprimer ici ma gratitude à Pierre de la Harpe, Nigel Higson, Paul Jolissaint et Ulrich Suter qui m'ont tous fait l'honneur de faire

partie de mon jury de thèse. Leur lecture attentive de mon manuscrit et leurs nombreuses remarques avisées m'ont permis la réalisation finale du texte que vous avez sous les yeux.

J'aimerais souligner encore la qualité de l'ambiance de travail dont j'ai bénéficié pendant mes nombreuses années d'assistanat à l'Institut de mathématiques de l'Université de Neuchâtel. La disponibilité de chacun m'a souvent été d'un grand secours et je tiens à remercier les professeurs et mes collègues assistants pour leur gentillesse. J'aimerais en particulier remercier Claude Fuhrer qui, non content de m'avoir supporté depuis le premier jour de mon arrivée à l'Université, m'a également permis de me cultiver en informatique en me laissant profiter, bien plus souvent qu'à mon tour, de ses vastes connaissances.

Enfin, j'ai une pensée émue pour mes parents qui dans ma jeunesse m'ont donné suffisamment de forces et de confiance en moi pour parvenir au bout de ce que je désirais entreprendre...

Chapitre 1

Quelques rappels théoriques

Introduction

Le but de ce chapitre n'est pas de donner une description détaillée des notions théoriques utilisées dans la suite, mais de simplement décrire les grandes lignes de cette théorie en essayant de donner pour chaque notion une ou plusieurs références dont pourrait avoir besoin le lecteur. La première section sera dédiée aux C*-algèbres de groupe et plus particulièrement aux C*-algèbres réduite et maximale (universelle). On se contentera de groupes discrets dénombrables, puisque c'est ce type de groupes qui sera étudié par la suite. L'observation du morphisme entre la C*-algèbre maximale et la C*-algèbre réduite sera l'occasion de rappeler la notion de moyennabilité. Dans la deuxième section, on fera quelques rappels sur l'étude des idempotents dans les C*-algèbres et par suite de la K-théorie des C*-algèbres. En relation avec les notions de la première section, on dira également quelques mots sur la K-moyennabilité. Dans la troisième section on s'intéressera au titre même de ce travail, à savoir la conjecture des idempotents et à la conjecture plus générale de Baum-Connes. Enfin, dans la dernière section, on introduira la classe de groupes étudiée dans les quatrième et cinquième chapitres : les groupes à un relateur.

1.1 C*-algèbres de groupes

Soit Γ un groupe discret ; on notera $\mathbb{C}\Gamma$ son algèbre de groupe complexe :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\Gamma &= \text{Ensemble des fonctions de } \Gamma \text{ dans } \mathbb{C} \text{ à support fini} \\ &= \left\{ \sum_{\gamma \in F} \alpha_\gamma \delta_\gamma \mid F \subset \Gamma \text{ fini}, \alpha_\gamma \in \mathbb{C} \right\}\end{aligned}$$

Le produit est le produit de convolution $f * g(s) = \sum_{t\in\Gamma} f(t)g(t^{-1}s)$ donné dans la base par $\delta_{\gamma_1} * \delta_{\gamma_2} = \delta_{\gamma_1\gamma_2}$. Muni de l'involution $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$, $\mathbb{C}\Gamma$ est une $*$-algèbre.

Soit $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ une représentation unitaire de Γ, on l'étend linéairement en une $*$-représentation de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$: $\pi(f) = \sum_{s\in\Gamma} f(s)\pi(s)$ $(f \in \mathbb{C}\Gamma)$. Cela permet alors de définir la C*-algèbre de groupe associée à $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$.

Définition 1.1.1
La C-algèbre du groupe Γ, notée $C^*_\pi(\Gamma)$, associée à la représentation $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ est la fermeture pour la norme d'opérateur de $\pi(\mathbb{C}\Gamma)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$.*

Deux représentations jouent un rôle particulièrement important :

i) La représentation régulière gauche du groupe λ de Γ sur $l^2(\Gamma)$ donnée par $(\lambda(s)\xi)(t) = \xi(s^{-1}t)$ pour $s, t \in \Gamma$ et $\xi \in l^2(\Gamma)$.

ii) La représentation universelle du groupe π_{un} qui est la somme directe de toutes (à équivalence près) les représentations unitaires irréductibles de Γ.

Ces deux représentations définissent les C*-algèbres qui seront le sujet d'étude de ce travail :

Définition 1.1.2
i) La C-algèbre réduite de Γ, notée $C^*_r(\Gamma)$, est $C^*_\lambda(\Gamma)$.*

ii) La C-algèbre maximale de Γ, notée $C^*_{max}(\Gamma)$, est $C^*_{\pi_{un}}(\Gamma)$.*

Remarque : La C*-algèbre maximale peut être également vue comme la C*-algèbre enveloppante de $l^1(\Gamma)$ (voir [44], 13.9) et possède la propriété universelle que $\widehat{C^*_{max}(\Gamma)} = \widehat{\Gamma}$ où $\widehat{C^*_{max}(\Gamma)}$ est le spectre de la C*-algèbre maximale (classes d'équivalence de représentations irréductibles de $C^*_{max}(\Gamma)$) et $\widehat{\Gamma}$ est le dual topologique du groupe (classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de Γ). Dans le cas de la C*-algèbre réduite, le spectre correspond cette fois au dual réduit $\widehat{\Gamma}_r$ du groupe.

Toute représentation π de Γ peut donc s'étendre en un C*-homomorphisme $\pi : C^*_{max}(\Gamma) \to C^*_{\pi}(\Gamma)$ qui est surjectif (voir [44] 18.3.2). En particulier la représentation régulière gauche définit un C*-homomorphisme surjectif de la C*-algèbre maximale sur la C*-algèbre réduite. La classe de groupes pour lesquels cet homomorphisme est un isomorphisme est la classe des groupes moyennables (voir [104] 7.3.9). Une partie importante de la théorie de la moyennabilité consiste à démontrer les équivalences entre les diverses définitions de nature très diverses (analytique, algébrique, combinatoire,...). La définition ci-dessous est donc réellement plus un théorème qu'une simple définition.

Définition 1.1.3

Soit Γ un groupe discret dénombrable; Γ est dit moyennable s'il satisfait à l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. *Le C*-homomorphisme $\lambda : C^*_{max}(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$ est un isomorphisme;*
2. $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_r$;
3. *La représentation triviale de Γ est faiblement contenue dans la représentation régulière gauche de Γ;*
4. *Si Γ agit continuement et affinement dans un convexe compact non vide C d'un espace vectoriel topologique séparé, alors il existe dans C un point fixe pour cette action;*
5. *Il existe une moyenne invariante à gauche sur Γ, c'est-à-dire un état m sur $l^\infty(\Gamma)$ tel que $m(f_s) = m(f)$, $\forall s \in \Gamma$, $\forall f \in l^\infty(\Gamma)$ où $f_s(t) = f(s^{-1}t)$;*

Si Γ est de génération finie, ces conditions sont encore équivalentes à :

6. *Si* $S = S^{-1}$ *est un système symétrique fini de générateurs de* Γ, *alors il existe une suite (de Følner)* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous-ensembles finis de* Γ *tels que* $\frac{|sF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; \forall s \in S$;
7. *Si* S *est un système fini de générateurs quelconque de* Γ, *alors* $1 \in Sp(\frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\lambda(s))$ *où le spectre est calculé dans* $C_r^*(\Gamma)$.

Remarques : La première de ces différentes propriétés à avoir été étudiée est l'existence de moyennes invariantes, dans les travaux de von Neumann publiés en 1929. Ce n'est que dans les années 60 que les autres propriétés apparurent (voir [17] pour une compilation des équivalences). Les cinq premières propriétés définissent également la notion de moyennabilité dans le cas localement compact. Comme exemples de groupes moyennables, il convient évidemment de citer les groupes abéliens pour qui non seulement les C*-algèbres maximale et réduite sont isomorphes mais qui en plus grâce à la transformée de Fourier sont facilement identifiables : $C^*_{max}(\Gamma) \cong C^*_r(\Gamma) \cong C(\widehat{\Gamma}) = C(\widehat{\Gamma}_r)$. Le cas non-commutatif révèle lui tout l'intérêt de l'étude des C*-algèbres de groupes puisque, excepté dans des cas comme les groupes virtuellement abéliens où la théorie de Mackey permet encore d'identifier $\widehat{\Gamma}$, le dual d'un groupe devient en général "incalculable".

1.2 Idempotents et K-théorie des C*-algèbres

Tous les résultats de cette section pourront être retrouvés entre autres dans [29] et [129].

On l'a vu dans la section précédente, la structure des C*-algèbres maximale et réduite est étroitement liée au dual du groupe. Le rôle des idempotents dans cette approche peut être mis en évidence en reprenant l'exemple des groupes abéliens pour lesquels la non-connexité du dual est liée à l'existence d'idempotents non triviaux dans la C*-algèbre réduite. Mais commençons par rappeler les définitions d'idempotents et de projections dans une C*-algèbre.

Définition 1.2.1
Soit A une $*$-algèbre, un idempotent de A est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$, une projection de A est un idempotent auto-adjoint, c'est-à-dire un élément $p \in A$ tel que $p = p^2 = p^*$.

On verra un peu plus loin que dans le cas des C*-algèbres, la notion de projection sera suffisante pour étudier l'ensemble de tous les idempotents. Mais revenons au cas des groupes abéliens et citons le théorème qui lie l'existence des idempotents de la C*-algèbre réduite à la connexité du dual topologique du groupe. Le lecteur trouvera une preuve de ce résultat dans [126] au second paragraphe.

Théorème 1.2.1
Soit Γ un groupe abélien discret dénombrable ; les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $C_r^*(\Gamma)$ *n'a pas d'idempotent autre que* 0 *et* 1 ;

ii) Γ *est sans torsion ;*

iii) $\widehat{\Gamma}$ *est connexe.*

Un outil essentiel dans l'étude des idempotents dans les C*-algèbres est la K-théorie. En effet le groupe K_0 de K-théorie analytique d'une algèbre de Banach peut être défini à l'aide de classes d'équivalences d'idempotents, remarquons ici que cette définition analytique de la K-théorie fournira le même groupe K_0 de K-théorie que la définition purement algébrique de celle-ci où seule la structure d'anneau de l'algèbre intervient... Mais revenons aux relations d'équivalence entre idempotents.

Définition 1.2.2
Soit e et f deux idempotents dans une algèbre de Banach A, ($\tilde{A}$ désignera l'unitalisation de A).

$e \sim f$ *s'il existe $x, y \in A$ tels que $xy = e$ et $yx = f$ (équivalence algébrique) ;*

$e \sim_s f$ *s'il existe un inversible z dans $\tilde{A}$ tel que $zez^{-1} = f$ (similarité) ;*

$e \sim_h f$ *s'il existe un chemin d'idempotents, continu en norme dans A, de e à f (équivalence homotopique).*

Lorsque A est une C*-algèbre, il est alors suffisant de travailler uniquement avec les projections car chaque idempotent d'une C*-algèbre est similaire et même homotope à une projection ([29] 4.6.2) ; on peut alors traduire ces trois équivalences dans le langage des projections ([29] 4.6.3-5) :

Définition 1.2.3

Soit p et q deux projections dans une C-algèbre A ;*

$p \sim q$ *s'il existe une isométrie partielle $u \in A$ (u^*u est une projection) telle que $u^*u = p$ et $uu^* = q$ (équivalence de Murray-von Neumann) ;*

$p \sim_u q$ *s'il existe un unitaire u dans $\tilde{A}$ tel que $upu^* = q$ (équivalence unitaire) ;*

$p \sim_h q$ *s'il existe un chemin de projections, continu en norme dans A, de p à q (équivalence homotopique).*

Si on a les implications $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$, les implications inverses ne sont vraies que si on travaille dans $M_\infty(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(A)$ où $M_n(A)$ désigne les matrices $n \times n$ à coefficients dans A. On munit alors $V(A)$ l'ensemble des classes d'équivalences de projections de $M_\infty(A)$ d'une structure de monoïde abélien en définissant : $[p] + [q] = [diag(p, q)]$.

Définition 1.2.4

Soit A une C-algèbre ; on définit son groupe K_0 de K-théorie par :*

- *si A est unitale, $K_0(A)$ est le groupe de Grothendieck de $V(A)$;*
- *si A est non-unitale, $K_0(A)$ est le noyau de l'application*

$$\pi_* : K_0(\tilde{A}) \to K_0(\tilde{A}/A) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

On définit ainsi un foncteur semi-exact de la catégorie des C*-algèbres dans celle des groupes abéliens. Les autres groupes de K-théorie analytique peuvent être définis à l'aide du groupe K_0 et de la suspension d'une C*-algèbre $S(A) = A \otimes C_0(\mathbb{R})$:

$$K_i(A) = K_0(S^i(A)) \qquad i \in \mathbb{N}.$$

En réalité cette théorie homologique est périodique, car le théorème de Bott montre que $K_0(A) \cong K_0(S^2(A))$. Il n'y a donc en fait que deux groupes de K-théorie analytique, K_0 et K_1 dont une définition plus naturelle est :

Définition 1.2.5

Soit A une C-algèbre ; on définit son groupe K_1 de K-théorie par :*

- *si A est unitale, $K_1(A) = GL_\infty(A)/GL_\infty(A)_0$*
  où $GL_\infty(A) = \varinjlim_{n\to\infty} GL_n(A)$ et $GL_\infty(A)_0 = \varinjlim_{n\to\infty} GL_n(A)_0$
  (l'inclusion $GL_n(A) \hookrightarrow GL_{n+1}(A)$ est donnée par $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$);
- *si A est non-unitale, $K_1(A)$ est simplement $K_1(\tilde{A})$.*

Remarquons que ce groupe K_1 de K-théorie analytique n'est en général pas isomorphe au groupe K_1^{alg} défini en K-théorie algébrique.

Lorsque le groupe Γ est discret, par définition de la C*-algèbre réduite, on a une injection de Γ dans les inversibles de $C_r^*(\Gamma)$. On obtient ainsi par composition avec l'application quotient une application de Γ dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$ et comme K_1 est un groupe abélien, cette homomorphisme factorise par le groupe abélianisé de Γ en un homomorphisme

$$\kappa_\Gamma : \Gamma^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma)).$$

On peut montrer que cet homomorphisme est rationnellement injectif (voir [49],[26]).

Terminons ces quelques rappels avec un des principaux outils de la K-théorie des C*-algèbres : soit une suite exacte de C*-algèbres $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$, alors il existe des flèches de connections δ rendant la suite cyclique à 6 termes suivante exacte :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{i_*} & K_0(B) & \xrightarrow{p_*} & K_0(C) \\ \uparrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K_1(C) & \xleftarrow{p_*} & K_1(B) & \xleftarrow{i_*} & K_1(A) \end{array}$$

Dans le cas non-commutatif on ne dispose d'aucun théorème de structure pour les C*-algèbres réduites et maximales. Parfois il sera cependant possible de calculer la K-théorie de ces deux C*-algèbres. Par analogie à la section précédente, une classe de groupes intéressante, plus large que celle des groupes moyennables, sera celle des groupes pour lesquels on exigera que l'homomorphisme λ entre la C*-algèbre maximale et la C*-algèbre réduite soit un isomorphisme en K-théorie seulement. On sait depuis les travaux de Pimsner et Voiculescu [105] que les groupes libres sur plus de deux générateurs ne sont pas moyennables, mais appartiennent à cette famille. Cette classe sera définie à l'aide de la K-homologie des C*-algèbres et s'appellera la classe des groupes K-moyennables; on y reviendra au chapitre 5. Les notions duales de K-homologie et de K-théorie des C*-algèbres sont généralisées dans un bifoncteur dont on ne parlera pas ici car on en aura un besoin seulement ponctuel; il s'agit de la KK-théorie de Kasparov que le lecteur pourra apprendre par exemple dans [29] et [118].

1.3 Conjecture des idempotents et conjecture de Baum-Connes

On l'a vu dans la section précédente, dans le cas des groupes abéliens l'absence d'élément de torsion dans le groupe est équivalente à l'absence d'idempotents non-triviaux (autres que 0 et 1) dans la C*-algèbre réduite. Pour un groupe discret quelconque, l'absence d'idempotents non-triviaux impliquera bien toujours l'absence d'élément de torsion dans le groupe (un élément $s \in \Gamma$ tel que $s^n = 1$ fournit n idempotents appelés projecteurs spectraux de s : $p_i = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij}\delta_{sj}$, $i = 0, ..., n-1$, où ω est une racine primitive n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$), par contre l'implication inverse reste une conjecture dont l'historique a été tracé dans l'introduction. Pour un survol complet, le lecteur se référera à [126].

Conjecture 1.3.1 (Conjecture des idempotents)
Soit Γ un groupe discret dénombrable sans torsion, alors $C_r^*(\Gamma)$ n'a pas

d'idempotents non triviaux.

Une des conséquences de cette conjecture que l'on utilisera au deuxième chapitre est le lien entre l'absence d'idempotents non triviaux et des propriétés spectrales des éléments de $C_r^*(\Gamma)$.

Lemme 1.3.1
Soit A une algèbre de Banach unitale; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A n'a pas d'autres idempotents que 0 et 1.

ii) Le spectre de chaque élément de A est connexe.

Si de plus A est une C-algèbre, ceci est encore équivalent à :*

iii) Le spectre de chaque élément auto-adjoint de A est un intervalle.

⌜ i)⇒ii) Par contraposée, si $x \in A$ a un spectre non connexe, il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ telle que f soit égale à 1 sur une partie du spectre de x et 0 sur le reste. Comme $f^2 = f$ sur le spectre de x, le théorème spectral fournit alors un idempotent non trivial $y = f(x)$.
ii)⇒i) Cette implication résulte du fait qu'un idempotent autre que 0 ou 1 a le spectre non connexe $\{0, 1\}$.
Supposons maintenant que A est une C*-algèbre :
ii)⇒iii) Cette implication est classique.
iii)⇒i) On a vu que dans une C*-algèbre, tout idempotent non trivial est homotope à une projection non triviale (idempotent auto-adjoint) dont le spectre $\{0, 1\}$ est non connexe, d'où l'implication. ⌟

Même si pour plusieurs classes de groupes (groupes libres, groupes de surface, groupes nilpotents,...) la conjecture des idempotents a été démontrée directement, une vue globale des groupes pour lesquels la conjecture est maintenant connue nécessite une discussion sur une conjecture plus générale qui a déjà été prouvée pour de larges classes de groupes : la conjecture de Baum-Connes. On ne prétendra pas ici décrire explicitement l'application de Baum-Connes,

le lecteur intéressé consultera [10] et [66], on se contentera juste de tenter d'expliquer la "philosophie" de cette conjecture.

Comme on l'a déjà relevé, calculer la K-théorie de la C*-algèbre réduite d'un groupe est en règle générale une question très compliquée. Le but de la conjecture de Baum-Connes est de donner d'autres groupes, plus facilement calculables, qui soient isomorphes aux groupes de K-théorie cherchés. L'origine de cette théorie se trouve dans la définition donnée par Atiyah [2] dans le cas des variétés compactes lisses de la théorie duale de la K-théorie des espaces compacts : la K-homologie. L'avantage de la théorie d'Atiyah est que tout comme en K-théorie avec l'identification $K^0(X) \cong K_0(C(X))$, la K-homologie des espaces compacts est généralisable au cas non commutatif : sur une C*-algèbre A quelconque Kasparov [75] (voir aussi [118]) définit la notion de module de Fredholm (ou d'opérateur elliptique abstrait) et une relation d'équivalence dont les classes forment un groupe abélien : $K^0(A)$ (la K-homologie de A). Les travaux d'Atiyah montrent qu'en fait un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre zéro D sur une variété lisse M définit un module de Fredholm sur $C(M)$, d'où l'identification $K_0(M) \cong K^0(C(M))$. La généralisation à un espace compact X quelconque se fait à l'aide d'un résultat de Baum et Douglas [11] qui montre que n'importe quel élément de $K^0(C(X))$ est donné par un triple (M, D, f) où f est une application continue d'une variété lisse compacte M sur X, et D est comme ci-dessus. L'application adjointe $f^* : C(X) \to C(M)$ transforme alors le module de Fredholm sur $C(M)$ donné par (M, D) en un module de Fredholm sur $C(X)$. L'exemple intéressant est celui où $X = pt$: chaque élément de $K_0(pt)$ est alors donné par un couple (M, D). Dans cette situation, l'opérateur D est un opérateur de Fredholm (i.e. son Ker et son Coker sont de dimension finie) et son indice définit l'isomorphisme suivant :

$$\mu : K_0(pt) \to K_0(\mathbb{C}),\ (M, D) \mapsto [KerD] - [CokerD]$$

autrement dit

$$\mu : K_0(pt) \to \mathbb{Z},\ (M, D) \mapsto dim(KerD) - dim(CokerD)$$

Cet isomorphisme correspond, on va le voir, à l'application de Baum-Connes pour le groupe trivial. Le point crucial de la théorie est alors le résultat de Kasparov [76] (voir aussi [38] dans le cas des variétés) qui généralise les notions de K-homologie et d'indice d'opérateur de Fredholm au cas suivant : si X est un espace localement compact sur lequel agit proprement un groupe Γ avec quotient compact, Kasparov formalise la notion d'opérateur elliptique abstrait Γ-équivariant D et une notion d'indice à valeurs dans $K_0(C_r^*(\Gamma))$. Pour une description détaillée de cette flèche d'indice de $K_0^\Gamma(X)$ (K-homologie équivariante) dans $K_0(C_r^*(\Gamma))$, le lecteur consultera la section 3 de [10]. La "philosophie" de la conjecture de Baum-Connes est alors que $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est complètement décrit par ces indices. Le dernier problème est évidemment de réunir l'information donnée par tous les espaces possibles X satisfaisant les conditions ci-dessus. Dans ce but, Baum et Connes définissent un espace $\underline{E\Gamma}$ qui joue le rôle d'un espace classifiant pour les actions propres à quotient compact de Γ. L'intérêt de cet espace est que dans beaucoup de cas il existe un modèle qui a un intérêt géométrique particulier. On remarquera encore que dans le cas sans torsion, l'action propre devient libre et on retrouve l'espace $E\Gamma$ de la théorie des actions principales. La flèche d'indice permet alors d'énoncer la conjecture de Baum-Connes de façon générale :

Conjecture 1.3.2 (Conjecture de Baum-Connes)
Soit Γ un groupe discret, $\underline{E\Gamma}$ son classifiant des actions propres; alors les applications

$$\mu_i^\Gamma \ : \ K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma))$$

sont des isomorphismes ($i = 0, 1$).

Remarques :

1. La discussion ci-dessus n'avait pris en considération que le cas $i = 0$, le cas $i = 1$ est en fait défini par Kasparov en ne considérant que des opérateurs elliptiques abstraits Γ-équivariants *auto-adjoints* qui possèdent une théorie d'indice à valeur dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$.
2. On a fait ici un abus de notation, car la K-homologie équivariante est définie pour une action à quotient compact, ce qui n'est en général pas le

cas pour $\underline{E\Gamma}$. Le groupe $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma})$ désigne donc en fait la limite inductive des groupes $K_i^\Gamma(Y)$ où Y parcourt les sous-ensembles Γ-compacts de $\underline{E\Gamma}$.

3. Baum et Connes construisent également un caractère de Chern :

$$ch_\Gamma \ : \ K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_{i+2k}(\Gamma, F\Gamma)$$

qui devient un isomorphisme en tensorisant par $\mathbb{C}$ (Théorème 7.25 de [9]). Ici $F\Gamma$ est le Γ-module des fonctions complexes à support fini sur l'ensemble des éléments de torsion de Γ, Γ agissant par conjugaison.

4. Dans [10], Baum, Connes and Higson énoncent une extension de la conjecture de Baum-Connes , où, cette fois, des coefficients sont pris dans une C*-algèbre F quelconque sur laquelle Γ agit par $*$-automorphismes : ils construisent un groupe $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}, F)$ et une flèche d'indice

$$\mu_i^\Gamma \ : \ K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}, F) \to K_i(F \rtimes_r \Gamma) \ \ (i = 0, 1)$$

qu'ils conjecturent être un isomorphisme (ici $F \rtimes_r \Gamma$ désigne le produit croisé réduit de F par Γ).

5. Dans le cas des groupes sans torsion, on a vu que l'on peut utiliser $E\Gamma$ pour $\underline{E\Gamma}$. L'isomorphisme $K_i^\Gamma(E\Gamma) \cong K_i(E\Gamma/\Gamma) = K_i(B\Gamma)$ permet alors d'écrire l'application de Baum-Connes dans ce cas particulier :

$$\mu_i^\Gamma \ : \ K_i(B\Gamma) \to K_i(C_r^*(\Gamma))$$

Dans ce cas on a vu que les éléments de $K_0(B\Gamma)$ sont donnés par des triples (M, D, f), $\mu_0^\Gamma(M, D, f)$ étant l'indice défini par Kasparov. Si l'on compose alors μ_0^Γ avec la trace canonique τ de $C_r^*(\Gamma)$ (pour $f \in \mathbb{C}\Gamma$ $\tau(f) = f(\mathrm{e})$) passée en K-théorie, on obtient par le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah [3] que $\tau_*(\mu_0^\Gamma(M, D, f)) = Ind(D)$, c'est à dire l'indice entier de l'opérateur de Fredholm D. On constate donc que la trace canonique τ_* est à valeur entière sur l'image de μ_0^Γ.

La dernière remarque montre que la surjectivité de l'application de Baum-Connes pour $i = 0$ implique la conjecture suivante :

Conjecture 1.3.3 (Conjecture d'intégralité de la trace)
Soit Γ un groupe discret dénombrable sans torsion ; alors $\tau_*(K_0(C_r^*(\Gamma))) = \mathbb{Z}$.

Or cette conjecture implique facilement celle des idempotents. En effet si e est un idempotent de $C_r^*(\Gamma)$, on sait qu'il est similaire à une projection p. Comme $\tau(p) = \tau(zez^{-1}) = \tau(ez^{-1}z) = \tau(e)$ on peut supposer que e est une projection. Donc $\tau(e) = \tau(e^*e)$ et $\tau(1-e) = \tau((1-e)^*(1-e))$ sont des entiers positifs. Comme $\tau(e) + \tau(1-e) = 1$, l'un doit être nul. Supposons que c'est $\tau(e)$, alors $\tau(e^*e) = 0$ et par fidélité de la trace canonique $e = 0$.

On a donc montré que la conjecture des idempotents est une conséquence de la surjectivité de l'application de Baum-Connes. Terminons cette section en citant (dans l'ordre chronologique des preuves) les principaux groupes pour lesquels la conjecture de Baum-Connes 1.3.2 (sans coefficient) est vérifiée et par conséquent celle des idempotents également.

1. Tout sous-groupe discret d'un groupe de Lie réel connexe à composante de Levi localement isomorphe à

$$K \times SO(n_1, 1) \times ... \times SO(n_k, 1) \times SU(m_1, 1) \times ... \times SU(m_l, 1)$$

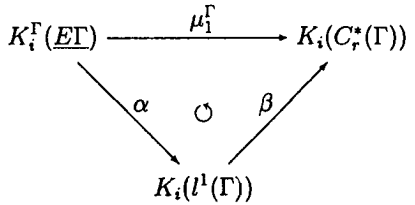
où K est compact. Ces résultats ont été obtenus avant 1995 par Kasparov et Julg, voir [77], [79] et [67].

2. Les groupes à un relateur (voir le chapitre 4) ; les groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 de Haken (cette classe comprenant les groupes de noeuds), voir [103] et [123].

3. Tous les groupes ayant la propriété de Haagerup (résultat obtenu par Higson et Kasparov en 1996, voir [66]), c'est-à-dire les groupes admettant une action isométrique propre sur un espace de Hilbert affine. On y trouve les sous-groupes discrets de $SO(n, 1)$ et $SU(m, 1)$, les groupes de Coxeter, les groupes moyennables,...

4. Enfin en 1998, un résultat remarquable a été obtenu par V.Lafforgue [85] démontrant que l'application de Baum-Connes factorise par la

K-théorie de l'algèbre de Banach $l^1(\Gamma)$



et que les homomorphismes α et β sont des isomorphismes pour les groupes suivants :

- α : Pour les sous-groupes discrets de tous les groupes de Lie et les groupes p-adiques $(GL_n(\mathbb{Q}_p))$.
- β : Pour les réseaux co-compacts dans $SO(n,1)$, $SU(n,1)$, $Sp(n,1)$, $SL_3(\mathbb{R})$, et $SL_3(\mathbb{Q}_p)$.

Le point remarquable de ce résultat est que pour la première fois la conjecture de Baum-Connes est démontrée pour des groupes ayant la propriété (T) (les réseaux co-compacts dans $Sp(n,1)$, $SL_3(\mathbb{R})$, et $SL_3(\mathbb{Q}_p)$).

1.4 Groupes à un relateur

La famille de groupes qui sera étudiée aux chapitres 4 et 5 est la classe des groupes à un relateur.

Définition 1.4.1
Un groupe à un relateur est un groupe donné par une présentation $\Gamma = \langle X|r\rangle$ *où* X *est un ensemble dénombrable de générateurs et* r*, le relateur, est un mot cycliquement réduit dans le groupe libre* $F(X)$ *sur* X.

Remarque : On dit que $r = x_1x_2\cdots x_n$ est cycliquement réduit si $x_n \neq x_1^{-1}$.

La classe des groupes à un relateur est bien étudiée en théorie combinatoire des groupes. Elle contient de "bons" groupes tels les groupes fondamentaux

de surfaces fermées (orientables ou non) ou les groupes de noeuds toriques, mais également certains groupes "plus complexes" comme les monstres de Baumslag-Solitar (certains étant même non-Hopfiens [13]).

Même si certains groupes à un relateur (groupes de surfaces,...) furent déjà étudiés à la fin du XIXème siècle, la première étude dédiée entièrement à la classe des groupes à un relateur est due à W.Magnus [92]. C'est le résultat principal de cette étude, nommé "Freiheitssatz", qui sera, ou plus précisément, dont le scénario de la preuve sera essentiel pour plusieurs résultats des chapitres 4 et 5. La preuve présentée ci-dessous n'est pas celle de Magnus, mais est due à McCool et Schupp [94]. Elle utilise des constructions mises en évidence par Moldavanskii [97] dans ses variations sur les travaux de Magnus : tout groupe à un relateur peut être construit de manière itérative à partir d'un groupe cyclique à l'aide de produits amalgamés ou d'extensions HNN. Le lecteur intéressé pourra consulter [91] ou encore [12] pour de plus amples détails.

Théorème 1.4.1 (Freiheitssatz)
Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur, avec r cycliquement réduit ; si L est un sous-ensemble de X qui omet un générateur apparaissant dans r alors le sous-groupe engendré par L est libre, librement engendré par L.

⌜ Notons $X = \{t, b, c, d, ...\}$ et $r = r(t, b, c, d, ...)$. Le principe de la preuve est une induction sur la longueur du relateur r. Si un seul générateur reste dans la relation alors Γ est un produit libre d'un groupe libre avec un groupe cyclique et l'assertion est claire. On peut donc supposer qu'au moins deux générateurs t et b apparaissent dans r et que r commence par une puissance non-nulle de b. Pour $x \in X$, on notera $\sigma_x(r)$ la somme des exposants des occurrences de x dans r. On distingue alors deux cas :

I - Il existe $t \in X$ tel que $\sigma_t(r) = 0$. On définit un nouvel alphabet par $b_i = t^i b t^{-i}$, $c_i = t^i c t^{-i}$, $\ldots (i \in \mathbb{Z})$, ce qui permet de réécrire r en un mot cycliquement réduit $\breve{r}$ sur les b_i, c_i,... Dans cet alphabet noté $\breve{X}$, la longueur de $\breve{r}$ est plus courte que celle de r dans l'alphabet X. Soient μ et m les indices respectivement minimum et maximum des

b_i apparaissant dans $\check{r}$. Γ peut alors être décrit comme une extension HNN : $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$ avec

$$\begin{array}{rcl} H & = & \langle b_\mu, \ldots, b_m, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) | \check{r} \rangle \\ A & = & \begin{cases} \langle b_\mu, \ldots, b_{m-1}, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu < m \\ \langle c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu = m \end{cases} \\ \theta & : & A \to H, \begin{cases} b_i \to b_{i+1}, c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu < m \\ c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu = m \end{cases} \end{array}$$

Supposons tout d'abord que le générateur t est omis dans L, vu dans le nouvel alphabet $\check{X}$, L sera alors un sous-ensemble de $\{b_0, c_0, d_0, ...\}$. Comme dans $\check{r}$ il apparaît au moins un générateur avec indice non-nul, par hypothèse d'induction L engendre librement un sous-groupe libre de H et donc de Γ.

Si t apparaît dans L, on peut supposer que c'est le générateur b qui est omis. Soit w un mot non-trivial librement réduit sur L ; il faut se convaincre que $w \neq 1$ dans Γ. Si $\sigma_t(w) \neq 0$ c'est clair car un mot équivalent à 1 dans Γ est un produit de conjugués de r. Si $\sigma_t(w) = 0$ alors w peut être vu comme un mot sur les $\{c_i, d_i, ...\}$ qui par hypothèse d'induction engendrent librement un sous-groupe libre de H donc de Γ, par conséquent $w \neq 1$.

II - Si $\sigma_z(r) \neq 0$ pour tout $z \in X$, on pose alors $\alpha = \sigma_t(r)$, $\beta = \sigma_b(r)$ et on considère le groupe $G = \langle y, x, c, d, \ldots | r_1 = r(yx^{-\beta}, x^\alpha, c, d, \ldots) \rangle$. L'application $\psi : \Gamma \to G$, $t \mapsto yx^{-\beta}$, $b \mapsto x^\alpha$, $c \mapsto c, \ldots$ est alors un homomorphisme injectif car G un produit amalgamé $G = \Gamma *_{<b=x^\alpha>} \langle x \rangle$. Comme $\sigma_x(r_1) = 0$ et $\sigma_y(r_1) = \sigma_t(r) \neq 0$, le premier cas s'applique à $G = \langle y, x, c, d, \ldots | r_1 \rangle$. G est donc une extension HNN d'un groupe à un relateur H, dont la relation $\check{r}_1$ est non seulement plus courte que r_1, mais également plus courte que r. Soit alors L un sous-ensemble de X ; on peut supposer que L est un sous-ensemble de $\{b, c, d, ...\}$. Comme par hypothèse d'induction et par le premier cas $\{x, c, d, ...\}$ engendre librement un sous-groupe libre de G, il en est de même pour $\{x^\alpha, c, d, ...\}$. Or ψ injecte L dans ce dernier sous-ensemble, d'où la conclusion désirée. ⌟

Le principe crucial de cette preuve qui sera repris dans les chapitres 4 et 5 est donc que soit un groupe à un relateur est une extension HNN, soit s'injecte dans une extension HNN d'un autre groupe à un relateur à relation plus courte.

On terminera ces rappels sur les groupes à un relateur par la caractérisation de la torsion donnée par Karrass, Magnus et Solitar dans [74] :

Théorème 1.4.2
Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur, avec r cycliquement réduit; le groupe Γ est sans torsion si et seulement si r n'est pas une puissance d'un autre élément non trivial du groupe libre $F(X)$. Si $r = s^n$, $n > 1$, s n'étant pas une puissance d'un autre élément non-trivial, alors tous les éléments de torsion de Γ sont des conjugués de puissances de s.

Chapitre 2

Une application de la conjecture des idempotents en analyse harmonique

Introduction

Soit un groupe finiment engendré Γ muni d'un système fini symétrique de générateurs $S = S^{-1}$, on s'intéressera dans ce chapitre à l'opérateur de Markov (ou de transition) h_S sur $l^2(\Gamma)$ donné par $h_S\xi(x) = \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S}\xi(xs)$. C'est en fait l'opérateur associé à la marche aléatoire sur le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$, c'est-à-dire la marche aléatoire commençant à l'origine et se déplaçant à chaque pas avec probabilité égale d'un sommet vers l'un de ses voisins. Rappelons que le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est le graphe de sommets l'ensemble des éléments de Γ et d'arêtes l'ensemble $\{\{x, xs\} : x \in \Gamma, s \in S\}$.

Depuis les travaux de Kesten [83], [82], on sait que le spectre de l'opérateur auto-adjoint h_S contient beaucoup d'informations sur la paire (Γ, S). Par exemple $\| h_S \| = 1$ si et seulement si Γ est moyennable. Si on peut écrire le système de générateurs comme réunion disjointe $S = S^+ \amalg (S^+)^{-1}$ avec $|S^+| = n$, alors on a $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \leqslant \| h_S \|$ et, si $n \geqslant 2$, l'égalité est atteinte si et seulement si Γ est le groupe libre sur S^+ ; dans ce cas on a en fait

$Sp\, h_S = \left[-\frac{\sqrt{2n-1}}{n}, \frac{\sqrt{2n-1}}{n}\right]$. Le lecteur se référera à [55] et [56] pour d'autres résultats reliant les propriétés spectrales de h_S aux propriétés algébriques de (Γ, S).

Malgré les diverses études générales citées ci-dessus, il existe relativement peu d'exemples de groupes infinis pour lesquels des calculs exacts de spectre d'opérateur de transition ont été effectués (sans mentionner le calcul de la mesure spectrale qui serait l'étape suivante). A notre connaissance, cela a été fait de manière systématique pour deux classes de groupes : les groupes virtuellement abéliens pour lesquels on se réduit à un sous-groupe abélien d'indice fini sur lequel on utilise les techniques classiques d'analyse de Fourier et les groupes virtuellement libres pour lesquels on fait appel à l'analyse combinatoire sur les arbres. L'article [35] illustre bien les difficultés rencontrées pour traiter d'autres exemples non moyennables comme les groupes de surfaces.

On considérera ici un exemple classique de groupe nilpotent de rang 2 : le groupe discret de Heisenberg

$$H(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & p \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m, n, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

avec système de générateurs

$$S = \left\{ x^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Avec ce système de générateurs, on a la présentation suivante du groupe de Heisenberg : $H(\mathbb{Z}) = \langle x, y, z | [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle$. Pour l'opérateur de Markov correspondant h_S, on montrera la proposition suivante :

Proposition 2.1.3

$Sp\,(h_S)$ est un intervalle $[m, 1]$ avec $m = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{3} = -0.804737854...$

La valeur de m sera obtenue en liant h_S à un opérateur de Schrödinger discret : l'opérateur de Harper est l'opérateur $H_{\theta,\phi}$ ($\theta, \phi \in [0, 1]$) sur $l^2(\mathbb{Z})$ donné

par $(H^{*}_{\theta,\phi}\xi)(n) = \xi(n+1)+\xi(n-1)+2\cos 2\pi(n\theta+\phi)\cdot\xi(n)$, $(\xi \in l^2(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{Z})$. C'est un des opérateurs de Schrödinger discret les plus étudiés dans la littérature, qu'elle soit mathématique ou physique (le lecteur se référera à [23] et [117] pour des études récentes). Une quantité impressionnante de données numériques est disponible concernant le spectre de $H_{\theta,\phi}$ (la représentation graphique de ces spectres aboutit à la fameuse image du "papillon de Hofstadter" [58]). On commencera en fait par montrer que la proposition 2.1.3 est équivalente à

Proposition 2.2.1
Pour tout $\theta, \phi \in [0,1]$: $\| H_{\theta,\phi} \| \leqslant 2(1+\sqrt{2}+\cos(2\pi\theta))$ *avec égalité en* $\theta = \frac{1}{2}$, $\phi = 0$.

Pour θ irrationnel, la norme $\| H_{\theta,\phi} \|$ ne dépend pas de ϕ (voir [112]), mais elle en dépend pour θ rationnel. Pour unifier les deux cas, il faut considérer l'opérateur de Schrödinger H_θ de dimension 2 sur $l^2(\mathbb{Z}^2)$ défini par

$$H_\theta\xi(m,n) = \xi(m+1,n) + \xi(m-1,n) + e^{2\pi i\theta m}\xi(m,n-1) + e^{-2\pi i\theta m}\xi(m,n+1)$$
$$\xi \in l^2(\mathbb{Z}^2),\ m,n \in \mathbb{Z}.$$

Par [23] ou le lemme 2.2.2 ci-dessous, on a $\| H_\theta \| = \max_{\phi} \| H_{\theta,\phi} \|$ pour n'importe quel θ, ce qui permet de reformuler la proposition 2.2.1 en $\| H_\theta \| \leqslant 2(1+\sqrt{2}+\cos(2\pi\theta))$, avec égalité en $\theta = \frac{1}{2}$.

La figure 2.1 met en évidence des résultats numériques montrant le bien-fondé de la proposition ; il faut cependant rester attentif au fait que la courbe $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$ a été tracée en calculant la valeur de $\| H_\theta \|$ pour certaines valeurs rationnelles de θ puis en interpolant linéairement les résultats obtenus. Ce graphique ne constitue donc en aucun cas une preuve de la proposition 2.2.1.

Le manque de régularité de la fonction $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$ (elle est tout de même continue) crée de grosses difficultés lorsqu'on essaie de rechercher une preuve de la proposition 2.2.1 avec les outils d'analyse classiques. C'est pour cette raison que l'approche développée ci-dessous sera principalement C*-algébrique. On regardera h_S comme élément de la C*-algèbre réduite du groupe $C^*_r(\Gamma)$. Par moyennabilité de $\Gamma = H(\mathbb{Z})$, $C^*_r(\Gamma)$ est isomorphe à la C*-algèbre maxi-

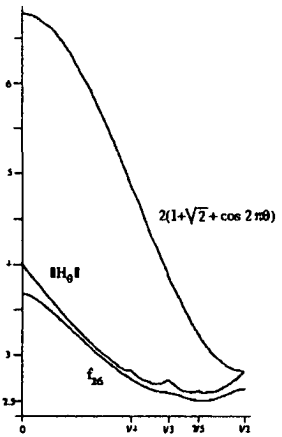


FIG. 2.1: Les fonctions $\theta \longmapsto f_{26}(\theta)$, $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$, $\theta \longmapsto 2(1+\sqrt{2}+\cos 2\pi\theta)$

male $C^*(\Gamma)$ qui dans le cas présent est la C*-algèbre universelle engendrée par trois unitaires x, y, z satisfaisant les règles de commutation $x \cdot y = z \cdot y \cdot x$ avec z central. Pour chaque $\theta \in [0,1]$ notons $\mathcal{A}_\theta$ l'algèbre de rotation de Rieffel, c'est-à-dire la C*-algèbre universelle engendrée par deux unitaires U_θ, V_θ satisfaisant la relation de commutation $V_\theta U_\theta = e^{2\pi i\theta} U_\theta V_\theta$. On peut alors voir l'opérateur H_θ comme l'élément $U_\theta + U_\theta^* + V_\theta + V_\theta^*$ de $\mathcal{A}_\theta$ (C'est le point crucial de l'approche C*-algébrique de H_θ , voir par exemple [109], [36]). On définit évidemment un $*$-homomorphisme de $C^*(\Gamma)$ sur $\mathcal{A}_\theta$ défini par $\pi_\theta(x) = U_\theta$, $\pi_\theta(y) = V_\theta$, $\pi_\theta(z) = e^{-2\pi i\theta} \cdot \mathbb{1}$. On a alors par cet homomorphisme $\pi_\theta(h_S) = \frac{1}{6}(H_\theta + 2\cos 2\pi\theta)$; le fait que la famille de représentations $(\pi_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ est séparante explique donc le lien entre le spectre de h_S et le spectre des H_θ.

Dans le deuxième paragraphe on détaillera ces liens entre $h_S \in C^*(H(\mathbb{Z}))$ et l'opérateur de Harper, puis on montrera l'équivalence des propositions 2.1.3 et 2.2.1. Dans le second on prouvera la proposition 2.2.1. Enfin, dans le dernier on s'intéressera aux puissances de H_θ dans $\mathcal{A}_\theta$; ceci permettra de donner d'autres bornes supérieures à la fonction $\theta \longrightarrow \| H_\theta \|$. Ces puissances de H_θ sont en fait des combinaisons linéaires formelles de monômes $U_\theta^m V_\theta^n$

dont les coefficients ont une signification en terme de chemins issus de l'origine dans le réseau carré de $\mathbb{Z}^2$. En particulier pour $m = n = 0$ on obtient la trace canonique de ${H_\theta}^{2k}$ comme un polynôme trigonométrique $f_k^{2k}(\theta)$ dont le l-ième coefficient est le nombre de chemins fermés issus de $(0,0)$ dans $\mathbb{Z}^2$, de longueur $2k$ et entourant une surface orientée d'aire l. On montrera également que cette famille $f_k(\theta)$ de fonctions C^∞ approche uniformément par le bas la fonction irrégulière $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$. La fonction f_{26} apparaît sur la figure 2.1.

2.1 Du spectre de la marche aléatoire sur $H(\mathbb{Z})$ à l'opérateur de Harper

Dans la suite, on notera Γ le groupe de Heisenberg $H(\mathbb{Z})$. Le groupe Γ admet deux présentations naturelles :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \langle x, y \ : \ [x,[x,y]] = [y,[y,x]] = 1 \rangle \\ &= \langle x, y, z \ : \ z = [x,y], [x,z] = [y,z] = 1 \rangle \end{aligned}$$

Le groupe Γ est finiment engendré, nilpotent et sans torsion ; pour de tels groupes la conjecture des idempotents est vérifiée. Le lecteur pourra trouver une multitude de démonstration différentes de ce fait : par la K-théorie (Rosenberg [114]), par l'analyse harmonique (Kaniuth-Taylor [70]), par la théorie des C*-algèbres (Ji-Pedersen [62]), par la cohomologie cyclique (Ji [61]) et "à la Kasparov" comme réseau d'un groupe de Lie (Valette [20]). Dans le cas particulier de Γ, il existe même une preuve due à Bellissard [22] avec une touche de calcul différentiel non-commutatif (formule de Streda's).

Le spectre de l'opérateur de Markov associé à la première présentation est aisément calculable. Il s'agit de l'opérateur de transition sur le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S_0)$ avec $S_0 = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, cet opérateur est donc

$$h_{S_0} = \frac{1}{4}(x + y + x^{-1} + y^{-1}) \in C_r^*(\Gamma).$$

Lemme 2.1.1
$Sp(h_{S_0}) = [-1, 1]$.

⌜ Soit $Z(\Gamma)$ le centre de Γ ; l'application quotient $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma/Z(\Gamma) \cong \mathbb{Z}^2$ induit un $*$-homomorphisme $\widetilde{\alpha}$ de $C_r^*(\Gamma)$ sur $C^*(\mathbb{Z}^2)$. L'image de l'opérateur de Markov est $\widetilde{\alpha}(h_{S_0}) = \frac{1}{4}(\alpha(x) + \alpha(x^{-1}) + \alpha(y) + \alpha(y^{-1}))$ et comme $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^2$, c'est un exercice élémentaire de transformées de Fourier de montrer que $Sp(\widetilde{\alpha}(h_{S_0})) = [-1, 1]$. On en déduit que $[-1, 1] \subseteq Sp(h_{S_0})$ et comme $\| h_{S_0} \| \leqslant 1$, l'égalité est vérifiée. ⌟

Considérons maintenant le spectre de l'opérateur de Markov associé cette fois à la seconde présentation de Γ (cette présentation est bien adaptée au plongement de Γ comme réseau du groupe de Heisenberg réel de dimension 3).

Avec le système de générateurs $S = \{x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}\}$ le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est représenté dans la figure 2.2.

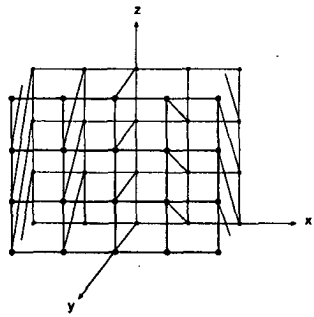


FIG. 2.2: $\mathcal{G}(\Gamma, S)$

L'opérateur de transition est $h_S = \frac{1}{6}(x+y+z+x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \in C_r^*(\Gamma)$. La première question intéressante est donc de savoir comment le spectre change lorsqu'on ajoute le générateur supplémentaire z, c'est-à-dire quand h_{S_0} est remplacé par h_S. On a tout d'abord le résultat préliminaire suivant :

Proposition 2.1.2
$Sp(h_S)$ est un intervalle $[m, 1]$, avec $-1 < m < 0$.

⌜ La conjecture des idempotents étant vérifiée pour Γ, il n'y a pas d'idempotent non trivial dans $C_r^*(\Gamma)$ et donc, par le lemme 1.3.1, $Sp(h_S)$ est un intervalle $[m, M]$, avec $-1 \leqslant m \leqslant M \leqslant 1$ (puisque $\| h_S \| \leqslant 1$). Comme Γ est moyennable, on a $1 \in Sp(h_S)$ par la caractérisation de Kesten de la moyennabilité [83], [82]. Enfin, comme le graphe n'est pas biparti, par un résultat de de la Harpe, Valette et Robertson (proposition 5.2 de [55]) on a que $-1 < m$. ⌟

Le résultat important est évidemment la détermination de la valeur de m :

Proposition 2.1.3
$m = \frac{-1-\sqrt{2}}{3} = -0.804737854...$

Comme indiqué dans l'introduction, on va maintenant décrire en détail les liens entre l'opérateur h_S et l'opérateur de Harper, montrant ainsi l'équivalence des propositions 2.1.3 et 2.2.1. Rappelons que pour tout $\theta \in [0,1]$, la C*-algèbre $\mathcal{A}_\theta$ apparaît comme un quotient de $C^*(\Gamma)$ via l'application

$$\pi_\theta : \begin{cases} C^*(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{A}_\theta \\ x & \longmapsto & U_\theta \\ y & \longmapsto & V_\theta \\ z & \longmapsto & e^{-2\pi i\theta}. \end{cases}$$

La famille de représentations $(\pi_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ de $C^*(\Gamma)$ est séparante, ce qui implique que pour tout élément auto-adjoint h de $C^*(\Gamma)$, on a

$$Sp(h) = \overline{\bigcup_{\theta\in[0,1]} Sp(\pi_\theta(h))} \tag{2.1}$$

(l'importance des $\mathcal{A}_\theta$ dans la théorie des représentations de $C^*(\Gamma)$ a été l'une des motivations de Rieffel dans [112]).

Pour $\theta \in [0,1]$, on a

$$\pi_\theta(h_S) = \frac{1}{6}\left[U_\theta + U_\theta^* + V_\theta + V_\theta^* + 2\cos 2\pi\theta\right].$$

Dans la représentation fidèle de $\mathcal{A}_\theta$ sur $l^2(\mathbb{Z}^2)$ donnée par

$$U_\theta\xi(m,n) = \xi(m-1,n) \text{ et } V_\theta\xi(m,n) = e^{2\pi i\theta m}\xi(m,n-1),$$

l'opérateur auto-adjoint $U_\theta + U_\theta^* + V_\theta + V_\theta^*$ est envoyé précisément sur l'opérateur de Harper H_θ décrit dans l'introduction. Dans la suite on écrira donc $H_\theta = U_\theta + U_\theta^* + V_\theta + V_\theta^*$. En traçant le graphe de $Sp(H_\theta)$ en fonction de θ (calculés pour des valeurs rationnelles), on est alors étonné de voir apparaître une structure incroyable de papillon observée pour la première fois par Hofstadter [58] (voir fig.2.3).

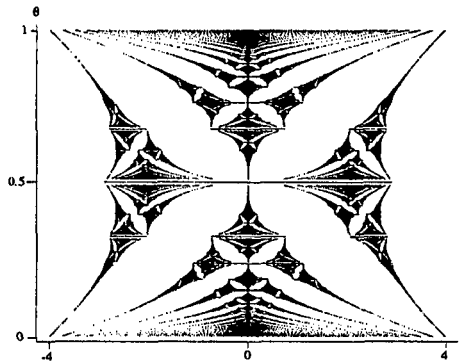


FIG. 2.3: Papillon de Hofstadter

Parmi les nombreux résultats obtenus sur $Sp(H_\theta)$, on relèvera les suivants :

- Pour $\theta = \frac{p}{q}$ (p, q entiers premiers entre eux), $Sp(H_\theta)$ est formé soit de $q-1$ intervalles (pour q pair) soit de q intervalles (pour q impair) : voir [36] ainsi que la troisième remarque du prochain paragraphe.
- Pour un ensemble de mesure de Lebesgue 1 de θ irrationnels $Sp(H_\theta)$ est un ensemble de Cantor de mesure 0 ; voir Last [87]. Remarquons qu'une conjecture de Marc Kac connue sous le nom de "problème des Dix Martinis" affirme que ce fait est vrai pour tout θ irrationnel.

Selon la formule (2.1), pour calculer $Sp(h_S)$ on devrait considérer chaque $Sp(H_\theta)$ décalé par $2\cos 2\pi\theta$, puis prendre la réunion de ces ensembles sur tous les θ, et finalement prendre l'adhérence. Ici ce n'est pas nécessaire puisque par la proposition 2.1.2 $Sp(h_S)$ est un intervalle. Si on désigne par $m(\theta)$ la

valeur minimum du spectre de H_θ , on a

$$m = \inf_{\theta\in[0,1]} \frac{1}{6}(m(\theta) + 2cos(2\pi\theta)).$$

Comme le $*$-automorphisme de $\mathcal{A}_\theta$ donné par $U \mapsto -U$ et $V \mapsto -V$ envoie H_θ sur $-H_\theta$, on en déduit que $Sp(H_\theta)$ est symétrique, ce qui montre que $m(\theta) = -\,\|H_\theta\|$. De plus comme le $*$-isomorphisme entre $\mathcal{A}_\theta$ et $\mathcal{A}_{1-\theta}$ donné par $U \mapsto V$ et $V \mapsto U$ envoie H_θ sur $H_{1-\theta}$, on voit que la recherche de l'infimum peut se restreindre à l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. D'où finalement

$$-m = \sup_{\theta\in[0,\frac{1}{2}]} \frac{1}{6}(\|H_\theta\| - 2cos(2\pi\theta)) \qquad (2.2)$$

Tout notre problème est donc ramené à l'étude de la fonction $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$ qui décrit le bord du papillon de Hofstadter. Les faits suivants sont connus sur cette fonction :

- Elle est continue (cette propriété résulte du fait que la famille $(\mathcal{A}_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ forme un champ continu de C*-algèbres au dessus de $[0,1]$ dont les sections sont données par $\theta \mapsto \pi_\theta(x)$ pour $x \in C^*(\Gamma)$, c.f. Elliott [48]) ; en particulier le supremum dans (2.2) est atteint.
- Elle est lipschitzienne (Bellissard [24]), en particulier $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$ est presque partout différentiable. Remarquons que Bellissard conjecture que $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$ est différentiable en n'importe quel θ irrationnel. Notons encore qu'il n'y a pas d'estimation connue sur la constante de Lipschitz ; relevons qu' Avron, van Mouche et Simon avaient auparavant obtenu le résultat plus faible ([5], Prop. 7.1) que $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$ était hölderienne d'exposant $\frac{1}{2}$, avec la constante explicite $6\sqrt{2}$.
- Elle n'est pas différentiable en tout θ rationnel, bien qu'elle admette une dérivée à gauche et à droite (ceci découle de la "formule de Wilkinson-Rammal" [109], [57]).

Le manque de régularité de la fonction $\theta \longmapsto \|H_\theta\|$ rend difficile la détermination du maximum de $\theta \longmapsto \|H_\theta\| - 2\cos 2\pi\theta$. La première approche fut de résoudre le problème graphiquement, on obtint ainsi le résultat empirique que le maximum est atteint en $\theta = \frac{1}{2}$. C'est alors un simple exercice

de matrices 2×2 de calculer $Sp(H_{\frac{1}{2}})$ et d'obtenir $\| H_{\frac{1}{2}} \| = 2\sqrt{2}$. Ce résultat expérimental, qui sera prouvé dans le paragraphe suivant, est donc :

Proposition 2.2.1
$\max_{\theta \in [0,\frac{1}{2}]} (\| H_\theta \| - 2\cos 2\pi\theta) \leqslant 2(1+\sqrt{2})$ *avec égalité en* $\theta = \frac{1}{2}$.

En d'autres termes : pour tout $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$: $\| H_\theta \| \leqslant 2(1+\sqrt{2}+\cos 2\pi\theta)$. Au vu de (2.2), les propositions 2.1.3 et 2.2.1 sont équivalentes.

2.2 Validité de la borne supérieure sur $\| H_\theta \|$

Commençons par rappeler que pour $\theta = \frac{p}{q} \in [0,1]$ rationnel, il existe une représentation fidèle de $\mathcal{A}_{\frac{p}{q}}$ comme une algèbre de matrices sur le tore : $\mathcal{A}_{\frac{p}{q}}$ est la sous-C*-algèbre de $\mathcal{M}_q(C(\mathbb{T}^2))$ (les matrices $q \times q$ à coefficients dans les fonctions continues sur le tore de dimension 2) engendrée par :

$$M_U(z_1,z_2) = z_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho^{q-1} \end{pmatrix}, \quad M_V(z_1,z_2) = z_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\rho = e^{2\pi i\theta}$ et $(z_1,z_2) \in \mathbb{T}^2$. L'opérateur $H_{\frac{p}{q}}$ est alors identifié à la famille de matrices de Jacobi périodiques :

$$M_H(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} z_1+\overline{z_1} & \overline{z_2} & 0 & \cdots & 0 & z_2 \\ z_2 & \rho z_1+\overline{\rho z_1} & \overline{z_2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \rho^2 z_1+\overline{\rho^2 z_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho^{q-2}z_1+\overline{\rho^{q-2}z_1} & \overline{z_2} \\ \overline{z_2} & 0 & 0 & \cdots & z_2 & \rho^{q-1}z_1+\overline{\rho^{q-1}z_1} \end{pmatrix}$$

Revenons ici un instant sur le lien avec l'opérateur de Harper $H_{\theta,\phi}$ mentionné dans l'introduction. Pour $\theta = \frac{p}{q}$, l'opérateur $H_{\theta,\phi}$ est périodique de période q, c'est à dire qu'il prend la forme d'une matrice scalaire $q \times q$ dans

la décomposition $l^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{q-1} l^2(q\mathbb{Z}+i)$. Cette matrice est précisément $M_H(e^{2\pi i\phi}, 1)$.

On veut prouver (la preuve de cette proposition et celle du lemme 2.2.2 ont été obtenues grâce à la collaboration d'A.Zuk) :

Proposition 2.2.1

$\max_{\theta\in[0,\frac{1}{2}]} (\| H_\theta \| - 2\cos 2\pi\theta) \leqslant 2(1+\sqrt{2})$ *avec égalité en* $\theta = \frac{1}{2}$.

Par la continuité de la fonction $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$ il suffira de montrer que

$$\| H_\theta \| - 2\cos 2\pi\theta \leqslant 2(1+\sqrt{2})$$

pour n'importe quel rationnel θ. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.2

Pour $\theta = \frac{p}{q}$ *: le maximum de* $\| M_H(z_1, z_2) \|$ *est atteint pour* $z_1 = z_2 = 1$. *En d'autres termes on a* $\| H_\theta \| = \| H_{\theta,0} \|$.

⌜ La norme de $M_H(z_1, z_2)$ est donnée par la plus grande valeur propre en valeur absolue. Comme $M_H(-z_1, -z_2) = -M_H(z_1, z_2)$, on peut supposer que $\| M_H(z_1, z_2) \|$ est donnée par la plus grande valeur propre. (Pour q pair, le spectre de $M_H(z_1, z_2)$ est même symétrique (voir p.233 de [36]). Le polynôme caractéristique de M_H est de la forme : $p_{M_H}(x) = det(M_H - x\mathbb{1}) = \sum_{k=0}^{q} a_k x^k$ dans lequel tous les a_k excepté a_0 sont indépendants de z_1 et z_2, et avec $a_q = (-1)^q$, $a_0 = (-1)^{q+1}(z_1^q + z_1^{-q} + z_2^q + z_2^{-q}) + K$, où K est une constante[1] dépendant uniquement de q. Quand q est pair $p_{M_H}(x)$ est un polynôme à coefficients réels avec $a_q = 1$, en conséquence sa plus grande racine est atteinte quand $a_0 = (-1)(z_1^q + z_1^{-q} + z_2^q + z_2^{-q}) + K$ est le plus petit, i.e. quand $z_1 = z_2 = 1$. Quand q est impair $p_{M_H}(x)$ est un polynôme à coefficients réels avec $a_q = -1$, en conséquence sa plus grande racine est atteinte quand $a_0 = z_1^q + z_1^{-q} + z_2^q + z_2^{-q} + K$ est le plus grand, i.e. quand $z_1 = z_2 = 1$. ⌟

On peut alors prouver la proposition 2.2.1 :

[1]Pour q impair on a $K = 0$, voir 3.3 de [36]. Remarquons qu'il est également écrit dans cet article que cela est vrai pour tout q, mais les calculs avec $q = 2$ ou $q = 4$ montrent que ce n'est pas le cas.

⌜ **Preuve de la proposition 2.2.1 :**
On pose $\theta = \frac{p}{q} \in [0,1]$, $C_k = cos(2\pi k\frac{p}{q})$,

$$M = \begin{pmatrix} 2C_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2C_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2C_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2C_{q-2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2C_{q-1} \end{pmatrix}$$

et $\alpha = \| M \|$. Par le lemme 2.2.2 on doit prouver que $\alpha - 2C_1 \leqslant 2(1+\sqrt{2})$. Remarquons que la norme de la première colonne de M est $\sqrt{6}$ (ou $\sqrt{8}$ si $\theta = \frac{1}{2}$), ce qui implique que $\alpha = \| M \| > 2$. Soit $v = (v_0, v_1, ..., v_{q-1})$ un vecteur propre de valeur propre α, soit v_k la plus grande composante en valeur absolue, on peut supposer, quitte à remplacer v par $-v$, que $v_k > 0$. Comme $Mv = \alpha v$ on obtient $v_{k-1} + 2C_k v_k + v_{k+1} = \alpha v_k$ où les indices sont pris modulo q. Comme $\alpha > 2$ on a $v_{k\pm1} = max(v_{k-1}, v_{k+1}) > 0$ et $2v_{k\pm1} + 2C_k v_k \geqslant \alpha v_k$. La même relation appliquée à $v_{k\pm1}$ donne : $2v_k + 2C_{k\pm1}v_{k\pm1} \geqslant \alpha v_{k\pm1}$. On obtient ainsi deux inégalités $(\alpha - 2C_k)v_k \leqslant 2v_{k\pm1}$, $(\alpha - 2C_{k\pm1})v_{k\pm1} \leqslant 2v_k$ que l'on peut multiplier et comme par hypothèse tout est positif cela fournit

$$(\alpha - 2C_k)(\alpha - 2C_{k\pm1}) \leqslant 4.$$

Rappelons que l'on veut montrer que $\alpha - 2C_1 - 2(1+\sqrt{2}) \leqslant 0$. Supposons par l'absurde que $\alpha - 2C_1 - 2(1+\sqrt{2}) > 0$, alors $d =: -\alpha + 2C_1 + 2(1+\sqrt{2}) < 0$ et comme $(\alpha + d - 2C_k) > 0$ and $(\alpha + d - 2C_{k\pm1}) > 0$ on obtient

$$\begin{array}{lrcl} & (\alpha + d - 2C_k)(\alpha + d - 2C_{k\pm1}) < (\alpha - 2C_k)(\alpha - 2C_{k\pm1}) & \leqslant & 4 \\ \text{i.e.} & (2C_1 + 2(1+\sqrt{2}) - 2C_k)(2C_1 + 2(1+\sqrt{2}) - 2C_{k\pm1}) & < & 4 \\ \text{ou} & (1 + \sqrt{2} + cos(x) - cos(y))(1 + \sqrt{2} + cos(x) - cos(y \pm x)) & < & 1 \end{array}$$

où $x = 2\pi\frac{p}{q}$ and $y = 2\pi k\frac{p}{q}$. Un calcul technique mais direct (qui sera donné dans le lemme ci-dessous) montre qu'en fait

$$(1+\sqrt{2}+cos(x)-cos(y))(1+\sqrt{2}+cos(x)-cos(y \pm x)) \geqslant 1, \quad \forall x, y \in [0, 2\pi],$$

ce qui fournit la contradiction cherchée. ⌟

Voici donc le lemme technique qui conclut la preuve de la proposition 2.2.1

Lemme 2.2.3

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(1+\sqrt{2}+\cos(x)-\cos(y))(1+\sqrt{2}+\cos(x)-\cos(y\pm x)) \geqslant 1$$

⌜ Le changement de variable $x \mapsto -x$ établit une équivalence entre les deux inégalités. On se contentera donc démontrer celle avec le signe "+". Avec cette fois le changement de variable $x \mapsto x+\pi$, on obtient encore une autre inégalité équivalente :

$$(1+\sqrt{2}-\cos(x)-\cos(y))(1+\sqrt{2}-\cos(x)+\cos(y+x)) \geqslant 1$$

que l'on va prouver en se restreignant à $x, y \in [0, 2\pi]$.

Les premières étapes consisteront simplement à transformer l'inégalité à l'aide de formules trigonométriques classiques. Développons tout d'abord partiellement les parenthèses :

$$(1+\sqrt{2}-\cos(x))^2+(1+\sqrt{2}-\cos(x))(\cos(y+x)-\cos(y))-\cos(y)\cos(y+x) \geqslant 1$$

$$(\sqrt{2}+1-\cos(x))^2+(\sqrt{2}+1-\cos(x))(\cos(y+x)-\cos(y)) \\ -\cos(\tfrac{x+2y}{2}-\tfrac{x}{2})\cos(\tfrac{x+2y}{2}+\tfrac{x}{2}) \geqslant 1$$

En appliquant alors $1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$ aux deux premiers termes de la somme, $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$ au deuxième terme et finalement $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a \sin b$ au troisième on obtient :

$$(\sqrt{2}+2\sin^2\tfrac{x}{2})^2-2(\sqrt{2}+2\sin^2\tfrac{x}{2})\sin\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x+2y}{2} \\ -(\cos(\tfrac{x+2y}{2})\cos(\tfrac{x}{2})+\sin(\tfrac{x+2y}{2})\sin(\tfrac{x}{2}))(\cos(\tfrac{x+2y}{2})\cos(\tfrac{x}{2})-\sin(\tfrac{x+2y}{2})\sin(\tfrac{x}{2})) \geqslant 1$$

D'où

$$(\sqrt{2}+2\sin^2\tfrac{x}{2})^2-2(\sqrt{2}+2\sin^2\tfrac{x}{2})\sin\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x+2y}{2} \\ +\sin^2(\tfrac{x+2y}{2})\sin^2(\tfrac{x}{2})-\cos^2(\tfrac{x+2y}{2})\cos^2(\tfrac{x}{2}) \geqslant 1$$

En remplaçant alors $t=\sin(\frac{x}{2})$ et $u=\sin(\frac{x+2y}{2})$:

$$(\sqrt{2}+2t^2)^2-2(\sqrt{2}+2t^2)tu+u^2t^2-(1-u^2)(1-t^2) \geqslant 1$$

En développant alors le premier et le dernier terme :

$$2 + 4\sqrt{2}t^2 + 4t^4 - 2tu(\sqrt{2} + 2t^2) + u^2t^2 - 1 + t^2 + u^2 - u^2t^2 \geqslant 1$$

Ou encore :

$$4t^4 + t^2(1 + 4\sqrt{2}) - 2tu(\sqrt{2} + 2t^2) + u^2 \geqslant 0$$

On s'est donc ramener à montrer que le polynôme

$$P(t,u) = 4t^4 + t^2(1 + 4\sqrt{2}) - 2tu(\sqrt{2} + 2t^2) + u^2$$

est positif ou nul pour $0 \leqslant t \leqslant 1,\ -1 \leqslant u \leqslant 1$.

Considérons P_t comme un polynôme quadratique sur u de paramètre t ; son discriminant est $4t^2[4t^4 + (4\sqrt{2} - 4)t^2 + 1 - 4\sqrt{2}]$. Le polynôme biquadratique $4t^4 + (4\sqrt{2} - 4)t^2 + 1 - 4\sqrt{2}$ possède deux racines distinctes $t_- = -0.944234$ et $t_+ = 0.944234$ entre lesquelles il est négatif. Le polynôme P_t a donc un discriminant positif ou nul pour $0 \leqslant t \leqslant t_+$, cela montre déjà que $P(t,u) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant t_+$. Pour $t^+ \leqslant t \leqslant 1$, le polynôme biquadratique du discriminant est croissant prenant des valeurs de 0 à 1, ce qui donne l'inégalité

$$1 + t(1 - \sqrt{2}) \geqslant 1 + t[(4t^4 + (4\sqrt{2} + 4)t^2 + 1 - 4\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}].$$

Comme $2t^3 \geqslant 1 + t(1 - \sqrt{2})$ sur $[t^+, 1]$, on en tire

$$2t^3 \geqslant 1 + t[(4t^4 + (4\sqrt{2} + 4)t^2 + 1 - 4\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}].$$

D'où

$$1 \leqslant (2t^2 + \sqrt{2})t - t\sqrt{4t^4 + (4\sqrt{2} + 4)t^2 + 1 - 4\sqrt{2}}.$$

Comme le terme de droite n'est rien d'autre que la plus petite racine de P_t cela montre qu'on a également $P(t,u) \geqslant 0$ pour $t^+ \leqslant t \leqslant 1$. ⌟

Remarques :

1) Malgré l'abondante littérature existante concernant les spectres de matrices de Jacobi périodiques (voir [6], [96] et leurs références), aucune estimation du rayon spectral similaire à la proposition 2.2.1 ne semble être connue.

2) Si on se base sur les résultats numériques (voir figure 2.1) , on peut conjecturer que la borne $\| H_\theta \| \leqslant 2\sqrt{2}$ est vraie pour $\theta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ (avec égalité aux deux bouts). Cette conjecture a été ultérieurement démontrée par R.Szwarc dans [119].

3) Pour $\theta = \frac{p}{q}$, posons $q = 2m+1$ si q est impair et $q = 2m+2$ si q est pair. Le théorème 3.3 de [36] prouve que $H_{\frac{p}{q}}$ a exactement $2m$ trous dans son spectre, et que chaque trou est de longueur au moins 8^{-q}. Plus précisément à la page 233 de [36] les auteurs montrent que la longueur de chaque trou est au moins :

   - $(2 \| H_{\frac{p}{q}} \|)^{-q+2}$, si q est impair ;
   - $2^{-m} \| H_{\frac{p}{q}} \|^{1-2m}$, si q est pair.

   Donc pour θ rationnel entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$, le résultat de Szwarc donne une borne inférieure sensiblement meilleure sur la longueur des trous de $Sp(H_\theta)$.

2.3 Puissances de H_θ

Soit $\theta \in [0,1]$ et $\rho = e^{2\pi i\theta}$, tout élément X dans la C*-algèbre $\mathcal{A}_\theta$ a un "développement de Fourier" : $X = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} U^m V^n$. En particulier, pour $k \in \mathbb{N}$, on a ${H_\theta}^k = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a^{(k)}_{m,n}(\rho) U^m V^n$ où $a^{(k)}_{m,n}(\rho)$ est un polynôme trigonométrique en ρ. On va donner une interprétation combinatoire de $a^{(k)}_{m,n}(\rho)$.

Un chemin orienté de $\mathbb{Z}^2$ sera un chemin polygonal orienté de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets et les arêtes sont contenus dans le réseau carré déterminé par $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on notera $\mathcal{L}^{(k)}_{(m,n)}$ l'ensemble de tous les chemins orientés de $\mathbb{Z}^2$ de longueur k issus de $(0,0)$ et se terminant au point (m,n). On nommera $\gamma_{(m,n)}$ le chemin orienté de $\mathbb{Z}^2$ avec pour seuls sommets son origine (m,n), $(m,0)$ et son sommet terminal $(0,0)$. Pour $\gamma \in \mathcal{L}^{(k)}_{(m,n)}$, on notera $\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}$ le chemin orienté fermé obtenu en composant γ et $\gamma_{(m,n)}$, et on notera $A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)})$ l'aire orientée délimitée par $\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}$, c'est-à-dire $A(\gamma) = \oint_{\gamma\cdot\gamma_{(m,n)}} x\,dy = -\oint_{\gamma\cdot\gamma_{(m,n)}} y\,dx$.

Proposition 2.3.1

$$a_{m,n}^{(k)}(\rho) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_{(m,n)}^{(k)}} \rho^{-A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)})} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \rho^{-l} \#\{\gamma \in \mathcal{L}_{(m,n)}^{(k)} \,:\, A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}) = l\}.$$

Remarque : Rappelons que la C*-algèbre $\mathcal{A}_\theta$ possède une trace fidèle τ_θ : pour un élément $X = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} U^m V^n$ de $\mathcal{A}_\theta$ la valeur de la trace est donnée par $\tau_\theta(X) = c_{0,0}$. (Pour $\theta \notin \mathbb{Q}$, la trace τ_θ est l'unique trace sur $\mathcal{A}_\theta$, voir [112]). L'interprétation combinatoire de $\tau_\theta({H_\theta}^k) = a_{0,0}^{(k)}$ est intéressante : si $\mathcal{L}_{(0,0)}^{(k)}$ est l'ensemble des chemins orientés fermés de $\mathbb{Z}^2$, issus de $(0,0)$ de longueur k on a alors

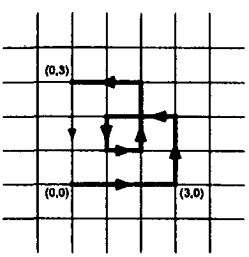
$$\tau_\theta({H_\theta}^k) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{(k)}} \rho^{-A(\gamma)} = \#\{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{(k)} \,:\, A(\gamma) = 0\} + \sum_{l \geqslant 1} \#\{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{(k)} \,:\, A(\gamma) = l\} \cdot 2\cos 2\pi l\theta$$

La formule finale est obtenue en réordonnant la première somme selon les valeurs de $A(\gamma)$ et en remarquant qu'en renversant l'orientation des chemins on obtient l'égalité $\#\{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{k} \,:\, A(\gamma) = l\} = \#\{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{k} \,:\, A(\gamma) = -l\}$.

⌜ **Preuve de la proposition 2.3.1 :**

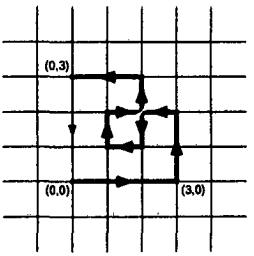
Si on développe ${H_\theta}^k = (U_\theta + U_\theta^{-1} + V_\theta + V_\theta^{-1}) \cdots (U_\theta + U_\theta^{-1} + V_\theta + V_\theta^{-1})$ en monômes $U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_2} V_\theta^{j_2} \cdots$ ou $V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_2} U_\theta^{i_2} \cdots$, un de ces monômes contribuera à $a_{m,n}^{(k)}(\rho)$ si et seulement si il est de bi-degré (m,n), i.e. $i_1 + i_2 + \ldots = m$ et $j_1 + j_2 + \ldots = n$. A de tels monômes $U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_2} V_\theta^{j_2} \cdots$ on associe un chemin $\gamma \in \mathcal{L}_{(m,n)}^{k}$ de sommets $(0,0)$, $(i_1, 0)$, (i_1, j_1), $(i_1 + i_2, j_1)$, $(i_1 + i_2, j_1 + j_2)$,... Illustrons cela par deux exemples :

$U_\theta^3 V_\theta^2 U_\theta^{-2} V_\theta^{-1} U_\theta V_\theta^2 U_\theta^{-2}$ donne :



avec $A(\gamma \cdot \gamma_{(0,3)}) = 9$,

$U_\theta^3 V_\theta^2 U_\theta^{-1} V_\theta^{-1} U_\theta^{-1} V_\theta U_\theta V_\theta U_\theta^{-2}$ donne :



avec $A(\gamma \cdot \gamma_{(0,3)}) = 7$.

Inversément à chaque chemin $\gamma \in \mathcal{L}^k_{(m,n)}$ on associe un monôme de bi-degré (m,n) dans le développement de ${H_\theta}^{2k}$. Réduisons alors $U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_2} V_\theta^{j_2} \cdots$ en utilisant les relations de commutation :

$$\begin{aligned} U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_2} V_\theta^{j_2} \cdots &= \rho^{i_2 j_1} U_\theta^{i_1+i_2} V_\theta^{j_1+j_2} U_\theta^{i_3} V_\theta^{j_3} \cdots \\ &= \rho^{i_2 j_1 + i_3(j_1+j_2)} U_\theta^{i_1+i_2+i_3} V_\theta^{j_1+j_2+j_3} U_\theta^{i_4} V_\theta^{j_4} \cdots \\ &= \rho^{i_2 j_1 + i_3(j_1+j_2) + i_4(j_1+j_2+j_3)} U_\theta^{i_1+i_2+i_3+i_4} V_\theta^{j_1+j_2+j_3+j_4} U_\theta^{i_5} \cdots \\ &= \cdots \end{aligned}$$

Pour le chemin associé γ on calcule également :

$$-A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}) = \oint_{\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}} y\, dx = i_2 j_1 + i_3(j_1 + j_2) + i_4(j_1 + j_2 + j_3) + \ldots$$

Le calcul pour un monôme $V_\theta^{j_1} U_\theta^{i_1} V_\theta^{j_2} U_\theta^{i_2} \cdots$ est entièrement similaire et cela prouve la première égalité. Pour la seconde, il suffit de réordonner la somme selon les valeurs de $A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)})$. ⌟

On terminera ce chapitre en donnant certaines propriétés des coefficients $a^{(k)}_{m,n}(\rho)$ en utilisant la proposition précédente et le lemme suivant :.

Lemme 2.3.2
Les coefficients $a^{(k)}_{m,n}(\rho)$ satisfont les formules de récurrence :

$$a^{(k)}_{m,n}(\rho) = a^{(k-1)}_{m-1,n}(\rho) + a^{(k-1)}_{m+1,n}(\rho) + a^{(k-1)}_{m,n-1}(\rho) \cdot \rho^m + a^{(k-1)}_{m,n+1}(\rho) \cdot \rho^{-m}$$

$$a^{(k)}_{m,n}(\rho) = a^{(k-1)}_{m-1,n}(\rho) \cdot \rho^n + a^{(k-1)}_{m+1,n}(\rho) \cdot \rho^{-n} + a^{(k-1)}_{m,n-1}(\rho) + a^{(k-1)}_{m,n+1}(\rho)$$

⌜ En utilisant la relation de commutation $V_\theta U_\theta = \rho U_\theta V_\theta$ et les égalités triviales ${H_\theta}^k = H_\theta \cdot {H_\theta}^{k-1}$ and ${H_\theta}^k = {H_\theta}^{k-1} \cdot H_\theta$, la preuve est un simple calcul direct. ⌟

On peut alors prouver les propriétés suivantes :

Proposition 2.3.3

Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$: a) $a^{(k)}_{m,n}(\rho) = a^{(k)}_{n,m}(\rho)$

b) $a^{(k)}_{m,n}(\rho^{-1}) = a^{(k)}_{m,n}(\rho) \cdot \rho^{-mn}$

c) $a^{(k)}_{-m,n}(\rho) = a^{(k)}_{m,n}(\rho^{-1})$

$a^{(k)}_{m,-n}(\rho) = a^{(k)}_{m,n}(\rho^{-1})$

⌜

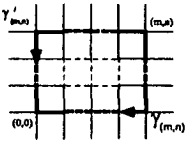
a) L'égalité est triviale pour $k = 1$, puis par induction sur k et en utilisant le lemme 2.3.2 on a :

$$\begin{aligned} a^{(k)}_{m,n}(\rho) &= a^{(k-1)}_{m-1,n}(\rho) + a^{(k-1)}_{m+1,n}(\rho) + a^{(k-1)}_{m,n-1}(\rho) \cdot \rho^m + a^{(k-1)}_{m,n+1}(\rho) \cdot \rho^{-m} \\ &= a^{(k-1)}_{n,m-1}(\rho) + a^{(k-1)}_{n,m+1}(\rho) + a^{(k-1)}_{n-1,m}(\rho) \cdot \rho^m + a^{(k-1)}_{n+1,m}(\rho) \cdot \rho^{-m} \\ &= a^{(k)}_{n,m}(\rho). \end{aligned}$$

b) Comme en a), la preuve est une simple induction sur k utilisant les deux formules récursives du lemme 2.3.2.

c) La symétrie α donnée par $(x, y) \longmapsto (-x, y)$ induit une bijection entre $\mathcal{L}^k_{(m,n)}$ et $\mathcal{L}^k_{(-m,n)}$. De plus comme on a $\alpha(\gamma_{(m,n)}) = \gamma_{(-m,n)}$ et $A(\alpha(\gamma) \cdot \gamma_{(-m,n)}) = -A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)})$ pour $\gamma \in \mathcal{L}^k_{(m,n)}$, cela prouve la première relation, la preuve de la seconde est similaire. ⌟

Notons ici la conséquence combinatoire suivante de la proposition 2.3.3(a). Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, appelons $\gamma'_{(m,n)}$ le chemin orienté de $\mathbb{Z}^2$ d'origine (m, n), d'extrémité $(0, 0)$ et pour seul autre sommet $(0, n)$.



Juste par symétrie sur la première diagonale de $\mathbb{Z}^2$, on a :

$$\#\{\gamma \in \mathcal{L}^{(k)}_{(m,n)} : A(\gamma \cdot \gamma'_{(m,n)}) = l\} = \#\{\gamma \in \mathcal{L}^{(k)}_{(n,m)} : A(\gamma \cdot \gamma_{(n,m)}) = -l\}.$$

En combinant alors les propositions 2.3.1 et 2.3.3(a), on obtient :

$$\#\{\gamma \in \mathcal{L}^{(k)}_{(m,n)} : A(\gamma \cdot \gamma'_{(m,n)}) = l\} = \#\{\gamma \in \mathcal{L}^{(k)}_{(m,n)} : A(\gamma \cdot \gamma_{(m,n)}) = -l\}.$$

Remarque : Revenons au système de générateur $S_0 = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ de $\Gamma = H(\mathbb{Z})$. Comme on l'a déjà vu, l'opérateur d'adjacence sur le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S_0)$ est $A_{S_0} = x+x^{-1}+y+y^{-1} \in C^*_r(\Gamma)$. En remplaçant $\rho = e^{2\pi i\theta}$ par l'indéterminée z, toutes les informations obtenues sur les puissances de H_θ peuvent être relevées pour fournie des résultats sur le puissances de A_{S_0}. Plus précisément, en regardant les $a^{(k)}_{m,n}$ comme des polynômes de Laurent en z, on a

$$A^k_{S_0} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a^{(k)}_{m,n}(z^{-1})x^m y^n.$$

Cela fournira également des renseignements sur la fonction génératrice de la marche aléatoire : pour un $g \in \Gamma$ la fonction génératrice associée est la série formelle $W_g(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} W^{(k)}_g Z^k$ où $W^{(k)}_g$ est le nombre de chemins de longueur k de 1 à g dans $\mathcal{G}(\Gamma, S_0)$. Comme $W^{(k)}_g = \langle A^k_{S_0}\delta_1|\delta_g\rangle$, pour $g = z^L x^M y^N$ le coefficient du terme de degré L dans le polynôme de Laurent $a^{(k)}_{M,N}(z^{-1})$ est précisément $W^{(k)}_g$.

On terminera ce chapitre par l'étude d'autres bornes sur $\| H_\theta \|$.

On a déjà remarqué dans les remarques finales du paragraphe précédent que la borne donnée dans la proposition 2.2.1 n'est bonne que dans un voisinage de $\frac{1}{2}$. En fait il est possible d'obtenir de meilleures bornes ailleurs que dans un voisinage de $\frac{1}{2}$ par simple inégalité triangulaire. Rappelons que

$$H_\theta{}^k = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a^{(k)}_{m,n}(\rho) U^m_\theta V^n_\theta$$

et posons

$$g_k(\theta) = \left[\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |a^{(k)}_{m,n}(\rho)| \right]^{\frac{1}{k}}$$

on a alors $\| H_\theta \| \leqslant g_k(\theta)$ pour tout $\theta \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ [2]. On constate expérimentalement qu'au moins pour k pair cette borne est bonne, comme le montre la figure 2.4.

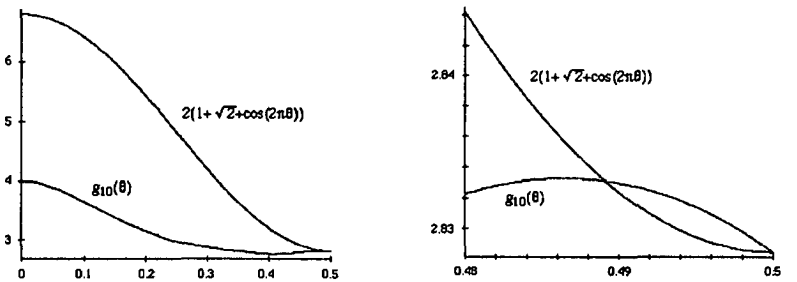


FIG. 2.4: Borne supérieure sur $\| H_\theta \|$

Cela est partiellement expliqué par le résultat suivant :

Proposition 2.3.4

a) Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0,1]$: $g_k(\theta) \leqslant g_k(0) = 4$.

b) Pour k pair : $g_k(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{2}$.

⌐

a) Par la proposition 2.3.1, les $a^{(k)}_{m,n}(\rho)$ sont des polynômes trigonométriques à coefficients non-négatifs, tels que

$$|a^{(k)}_{m,n}(\rho)| \leqslant a^{(k)}_{m,n}(1) \text{ et } g_k(\theta) \leqslant \left[\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a^{(k)}_{m,n}(1) \right]^{\frac{1}{k}} = g_k(0).$$

On conclut en remarquant que $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a^{(k)}_{m,n}(1)$ est juste le nombre de chemins de longueur k dans $\mathbb{Z}^2$, d'origine $(0,0)$: ce nombre est égal à 4^k.

[2] Pour k=2, ce n'est rien d'autre qu'une inégalité connue chez les physiciens sous le nom d'"inégalité diamagnétique" : $\| H_\theta \| \leqslant 4 \cos \frac{\pi\theta}{2}$ $(\theta \in [0, \frac{1}{2}])$.

b) Soit $\theta = \frac{p}{q}$ rationnel et soit $X = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} U_\theta^m V_\theta^n$ le développement de Fourier d'un élément $X \in \mathcal{A}_\theta$ avec $c_{m,n} \geqslant 0$ pour tous m, n. Supposons qu'il existe des entiers r, s avec q divisant rs tels que $X \in C^*(U_\theta^r, V_\theta^s)$, la sous-C*-algèbre engendrée par U_θ^r et V_θ^s (cela signifie que $c_{m,n} = 0$ excepté si r divise m and s divise n). On obtient alors $\| X \| = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}$ car, comme $V_\theta^s U_\theta^r = \rho^{rs} U_\theta^r V_\theta^s = U_\theta^r V_\theta^s$, $C^*(U_\theta^r, V_\theta^s)$ est une C*-algèbre abélienne, le caractère trivial $\chi : C^*(U_\theta^r, V_\theta^s) \longmapsto \mathbb{C}$ défini par $\chi(U_\theta^r) = \chi(V_\theta^s) = 1$ est continu, ce qui implique l'inégalité $\chi(X) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} \leqslant \| X \|$; l'inégalité opposée est triviale. Pour prouver 2.3.4(b), il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $\theta = \frac{1}{2}$, $X = H_{\frac{1}{2}}^{2l}$, $r = s = 2$: on obtient $g_k(\frac{1}{2})^{2l} = \| H_{\frac{1}{2}}^{2l} \| = \| H_{\frac{1}{2}} \|^{2l} = (2\sqrt{2})^{2l}$. ⌟

Remarque : Pour $\theta = \frac{1}{2}$, le fait que $H_{\frac{1}{2}}^{2l}$ appartienne à $C^*(U_\theta^2, V_\theta^2)$ a la conséquence combinatoire suivante : pour m, n impairs, le nombre des chemins orientés γ dans $\mathbb{Z}^2$ d'origine $(0,0)$, de longueur $2l$, et avec $A(\gamma \cdot \gamma_{m,n})$ pair est égal au nombre de chemins orientés γ dans $\mathbb{Z}^2$ de même origine, de même longueur et avec $A(\gamma \cdot \gamma_{m,n})$ impair. Ce fait est évidemment prouvable de façon directe.

Terminons par remarquer que la trace sur $\mathcal{A}_\theta$ peut être utilisée pour obtenir des bornes inférieures sur $\| H_\theta \|$. En effet un résultat de théorie de la mesure (voir p.ex. [55], lemme 8) montre que pour tout opérateur auto-adjoint H de $\mathcal{A}_\theta$: $\| H \| = \lim_{k\to\infty} \tau_\theta(H^{2k})^{\frac{1}{2k}}$. Si on applique ce résultat à l'opérateur de Harper H_θ , on obtient :

Proposition 2.3.5

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : \theta \longmapsto \tau_\theta(H^{2k})^{\frac{1}{2k}}$ est une fonction C^∞ sur $[0,1]$.

(b) Pour tout $\theta \in [0,1]$, la suite $(f_k(\theta))_{k\geqslant 1}$ est croissante et converge vers $\| H_\theta \|$.

(c) La suite de fonctions $(f_k)_{k\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$.

(a) La fonction $\theta \longmapsto \tau_\theta(H^{2k})$ est un polynôme trigonométrique non-négatif.

(b) L'inégalité de Hölder appliquée avec $p = \frac{k+1}{k}$ et $q = k+1$, fournit $f_k(\theta)^{2k} = \tau_\theta(H^{2k}) \leqslant \tau_\theta(H^{2k+2})^{\frac{k}{k+1}} \tau_\theta(1)^{\frac{1}{k+1}} = f_{k+1}(\theta)^{2k}$

(c) Comme la fonction $\theta \longmapsto \| H_\theta \|$ est continue ([48]), cette propriété découle de (b) et du lemme de Dini.

Remarque : Des calculs numériques montrent que la convergence de la suite $(f_k(\theta))_{k\geqslant 1}$ est vraiment lente comme l'illustre le tableau ci-dessous au point $\theta = \frac{1}{2}$:

k	$f_k(\frac{1}{2})$
1	2
2	2.114742527
3	2.195514639
4	2.258100864
5	2.308804851
6	2.350888285
7	2.386373823
8	2.416664162
9	2.442792734

k	$f_k(\frac{1}{2})$
10	2.46554511
11	2.485528971
12	2.503219974
13	2.518994081
14	2.533151187
15	2.545932671
16	2.557537987
17	2.568117362
18	2.577813758

k	$f_k(\frac{1}{2})$
19	2.586734171
20	2.594971276
21	2.602603395
22	2.609697173
23	2.616309679
24	2.622490069
25	2.628280919
26	2.633719301
$\| H_{\frac{1}{2}} \|$	2.828427125

Développements ultérieurs :

a) D'autres bornes inférieures sur $\| H_\theta \|$ ont été obtenues, par des techniques complètement différentes par F.Boca dans [30].

b) En utilisant le fait que les $a_{0,0}^{(k)}$ sont les moments de la mesure spectrale de H_θ (sur l'état τ), on peut obtenir des informations sur l'aire enclose par une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$: cela a été fait par J.Bellisard, C.J.Camacho, A.Barelli, et F.Claro dans [25] et par J.A.Mingo et A.Nica dans [95]. Dans ce dernier article, on trouve le théorème limite suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{\gamma \in \mathcal{L}_{(0,0)}^{(2n)} : n\alpha < A(\gamma) < n\beta\right\}}{\#\,\mathcal{L}_{(0,0)}^{(2n)}} = \frac{1}{2}(\tanh(\pi\beta) - \tanh(\pi\beta))$$

pour tous $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ (notons que $\#\,\mathcal{L}_{(0,0)}^{(2n)} = \binom{2n}{n}^2$).

Chapitre 3

K-théorie de la C*-algèbre de certains produits semi-directs de groupes de Lie

Introduction

Dans [37] (théorème 2), A.Connes démontre un analogue du théorème d'isomorphisme de Thom pour les produits croisés de C*-algèbres par une action de $\mathbb{R}$: si $(A, \mathbb{R}, \alpha)$ est un C*-système dynamique, Connes montre l'existence et l'unicité d'un isomorphisme naturel entre $K_i(A)$ et $K_{i+1}(A \rtimes_\alpha \mathbb{R})$. Ce résultat permet alors de calculer sans difficulté aucune la K-théorie de certains groupes de Lie. Soit G un groupe de Lie résoluble, simplement connexe, de dimension n ; le lemme 3.6 de [59] permet d'écrire G comme un produit semi-direct $G_1 \rtimes \mathbb{R}$, où G_1 est un sous-groupe de Lie résoluble, simplement connexe, de dimension $n-1$. Le résultat de Connes montre donc que pour de tels groupes on a $K_i(C^*(G)) \cong K_i(C^*(G_1) \rtimes \mathbb{R}) \cong K_{i+1}(C^*(G_1))$. Par une induction simple on obtient donc la K-théorie de ces groupes : $K_i(G) \cong K_{i+n}(\mathbb{C})$ (corollaire 7 de [37]). Ainsi $K_0(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si G est de dimension paire et est nul si G est de dimension impaire. Au vu de ces résultats, on pourrait s'attendre à ce que ces C*-algèbres ne soient pas très riches en projections, or dans [71] E.Kaniuth et K.F.Taylor construisent sous certaines

hypothèses, des familles de projections dans $L^1(G)$. Le but de ce chapitre est d'essayer de mieux comprendre le rôle de ces projections, notamment de savoir si en dimension paire elles sont des générateurs de $K_0(C^*(G))$. La première section sera consacrée à quelques rappels sur le dual d'un groupe du type $A \rtimes \mathbb{R}$ avec A un groupe abélien localement compact et notamment sur le rôle que jouera l'action de $\mathbb{R}$ sur le dual de A dans la description du dual du groupe par la théorie de Mackey, dans l'existence de projections minimales et dans la construction même des projections de Kaniuth et Taylor. La deuxième section sera dévolue à la composante connexe du groupe des affinités de $\mathbb{R}$; on montrera que les projections de Kaniuth et Taylor sont bien des générateurs de la K-théorie. La troisième section sera consacrée au groupe des affinités lui-même, qui, comme groupe non connexe, ne permet pas au théorème de Connes de déterminer sa K-théorie.

3.1 Théorie de Mackey et projections

On s'intéressera donc ici au cas des groupes $G = A \rtimes \mathbb{R}$ où A est abélien localement compact, cas dans lesquels la théorie de Mackey va nous permettre d'identifier le dual (les actions considérées seront toujours régulières). Remarquons que le contexte de [71] est plus général : $G = A \rtimes H$, où H est localement compact. Par soucis de clarté pour le lecteur qui cherchera à consulter [71], les notations de cet article seront conservée ici. L'action de $\mathbb{R}$ sur A sera notée $s \cdot a$ ($s \in \mathbb{R}$, $a \in A$) et l'action naturelle de $\mathbb{R}$ sur $\widehat{A}$ $\chi \cdot s$, c'est-à-dire $(\chi \cdot s)(a) = \chi(s \cdot a)$ ($\chi \in \hat{A}$, $s \in \mathbb{R}$, $a \in A$). On notera encore $\mathbb{R}_\chi$ le stabilisateur de χ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Mackey décrit alors explicitement le dual de G : tout élément de $\widehat{G}$ est de la forme $\pi_{\chi,\nu} = Ind_{A \rtimes \mathbb{R}_\chi}^G(\chi \otimes \nu)$ où $\chi \in \widehat{A}$, $\nu \in \widehat{\mathbb{R}_\chi}$ et $\chi \otimes \nu(a,s) = \chi(a)\nu(s)$; de plus, deux représentations π_{χ_1,ν_1} et π_{χ_2,ν_2} sont équivalentes si et seulement si χ_1 et χ_2 sont dans la même orbite par l'action de $\mathbb{R}$ et que, les stabilisateurs $\mathbb{R}_{\chi_1}$ et $\mathbb{R}_{\chi_2}$ étant alors conjugués, ν_1 et ν_2 sont équivalentes. Deux remarques sont ici importantes : premièrement si $\chi = \chi_1$ le caractère trivial de $\widehat{A}$, on a évidemment $\mathbb{R}_{\chi_1} = \mathbb{R}$ et comme $\chi_1 \otimes \nu(a,s) = \nu(s)$ on voit que l'on retrouve dans $\widehat{G}$ une copie de $\widehat{\mathbb{R}}$;

deuxièmement on constate que pour n'importe quel $\chi \in \widehat{A}$, la représentation $\pi_\chi = Ind_A^G(\chi)$ est irréductible si et seulement si $\mathbb{R}_\chi$ est trivial. Remarquons encore que π_χ peut être réalisée sur $L^2(\mathbb{R})$ par $\pi_\chi(a,s)\phi(r) = (\chi \cdot r)(a)\phi(s+r)$.

Avant de décrire les projections construites par Kaniuth et Taylor, commençons par faire quelques remarques générale sur les projections de $L^1(G)$ ainsi que sur la notion de minimalité.

Définition 3.1.1

1. *Une projection de $L^1(G)$ est minimale si elle est non-nulle et si elle ne domine aucune autre projection non-nulle de $L^1(G)$.*
2. *Une projection f de $L^1(G)$ est fortement minimale si*

$$f * L^1(G) * f = \mathbb{C}f.$$

Le lecteur sera attentif au fait que dans plusieurs autres articles, comme par exemple [125], le mot minimal est utilisé pour fortement minimal (la terminologie originale se trouve probablement dans [111], déf. 2.1.7). Soit p une projection quelconque de $L^1(G)$; on désignera par $S(p) = \{\pi \in \widehat{G} | \pi(p) \neq 0\}$ le support de p dans $\widehat{G}$. C'est un exercice de montrer que $S(p)$ est un compact ouvert de $\widehat{G}$. Une condition nécessaire pour l'existence de projections dans $L^1(G)$ est donc l'existence de compacts ouverts de $\widehat{G}$. Remarquons encore que si p est fortement minimale alors $S(p)$ est réduit à un point (lemme 1.1 de [125]). En fait on a même une bijection entre les classes d'équivalence unitaire de projections fortement minimales et les points ouverts de $\widehat{G}$ (proposition 1.3 de [125]).

On ne donnera pas ici les détails techniques de la construction des projections de Kaniuth et Taylor, le lecteur intéressé consultera la section 1 de [71], on se contentera d'énoncer les théorèmes décrivant les propriétés de ces projections utilisées dans la suite. La construction démarre à partir d'un ouvert $U \subset \widehat{A}$ invariant par l'action de $\mathbb{R}$ et d'une fonction mesurable $\xi : \widehat{A} \to \mathbb{C}$ dont le support est contenu dans U. Kaniuth et Taylor associent à ξ deux fonctions mesurables $\xi^\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, s \to \xi(\chi \cdot s)$ et $f_\xi : G \to \mathbb{C}$ définie à coup de

transformée de Fourier inverse sur $\widehat{A}$. Les deux auteurs posent alors certaines conditions sur ξ qui impliquent notamment que ξ^x est un vecteur unité de $L^2(\mathbb{R})$ et que $f_\xi \in L^1(G)$. Les fonctions ξ satisfaisant ces conditions sont appelées des PGF (fonctions génératrices de projections) ; Kaniuth et Taylor prouvent le théorème suivant (théorème 1.2) :

Théorème 3.1.1
Si U est un ouvert $\mathbb{R}$-invariant de $\widehat{A}$ et si ξ est une PGF associée à U, alors f_ξ est une projection de $L^1(G)$ et, pour $\chi \in \widehat{A}$, $\pi_\chi(f_\xi)$ est soit la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\xi^\chi$ si $\chi \in U$, soit est nulle si $\chi \notin U$.

Mais le résultat plus intéressant est celui obtenu quand U est une orbite d'un caractère $\chi \in \widehat{A}$ à stabilisateur $\mathbb{R}_\chi$ trivial (rappelons que dans ce cas π_χ est irréductible) (théorème 2.3) :

Théorème 3.1.2
Soit $\chi \in \widehat{A}$ à stabilisateur $\mathbb{R}_\chi$ trivial et à orbite $\mathbb{R}\chi$ ouverte dans $\widehat{A}$; notons $\mathcal{P}(\pi_\chi)$ l'ensemble des projections de $L^1(G)$ dont le support dans $\widehat{G}$ est $\{\pi_\chi\}$, alors

i) tout élément de $\mathcal{P}(\pi_\chi)$ est somme orthogonale finie de projections minimales dans $L^1(G)$;

ii) les éléments minimaux de $\mathcal{P}(\pi_\chi)$ sont exactement les projections de la forme f_ξ, où ξ est une PGF associée à l'orbite $\mathbb{R}\chi$ et toutes ces projections sont fortement minimales.

Ces préliminaires établis, il est temps de passer à un exemple concret...

3.2 La composante connexe du groupe des affinités de $\mathbb{R}$

Le groupe G des affinités de $\mathbb{R}$ est le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}$: $x \mapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}^\times$, $b, x \in \mathbb{R}$. Ses éléments sont donc donnés par des

couples (b, a) et cette identification permet de voir G comme le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$. Sa composante connexe G_0 n'est rien d'autre que l'ensemble des couples (b, a) avec $a > 0$, c'est-à-dire $G_0 = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^\times$. Même s'il est clair que ce groupe pourrait s'écrire comme $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$ pour préserver le formalisme introduit ci-dessus, on conservera ici l'écriture $G_0 = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^\times$ pour éviter la lourdeur de la notation de l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par $s \cdot r = e^s r$. L'action de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $\mathbb{R}$ est donc donnée par simple multiplication et cela reste également vrai sur le dual $\widehat{\mathbb{R}}$ si on identifie celui ci avec $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$, $s \mapsto \chi_s$ où $\chi_s(r) = e^{isr}$). On voit donc facilement qu'il n'y a que deux orbites non triviales dans $\mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R}_-^\times = \mathbb{R}\chi_{-1}$ et $\mathbb{R}_+^\times = \mathbb{R}\chi_{+1}$. Pour simplifier, on notera dans la suite $\pi_{\chi_{-1}} = \pi_-$ et $\pi_{\chi_{+1}} = \pi_+$. Par la théorie de Mackey on a donc $\widehat{G_0} = \widehat{\mathbb{R}} \amalg \{\pi_-\} \amalg \{\pi_+\}$.

On considère alors l'homomorphisme surjectif $\alpha : G_0 \twoheadrightarrow \mathbb{R}_+^\times$, qui fournit une suite exacte au niveau des C*-algèbres de groupes :

$$0 \longrightarrow I = Ker(\alpha_*) \xrightarrow{i} C^*(G_0) \xrightarrow{\alpha_*} C^*(\mathbb{R}_+^\times) \longrightarrow 0$$

La connaissance de $\widehat{G_0}$ permet d'identifier le noyau de α_* : en effet par 3.2.1. de [44] le dual de I est homéomorphe à $\widehat{C^*(G_0)}^I = \{\pi \in \widehat{C^*(G_0)} | \pi(I) \neq 0\}$, c'est-à-dire dans ce cas $\widehat{I} = \{\pi_-\} \amalg \{\pi_+\}$. Par 4.7.3 de [44] on conclut alors que $I \cong \mathbf{K} \oplus \mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne l'algèbre des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert infini séparable. Comme de plus $C^*(\mathbb{R}_+^\times) \cong C_0(\mathbb{R})$, la suite exacte de C*-algèbres devient

$$0 \longrightarrow \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} \longrightarrow C^*(G_0) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

Comme par Connes $K_0(C^*(G_0)) = \mathbb{Z}$ et $K_1(C^*(G_0)) = 0$, on a la suite exacte à 6 termes en K-théorie :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha_*} & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle \delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\alpha_*} & 0 & \xleftarrow{i_*} & 0 \end{array}$$

Notons encore ξ_- (resp. ξ_+) une PGF construite par Kaniuth et Taylor associée à l'orbite de χ_{-1} (resp. χ_{+1}), rappelons que par les résultats de Kaniuth et Taylor f_{ξ_-} (resp. f_{ξ_+}) est fortement minimale avec $S(f_{\xi_-}) = \{\pi_-\}$ (resp. $S(f_{\xi_+}) = \{\pi_+\}$). Remarquons ici que l'on peut montrer (comparer avec 1.2.1) que si H est un groupe localement compact abélien sans sous-groupe compact non-trivial, alors $C^*(H)$ n'a pas d'idempotent non trivial. L'exemple de G_0 montre que c'est faux dans le cas non-abélien.

Proposition 3.2.1
L'élément $[f_{\xi_-}]$ (resp. $[f_{\xi_+}]$) est un générateur de $K_0(C^*(G_0)) = \mathbb{Z}$.

⌜ Notons $[(p_-, 0)]$ et $[(0, p_+)]$ les deux générateurs de $K_0(\mathbf{K} \oplus \mathbf{K}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; p_- et p_+ sont donc des projections de rang 1 (fortement minimales) de $\mathbf{K}$. Notons $q_- = i((p_-, 0))$ et $q_+ = i((p_+, 0))$ les projections images dans $C^*(G_0)$; par construction q_- et q_+ sont fortement minimales avec $S(q_-) = \{\pi_-\}$ et $S(q_+) = \{\pi_+\}$. Par 1.3. de [125] on a donc que $f_{\xi_-} \sim_u q_-$ et $f_{\xi_+} \sim_u q_+$. On a donc obtenu que $i_*([(p_-, 0)]) = [f_{\xi_-}]$ et $i_*([(p_+, 0)]) = [f_{\xi_+}]$. Il reste à identifier l'application i_*, ce qui se fera en travaillant sur la suite exacte à 6 termes ci-dessus. Par symétrie du problème le générateur $1 \in \mathbb{Z} = K_1(C_0(\mathbb{R}))$ est envoyé a priori soit sur $(1, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ soit sur $(1, -1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (on verra dans la suite que l'image est $(1, 1)$).

a) $\delta(1) = (1, 1)$
Posons $i_*((1, 0)) = c$ et $i_*((0, 1)) = d$. On a

$$c + d = i_*((1, 0)) + i_*((0, 1)) = i_*((1, 1)) = 0;$$

donc $Im(i_*) \subseteq c\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. Comme i_* est surjective, on a $c = -d = \pm 1$. D'où la conclusion $[f_{\xi_-}] = -[f_{\xi_+}] = \pm 1$.

b) $\delta(1) = (1, -1)$
Dans ce cas, par un calcul similaire on obtient $[f_{\xi_-}] = [f_{\xi_+}] = \pm 1$.

⌟

Remarque : On verra dans la section suivante que $\delta(1) = (1, 1)$, c'est à dire que les projections f_{ξ_-} et f_{ξ_+} ne sont pas équivalentes dans $M_\infty(C^*(G_0))$

et donc en particulier dans $C^*(G_0)$ (on savait déjà qu'elles n'étaient pas unitairement équivalentes dans $C^*(G_0)$ puisqu'elles n'avaient pas le même support dans $\widehat{G_0}$).

3.3 Le groupe des affinités de R

Comme on l'a déjà relevé, les résultats de Connes ne s'appliquent pas au cas de $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$ car ce dernier n'est pas connexe. On va cependant pouvoir tout de même calculer cette K-théorie par d'autres moyens. La théorie de Mackey s'applique par contre comme dans le cas de la composante connexe. On n'aura cette fois plus qu'une seule orbite de l'action de $\mathbb{R}^\times$ sur $\widehat{\mathbb{R}}$: l'orbite $\mathbb{R}\chi_{+1}$. Si on note $\pi_+ = \pi_{\chi_{+1}}$, le dual de G est donc cette fois $\widehat{G} = \widehat{\mathbb{R}^\times} \amalg \{\pi_+\}$.

L'homomorphisme surjectif $\beta : G \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\times$ fournit la suite exacte au niveau des C*-algèbres de groupe :

$$0 \longrightarrow J = Ker(\beta_*) \xrightarrow{j} C^*(G) \xrightarrow{\beta_*} C^*(\mathbb{R}^\times) \longrightarrow 0$$

Avec les mêmes arguments que dans le cas précédent, on obtient $\widehat{J} = \{\pi_+\}$ et donc $J \cong \mathbf{K}$. Comme $C^*(\mathbb{R}^\times) \cong C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R})$, on réécrit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{K} \xrightarrow{j} C^*(G) \xrightarrow{\beta_*} C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

d'où en K-théorie la suite exacte à 6 termes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{j_*} & K_0(C^*(G)) & \xrightarrow{\beta_*} & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle \delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\beta_*} & K_1(C^*(G)) & \xleftarrow{j_*} & 0 \end{array}$$

Pour déterminer la K-théorie de $C^*(G)$, on fera appel à quelques résultats de KK-théorie qui apparaissent tous dans [118]. Soit A une C*-algèbre séparable nucléaire, B une C*-algèbre, alors l'ensemble des extensions de A par $B \otimes \mathbf{K}$ (i.e. l'ensemble des suites exactes de C*-algèbres (à équivalence près) du type

$0 \to B \otimes \mathbf{K} \to E \to A \to 0$), noté $Ext(A, B)$ est un groupe ([118] 10.5). Ce groupe est isomorphe au groupe de KK-théorie $KK_1(A, B)$ ([118] 10.6). Chaque extension fournit donc un élément α de $KK_1(A, B)$. Si on regarde alors la suite exacte à 6 termes en K-théorie exprimée à l'aide des groupes de KK-théorie, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} KK_0(\mathbb{C}, B) & \xrightarrow{i_*} & KK_0(\mathbb{C}, E) & \xrightarrow{p_*} & KK_0(\mathbb{C}, A) \\ \uparrow{\scriptstyle \delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ KK_1(\mathbb{C}, A) & \xleftarrow{p_*} & KK_1(\mathbb{C}, E) & \xleftarrow{i_*} & KK_1(\mathbb{C}, B) \end{array}$$

avec cette fois-ci les flèches de connexion données par produit de Kasparov par l'élément α : $\delta(x) = x \otimes_A \alpha$.

Dans le cas étudié ici, la suite exacte courte de terme central $C^*(G)$ fournit un élément de $Ext(C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C})$. Dans [130] D.N.Zep montre que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et que l'extension donnée par $C^*(G)$ correspond à l'élément $(1, 1)$. Notons alors (α, α) cet élément en le regardant dans $KK_1(C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C}) = KK_1(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \oplus KK_1(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ce générateur α de $KK_1(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ a la propriété que couplé par le produit de Kasparov au générateur de Bott β de $K_1(C_0(\mathbb{R})) \cong KK_1(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ il donne (périodicité de Bott en KK-théorie) : $\beta \otimes_{C_0(\mathbb{R})} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$, où $1_{\mathbb{C}}$ est le générateur de $KK_0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Ces résultats montrent alors facilement la proposition suivante :

Proposition 3.3.1
Soit $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$ le groupe des affinités de $\mathbb{R}$; alors $K_0(C^*(G)) = 0$ et $K_1(C^*(G)) \cong \mathbb{Z}$.

⌜ Décrivons la flèche de connexion

$$\delta : K_1(C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R})) \to K_0(\mathbf{K}) \cong K_0(\mathbb{C})$$

en KK-théorie ; par les résultats de Zep, elle est donnée par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \cong & KK_1(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R})\oplus C_0(\mathbb{R})) & \longrightarrow & \mathbf{K}_0(\mathbb{C})\cong\mathbb{Z} \\ (m,n) & = & (m\beta, n\beta) & \longmapsto & (m\beta, n\beta)\otimes_{C_0(\mathbf{R})\oplus C_0(\mathbf{R})}(\alpha,\alpha) \\ & & & & = m\beta\otimes_{C_0(\mathbf{R})}\alpha + n\beta\otimes_{C_0(\mathbf{R})}\alpha \\ & & & & = m\,1_{\mathbb{C}} + n\,1_{\mathbb{C}} \\ & & & & = m+n \end{array}$$

La flèche δ est donc surjective et la suite exacte à 6 termes fournit alors immédiatement $K_0(C^*(G)) = 0$ et $K_1(C^*(G)) \cong \mathbb{Z}$. ⌟

La connaissance de cette flèche d'indice pour G va permettre de déterminer également la même flèche d'indice pour G_0 (Rappelons que l'on n'avait pas pu déterminer si $\delta(1) = (1,1)$ ou $\delta(1) = (1,-1)$). Le monomorphisme de groupe $G_0 \hookrightarrow G$ permet de lier les deux suites exactes de C*-algèbres :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{K}\oplus\mathbf{K} & \xrightarrow{i} & C^*(G_0) & \xrightarrow{\alpha_*} & C_0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\phi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\psi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{K} & \xrightarrow{j} & C^*(G) & \xrightarrow{\beta_*} & C_0(\mathbb{R})\oplus C_0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il faut tout d'abord décrire le morphisme η. Comme par définition pour $f \in L^1(G_0)$ on a

$$\psi(f)(b,a) = \begin{cases} f(b,a) & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

de même pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+^\times)$ on a

$$\eta(f)(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On décrit ainsi η au niveau des algèbres de groupes, pour la voir au niveau des fonctions sur le dual, il faut utiliser les isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathbb{R}_+^\times) & \to & C_0(\widehat{\mathbb{R}_+^\times}) \cong C_0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}_0(f) \end{array}$$

où $\mathcal{F}_0(f)(s) = \int_{\mathbf{R}_+^\times} f(x)\chi_s(x)dx = \int_{\mathbf{R}_+^\times} f(x)x^{is}dx$, $s \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathbb{R}^\times) & \to & C_0(\widehat{\mathbb{R}^\times}) \cong C_0(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}/2) \\ g & \mapsto & \mathcal{F}(g) \end{array}$$

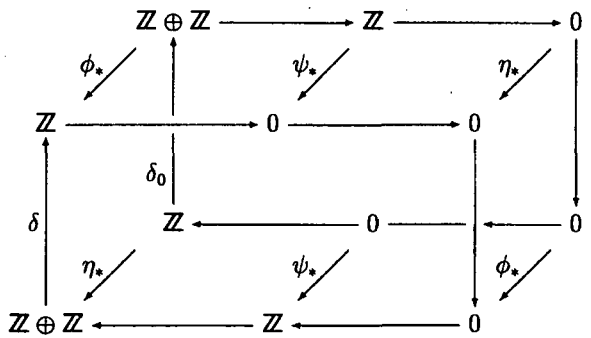
où $\mathcal{F}(g)(s,\epsilon) = \int_{\mathbf{R}^\times} g(x)\chi_{(s,\epsilon)}dx = \int_{\mathbf{R}^\times} g(x)|x|^{is}sgn(x)^\epsilon dx$, $(s,\epsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2$. Lorsque $g = \eta(f)$ le second isomorphisme donne donc :

$$\mathcal{F}(\eta(f))(s,\epsilon) = \int_{\mathbf{R}_+^\times} f(x)x^{is}dx = \mathcal{F}_0(f)(s).$$

η est donc décrit au niveau des fonctions par

$$\eta : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R}), f \mapsto (f,f).$$

On est alors en mesure de décrire toutes les flèches en K-théorie :



Un simple exercice utilisant les constructions de Kaniuth et Taylor montre que si f_{ξ_+} (resp. f_{ξ_-}) est une PGF pour G_0 associée à l'orbite $\mathbb{R}_+^\times$ (resp. $\mathbb{R}_-^\times$) alors $\psi(f_{\xi_+})$ (resp. $\psi(f_{\xi_-})$) est une PGF pour G associée à l'orbite $\mathbb{R}^\times$. Ceci montre que $\phi_*((1,0)) = \phi_*((0,1)) = 1$.

La commutativité de la face gauche donne alors

$$(\phi_* \circ \delta_0)(1) = (\delta \circ \eta_*)(1) = \delta(1,1) = 1 + 1 = 2$$

D'où la conclusion : $\delta_0(1) = (1,1)$.

3.4 Une remarque sur un théorème de Baum et Connes

Dans leur premier article concernant la conjecture de Baum-Connes [7] (cet article datant de 1982 sera publié sous peu et dans sa forme originale dans

l'Enseignement Mathématique), P.Baum et A.Connes consacrent la section 5 au cas des groupes de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. Les calculs de la K-théorie de $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^\times$ faits ci-dessus montrent qu'en fait certains des résultats de cette section ne sont vrais qu'en supposant le groupe connexe.

Rappelons que G est moyennable et donc que la conjecture de Baum-Connes est vérifiée [124]. Le groupe géométrique $K^i(pt, G)$ décrit par Baum-Connes est donc isomorphe à $K_i(C^*(G))$. Si on note H le sous-groupe compact maximal de G (ici $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), le seul lemme de la section 5 de [7] montre que $\underline{EG} \cong G/H \cong G_0$. Baum et Connes utilisent ce lemme pour démontrer la proposition identifiant le groupe géométrique à $K^i_H(g^*)$, où $g = Lie(G)$ (l'identification se fait en fait avec $K^i_H((g/h)^*)$ mais ici H est fini donc $h = Lie(H)$ triviale). De cette proposition, les deux auteurs tirent deux corollaires dont un contre-exemple au second est fournit par G. Ici on a en effet $K^1(pt, G) \cong K^1_H(g^*) \cong \mathbb{Z}$ que le corollaire affirme être isomorphe à $[K^1_{\widetilde{H}}(pt)]_-$, où $\widetilde{H} = H \times_{SO(g^*)} Spin(g^*)$ est un revêtement à deux feuilles de H. Comme ici H est fini, $\widetilde{H}$ également et donc $K^1_{\widetilde{H}}(pt) = 0$. L'erreur se situe juste avant ce corollaire où les auteurs se mettent à utiliser la connexité de H, ce qui équivaut à celle de G, hypothèse absente au départ. La formulation de la conjecture de Baum-Connes de la dernière remarque du paragraphe est fausse pour les mêmes raisons.

Chapitre 4

La conjecture de Baum-Connes pour les groupes à un relateur

Introduction

Le premier paragraphe de ce chapitre sera consacré au calcul explicite de la K-théorie de la C*-algèbre réduite des groupes à un relateur. Le lecteur voudra bien se référer à 1.4 pour les rappels et les notations sur ces groupes. Soit donc $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur; la relation r peut s'écrire $r = s^n$ où $n \geqslant 1$ et s n'est pas une puissance d'un autre mot de $F(X)$. Rappelons encore que Γ est sans torsion si et seulement si $n = 1$.

Dans ce chapitre, l'abélianisé d'un groupe G sera noté G^{ab} et l'image d'un élément $g \in G$ dans G^{ab} sera elle notée $\overline{g}$.

La K-théorie de la C*-algèbre réduite d'un groupe à un relateur est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.0.1

a) *Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur avec $r = s^n$ comme ci-dessus, alors*

$$K_0(C_r^*(\Gamma)) = \begin{cases} \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z} & \text{si } \overline{r} \text{ est trivial dans } F(X)^{ab} \\ \mathbb{Z}^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux cas, $\mathbb{Z}^n$ est engendré par les n projecteurs spectraux de s dans $C_r^*(\Gamma)$. En particulier, si G est sans torsion et $\overline{r} \neq 0$ alors $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est engendré par $[1]$ la classe de l'unité en K-théorie.

b) Soit $\Gamma = \langle X | s^n \rangle$ un groupe à un relateur et $\langle \overline{s} \rangle$ le groupe cyclique fini engendré par l'image de s dans Γ^{ab} ; alors

$$0 \longrightarrow \langle \overline{s} \rangle \longrightarrow \Gamma^{ab} \xrightarrow{\kappa_\Gamma} K_1(C_r^*(\Gamma)) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte. En particulier si Γ est sans torsion, κ_Γ est un isomorphisme.

Même si le théorème 4.0.1 sera prouvé par calcul direct, il est intéressant de le regarder du point de vue de la conjecture de Baum-Connes et de la flèche d'assemblage

$$\mu_i^\Gamma \ : \ K_i^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \to K_i(C_r^*(\Gamma)).$$

Par un célèbre résultat de Lyndon (voir théorème D.10 de [12]), un groupe à un relateur $\Gamma = \langle X | s^n \rangle$ a une dimension homologique rationnelle inférieure ou égale à 2. En conséquence le caractère de Chern fournit les isomorphismes :

$$K_0^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H_0(\Gamma, F\Gamma) \oplus H_2(\Gamma, F\Gamma)$$

$$K_1^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H_1(\Gamma, F\Gamma)$$

Par 1.4.2, un ensemble de générateurs comme Γ-module de $F\Gamma$ (représentants des classes de conjugaisons d'éléments de torsion de Γ) est

$$\{1, s, s^2, s^3, \ldots, s^{n-1}\}.$$

Si $Z_\Gamma(s^k)$ désigne le centralisateur de s^k, le lemme de Shapiro nous fournit alors l'isomorphisme

$$H_i(\Gamma, F\Gamma) \ \cong \ \bigoplus_{k=0}^{n-1} H_i(Z_\Gamma(s^k), \mathbb{C})$$

qui donne immédiatement $H_0(\Gamma, F\Gamma) \cong \mathbb{C}^n$. Pour $k \geqslant 1$, le centralisateur $Z_\Gamma(s^k)$ est le sous-groupe cyclique engendré par s dans Γ (voir théorème 2

de [101]), et donc

$$\begin{aligned} H_1(\Gamma, F\Gamma) &\cong H_1(\Gamma, \mathbb{C}) = \Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \\ H_2(\Gamma, F\Gamma) &\cong H_2(\Gamma, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

La description de l'espace classifiant de Γ donnée par le théorème D.20 de [12] permet facilement le calcul du deuxième groupe d'homologie :

$$H_2(\Gamma, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } s \in [F(X), F(X)] \\ 0 & \text{si } s \notin [F(X), F(X)] \end{cases}$$

En regroupant ces résultats, on obtient bien les isomorphismes attendus

$$\begin{aligned} K_0^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} &\cong \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \text{si } \overline{s} \text{ est trivial dans } F(X)^{ab} \\ \mathbb{C}^n & \text{sinon.} \end{cases} \\ K_1^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} &\cong \Gamma^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \end{aligned}$$

En regard du théorème 4.0.1, les isomorphismes

$$K_i(C_r^*(\Gamma)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong K_i^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \qquad i = 0, 1$$

ont été établis de manière abstraite. Le second paragraphe démontrera que cet isomorphisme est bien donné par la flèche d'assemblage :

Théorème 4.0.2
La conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour un groupe à un relateur Γ ; en particulier l'application $\mu_i^{\Gamma} : K_i^{\Gamma}(\underline{E\Gamma}) \to K_i(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme pour $i = 0, 1$.

D'où, par les remarques de 1.3, le corollaire immédiat :

Corollaire 4.0.3
Soit Γ un groupe à un relateur sans torsion ; alors $C_r^*(\Gamma)$ n'a pas d'idempotents autres que 0 *ou* 1.

Les théorèmes 4.0.1 et 4.0.2 seront prouvés en utilisant le principe de la preuve de 1.4.1 : un groupe à un relateur $\Gamma = \langle X | r \rangle$ s'injecte dans une extension $HNN(H, A, \theta)$, où H est un groupe à un relateur avec une relation

plus courte, et A est un groupe libre (conséquence de 1.4.1). En particulier Γ admet une action non-triviale sur un arbre (voir 5.3.1). En combinant la démonstration par induction sur la longueur du générateur avec les résultats de Pimsner sur la K-théorie de C*-algèbres de groupes agissant sur des arbres, le théorème 4.0.1 sera prouvé. La preuve du théorème 4.0.2 nécessitera elle un résultat supplémentaire : si un groupe G agit sur un arbre sans inversion, avec des stabilisateurs de sommets et d'arêtes pour lesquels la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vérifiée, alors cette conjecture est vraie pour le groupe G. Ce résultat d'hérédité, bien que cité comme connu par les spécialistes (théorème 4.3 de [9]), n'était encore prouvé rigoureusement nulle part lorsque débutèrent ces recherches sur les groupes à un relateur (la preuve de [9] contient un sérieux trou qui sera mis en évidence ci-dessous). Pour cette raison, une preuve de 4.0.2 sans coefficient, qui ne fasse pas appel aux actions sur les arbres, fut tout d'abord recherchée. Lorsque $\Gamma = \langle X|r\rangle$ est un groupe à un relateur sans torsion, il existe un modèle simple de l'espace classifiant $B\Gamma$, due à Lyndon [90]. Dans ce cas, par identification des générateurs, il sera possible de prouver que μ_1^Γ est un isomorphisme, et que μ_0^Γ est un isomorphisme dans le cas "générique" $\overline{r} \neq 0$ (voir la proposition 4.3.3 ci-dessous). Finalement le résultat d'hérédité nécessaire à la preuve de 4.0.2 fut prouvé par J.L.Tu [123], qui combina la machinerie de la KK-théorie équivariante avec une version de la dualité de Poincaré en KK-théorie due à Kasparov et Skandalis [81]. Simultanément et indépendamment une preuve de ce même résultat fut obtenue par H.Oyono-Oyono [103].

4.1 Calcul de la K-théorie : Preuve de 4.0.1

4.1.1 Résultats préliminaires

Rappelons que pour tout groupe Γ, on peut construire un homomorphisme $\beta_t : \Gamma^{ab} \to K_1^\Gamma(\underline{E}\Gamma)$ tel que $\mu_1^\Gamma \circ \beta_t = \kappa_\Gamma$ (voir [100] et la section 5 de [128]).

Lemme 4.1.1

1) Soit Γ un groupe agissant proprement sur un arbre orienté X ; alors

μ_0^Γ : $K_0^\Gamma(\underline{E\Gamma}) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ *est un isomorphisme.*

2) *Soit* $\Gamma = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) * \mathbf{F}_k$; *notons* s *le générateur de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, *alors*

a) μ_0^Γ *est un isomorphisme, et* $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^n$ *est engendré par les* n *projecteurs spectraux de* s.

b) *Le diagramme triangulaire suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} K_1^\Gamma(\underline{E\Gamma}) & \xrightarrow{\quad\mu_1^\Gamma\quad} & K_1(C_r^*(\Gamma)) \\ & {\scriptstyle\beta_t}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\kappa_\Gamma} & \\ & \Gamma^{ab} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^k & \end{array}$$

où $ker(\beta_t) = ker(\kappa_\Gamma) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *et* μ_1^Γ *est un isomorphisme.*

1) La preuve suivra une idée de Baum et Connes (théorème 4.3 de [9]). Notons X^0 (resp. X^1) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de X. Soit $|X|$ la réalisation géométrique de X. On identifie chaque arête géométrique de $|X|$ avec $[0,1]$. On obtient ainsi une suite exacte courte Γ-équivariante d'algèbres abéliennes :

$$0 \longrightarrow C_0(X^1 \times]0,1[) \longrightarrow C_0(|X|) \xrightarrow{i} C_0(X^0) \longrightarrow 0$$

ce qui fournit une suite exacte à 6 termes en K-homologie équivariante :

$$\begin{array}{ccccc} K_0^\Gamma(X^0) & \xrightarrow{i_*} & K_0^\Gamma(|X|) & \longrightarrow & K_1^\Gamma(X^1) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0^\Gamma(X^1) & \longleftarrow & K_1^\Gamma(|X|) & \xleftarrow{i_*} & K_1^\Gamma(X^0) \end{array}$$

dans laquelle la périodicité de Bott $K_i^\Gamma(X^1 \times]0,1[) \cong K_{i+1}^\Gamma(X^1)$ $(i \in \mathbb{Z})$ a été introduite. On peut alors vérifier que les applications verticales sont induites par l'opérateur de cobord d : $X^1 \to X^0$. Soit Σ un domaine fondamental pour l'action de Γ sur X, choisi comme dans le §1 de [106] (Σ est un relèvement de $G\backslash X$ dans X que l'on peut choisir tel que chaque arête de Σ^1 ait son origine dans Σ^0 et tel que la réunion

de Σ^0 et des arêtes de Σ^1 ayant leur origine et leur sommet terminal dans Σ^0 soit un sous-arbre de X) ; alors

$$K_i^\Gamma(X^0) = \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_i^\Gamma(\Gamma\cdot x) \cong \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_i^{\Gamma_x}(pt)$$

$$K_i^\Gamma(X^1) = \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_i^\Gamma(\Gamma\cdot y) \cong \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_i^{\Gamma_y}(pt)$$

(on peut utiliser ici des sommes directes et non des produits directs car on travaille avec la K-homologie à support compact). En particulier, comme les stabilisateurs sont finis (l'action est propre), la suite exacte à 6 termes se déploie de la façon suivante

$$0 \to K_1^\Gamma(|X|) \to \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_0^{\Gamma_y}(pt) \xrightarrow{d_*} \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_0^{\Gamma_x}(pt) \to K_0^\Gamma(|X|) \to 0$$

Parallèlement, on dispose des suites exactes de Pimsner [106] qui calculent la K-théorie de $C_r^*(\Gamma)$; en y injectant le fait que les stabilisateurs sont finis, c'est-à-dire $K_1(C_r^*(\Gamma_x)) = 0 = K_1(C_r^*(\Gamma_y))$ pour $x \in \Sigma^0$, $y \in \Sigma^1$, on obtient

$$0 \to K_1(C_r^*(\Gamma)) \to \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_0(C_r^*(\Gamma_y)) \xrightarrow{d_*} \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_0(C_r^*(\Gamma_x)) \to K_0(C_r^*(\Gamma)) \to 0$$

Comme pour un groupe fini F on peut choisir $\underline{EF} = pt$, les deux suites exactes ci-dessus sont liées par quatre flèches d'assemblage :

(*)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1^\Gamma(|X|) & \longrightarrow & \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_0^{\Gamma_y}(pt) & \xrightarrow{d_*} & \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_0^{\Gamma_x}(pt) & \xrightarrow{i_*} & K_0^\Gamma(|X|) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mu_1^\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus\mu_0^{\Gamma_y}} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus\mu_0^{\Gamma_x}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_0^\Gamma} \\
0 & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\Gamma)) & \longrightarrow & \bigoplus_{y\in\Sigma^1} K_0(C_r^*(\Gamma_y)) & \xrightarrow{d_*} & \bigoplus_{x\in\Sigma^0} K_0(C_r^*(\Gamma_x)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C_r^*(\Gamma)) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Comme les applications d_* et i_* proviennent des inclusions de groupes, et que la flèche d'assemblage est naturelle par rapport aux monomorphismes de groupes (théorème 1 de [128]), les carrés du centre et de droite de (*) sont commutatifs. La conjecture de Baum-Connes étant vraie pour les groupes finis, le lemme des cinq prouve alors que μ_0^Γ est un isomorphisme.

Remarquons ici qu'on ne peut pas conclure de la même manière pour μ_1^Γ car la commutativité du carré de gauche n'a pas de preuve immédiate.

C'est précisément le point non traité dans la preuve du théorème 4.3 de [9].

2) Soit Y le graphe de Cayley de Γ par rapport au système de générateurs $\{s^{\pm 1}, a_1^{\pm 1}, \ldots, a_k^{\pm 1}\}$, où s engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les a_i engendrent librement $\mathbf{F}_k$. Le graphe Y est arborescent : c'est le produit libre d'un n-gone et de l'arbre $2k$-régulier. Si on réduit chaque n-gone de Y à un point, on obtient un arbre $2kn$ régulier sur lequel Γ agit proprement (les stabilisateurs sont finis). Cette action est transitive sur les sommets. Le premier point du lemme implique alors que μ_0^Γ est un isomorphisme. La fin de l'assertion du point a) résulte du fait que $K_0^\Gamma(|X|) \cong K_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(pt) \cong \mathbb{Z}^n$ (ce qui découle clairement du diagramme (*) ci-dessus car dans ce cas $d_* = 0$). L'assertion b) est, quant à elle, une conséquence du calcul de la K-théorie $K_i(C_r^*((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) * \mathbf{F}_k))$ dû à Cuntz [40], [41] (basé lui-même sur le calcul de $K_i(C_r^*(\mathbf{F}_k))$ de Pimsner et Voiculescu [105]). ⌟

Revenons à $\Gamma = \langle X | s^n \rangle$ où $n \geqslant 1$ et s n'est pas une puissance d'un autre élément de $F(X)$. Notons $\widetilde{\Gamma}$ le groupe à un relateur sans torsion donné par $\widetilde{\Gamma} = \langle X | s \rangle$. Comme les éléments de torsion de Γ sont des conjugués de puissances de s (1.4.2), l'application κ_Γ factorise par un homomorphisme $\widetilde{\kappa_\Gamma} : \widetilde{\Gamma}^{ab} \to K_1(C_r^*(\Gamma))$ qui fournit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & K_1(C_r^*\Gamma) & & \\ & & & \overset{\kappa_\Gamma}{\nearrow} & \uparrow & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \langle \bar{s} \rangle & \longrightarrow & \Gamma^{ab} & \underset{\widetilde{\kappa_\Gamma}}{\uparrow} & 0 \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & \widetilde{\Gamma}^{ab} & \end{array}$$

Comme la ligne inférieure est exacte par 1.4.2, prouver la seconde partie du théorème 4.0.1 revient à montrer que $\widetilde{\kappa_\Gamma}$ est un isomorphisme.

Pour démontrer 4.0.1, on utilisera le principe de la preuve du Freiheitssatz (1.4.1) vu au premier chapitre. La démonstration se fera donc par induction sur la longueur de s. Attention, ici l'induction sera bien sur la longueur de s et non sur celle de $r = s^n$, mais à l'exception de cette différence purement technique, le cheminement sera le même. Pour éviter toute confusion, rappelons les notations utilisées dans les deux cas du pas d'induction en tenant

compte de la remarque précédente.

I - Il existe $t \in X$ tel que $\sigma_t(s) = 0$. En prenant alors l'alphabet $b_i = t^i b t^{-i}$, $c_i = t^i c t^{-i}, \ldots (i \in \mathbb{Z})$, s s'écrit comme un mot cycliquement réduit $\check{s}$ plus court sur l'alphabet b_i, $c_i, \ldots$ Si μ and m désignent respectivement les indices minimum et maximum des occurrences des b_i dans $\check{s}$, Γ est l'extension HNN suivante $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$ où

$$\begin{aligned} H &= \langle b_\mu, \ldots, b_m, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) | \check{s}^n \rangle \\ A &= \begin{cases} \langle b_\mu, \ldots, b_{m-1}, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu < m \\ \langle c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu = m \end{cases} \\ \theta &: A \to H, \begin{cases} b_i \to b_{i+1}, c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu < m \\ c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu = m \end{cases} \end{aligned}$$

(par le Freiheitssatz, A est un groupe libre).

De même $\widetilde{\Gamma}$: $\widetilde{\Gamma} = HNN(\widetilde{H}, A, \theta)$ où

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= \langle b_\mu, \ldots, b_m, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) | \check{s} \rangle \\ A &= \begin{cases} \langle b_\mu, \ldots, b_{m-1}, c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu < m \\ \langle c_i, d_i, \ldots (i\in\mathbb{Z}) \rangle & \text{si } \mu = m \end{cases} \\ \theta &: A \to \widetilde{H}, \begin{cases} b_i \to b_{i+1}, c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu < m \\ c_i \to c_{i+1}, \ldots & \text{si } \mu = m \end{cases} \end{aligned}$$

II - $\sigma_z(s) \neq 0$ pour tout $z \in X$. En posant $\alpha = \sigma_t(s)$ et $\beta = \sigma_b(s)$ on construit le groupe $G = \langle y, x, c, d, \ldots | s_1^n = s^n(yx^{-\beta}, x^\alpha, c, d, \ldots) \rangle$ dans lequel Γ s'injecte par $\psi : \Gamma \to G$, $t \mapsto yx^{-\beta}$, $b \mapsto x^\alpha$, $c \mapsto c, \ldots$ On peut alors regarder G comme un produit amalgamé $G = \Gamma *_{<b=x^\alpha>} \langle x \rangle$ ou, comme au point I (car $\sigma_x(s_1) = 0$, $\sigma_y(s_1) = \sigma_t(s) \neq 0$), comme une extension HNN d'un groupe à un relateur $H = \langle y_i, c_i, d_i, \ldots | \check{s}^n \rangle$ avec $|\check{s}| < |s|$ (remarque : en général $|s_1| < |s|$ n'est pas satisfait).

De même, cette construction est encore valable pour $\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{G}$ et $\widetilde{H}$.

Tout au long de l'induction, il faudra pouvoir contrôler la torsion. C'est le rôle du lemme suivant.

Lemme 4.1.2

A la fin de l'induction (avec plus qu'un seul générateur dans s), Γ est de la forme $\Gamma \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) * \mathbf{F}_k$, $(k = 0, 1, \ldots, \infty)$, où n est l'entier donné dans $\langle X | s^n \rangle$.

⌜ Il suffit de montrer que dans les deux cas du pas d'induction $\check{s}$ n'est pas une puissance d'un élément non trivial de $F(X')$, où X' est l'ensemble des générateurs de $\widetilde{H}$. Autrement dit, il faut montrer que dans tous les cas $\widetilde{H}$ est sans torsion. Le premier cas est trivial puisque $\widetilde{\Gamma} = HNN(\widetilde{H}, A, \theta)$ et donc $\widetilde{H}$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}$ qui n'a pas de torsion par hypothèse. Le second cas résulte des remarques suivantes : si $\widetilde{H}$ avait de la torsion, $\widetilde{G}$ en aurait également, et il existerait $k > 1$ tel que $s_1 = w^k$. A permutation cyclique près, on peut alors supposer que s_1 commence par $y^{\pm 1}$ c'est-à-dire est de la forme :

$$s_1 = \underbrace{y^{\pm 1} \cdots y^{\pm 1} \cdots \cdots y^{\pm 1} \cdots}_{\text{k fois}}$$

Comme s_1 est obtenu en réécrivant s selon la transformation donnée par $t \mapsto yx^{-\beta}$, $b \mapsto x^{\alpha}$, $c \mapsto c, \ldots$, s doit être de la forme :

$$s = \underbrace{t^{\pm 1} \cdots t^{\pm 1} \cdots \cdots t^{\pm 1} \cdots}_{\text{k fois}}$$

sans simplification possible devant les $t^{\pm 1}$. Cela contredirait alors l'hypothèse sur s. ⌟

Tous ces résultats préliminaires établis, on est alors en mesure de débuter l'induction proprement dite.

4.1.2 Induction

Le premier pas de l'induction est constitué simplement des lemmes 4.1.1 et 4.1.2. Le pas d'induction est lui bien plus complexe.

Pas d'induction :

Comme annoncé, on séparera deux cas :

I - $\sigma_t(s) = 0$ et donc $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$ (resp. $\widetilde{\Gamma} = HNN(\widetilde{H}, A, \theta)$). Notons i (resp. $\widetilde{i}$) l'inclusion de H (resp. $\widetilde{H}$) dans Γ (resp. $\widetilde{\Gamma}$). Il existe

alors une suite exacte à 6 termes en K-théorie pour les extensions HNN due à Anderson et Paschke [1] et généralisée en KK-théorie par Pimsner [106].

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_r^*(A)) & \xrightarrow{Id-\theta_*} & K_0(C_r^*(H)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C_r^*(\Gamma)) \\ \uparrow{\scriptstyle \partial_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} \\ K_1(C_r^*(\Gamma)) & \xleftarrow{i_*} & K_1(C_r^*(H)) & \xleftarrow{Id-\theta_*} & K_1(C_r^*(A)) \end{array}$$

Comme A est libre, on sait que $K_0(C_r^*(A)) = \mathbb{Z}[1]$; θ_* étant induit par un $*$-homomorphisme unital on en déduit $\theta_*[1] = [1]$ donc que l'application $Id - \theta_* : K_0(C_r^*(A)) \to K_0(C_r^*(H))$ est nulle. La suite exacte à 6 termes se scinde alors :

$$\begin{aligned} 0 \to K_0(C_r^*(H)) \xrightarrow{i_*} K_0(C_r^*(\Gamma)) \xrightarrow{\partial_0} K_1(C_r^*(A)) \xrightarrow{Id-\theta_*} \\ K_1(C_r^*(H)) \xrightarrow{i_*} K_1(C_r^*(\Gamma)) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[1] \to 0 \end{aligned}$$

On notera δ_g l'unitaire de $C_r^*(\Gamma)$ correspondant à un élément $g \in \Gamma$, et $[\delta_g]$ sa classe dans $K_1(C_r^*(\Gamma))$. On utilisera ici la notation habituelle additive pour les groupes K_1. Pour poursuivre on a ici besoin d'information sur $\partial_1 : K_1(C_r^*(\Gamma)) \to \mathbb{Z}[1]$.

Assertion 1 : $\partial_1[\delta_t] = -[1]$

Ce résultat peut être obtenu à partir de la description donnée dans [1] : la suite exacte à 6 termes provient d'une "extension de Toeplitz", c'est-à-dire d'une suite exacte courte

$$0 \to C_r^*(A) \otimes \mathbf{K} \to \mathcal{D} \to C_r^*(\Gamma) \to 0$$

où $\mathbf{K}$ désigne l'algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert infini séparable habituel, et $\mathcal{D}$ est une C*-algèbre agissant sur $l^2(\Gamma)$, engendrée par les δ_h ($h \in H$) et par une isométrie S jouant le rôle de t, telle que $1 - SS^* = 1 \otimes e$, avec e une projection de rang 1 dans $\mathbf{K}$. Comme $\delta_t \in C_r^*(\Gamma)$ se relève dans $\mathcal{D}$ en l'isométrie S, un calcul classique en K-théorie (voir p.ex. [129] 8.C.) montre que

$$\begin{aligned} \partial_1[\delta_t] &= [1 - S^*S] - [1 - SS^*] \\ &= -[1 \otimes e] \in K_0(C_r^*(A) \otimes \mathbf{K}) \end{aligned}$$

Par l'identification standard entre $K_0(C_r^*(A)\otimes\mathbf{K})$ et $K_0(C_r^*(A))$, $[1\otimes e]$ correspond à [1]. Cela prouve l'assertion 1.

On peut alors définir un homomorphisme de groupe $\widetilde{p} : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{Z}$ obtenu en envoyant t sur -1 et tous les autres générateurs sur 0 ($\widetilde{p}$ est bien définie car $\sigma_t(s) = 0$). On note θ^{ab}, $\widetilde{i}^{ab}$, $\widetilde{p}^{ab}$ les homomorphismes induits au niveau des groupes abélianisés par θ, $\widetilde{i}$, $\widetilde{p}$ respectivement (les groupes abélianisés sont écrits additivement). Rappelons que pour $g \in \widetilde{\Gamma}$ on note $\overline{g}$ l'image de g dans $\widetilde{\Gamma}^{ab}$.

Assertion 2 : La suite $A^{ab} \overset{Id-\theta^{ab}}{\to} \widetilde{H}^{ab} \overset{\widetilde{i}^{ab}}{\to} \widetilde{\Gamma}^{ab} \overset{\widetilde{p}^{ab}}{\to} \mathbb{Z} \to 0$ est exacte.

L'exactitude en $\mathbb{Z}$ est triviale. Comme $ker(\widetilde{p}^{ab})$ est le sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}^{ab}$ engendrée par $\overline{b}$, $\overline{c}$,..., l'exactitude en $\widetilde{\Gamma}^{ab}$ découle des relations

$$\widetilde{i}^{ab}(\overline{b_j}) = \overline{b}, i^{ab}(\overline{c_j}) = \overline{c}, \dots$$

Pour prouver l'exactitude en $\widetilde{H}^{ab}$, remarquons que $Id-\theta^{ab} : A^{ab} \to \widetilde{H}^{ab}$ est donnée par

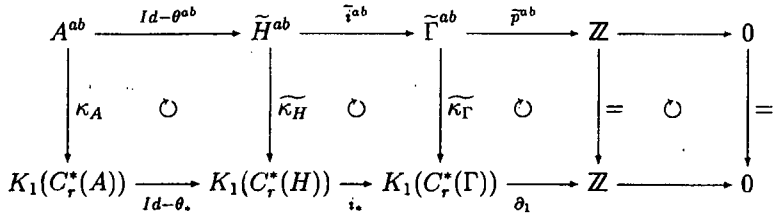
$$\begin{cases} \overline{b_i} \mapsto \overline{b_i} - \overline{b_{i+1}},\ \overline{c_i} \mapsto \overline{c_i} - \overline{c_{i+1}}, \dots & \text{si } \mu < m \\ \overline{c_i} \mapsto \overline{c_i} - \overline{c_{i+1}}, \dots & \text{si } \mu = m \end{cases}.$$

Rappelons que A^{ab} est le groupe abélien libre engendré par $\overline{b_\mu}, \dots, \overline{b_{m-1}}$, $\overline{c_i}, \dots$ si $\mu < m$ et par $\overline{c_i}$, $\overline{d_i}$, ... si $\mu = m$. Ecrivons $\widehat{H}^{ab}$ (resp. $\widehat{\Gamma}^{ab}$) le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}\langle \overline{b_i}, \overline{c_i}, \dots \rangle$ (resp. $\mathbb{Z}\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c}, \dots \rangle$) par le sous-groupe engendré par $\overline{s}$ (resp. par $\overline{s}$). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\langle \overline{b_i}, \overline{c_i}, \dots \rangle & \xrightarrow{\widehat{i^{ab}}} & \mathbb{Z}\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c}, \dots \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{H}^{ab} & \xrightarrow{\widetilde{i}^{ab}} & \widetilde{\Gamma}^{ab} \end{array} \qquad (*)$$

où le signe $\widehat{\ }$ désigne les applications écrites au niveau des groupes abéliens libres et les flèches verticales sont les applications quotient. Comme l'exactitude de la ligne supérieure est triviale en $\mathbb{Z}\langle \overline{b_i}, \overline{c_i}, \dots \rangle$, et que $\widehat{i^{ab}}(\overline{s}) = \overline{s}$, l'exactitude en $\widetilde{H}^{ab}$ résulte d'un simple "diagram

chasing". Cela prouve l'assertion 2.
Considérons alors le diagramme suivant :



Par l'assertion 2 les lignes sont exactes et par l'assertion 1 le diagramme commute. Par hypothèse d'induction κ_A et $\widetilde{\kappa_H}$ étant des isomorphismes, le lemme des cinq implique que $\widetilde{\kappa_\Gamma}$ est un isomorphisme. En substituant alors la ligne supérieure du précédent diagramme dans la suite exacte en K-théorie, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & K_0(C_r^*(H)) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C_r^*(\Gamma)) & \xrightarrow{\partial_0} & A^{ab} & \xrightarrow{Id-\theta_{ab}} & & & \\ & & & & & & \widetilde{H}^{ab} & \xrightarrow{\widetilde{i}^{ab}} & \widetilde{\Gamma}^{ab} & \xrightarrow{\widetilde{p}^{ab}} & \mathbb{Z} \to 0 \end{array}$$

Pour traiter K_0, on distingue quelques cas :

(a) $\overline{\check{s}} = 0$, alors $\overline{s} = 0$ par le diagramme $(*)$, d'où $Id - \theta^{ab}$ est injective, ce qui implique $\partial_0 = 0$, i.e. $i_* : K_0(C_r^*(H)) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ est un isomorphisme. Or $K_0(C_r^*(H)) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$ par hypothèse d'induction. Comme $i(\check{s}) = s$ et comme la copie de $\mathbb{Z}^n$ de $K_0(C_r^*(H))$ est engendrée par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{\check{s}^i})$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ par hypothèse d'induction, on obtient que la copie de $\mathbb{Z}^n$ de $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est engendré par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s^i})$, $(k = 0, \ldots, n-1)$.

(b) $\overline{\check{s}} \neq 0$ et $\overline{s} = 0$: dans ce cas le diagramme $(*)$ permet de voir que $im(\partial_0) = ker(Id - \theta^{ab}) \cong \mathbb{Z}$. D'où $K_0(C_r^*(\Gamma)) \cong K_0(C_r^*(H)) \oplus \mathbb{Z}$ et, comme par hypothèse d'induction $K_0(C_r^*(H)) \cong \mathbb{Z}^n$, on obtient $K_0(C_r^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$. Comme la copie de $\mathbb{Z}^n$ de $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est isomorphe à l'image de i_*, elle est engendrée par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s^i})$, $(k = 0, \ldots, n-1)$, pour la même raison qu'au point précédent.

(c) $\overline{\check{s}} \neq 0$ et $\overline{s} \neq 0$: le diagramme $(*)$ implique dans ce cas que $Id - \theta^{ab}$ est injective ; comme en (a), $i_* : K_0(C_r^*(H)) \to K_0(C_r^*(\Gamma))$ est donc

un isomorphisme. Par hypothèse d'induction $K_0(C_r^*(H)) \cong \mathbb{Z}^n$, d'où $K_0(C_r^*(\Gamma)) \cong \mathbb{Z}^n$ dont les générateurs sont $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s^i})$, $(k = 0, \ldots, n-1)$, toujours pour la même raison qu'au point (a).

Cela conclut la première partie de la preuve.

II - $\sigma_z(s) \neq 0 \ \forall z \in X$. Alors, avec $\alpha = \sigma_t(s)$, le premier cas s'applique à $G = \Gamma *_{<b=x^\alpha>} \langle x \rangle$. On a observé qu'en écrivant $G = \langle y, x, c, d, \ldots | s_1^n \rangle$, on a $\sigma_y(s_1) = \alpha \neq 0$. Cela implique $\overline{s_1} \neq 0$ et donc par le premier cas : $K_0(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}^n$ est engendré par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s^i})$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ et $\widetilde{\kappa_G} : \widetilde{G}^{ab} \to K_1(C_r^*(G))$ est un isomorphisme.

On utilisera les homomorphismes de groupes suivants :

$$\begin{array}{lcccccc} i_1 & : & \mathbb{Z} & \to & \Gamma & : & 1 \mapsto b \\ i_2 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} & : & 1 \mapsto \alpha \\ j_1 & : & \Gamma & \to & G & & \\ j_2 & : & \mathbb{Z} =< x > & \to & G & & \end{array}$$

Ces homomorphismes permettent d'écrire la suite exacte à 6 termes permettant de calculer la K-théorie d'un produit amalgamé (Lance [86], Natsume [99], Pimsner [106]) :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} & K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} & K_0(C_r^*(G)) \\ \uparrow{\scriptstyle \partial_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} \\ K_1(C_r^*(G)) & \xleftarrow{j_{1*}+j_{2*}} & K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) & \xleftarrow{(i_{1*},-i_{2*})} & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \end{array}$$

Les applications $(i_{1*}, -i_{2*})$ sont injectives. En effet on a :

$$\begin{array}{lccc} (i_{1*},-i_{2*}) : & K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[1] & \to & K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_0(C_r^*(\mathbb{Z})) \\ & [1] & \mapsto & ([1], -[1]) \\ (i_{1*},-i_{2*}) : & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[\delta_1] & \to & K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) \\ & [\delta_1] & \mapsto & ([\delta_b], -\alpha[\delta_1]) \end{array}$$

et l'injectivité de la seconde application découle de $\alpha \neq 0$. La suite exacte à 6 termes se scinde alors en deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} K_0(C_r^*(\Gamma)) \oplus \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} K_0(C_r^*(G)) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\delta_1] \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} K_1(C_r^*(\Gamma)) \oplus \mathbb{Z}[\delta_1] \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} K_1(C_r^*(G)) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $j_{1*} : K_0(C_r^*(\Gamma)) \to K_0(C_r^*(G))$ est un isomorphisme. Comme $j_1(s) = s_1$ et comme $K_0(C_r^*(G)) = \mathbb{Z}^n$ est engendré par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s_1^i})$, $(k = 0, \ldots, n-1)$, on conclut que $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^n$ est engendré par $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega^{ik}\delta_{s^i})$, $(k = 0, \ldots, n-1)$.

Assertion 3 : La suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\widetilde{i}_1^{ab},-\widetilde{i}_2^{ab})} \widetilde{\Gamma}^{ab} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j_1^{ab}+j_2^{ab}} \widetilde{G}^{ab} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Au niveau des groupes abélianisés $\begin{cases} j_1^{ab}(\overline{t}) = \overline{y} - \beta\overline{x} \\ j_1^{ab}(\overline{b}) = \alpha\overline{x} \\ j_1^{ab}(\overline{c}) = \overline{c} \end{cases}$ et $j_2^{ab}(1) = \overline{x}$.

L'assertion 3 se prouve de la même manière que l'assertion 2. L'exactitude en $\mathbb{Z}$ et $\widetilde{G}^{ab}$ est triviale ; pour prouver l'exactitude en $\widetilde{\Gamma}^{ab} \oplus \mathbb{Z}$, on écrit $\widetilde{\Gamma}^{ab} = \mathbb{Z}\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots \rangle / < \overline{s} >$; $\widetilde{G}^{ab} = \mathbb{Z}\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{c}, \ldots \rangle / < \overline{s_1} >$; et on relève les homomorphismes aux groupes abéliens libres :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\langle \overline{t}, \overline{b}, \overline{c} \ldots \rangle \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\widehat{j_1^{ab}}+\widehat{j_2^{ab}}} & \mathbb{Z}\langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{c}, \ldots \rangle \\ \nearrow \quad \searrow & & \\ \mathbb{Z} & & \\ \searrow \quad \nearrow & & \\ \widetilde{\Gamma^{ab}} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\widetilde{j}_1^{ab}+\widetilde{j}_2^{ab}} & \widetilde{G}^{ab} \end{array}$$

L'exactitude de la ligne supérieure n'est qu'un simple exercice et comme $\widehat{j_1^{ab}}(\overline{s}) = \overline{s_1}$, la ligne inférieure est alors exacte en $\widetilde{\Gamma}^{ab} \oplus \mathbb{Z}$. L'assertion 3 est ainsi prouvée.

Il reste finalement à considérer le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{(\widetilde{i}_1^{ab},-\widetilde{i}_2^{ab})} & \widetilde{\Gamma}^{ab}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow{\widetilde{j}_1^{ab}+\widetilde{j}_2^{ab}} & \widetilde{G}^{ab} & \longrightarrow & 0 \\ \| & \circlearrowright & \downarrow \kappa_{\mathbb{Z}} & \circlearrowright & \downarrow \widetilde{\kappa_\Gamma}\oplus\kappa_{\mathbb{Z}} & \circlearrowright & \downarrow \widetilde{\kappa_G} & \circlearrowright & \| \\ 0 & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{(i_{1*},-i_{2*})} & K_1(C_r^*(\Gamma))\oplus K_1(C_r^*(\mathbb{Z})) & \xrightarrow{j_{1*}+j_{2*}} & K_1(C_r^*(\Gamma)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $\widetilde{\kappa_G}$ and $\kappa_{\mathbb{Z}}$ sont des isomorphismes, le lemme des cinq permet de conclure que $\widetilde{\kappa_\Gamma}$ est un isomorphisme.

Ceci termine la preuve du théorème 4.0.1.

4.1.3 Remarques et corollaire

Dans le §7 de [7], Baum et Connes énoncent la conjecture suivante : pour un groupe Γ, considérons l'homomorphisme $\tau_* : K_0(C_r^*\Gamma) \to \mathbb{R}$ induit par la trace canonique sur $C_r^*\Gamma$; alors $\tau_*(K_0(C_r^*\Gamma))$ doit être le sous-groupe de $\mathbb{Q}$ engendré par les $\frac{1}{n}$, où n parcourt tous les ordres des éléments de torsion de Γ. En particulier si Γ est sans torsion, on devrait avoir $\tau_*(K_0(C_r^*\Gamma)) = \mathbb{Z}$: on retrouve la conjecture d'intégralité de la trace vue au chapitre 1. Le théorème 4.0.1 montre alors le résultat suivant qui implique immédiatement le corollaire 4.0.3 dans le cas "générique" :

Corollaire 4.1.3
Soit $\Gamma = \langle X | s^n \rangle$ un groupe à un relateur avec s n'étant pas une puissance dans $F(X)$, et $\bar{s} \neq 0$; alors $\tau_*(K_0(C_r^*\Gamma)) = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$. En particulier si $n = 1$, $C_r^*\Gamma$ n'a pas d'idempotent non trivial.

Remarques :

1) P.Julg a pu montrer directement que, si $\bar{s} = 0$, la trace canonique du générateur supplémentaire de $K_0(C_r^*(\Gamma))$ est nulle. Cela fournit donc une preuve directe de 4.1.3 et 4.0.3 (et en particulier une preuve de 4.0.3 qui ne dépend pas de la conjecture de Baum-Connes).

2) R.Roy a montré dans [115] que la conjecture de Baum-Connes sur les valeurs de $\tau_*(K_0(C_r^*(\Gamma)))$ est fausse : il existe un groupe Γ de présentation finie (mais forcément pas à un relateur) où tous les éléments non triviaux d'ordre fini sont d'ordre 3, avec $-\frac{1105}{9} \in \tau_*(K_0(C_r^*(\Gamma)))$...

4.2 Conjecture de Baum-Connes : Preuve de 4.0.2

4.2.1 Cas particulier

Lemme 4.2.1
Soit Γ un groupe agissant proprement sur un arbre orienté X, la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour Γ, i.e. pour toute C-algèbre F munie d'une action de Γ, la flèche d'assemblage $\mu_i^\Gamma : K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}, F) \to K_i(F \rtimes_r \Gamma)$ est un isomorphisme. (Ici $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}, F) = \varinjlim KK_i^\Gamma(C_0(Y), F)$, où la limite est prise sur l'ordonné filtrant des sous-ensembles Γ-compacts Y de $\underline{E\Gamma}$).*

⌜ Si on nomme $|X|$ la réalisation géométrique de X, une conséquence du §2 de [10] est qu'on peut choisir $|X|$ comme classifiant des actions propres : $\underline{E\Gamma} = |X|$. Soit A_X la C*-algèbre associée au complexe simplicial $|X|$, comme définie par Julg dans [65] et Kasparov-Skandalis dans [80] ; dans ce cas il existe alors un élément de "Dirac" $D \in KK^\Gamma(A_X, \mathbb{C})$ et un élément "dual-Dirac" $\eta \in KK^\Gamma(\mathbb{C}, A_X)$ tels que $D \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1_{A_X} \in KK^\Gamma(A_X, A_X)$ ([80], Theorem 4.10), et $\eta \otimes_{A_X} D = 1_{\mathbb{C}} \in KK^\Gamma(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ([80], §5.8. - la dernière égalité, découlant de résultats de [68] et [69], utilise le fait crucial que X est un arbre). On conclut alors en utilisant un résultat de Tu : les hypothèses de la proposition 5.25 de [122] sont satisfaites, donc μ_i^Γ est un isomorphisme. ⌟

4.2.2 Induction

Soit $\Gamma = \langle X | r \rangle$ un groupe à un relateur, avec $r = s^n$ où s n'est pas une puissance non-triviale dans $F(X)$. Pour prouver le théorème 4.0.2, on utilisera à nouveau l'induction sur la longueur $|s|$ de s.

Si $|s| = 0$ ou 1, alors Γ est soit un groupe libre, soit un produit libre d'un groupe cyclique fini avec un groupe libre. Dans les deux cas, Γ agit proprement sur un arbre et on conclut par le lemme 4.2.1.

Pour le cas général, on distingue à nouveau les deux cas :

1. Si un générateur t apparaît dans s avec somme des exposants nulle alors Γ est une extension HNN : $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$, où H est un groupe à un relateur avec une relation s plus courte et A est un groupe libre. Par hypothèse d'induction, la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour H et A. Par le théorème 1.1 de [103], la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour Γ.
2. Si le premier cas ne s'applique pas à Γ, celui-ci s'injecte dans un autre groupe à un relateur G auquel le premier cas s'applique. La conjecture de Baum-Connes à coefficients est alors vraie pour G et donc pour ses sous-groupes, en particulier pour Γ.

4.3 K-homologie : théorème 4.0.2 dans le cas sans torsion

Si Γ est un groupe sans torsion, toute action propre de Γ est libre et propre. L'espace universel pour les actions propres $\underline{E\Gamma}$ peut être alors choisi comme le revêtement universel $E\Gamma$ d'un espace classifiant $B\Gamma$. De plus comme l'action de Γ sur $E\Gamma$ est libre et propre on a $K_i^\Gamma(\underline{E\Gamma}) = K_i^\Gamma(E\Gamma) = K_i(B\Gamma)$ (où $K_i(B\Gamma)$ dénote la K-homologie à support compact de $B\Gamma$). On va calculer la K-homologie du classifiant d'un groupe à un relateur sans torsion en utilisant le lemme suivant suggéré par U.Suter.

Lemme 4.3.1
Soit X un CW-complexe fini de dimension 2, alors on a

$$\begin{aligned} K_0(X) &\cong H_0(X, \mathbb{Z}) \oplus H_2(X, \mathbb{Z}) \\ K_1(X) &\cong H_1(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Les isomorphismes sont induits par le caractère de Chern.

$\ulcorner$ Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer X connexe car dans le cas contraire on a $H_*(\coprod_i X_i; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_i H_*(X_i, \mathbb{Z})$ et $K_*(\coprod_i X_i) \cong \bigoplus_i K_*(X_i)$

Nommons A le 1-squelette de X, la paire (X, A) est un CW-complexe relatif et donc l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration. Comme dans notre cas on a les homéomorphismes $A \approx \bigvee_{i\in I} S^1_i$ et $X/A \approx \bigvee_{j\in J} S^2_j$, cela implique alors que $\tilde{H}_{ev}(A) = \tilde{K}_0(A) = 0$ et $\tilde{H}_{odd}(X/A) = \tilde{K}_1(X/A) = 0$. Pour les deux théories d'homologie $\mathbb{Z}/2$-graduées

$$K_*(X) = K_0(X) \oplus K_1(X) \text{ et } H_*(X;\mathbb{Z}) = H_{ev}(X;\mathbb{Z}) \oplus H_{odd}(X;\mathbb{Z}),$$

cela fournit les deux longues suites exactes suivantes :

$$0 = \tilde{H}_{ev}(A) \to \tilde{H}_{ev}(X) \to \tilde{H}_{ev}(X/A) \to$$

$$\to \tilde{H}_{odd}(A) \to \tilde{H}_{odd}(X) \to \tilde{H}_{odd}(X/A) = 0$$

où $\tilde{H}_i(X)$ dénote $\tilde{H}_i(X, \mathbb{Z})$ et

$$0 = \tilde{K}_0(A) \to \tilde{K}_0(X) \to \tilde{K}_0(X/A) \to \tilde{K}_1(A) \to \tilde{K}_1(X) \to \tilde{K}_1(X/A) = 0$$

Une des propriétés du caractère de Chern

$$ch : \tilde{K}_0(S^{2n}) \to H_{2n}(S^{2n}, \mathbb{Q})$$

est d'appliquer un générateur de $\tilde{K}_0(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$ sur un générateur de l'homologie entière $H_{2n}(S^{2n}, \mathbb{Z}) \subseteq H_{2n}(S^{2n}, \mathbb{Q})$ (cette dernière inclusion étant obtenue par l'homomorphisme des coefficients associé à $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$). Le caractère de Chern induit donc un isomorphisme

$$ch_{\mathbb{Z}} : \tilde{K}_0(S^{2n}) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} H_{2n}(S^{2n}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

La situation est analogue en dimension impaire pour les sphères S^{2n+1}. On peut alors lier les deux suites exactes ci-dessus :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tilde{K}_0(X) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(X/A) & \longrightarrow & \tilde{K}_1(A) & \longrightarrow & \tilde{K}_1(X) \longrightarrow 0 \\
 & & & & ch_{\mathbb{Z}}\downarrow\cong & & ch_{\mathbb{Z}}\downarrow\cong & & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{ev}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{ev}(X/A) & \longrightarrow & \tilde{H}_{odd}(A) & \longrightarrow & \tilde{H}_{odd}(X) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Par exactitude des suites on obtient les isomorphismes

$$\tilde{K}_0(X) \cong \tilde{H}_{ev}(X, \mathbb{Z}) \text{ et } \tilde{K}_1(X) \cong \tilde{H}_{odd}(X, \mathbb{Z}).$$

Enfin, comme X est de dimension 2 on a

$$\tilde{H}_{ev}(X,\mathbb{Z}) \cong H_2(X,\mathbb{Z}) \text{ et } \tilde{H}_{odd}(X,\mathbb{Z}) \cong H_1(X,\mathbb{Z}),$$

d'ou la conclusion désirée. ⌟

Lemme 4.3.2
Pour un groupe à un relateur sans torsion $\Gamma = \langle X|r\rangle$, les groupes $K_i(B\Gamma)$ et $K_i(C_r^*(\Gamma))$ sont abstraitement isomorphes (i=0,1).

⌜ Par un argument de limite directe, on peut supposer que X est fini. On utilise alors pour $B\Gamma$ le modèle dû à Lyndon [90], voir aussi [12], i.e. un bouquet $BF(X)$ de $card(X)$ cercles sur lesquels on attache en suivant r une unique 2-cellule σ d'intérieur homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Par le lemme 4.3.1 et des calculs d'homologie similaires à ceux de l'introduction de ce chapitre on obtient

$$K_0(B\Gamma) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } \overline{r} \neq 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } \overline{r} = 0 \end{cases}$$

$$K_1(B\Gamma) = \mathbb{Z}[X]/ < \overline{r} > \cong \Gamma^{ab}$$

On retrouve les résultats de K-théorie du théorème 4.0.1. ⌟

Dans le cas $\overline{r} = 0$, il est possible de décrire explicitement le second générateur de $K_0(B\Gamma) = \mathbb{Z}^2$. En effet, comme r est dans le sous-groupe des commutateurs de $F(X)$, on peut écrire r comme un produit de commutateurs $r = \prod_{i=1}^{g}[A_i, B_i]$ pour des A_i et B_i dans $F(X)$. Considérons alors le groupe de surface Γ_g dans sa présentation standard :

$$\Gamma_g = \left\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g | \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \right\rangle ;$$

c'est le groupe fondamental d'une surface de Riemann fermée Σ_g de genre $g \geqslant 1$. On a alors un homomorphisme $f : \Gamma_g \to \Gamma$, $a_i \mapsto A_i$, $b_j \mapsto B_j$, $(1 \leqslant i, j \leqslant g)$ associé à une application continue $f : \Sigma_g \to B\Gamma$ (obtenue en regardant Σ_g comme un $2g$-gone avec des arêtes identifiées de manière adéquate).

Remarque : L'homomorphisme $\Gamma_g \to \Gamma$ n'est en général pas injectif; par exemple $\Gamma = \langle a, b, c | [a, b][a, c] \rangle$ est le quotient de Γ_2 par le sous-groupe normal engendré par $a_1^{-1}a_2$.

Selon la description de $B\Gamma$ donnée ci-dessus, il est clair que $f : \Sigma_g \to B\Gamma$ est de degré 1, i.e. f induit un isomorphisme au niveau de H_2. En d'autres termes, l'application $f : \Sigma_g \to B\Gamma$ induit un isomorphisme $f_* : K_0(\Sigma_g) \to K_0(B\Gamma)$.

Par simple identification des générateurs, on obtient alors la conjecture de Baum-Connes pour les groupes à un relateur sans torsion "génériques" :

Proposition 4.3.3
Soit $\Gamma = \langle X | r \rangle$ un groupe à un relateur sans torsion,

a) Le triangle d'isomorphismes suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_1(B\Gamma) & \xrightarrow{\mu_1^\Gamma} & K_1(C_r^*(\Gamma)) \\ & {\scriptstyle \beta_t} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle \kappa_\Gamma} & \\ & \Gamma^{ab} & \end{array}$$

b) Si $\bar{r} \neq 0$, alors μ_0^Γ est un isomorphisme.

a) On utilise un résultat de Natsume (théorème 4.4 dans [100]) : si un groupe sans torsion G est tel que $H_{2n+1}(G, \mathbb{Q}) = 0$ pour tous les $n \geqslant 1$, alors μ_1^Γ est rationnellement injectif. Ce résultat s'applique ici puisque Γ a une dimension homologique au plus 2. D'autre part, κ_Γ est un isomorphisme par le théorème 4.0.1, μ_1^Γ est donc surjective. De plus, par le lemme 4.3.2, les groupes $K_1(B\Gamma)$ et $K_1(C_r^*(\Gamma))$ sont abstraitement isomorphes à Γ^{ab} qui est somme directe d'un groupe abélien libre et d'un groupe cyclique fini. Un tel homomorphisme $\Gamma^{ab} \to \Gamma^{ab}$ qui est simultanément surjectif et rationnellement injectif doit être un isomorphisme, donc μ_1^Γ est bien un isomorphisme.

b) Par le théorème 4.0.1, $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}$ est engendré par la classe $[1]$ de l'unité, alors que par le lemme 4.3.2 et sa preuve, $K_0(B\Gamma) = \mathbb{Z}$ est engendré par le choix d'un point base x_0 (ou alternativement par le

caractère $\chi : C(B\Gamma) \to \mathbb{C}$ d'évaluation en x_0). Il est facile de vérifier que $\mu_0^\Gamma[\chi] = [1]$ (voir p.ex. l'exemple 1 dans [128]). ⌟

Remarque : Dans le cas $\overline{r} = 0$, une description du second générateur de $K_0(C_r^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^2$ en terme de $K_2^{alg}(C_r^*(\Gamma))$ a été donnée par P.Julg ; ce dernier pense que cela devrait permettre de montrer, dans ce cas également, que μ_0^Γ est un isomorphisme.

4.4 Remarques finales

1. Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur sans torsion avec $\overline{r} = 0$. Comme auparavant, écrivons r comme un produit de g commutateurs de $F(X)$ et considérons l'homomorphisme associé $f : \Gamma_g \to \Gamma$. Au niveau du groupe K_0 des C*-algèbres maximales, l'homomorphisme induit $f_* : K_0(C^*(\Gamma_g)) \to K_0(C^*(\Gamma))$ est un isomorphisme. En effet, soit $\overline{\mu_0}^\Gamma : K_0(B\Gamma) \to K_0(C^*(\Gamma))$ l'application de Baum-Connes définie au niveau de la C*-algèbre maximale, elle est naturelle pour n'importe quel homomorphisme de groupe (théorème 1 de [128]). On a alors le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_0(\Sigma_g) & \xrightarrow{f_*} & K_0(B\Gamma) \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\mu_0}^{\Gamma_g}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mu_0}^{\Gamma}} \\ K_0(C^*(\Gamma_g)) & \xrightarrow{f_*} & K_0(C^*(\Gamma)) \end{array}$$

Comme la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme ainsi que les deux flèches verticales par les théorème 4.0.2 et 5.2.1. On obtient ainsi l'isomorphisme cherché.

Pour les groupes de surfaces Γ_g, la conjecture de Baum-Connes a été obtenue par des méthodes complètement différentes par Kasparov [77] : pour $g \geqslant 2$, Γ_g est un réseau cocompact de $G = PSL_2(\mathbb{R})$, et Kasparov obtient le résultat en utilisant de la KK-théorie G-équivariante.

Terminons par remarquer que si on parvenait à montrer directement

que $f_* : K_0(C^*(\Gamma_g)) \to K_0(C^*(\Gamma))$ est un isomorphisme, cela donnerait une preuve de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes à un relateur sans torsion totalement indépendante des résultats de [103].

2. Soit $\Gamma = \langle X|r\rangle$ un groupe à un relateur sans torsion; la présentation donnée induit un $*$-homomorphisme surjectif $C^*(F(X)) \to C^*(\Gamma)$ dont on note le noyau par I. La suite exacte à 6 termes en K-théorie associée à la suite exacte courte

$$0 \to I \to C^*(F(X)) \to C^*(\Gamma) \to 0$$

permet de déterminer la K-théorie de I :

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{i_*} & K_0(C^*(F(X))) & \xrightarrow{p_*} & K_0(C^*(\Gamma)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(C^*(\Gamma)) & \xleftarrow{p_*} & K_1(C^*(F(X))) & \xleftarrow{i_*} & K_1(I) \end{array}$$

Par les théorèmes 4.0.1 et 5.2.1, p_* est un monomorphisme pour K_0 et un épimorphisme pour K_1, ce qui démontre immédiatement que $K_0(I) = 0$. Dans le cas $\overline{r} \neq 0$, p_* est même un isomorphisme pour K_0, et avec les identifications $K_1(C^*(\Gamma)) = \Gamma^{ab} = F(X)^{ab}/ < \overline{r} >$ et $K_1(C^*(F(X))) = F(X)^{ab}$, on obtient que $K_1(I) \cong \mathbb{Z}$. Dans le cas $\overline{r} = 0$, p_* est cette fois un isomorphisme pour K_1 et on a une suite exacte courte $0 \to K_0(C^*(F(X))) = \mathbb{Z}[1] \to K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^2 \to K_1(I) \to 0$ et comme $[1]$ est un élément primitif dans $K_0(C^*(\Gamma)) = \mathbb{Z}^2$, on a également $K_1(I) \cong \mathbb{Z}$, mais pour des raisons différentes du premier cas.

Si on considère r comme un unitaire de $C^*(F(X))$, comme on a $K_1(I) = K_1(I^+)$ (où I^+ est l'unitalisation de I), r définit une classe $[r]$ de $K_1(I)$. Dans le cas $\overline{r} \neq 0$, le raisonnement ci-dessus montre que $[r]$ est un générateur de $K_1(I) = \mathbb{Z}$. Ce résultat devrait également être vrai pour $\overline{r} = 0$, mais aucune démonstration n'a pu encore être apportée.

3. Soit B_n le groupe de tresses à n brins; à la page 16 de [9], Baum et Connes conjecturent que $K_0(C_r^*(B_n)) = \mathbb{Z} = K_1(C_r^*(B_n))$ (éventuel-

lement à torsion près). Ceci est trivial pour $n = 2$ puisque $B_2 = \mathbb{Z}$. Pour $n = 3$, cela découle du théorème 4.0.1 puisque

$$B_3 = \langle a, b | abab^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$$

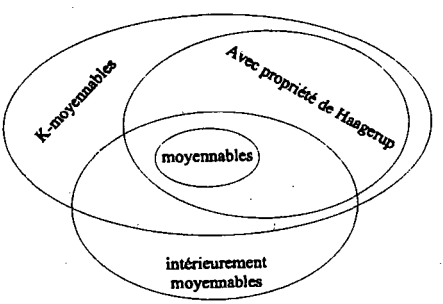
4. Si $\mathbb{C}\Gamma$ dénote l'algèbre de groupe de Γ un groupe à un relateur sans torsion, comme $C_r^*(\Gamma)$ est une complétion de $\mathbb{C}\Gamma$, la conjecture de Kaplansky-Kadison pour $C_r^*(\Gamma)$ implique la conjecture classique des idempotents pour $\mathbb{C}\Gamma$. Cependant, de plus forts résultats sont valables pour $\mathbb{C}\Gamma$; ainsi l'algèbre de groupe n'a pas de diviseur de zéro (voir [88]).

Chapitre 5

Formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur

Introduction

Le propos de ce chapitre est d'étudier diverses formes faibles de moyennabilités (K-moyennabilité, propriété de Haagerup, moyennabilité intérieure) des groupes à un relateur, plus précisément de situer la famille de ces groupes dans le paysage suivant :



La moyennabilité au sens classique des groupes à un relateur a été étudiée dans [33] ; les deux auteurs y exhibent une liste exhaustive de tous les groupes à un relateur moyennables et fournissent un algorithme permettant de déterminer si une présentation à un relateur définit un groupe de cette liste.

Rappelons en outre, que par le Freiheitssatz de Magnus (1.4.1), tous les groupes à un relateur avec au moins 3 générateurs contiennent un groupe libre sur 2 générateurs et donc ne sont pas moyennables.

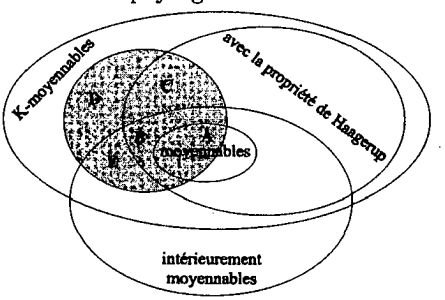
Récemment la conjecture de Baum-Connes a été démontrée par N.Higson et G.G. Kasparov [66] pour la classe des groupes discrets ayant la propriété de Haagerup. La classe des groupes ayant la propriété de Haagerup étant relativement grande (groupes libres, groupes moyennables, groupes de surface, groupes de Coxeter,... : voir [64] pour plus d'exemples) et la conjecture étant démontrée au chapitre précédent pour la classe des groupes à un relateur, il était naturel de se demander si la famille des groupes à un relateur était une sous-classe des groupes ayant la propriété de Haagerup. On observe que l'intersection des deux classes est clairement non-vide, puisque l'on y trouve entre autres les groupes à un relateur moyennables ainsi que les groupes libres. Au premier paragraphe, seule une réponse partielle à la question sera apportée : les groupes à un relateur à centre non-trivial ont la propriété de Haagerup. De la preuve de ce résultat, on obtient aussi le corollaire suivant : les groupes à un relateur non-moyennables à centre non-trivial sont à croissance exponentielle uniforme. On donnera également une preuve directe et purement algébrique de la propriété de Haagerup des groupes de surface.

J.-L. Tu a démontré que les groupes ayant la propriété de Haagerup sont aussi K-moyennables [124]. Le second paragraphe montrera que tous les groupes à un relateur sont K-moyennables en utilisant une démonstration par induction similaire à celle du Freiheitssatz comme dans le chapitre précédent.

Il est clair que n'importe quel groupe à centre non-trivial est intérieurement moyennable. Dans ce contexte, on conjecture que tous les groupes à un relateur non-moyennables à centre trivial ne sont pas intérieurement moyennables; cependant ce résultat ne sera démontré que pour les groupes à un relateur à au moins trois générateurs, et pour les groupes non-Hopfiens de Baumslag-Solitar. Les techniques employées étant celles de Bédos et de la Harpe dans [16], techniques déjà utilisée par le second de ces auteurs dans [42] pour étudier la simplicité de la C*-algèbre réduite, on obtient aussi le

résultat suivant : la C*-algèbre réduite associée à un groupe à un relateur avec au moins 3 générateurs est simple à trace unique. Les résultats sur les groupes à un relateur à au moins 3 générateurs ont déjà été observés par Bédos et de la Harpe, sans preuve détaillée directe.

Ces divers résultats permettent de situer plus précisément la famille des groupes à un relateur dans le paysage des formes faibles de moyennabilité :



avec $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \in \mathbf{A}$
$\langle a, b | ab^2a^{-1}b^{-2} \rangle \in \mathbf{B}$
$\langle a, b, c | c \rangle \cong \mathbf{F}_2 \in \mathbf{C}$
$\langle a, b, c | ab^3ca^5bc^2 \rangle \in \mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$

Le groupe $\langle a, b | ab^2a^{-1}b^{-2} \rangle$ est à centre non-trivial et est non-moyennable. Le groupe $\langle a, b, c | ab^3ca^5bc^2 \rangle$ comme tous les groupes à au moins trois générateurs est soit dans $\mathbf{C}$ soit dans $\mathbf{D}$. L'étude ci-dessous ne permet pas de résoudre l'incertitude concernant $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$, cependant le sentiment laissé par cette analyse est que si une conjecture devait être énoncée, elle serait du type : $\mathbf{D} \neq \emptyset$ et $\mathbf{E} = \emptyset$.

5.1 Propriété de Haagerup

5.1.1 Définitions et observations pour les groupes à un relateur

Parmi les nombreuses définitions équivalentes de la propriété de Haagerup nous utilisons la suivante. Un groupe discret G a la propriété de Haagerup

s'il satisfait la condition suivante :

> Il existe une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de type positif sur G, normalisées (i.e. $\phi_n(e) = 1$), tendant vers 0 à l'infini de G, et convergeant ponctuellement vers la fonction constante 1.

La classe des groupes ayant la propriété de Haagerup est remarquablement large comme les exemples suivants le montrent.

Exemples : Les groupes suivants ont la propriété de Haagerup.

1. Les groupes libres [53] ou plus généralement les produits libres de groupes ayant la propriété de Haagerup [63] ;
2. les groupes moyennables [21] et [63] ;
3. les sous-groupes discrets des groupes de Lie $SO(n,1)$ et $SU(m,1)$ [51] et [43] ;
4. les groupes de Coxeter [31] et [43] ;
5. les groupes agissant proprement isométriquement sur un complexe cubique CAT(0) [102].

Par contre un groupe infini ayant la propriété (T) de Kazhdan ne peut avoir la propriété de Haagerup : c'est le cas de $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$ (voir [43]). Les deux lemmes suivants [64] sont des critères pour détecter la propriété de Haagerup.

Lemme 5.1.1
Si N est réunion croissante de sous-groupes ayant la propriété de Haagerup, alors N a la propriété de Haagerup.

Lemme 5.1.2
Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G ; si N a la propriété de Haagerup et si le quotient G/N est moyennable, alors G a la propriété de Haagerup.

Comme souligné dans l'introduction, il serait intéressant de montrer ou d'infirmer la propriété de Haagerup des groupes à un relateur.

La première observation à faire est que l'on peut se restreindre au cas des groupes à un relateur et deux générateurs. Soit un groupe à un relateur

$G = \langle x_1, \ldots, x_n | R(x_1, \ldots, x_m) \rangle$, on peut toujours supposer $m = n$ car sinon G est un produit libre d'un tel groupe et d'un groupe libre et, grâce à l'exemple 1), on se ramène au cas précité. Enfin, comme un groupe à un relateur $G = \langle x_1, \ldots, x_n | R(x_1, \ldots, x_n) \rangle$ s'injecte dans un groupe à un relateur et deux générateurs (Corollaire 4.10.1. de [93]) et comme la propriété de Haagerup est héritée par les sous-groupes, on a la restriction désirée.

5.1.2 Quelques rappels sur les groupes à un relateur et deux générateurs

Soit donc $G = \langle a, b | R(a, b) \rangle$ un groupe à un relateur et deux générateurs, on sait que l'on peut toujours supposer (Lemme 11.8, chapitre V de [91]) que la somme des exposants des occurrences de a dans R est nulle (notation $\sigma_a(R) = 0$). Le sous-groupe normal N engendré par b possède alors la structure suivante (preuve du Freiheitssatz de [93]) :

$$N = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k, \qquad K_k = N_{-k} \underset{J_{-k}}{*} N_{-k+1} \underset{J_{-k+1}}{*} \cdots \underset{J_{k-2}}{*} N_{k-1} \underset{J_{k-1}}{*} N_k$$

où $N_k = \langle b_{\lambda+k}, \ldots, b_{\mu+k} | R_k \rangle$, $J_k = \langle b_{\lambda+k+1}, \ldots, b_{\mu+k} \rangle$, λ et μ étant respectivement les indices minimum et maximum apparaissant dans R_0 obtenu en réécrivant R en termes des $b_i = a^i b a^{-i}$ (R_k est alors simplement $a^k R a^{-k}$ réécrit avec $b_{\lambda+k}, \ldots, b_{\mu+k}$). On notera ψ_{k-1} et ϕ_k les inclusions de J_{k-1} et J_k dans N_k.

Dans [33], les auteurs, motivés par l'étude du problème de la croissance des groupes à un relateur, distinguent trois classes de présentations de groupes à un relateur et deux générateurs. Leur approche utilise le formalisme des extensions HNN que l'on traduira ici dans le langage de la théorie de Magnus :

I) J_0 et J_{-1} sont deux sous-groupes propres de N_0 ($J_{-1} \neq N_0 \neq J_0$) ;

II) Seul un des deux sous-groupes J_0 et J_{-1} de N_0 est propre ($J_{-1} \neq N_0 = J_0$ ou $J_{-1} = N_0 \neq J_0$) ;

III) J_0 et J_{-1} coïncident avec N_0 ($J_{-1} = N_0 = J_0$).

Notons que le lemme 2.1 de [33] donne une méthode pour distinguer ces cas sur la présentation du groupe.

Dans le deuxième cas, N est une réunion croissante de groupes libres de même rang $(\mu - \lambda + 1)$. Le troisième cas correspond à la situation où N est libre sur $\mu - \lambda + 1$ générateurs. Remarquons que ce dernier cas se produit si et seulement si N est de génération finie. En effet si N est de génération finie, cela implique qu'il existe deux entiers k_0 et k_1 pour lesquels on a $N_{k_0} = \psi_{k_0-1}(J_{k_0-1})$ et $N_{k_1} = \phi_{k_1}(J_{k_1})$. Mais par construction on obtient donc que $\psi_{k-1}(J_{k-1}) = N_k = \phi_k(J_k)$ pour tout k, c'est-à-dire $N = N_k$ pour tout k, N est donc libre sur $b_\lambda, \ldots, b_{\mu-1}$. L'autre sens de l'implication est trivial.

5.1.3 Propriété de Haagerup des groupes à un relateur à centre non-trivial

Lemme 5.1.3
Un groupe à un relateur et 2 générateurs possédant une présentation appartenant à la classe II ou III a la propriété de Haagerup.

⌜ Sous nos hypothèses on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

avec N ayant la propriété de Haagerup (par l'exemple 1) et le lemme 5.1.1 dans le second cas) ; $\mathbb{Z}$ étant moyennable, on conclut par le lemme 5.1.2. ⌟

On va montrer que les groupes à un relateur, à centre non-trivial, ont une présentation appartenant à la classe III (i.e. N est finiment engendré).

Rappelons tout d'abord les résultats de Murasugi [98] sur le centre d'un groupe à un relateur G : si G possède plus de deux générateurs, alors son centre est trivial ; si d'autre part G a un centre $Z(G)$ non-trivial, alors soit $Z(G) = G = \mathbf{Z}^2$ soit $Z(G)$ est cyclique infini.

Proposition 5.1.4

Quitte à permuter les rôles des deux générateurs, un groupe à un relateur et à centre non-trivial possède une présentation de type III.

⌜ Eliminons tout d'abord le cas où le groupe est abélien, car les groupes abéliens sont moyennables et donc ont la propriété de Haagerup. Soit donc $G = \langle a, b | R(a,b) \rangle$ non-abélien, à centre non-trivial. Comme $Z(G)$ est cyclique infini, notons z un générateur, distinguons alors deux cas :

$z \notin N$: En particulier $Z(G) \cap N = \{1\}$ car $G/N \cong \mathbb{Z}$. Comme $z \notin N$, on a $z = na^r$ avec $n \in N$ et $r \neq 0$. Comme

$$nan^{-1}a^{-1} = (na^r)a^{1-r}n^{-1}a^{-1} = a^{1-r}n^{-1}(na^r)a^{-1} = 1,$$

les éléments a et n commutent et donc $z^p = n^p a^{rp}$. On a alors les égalités : $n^p a n^{-p} a^{-1} = 1$ et $n^p a^{rp} b a^{-rp} n^{-p} b^{-1} = 1$ $\forall p \in \mathbb{Z}$. Ce qui signifie dans N : $n_0^p n_1^{-p} = 1$ et $n_0^p b_{rp} n_0^{-p} b_0^{-1} = 1$ ou encore, pour n'importe quel entier t, $n_t^p n_{t+1}^{-p} = 1$ et $n_t^p b_{t+rp} n_t^{-p} b_t^{-1} = 1$ où n_0 représente n réécrit en termes des b_i, n_k en termes des b_{i+k}. Soient alors β et γ les indices minimum et maximum des occurrences des b_i dans n_0, prenons un entier p tel que $-rp < \beta$ et $rp > \gamma$. Les relations ci-dessus nous prouvent alors que, pour $|i| \geqslant rp$, les b_i sont des mots en les $b_{-rp+1}, \ldots, b_{rp-1}$. N est donc finiment engendré.

$z \in N$: Comme $Z(G) \subseteq Z(N) = \cap_{k \in \mathbb{Z}} [Z(N_k) \cap \phi_k(J_k)]$ (voir [84]) et comme $J_k \cong \mathbf{F}_{\mu-\lambda}$, on en tire que $J_k \cong \mathbb{Z}$ $\forall k$ et $\mu = \lambda + 1$. On a alors $J_{-\lambda-1} =< b_0 >$, il existe donc un entier m tel que $z = \phi_{-\lambda-1}(b_0^m)$, d'où la relation $1 = aza^{-1}z^{-1} = ab_0^m a^{-1} b_0^{-m} = b_1^m b_0^{-m}$, c'est-à-dire $[a, b^m] = 1$ dans G. Cette observation montre qu'on a aussi $\sigma_b(R) = 0$; en permutant alors les rôles de a et b, on remarque que le sous groupe normal engendré par a est finiment engendré (par $a_0, \ldots, a_{m-1}$). ⌟

En combinant le lemme et la proposition précédente on obtient :

Corollaire 5.1.5

Les groupes à un relateur, à centre non-trivial ont la propriété de Haagerup.

En appliquant la proposition 2.7 de [33] on a également :

Corollaire 5.1.6

Les groupes à un relateur non-abéliens, à centre non-trivial sont à croissance exponentielle uniforme .

5.1.4 Propriété de Haagerup des groupes de surface

Dans [64], les trois auteurs énoncent un théorème combinatoire (théorème 11) impliquant la propriété de Haagerup des groupes de surface (résultat original dans [51]). Il est cependant possible de donner une preuve plus directe de ce résultat comme corollaire de la proposition suivante :

Proposition 5.1.7

Soit $G = \langle a, b, c, d, ... | R \rangle$ un groupe à un relateur de rang (nombre de générateurs) n, avec une relation du type $R = a^{\pm l} b^{\epsilon_1} a^{\mp l} b^{\epsilon_2} w(c, d, ...)$ avec $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $\epsilon_i = \pm 1$. Alors le sous groupe normal N engendré par b, c, d,... est libre de rang infini et on a la suite exacte :

$$1 \to \mathbf{F}_\infty \to G \xrightarrow{\sigma_a} \mathbb{Z} \to 1.$$

En particulier G a la propriété de Haagerup.

⌜ Avec les notations du paragraphe 5.1.2, comme b_λ et b_μ n'apparaissent qu'une seule fois dans R_0, les groupes N_k sont libres de rang $l + n - 2$. Il est facile de voir que $N_k *_{J_k} N_{k+1}$ est libre de rang $l + 2(n-2)$ et plus généralement que K_k est libre de rang $l + (2k+1)(n-2)$. Le sous-groupe $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k$ est donc libre de rang infini. La propriété de Haagerup résulte des lemmes 5.1.1 et 5.1.2. ⌟

Corollaire 5.1.8

Les groupes de surfaces ont la propriété de Haagerup.

⌜ Pour une surface orientable, la présentation classique du groupe est du type de la proposition précédente, dans le cas d'une surface non-orientable on peut s'y ramener par un simple changement de système de générateurs ($< a_1, ..., a_n | \prod_{i=1}^{n} a_i^2 > \cong < b_1, ..., b_n | b_1 b_2 b_1^{-1} b_2 \prod_{i=3}^{n} b_i^2 >$, l'isomorphisme étant donné par $a_i \mapsto b_i$ pour $i \neq 2$ et $a_2 \mapsto b_1^{-1} b_2$). ⌟

5.2 K-moyennabilité

Rappelons que la C*-algèbre maximale $C^*(\Gamma)$ est la C*-algèbre engendrée par la représentation universelle de Γ. Le groupe Γ est moyennable si et seulement si $\lambda_\Gamma : C^*(\Gamma) \to C_r^*(\Gamma)$ est un $*$-isomorphisme. D'après Cuntz, [41], un groupe discret Γ est dit K-moyennable si l'application $\lambda_\Gamma^* : K^0(C_r^*(\Gamma)) \to K^0(C^*(\Gamma))$ est un isomorphisme en K-homologie. Si Γ est K-moyennable, le théorème 2.1 de [41] implique que pour tout C*-système dynamique (A, Γ, α), l'application canonique $\lambda_{A,\Gamma} : A \rtimes_\alpha \Gamma \to A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma$ du produit croisé maximal dans le produit croisé réduit induit un isomorphisme en K-théorie : c'est-à-dire pour $i = 0, 1$, le morphisme $(\lambda_{A,\Gamma})_* : K_i(A \rtimes_\alpha \Gamma) \to K_i(A \rtimes_{\alpha,r} \Gamma)$ est un isomorphisme. Les groupes à un relateur satisfont cette propriété :

Théorème 5.2.1
Les groupes à un relateur sont K-moyennables.

La preuve suivra le principe d'induction sur la longueur de la relation utilisé dans le chapitre précédent.

Si un seul générateur reste dans la relation r alors Γ est soit un groupe libre soit un produit libre d'un groupe libre avec un groupe cyclique fini, donc Γ est K-moyennable par les résultats de Cuntz [41]. Pour un $|r|$ quelconque, on considère les deux cas habituels :

1. $\sigma_t(r) = 0$ pour un certain $t \in X$, donc $\Gamma = HNN(H, A, \theta)$, où H est un groupe à un relateur avec une relation plus courte que r. Par la théorie de Bass-Serre pour les extensions HNN [116] (voir le paragraphe sur la moyennabilité intérieure pour tous les détails à ce sujet), Γ admet une action sur un arbre, transitive sur les sommets et les arêtes, avec des stabilisateurs d'arêtes conjugués à H et des stabilisateurs d'arêtes conjugués à A. Par l'hypothèse d'induction H et A sont K-moyennables, le résultat suivant de Pimsner ([106]) s'applique alors : un groupe agissant sur un arbre avec stabilisateurs K-moyennables est K-moyennable.
2. $\sigma_x(r) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, Γ se plonge dans un groupe à un relateur G auquel le premier cas s'applique, ce qui prouve la

K-moyennabilité de G. Comme la K-moyennabilité est héritée par passage à un sous-groupe ([41], 2.4), on obtient la conclusion désirée. ⌟

5.3 Moyennabilité intérieure

La notion de moyennabilité intérieure, introduite par E. Effros [47] dans un contexte d'algèbres d'opérateurs, est une variante de celle de moyennabilité : on regarde l'action d'un groupe G sur lui-même par conjugaison plutôt que par multiplication à gauche. Plus précisément, un groupe G est *intérieurement moyennable* s'il existe une application $\mu : \mathcal{P}(G \setminus \{1\}) \to [0,1]$ définie sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de $G \setminus \{1\}$ telle que

$\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additivité finie)
$\mu(gAg^{-1}) = \mu(A)$ (invariance par conjugaison)
$\mu(G \setminus \{1\}) = 1$ (normalisation)

pour tout $A, B \subseteq G \setminus \{1\}$ et $g \in G$.

La proposition cruciale pour l'étude de la (non-)moyennabilité intérieure a été obtenue par Bédos et de la Harpe dans [16] (proposition 7) :

Proposition 5.3.1
Soit Ω un espace topologique séparé infini et Γ un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de Ω contenant deux homéomorphismes hyperboliques transverses. S'il existe une application Γ-équivariante $\delta : \Gamma \setminus \{e\} \longrightarrow \Omega$ (action de Γ sur lui-même par conjugaison), alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.

La notion d'éléments hyperboliques transverses étant cruciale, il est bon de rappeler quelques définitions :

Définition 5.3.1

- *Un homéomorphisme ϕ d'un espace topologique séparé Ω est dit hyperbolique s'il existe deux points fixes distincts s_ϕ et r_ϕ de ϕ dans Ω avec les propriétés suivantes : pour tout voisinage S de s_ϕ et pour tout voisinage R de r_ϕ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^n(\Omega \setminus S) \subset R \; \forall n \geqslant n_0$.*

- *s_ϕ est appelé la source de ϕ et r_ϕ son but. Ce sont les seuls points fixes de ϕ.*
- *Deux homéomorphismes hyperboliques ϕ et ψ sont dits transverses si* $\{s_\phi, r_\phi\} \cap \{s_\psi, r_\psi\} = \emptyset$

L'espace Ω utilisé pour l'étude de la moyennabilité intérieure des groupes à un relateur sera l'arbre de groupe associé à une extension HNN et son bord. Pour se familiariser avec ces constructions classiques de Serre ([116]) le sous-paragraphe suivant sera consacré aux arbres associés aux produits libres, produits amalgamés et extension HNN. Outre les rappels de [116], les points fixes s_ϕ et r_ϕ de chaque élément hyperbolique seront identifiés explicitement.

5.3.1 Eléments hyperboliques

Les notations de [116] seront reprises afin que le lecteur intéressé puisse aisément consulter le premier chapitre de ce livre lorsqu'il le désirera, seuls les éléments essentiels liés au problème des groupes à un relateur étant repris ici.

Dans la suite X désignera toujours l'arbre sur lequel le groupe opérera sans inversion et Y la réunion de X et de son bord (espace des bouts) défini par :

Définition 5.3.2
Soit P un sommet de X ; T_P désignera l'ensemble des chemins infinis sans aller-retour d'origine P, muni de la topologie donnée par la base d'ouverts $\mathcal{B} = \{$chemins d'origine P commençant par un segment fixé $U \mid U$ segment de longueur finie d'origine $P\}$. C'est un exercice de montrer que T_P est indépendant (à homéomorphisme canonique près) du sommet P choisi. On désignera donc par $T = \partial X$ l'espace des bouts de X.

Avec cette définition si on convient d'appeler un droit chemin d une chaîne doublement infinie de X, celle-ci définira deux éléments s et r de $T = \partial X$.

Muni de ces diverses notions et notations on est alors en mesure d'énoncer la proposition cruciale pour la recherche d'éléments hyperboliques dans les groupes agissant sur des arbres (proposition 25 de [116]) :

Proposition 5.3.2

Soit ϕ un automorphisme de l'arbre X, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) ϕ opère sans point fixe.

(b) Il existe un droit chemin d_ϕ de X stable par ϕ sur lequel ϕ induit une translation d'amplitude non-nulle et de direction $s_\phi \longrightarrow r_\phi$.

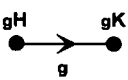
Si on étend l'automorphisme ϕ à la réunion Y de l'arbre et de son bord, cette proposition démontre que les automorphismes de Y sont soit elliptiques (un ou plusieurs points fixes dans X) soit hyperboliques (pas de point fixe dans X et deux points fixes dans ∂X).

Cette proposition étant un théorème d'existence, on va maintenant s'attacher à identifier les éléments hyperboliques ainsi que leurs sources et buts.

Produits libres

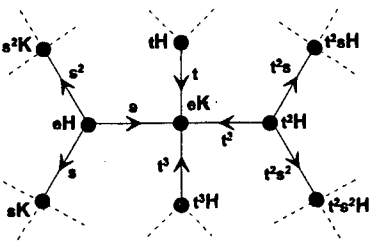
Soit $G = H * K$ le produit libre de deux groupes non-triviaux ; G agit sans inversion sur un arbre X défini par :

$Som(X) = G/H \amalg G/K$, $Ar(X) = G$, orientation de $g \in G$ donnée par



Le degré des sommets est égal à $|H|$ (resp. $|K|$) pour les sommets de type gH (resp. gK). L'espace des bouts est infini dès que K ou H est d'ordre supérieur ou égal à 3.

Exemple : $G = H * K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = < e, s, s^2 > * < e, t, t^2, t^3 >$



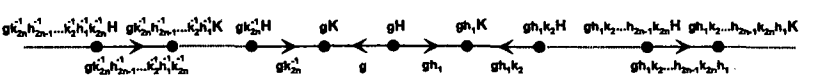
G agit sur X par translation à gauche. Par la proposition 5.3.2 on sait que chaque $\gamma \in \Gamma$ aura des points fixes soit dans X soit dans ∂X. On peut énoncer simplement un algorithme de détermination de ces points fixes :

Lemme 5.3.3 (Algorithme de recherche des points fixes de $\gamma \neq e$) *Notons $\tilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$ l'écriture cycliquement réduite de γ, que l'on prendra toujours de la forme $h_1k_2h_3k_4\cdots h_{2n-1}k_{2n}$, on a les alternatives :*

i) $\tilde{\gamma} \in H$ alors γ est elliptique et a un seul point fixe gH

ii) $\tilde{\gamma} \in K$ alors γ est elliptique et a un seul point fixe gK

iii) $\tilde{\gamma} = h_1k_2h_3k_4...h_{2n-1}k_{2n} \notin H$ ou K, $h_1 \neq e \neq k_{2n}$, alors γ est hyperbolique et le droit chemin stable par γ est :



sur lequel γ induit une translation de longueur $2n \geqslant 2$. Les points fixes de γ dans ∂X peuvent donc être décrits par :

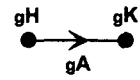
$$s_\phi = gk_{2n}^{-1}h_{2n-1}^{-1}\cdots k_2^{-1}h_1^{-1}k_{2n}^{-1}h_{2n-1}^{-1}\cdots k_2^{-1}h_1^{-1} = g\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\cdots$$
$$r_\phi = gh_1k_2\cdots h_{2n-1}k_{2n}h_1k_2\cdots h_{2n-1}k_{2n}\cdots = g\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\cdots$$

⌜ La preuve du lemme est immédiate sauf pour l'unicité du point fixe de i) et ii) où il suffit de se rappeler que les arêtes adjacentes à gH (resp. gK) sont indicées par H (resp. K) et que la multiplication à gauche par $\tilde{\gamma} \neq e$ ne fixe alors aucune de ces arêtes. ⌟

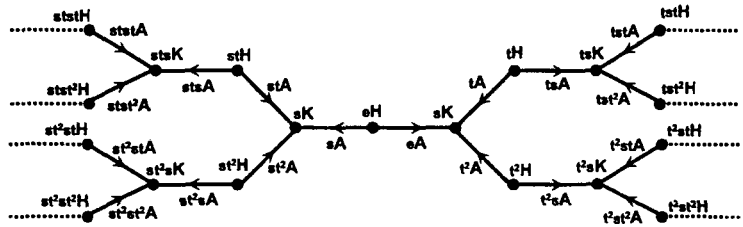
Produits amalgamés

Soit $G = H *_A K$ le produit amalgamé de deux groupes avec sous-groupe non-trivial distinct A, G agit sans inversion sur un arbre X défini par :

$Som(X) = G/H \amalg G/K$, $Ar(X) = G/A$, orientation de $gA \in G/A$ donnée par



Exemple : $G = H *_A K = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $(\cong SL_2(\mathbb{Z}))$
$= < e, s, s^2, s^3 > *_{<e,a>} < e, t, t^2, t^3, t^4, t^5 >$



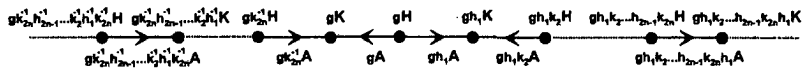
Le degré des sommets est égal à $|H/A|$ (resp. $|K/A|$) pour les sommets de type gH (resp. gK). L'espace des bouts est infini dès que K/A ou H/A est d'ordre supérieur ou égal à 3. G agit sur X par translation à gauche. L'algorithme de détermination de ces points fixes sera similaire à celui du produit libre, excepté qu'il n'y aura plus unicité du point fixe pour les éléments non-hyperboliques :

Lemme 5.3.4 (Algorithme de recherche des points fixes de $\gamma \neq e$) *Notons $\tilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$ l'écriture cycliquement réduite de γ, que l'on prendra toujours de la forme $h_1k_2h_3k_4\cdots h_{2n-1}k_{2n}$, on a les alternatives :*

i) $\tilde{\gamma} \in H$ alors γ est elliptique et a des points fixes dans X (en particulier gH)

ii) $\tilde{\gamma} \in K$ alors γ est elliptique et a des points fixes dans X (en particulier gK)

iii) $\tilde{\gamma} = h_1k_2h_3k_4...h_{2n-1}k_{2n} \notin H$ *ou* K, $h_1 \notin A \not\ni k_{2n}$, *alors* γ *est hyperbolique et le droit chemin stable par* γ *est :*



sur lequel γ *induit une translation de longueur* $2n \geqslant 2$. *Les points fixes de* γ *dans* ∂X *peuvent donc être décrit par :*

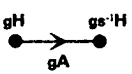
$$s_\phi = gk_{2n}^{-1}h_{2n-1}^{-1}\cdots k_2^{-1}h_1^{-1}k_{2n}^{-1}h_{2n-1}^{-1}\cdots k_2^{-1}h_1^{-1} = g\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\cdots$$
$$r_\phi = gh_1k_2\cdots h_{2n-1}k_{2n}h_1k_2\cdots h_{2n-1}k_{2n}\cdots = g\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\cdots$$

⌜ La preuve du lemme est immédiate. ⌟

Extensions HNN

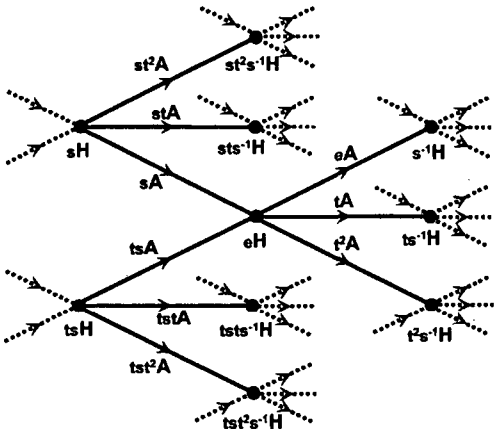
Soit $G = HNN(H, A, B, \theta) =< H, s|\theta(a) = sas^{-1}, \forall a \in A >$ une extension HNN, G agit sans inversion sur un arbre X défini par :

$Som(X) = G/H$, $Ar(X) = G/A$, orientation de $gA \in G/A$ donnée par



Le degré des sommets est égal à $|H/A| + |H/B|$ ($|H/A|$ arêtes entrantes et $|H/B|$ arêtes sortantes). L'espace des bouts est infini dès que H/A ou H/B est d'ordre supérieur ou égal à 2.

Exemple : $G = HNN(\mathbb{Z} =< t >, 3\mathbb{Z} =< t^3 >, 2\mathbb{Z} =< t^2 >, \theta : t^3 \mapsto t^2)$
(G est un des monstres de Baumslag-Solitar considérés en 5.3.8)

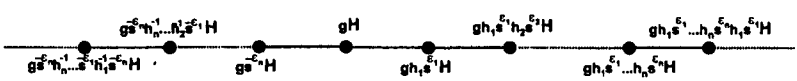


G agit sur X par translation à gauche. L'algorithme de détermination des points fixes aura dans ce cas l'allure suivante :

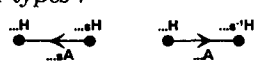
Lemme 5.3.5 (Algorithme de recherche des points fixes de $\gamma \neq e$) *Notons $\tilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$ l'écriture cycliquement réduite de γ, que l'on prendra toujours de la forme $h_1 s^{\epsilon_1} h_2 s^{\epsilon_2} \cdots h_n s^{\epsilon_n}$, avec $\epsilon_i = \pm 1$ ($\epsilon_1 = 0$ possible si $n = 1$), on a les alternatives :*

i) $\tilde{\gamma} \in H$ alors γ est elliptique et a des points fixes dans X (en particulier gH)

ii) $\tilde{\gamma} = h_1 s^{\epsilon_1} h_2 s^{\epsilon_2} \cdots h_n s^{\epsilon_n} \notin H$, $\epsilon_1 \neq 0$, alors γ est hyperbolique et le droit chemin stable par γ est :



avec des arêtes de deux types :



sur lequel γ induit une translation de longueur $n \geqslant 1$. Les points fixes de γ dans ∂X peuvent donc être décrit par :

$$s_\phi \;=\; g\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}\cdots$$

$$r_\phi = g\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}\cdots$$

⌜ La preuve du lemme est immédiate. ⌟

5.3.2 Application de la proposition 5.3.1

Dans [16], pour prouver la non-moyennabilité intérieure des produits amalgamés et des extensions HNN, Bédos et de la Harpe utilisent une propriété de fidélité forte sur le bord de l'arbre, condition qu'il sera possible d'affaiblir.

Définition 5.3.3
Avec les notations du paragraphe précédent, soit $G = H *_A K$ (respectivement $G = HNN(H, A, \theta)$) un produit amalgamé (resp. une extension HNN), on dit que G satisfait la condition (SF) (strongly faithful) si pour tout $F \subset G\backslash\{e\}$ fini il existe $g \in G$ avec $g^{-1}Fg \bigcap A = \emptyset$

Examinons au vu des constructions ci-dessus les conditions que G devrait satisfaire pour pouvoir appliquer la proposition 5.3.1 avec $\Omega = X \amalg \partial X$.

Premièrement Γ étant un sous-groupe des homéomorphismes de Ω, l'action doit être fidèle. Si $\gamma \in G$ fixe Ω, il fixe toutes les arêtes (c'est même une équivalence), cela implique les conditions suivantes :

1. produit libre : $\gamma \cdot g = g \ \forall g \in G \Rightarrow \gamma = e \Rightarrow$ l'action est toujours fidèle.
2. produit amalgamé et extensions HNN :

$$\begin{aligned} & \gamma \cdot g = g \qquad \forall g \in G \\ \Leftrightarrow \quad & \gamma \in gAg^{-1} \qquad \forall g \in G \\ \Leftrightarrow \quad & \gamma \in \textstyle\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} \end{aligned}$$

Dans ce cas on obtient donc la condition :

$$\text{action fidèle} \Leftrightarrow \bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \{e\} \Leftrightarrow \bigcap_{\gamma \in H \cup K} gAg^{-1} = \{e\}$$

Deuxièmement G doit posséder au moins deux éléments hyperboliques transverses :

1. produit libre : le paragraphe précédent montre que cela est le cas si l'espace des bouts est infini, c'est-à-dire si $H \neq \{e\} \neq K$ et $|H|$ ou $|K| \geqslant 3$;
2. produit amalgamé : le paragraphe précédent montre que cela est le cas si l'espace des bouts est infini, c'est-à-dire si $H \neq A \neq K$ et $|H/A|$ ou $|K/A| \geqslant 3$;
3. extension HNN : dans ce dernier cas, le paragraphe précédent montre que la non-finitude de l'espace des bouts n'est plus une condition suffisante, les cas où $H = A$ ou $H = B$ étant à exclure (par exemple si $H = A$ chaque sommet n'aura qu'une seule arête entrante et tous les éléments hyperboliques auront même source) ; il faut alors supposer $A \neq H \neq B$.

Troisièmement et dernière condition, l'existence d'une application G-équivariante $\delta : G\backslash\{e\} \longrightarrow \Omega$. Dans tous les cas celle-ci sera donnée par $(\gamma = g\tilde{\gamma}g^{-1})$:

$$\begin{array}{rcl} \delta : G\backslash\{e\} & \in & X \coprod \partial X \\ \gamma & \mapsto & \begin{cases} gH & \text{si } \tilde{\gamma} \in H \\ gK & \text{si } \tilde{\gamma} \in K \\ r_\gamma & \text{si } \gamma \text{ est sans point fixe dans } X \end{cases} \end{array}$$

On peut alors affaiblir les hypothèses du théorème 5 de [16] et obtenir :

Proposition 5.3.6

Les groupes suivants ne sont pas intérieurement moyennables :

i) $G = H * K$ *avec* $H \neq \{e\} \neq K$ *et* $|H|$ *ou* $|K| \geqslant 3$

ii) $G = H *_A K$ *avec* $H \neq A \neq K$, $|H/A|$ *ou* $|K/A| \geqslant 3$ *et* $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \{e\}$

iii) $G = HNN(H, A, B, \theta)$ *avec* $A \neq H \neq B$ *et* $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \{e\}$

Remarque : Pour ii) et iii), la condition (SF) utilisée dans [16] implique la condition $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \{e\}$: par contraposée si $\exists \gamma \neq e \in \bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}$ alors $g^{-1}\tilde{\gamma}g \in A \ \forall g \in G$ et en prenant $F = \{\gamma\}$, (SF) n'est pas satisfaite.

5.3.3 Non-moyennabilité intérieure des groupes à un relateur

La proposition 5.3.6 permet d'obtenir immédiatement le résultat suivant :

Proposition 5.3.7
Un groupe à un relateur et au moins trois générateurs n'est pas intérieurement moyennable.

⌜ Soit $G = \langle a, b, c, d, ... | r = r(a, b, c, d, ...)\rangle$, si un des générateurs n'apparaît pas dans la relation, on est dans un cas de produit libre et on peut appliquer la proposition 5.3.6. Rappelons qu'on peut toujours supposer $\sigma_a(r) = 0$, donc $G = HNN\langle H, A, B, \theta\rangle$ avec

$$\begin{aligned}
H &= \langle b_{\lambda(b)}, ..., b_{\mu(b)}, c_{\lambda(c)}, ..., c_{\mu(c)}, d_{\lambda(d)}, ..., d_{\mu(d)}, ... | s = s(b_i, c_i, d_i, ...)\rangle \\
A &= \langle b_{\lambda(b)}, ..., b_{\mu(b)-1}, c_{\lambda(c)}, ..., c_{\mu(c)-1}, d_{\lambda(d)}, ..., d_{\mu(d)-1}, ...\rangle \\
B &= \langle b_{\lambda(b)+1}, ..., b_{\mu(b)}, c_{\lambda(c)+1}, ..., c_{\mu(c)}, d_{\lambda(d)+1}, ..., d_{\mu(d)}, ...\rangle \\
\theta &: A \to B,\ b_i \mapsto b_{i+1},\ c_i \mapsto c_{i+1},\ d_i \mapsto d_{i+1}, ...
\end{aligned}$$

où $b_i = a^i b a^{-i}$, $c_i = a^i c a^{-i}$, s est la réécriture de r en les b_i, c_i, et $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont les indices minimaux et maximaux des occurrences des x_i apparaissant dans s.
Remarquons que si $\lambda(x) = \mu(x)$ pour chaque générateur x, alors en prenant comme nouveau système de générateurs

$$\{a,\ b' = a^{\lambda(b)} b a^{-\lambda(b)},\ c' = a^{\lambda(c)} b a^{-\lambda(c)}, ...\}$$

on obtient une présentation du groupe

$$G = \langle a, b', c', d', ... | r' = r'(b', c', d', ...)\rangle$$

où a n'apparaît plus dans la relation et on se retrouve dans le cas du produit libre. On peut donc encore supposer $\lambda(b) < \mu(b)$ (A n'est pas trivial), on a alors, $\forall x_1, x_2 \in A$, $c_{\mu(c)} x_1 c_{\mu(c)}^{-1} x_2 \in \langle A, c_{\mu(c)}\rangle$ qui est libre par le Freiheitssatz et donc $c_{\mu(c)} x_1 c_{\mu(c)}^{-1} x_2 \neq 1$ sauf si $x_1 = x_2 = 1$. On en tire $c_{\mu(c)} A c_{\mu(c)}^{-1} \cap A = \{1\}$

et comme l'existence d'au moins trois générateurs implique $A \neq H \neq B$, on peut appliquer 5.3.6. ⌟

Les hypothèses sur G nécessaires à l'application de la proposition 5.3.1 montrent cependant que ces techniques ne pourront pas traiter tous les groupes à un relateur et à 2 générateurs. En effet dans les cas où $A = H = B$ (par ex. $G = \langle a, b | bab^2aba^{-2} \rangle$), A est alors un sous-groupe normal et l'hypothèse de fidélité n'est pas vérifiée ($\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = A$). De même dans les cas où soit $A = H$ soit $B = H$, on ne pourra trouver deux éléments hyperboliques transverses. Seuls les cas $A \neq H \neq B$ ont une chance d'être traité avec ces techniques, comme par exemple :

Proposition 5.3.8
Les groupes non-Hopfiens de Baumslag-Solitar ne sont pas intérieurement moyennables.

⌜ Un groupe non-Hopfien de Baumslag-Solitar est de la forme $G = \langle x, y | xy^p x^{-1} = y^q \rangle$ où p et q n'ont pas le même ensemble de facteurs premiers [13]. On a $G = HNN(H, A, B, \theta)$ avec $H = \langle y_0, y_1 | y_1^p = y_0^q \rangle$, $A = \langle y_0 \rangle$ et $B = \langle y_1 \rangle$. Si $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}$ n'est pas trivial, comme $xAx^{-1} \cap A = B \cap A = \langle y^q \rangle$ et $x^{-1}Ax \cap A = x^{-1}(A \cap B)x = \langle y^p \rangle$, on en tire $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1} = \langle y^{mpq} \rangle$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On a les égalités $xy^{mpq}x^{-1} = (xy^px^{-1})^{mq} = y^{mq^2}$ et $x^{-1}y^{mpq}x = (x^{-1}y^qx)^{mp} = y^{mp^2}$. Comme $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}$ est stable par conjugaison, on obtient que $y^{mq^2} = y^{rmpq}$ et $y^{mp^2} = y^{smpq}$ avec $r, s \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $q = rp$ et $p = sq$. Mais ces deux égalités ne sont possible que si p et q ont même ensemble de facteurs premiers. On conclut donc que $\bigcap_{\gamma \in G} gAg^{-1}$ est trivial et on peut appliquer 5.3.1. ⌟

Remarque : Comme on l'a déjà souligné, dans [16], pour appliquer la proposition 5.3.1 aux extensions HNN, les auteurs utilisent une propriété de fidélité forte sur le bord de l'arbre, propriété plus restrictive que celle de fidélité utilisée ci-dessus. Dans le cas des groupes à un relateur à au moins 3 générateurs, si la propriété démontrée ci-dessus ($\exists h \in H$ tq $hAh^{-1} \cap A = \{1\}$) implique la fidélité de l'action, elle implique en fait également la fidélité forte sur le bord

de l'arbre. Ceci résulte d'une discussion plus générale suggérée par P. de la Harpe à laquelle on consacrera le paragraphe suivant.

5.3.4 Fidélité et fidélité forte

Soit Ω un espace topologique séparé et soit G agissant sur Ω par homéomorphismes, on dit que *l'action est fortement fidèle* si $\forall F \subset G\backslash\{1\}$ fini, $\exists \omega \in \Omega$ tel que $f\omega \neq \omega \ \forall f \in F$.

Dans la suite X désignera un arbre dénombrable, on appellera *chaîne pendante* de longueur k une géodésique $[x_1, ..., x_k]$ de X de longueur k dont tous les sommets intérieurs $\{x_2, ...x_{k-1}\}$ sont de degré 2. On définit les deux propriétés suivantes :

1. X satisfait la propriété (L) si aucun sommet de X n'est de degré 1 et la longueur des chaînes pendantes de X est uniformément bornée.
2. Soit G un sous-groupe des automorphismes de X ; G satisfait la propriété (A) si $k(G) = \sup_{g \in G\backslash\{1\}} \{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \{B(n) \subseteq X^g\}\} < \infty$ où $B(n)$ est la boule ouverte $B(n) = \{x \in Som(X) | d(x, x_0) < n\}$ pour un $x_0 \in X^g$.

Remarques :

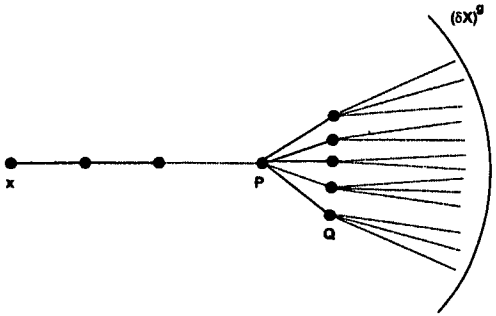
- La propriété (L) implique que les points de ∂X ne sont pas ouverts.
- $k(G) = 0$ signifie que tous les éléments de G sont hyperboliques.
- $k(G) = 1$ équivaut à dire que tout point fixe $x \in X^g$ possède une arête adjacente non-fixe par g.

Lemme 5.3.9
Soit X satisfaisant (L) et G satisfaisant (A), alors l'intérieur de $(\partial X)^g$ est vide pour tout $g \in G\backslash\{1\}$.

⌜ On distingue deux cas :

1. Si g est hyperbolique alors $(\partial X)^g = \{s_g, r_g\}$, et comme les points ne sont pas ouverts, on a l'assertion.

2. Si g est elliptique, prenons $x \in X^g$ et regardons ∂X comme l'espace des demi-géodésiques infinies issues de x. Supposons alors par l'absurde que $(\partial X)^g$ contient un ouvert donné par une géodésique reliant x à un sommet P :



Tous les sommets du cône issu de P représenté ci-dessus doivent être fixes. On peut alors trouver dans ce cône des boules de rayon aussi grand que désiré ; ce qui contredit (A). ⌟

Ce lemme permet alors d'obtenir facilement la proposition suivante :

Proposition 5.3.10

Soient X un arbre satisfaisant (L) et G un sous-groupe des automorphismes de X satisfaisant (A), alors l'action de G sur (∂X) est fortement fidèle.

⌜ Soit $F \subset G\backslash\{1\}$ fini, alors $\bigcup_{g\in F}(\partial X)^g \neq \partial X$ car ∂X ne peut pas être une réunion finie de parties d'intérieur vide (∂X est un espace métrique complet et on peut appliquer le théorème de Baire). Donc il existe $\omega \in \partial X$ tel que $f\omega \neq \omega$ pour tout $f \in F$. ⌟

Corollaire 5.3.11

Soit G un groupe à un relateur et au moins trois générateurs, l'action de G vu comme extension HNN sur l'arbre associé est fortement fidèle sur le bord.

⌜ Soit $g \neq 1$ elliptique ; montrons que chaque point fixe de g possède une arête adjacente non fixe par g. Comme les arêtes entrantes dans un sommet sont indicées par H/B et les sortantes par H/A on peut se convaincre aisément que si un élément fixe toutes les arêtes adjacentes à un sommet

alors $\exists k \in H$ tel que $khA = hA$ et $khB = hB$ $\forall h \in H$, c'est à dire $k \in (\bigcap_{h\in H} hAh^{-1}) \bigcap (\bigcap_{h\in H} hBh^{-1})$. Donc si $\bigcap_{h\in H} hAh^{-1} = \{1\}$ aucun sommet n'aura toutes ses arêtes fixées par un élément différent du neutre. Comme dans la preuve de la non-moyennabilité intérieure des groupes à un relateur et à au moins trois générateurs, on a exhibé un $h \in H$ tel que $hAh^{-1} \cap A = \{1\}$, on a la conclusion désirée. On a donc que $k(G) = 1$ donc que (A) est vérifiee et, comme dans ce cas tous les sommets sont de degré plus grand que 2, (L) l'est également. ⌟

Remarque : Dans le cas d'une extension HNN, si on note par (F) la fidélité de l'action sur l'arbre (ou sur le bord), (SF) la fidélité forte sur le bord, et (SA) la propriété $\bigcap_{h\in H} hAh^{-1} = \{1\}$ ou $\bigcap_{h\in H} hBh^{-1} = \{1\}$, on a prouvé les implications :

$$\begin{array}{ccc} (SA) & \Longrightarrow & (SF) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (F) & \end{array}$$

Si (SA) est vraie pour les groupes à un relateur à au moins trois générateurs, on remarque que dans le cas des groupes de Baumslag étudiés plus haut on a (F), mais pas (SA), car H a un centre contenu dans A.

5.4 Simplicité de la C*-algèbre réduite et unicité de la trace

Dans [42], de la Harpe donne une liste de groupes discrets G pour lesquels la C*-algèbre réduite est simple et à trace unique. Le résultat crucial est la proposition 3, où l'auteur montre que les *groupes de Powers* ont ces propriétés. Rappelons la définition de ces groupes :

> Un groupe de Powers est un groupe G tel que pour tout ensemble fini $F \subset G\backslash\{1\}$ et tout entier $N \geqslant 1$ il existe une partition $G = A \amalg B$ et des éléments $g_1, \ldots g_N \in G$ tels que
>
> (i) $fA \cap A = \emptyset$ $\forall f \in F$;

(ii) $g_jB \cap g_kB = \emptyset$ pour $j, k = 1, ..., N$ avec $j \neq k$.

Dans son lemme 4, de la Harpe montre alors que si un groupe G agit par homéomorphismes sur un espace Ω, si l'action est minimale (c'est-à-dire pour tout $\omega \in \Omega$, l'orbite $G\omega$ est dense dans Ω), fortement fidèle et que G contient deux éléments hyperboliques transverses, alors G est un groupe de Powers. En appliquant ce résultat aux groupes à un relateur et à au moins trois générateurs, en prenant pour Ω le bord de l'arbre de groupe, on obtient immédiatement :

Proposition 5.4.1
Les groupes à un relateur et à au moins trois générateurs sont des groupes de Powers.

⌜ C'est un fait bien connu de la théorie de Bass-Serre que l'action d'une extension HNN sur le bord de son arbre associé est toujours minimale. La fidélité forte découle du corollaire 5.3.11. Enfin, dans le cas des groupes à un relateur et à au moins 3 générateurs, on a toujours $A \neq H \neq B$ ce qui assure l'existence de deux éléments hyperboliques transverses. ⌟

La proposition 3 de [42] entraîne :

Corollaire 5.4.2
Les groupes à un relateur et à au moins trois générateurs ont une C^*-algèbre simple à trace unique.

Une autre preuve de ce résultat pour les extensions HNN se trouve dans [15].

Bibliographie

[1] J. Anderson and W.L. Paschke. The K-theory of the reduced C*-algebra of an HNN-group. *J. Operator Theory*, 16 :165–187, 1986.

[2] M.F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. *Proc. Int. Conf. on functional analysis and related topics*, pages 21–30, 1970.

[3] M.F. Atiyah. Elliptic operators, discrete groups, and von Neumann algebras. *Astérisque*, 32-33 :43–72, 1976.

[4] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators. *Ann. of Math.*, 87 :part I, 484–530; part III, 546–604, 1968.

[5] J. Avron, P.H.M.van Mouche, and B. Simon. On the measure of the spectrum for the almost Mathieu operator. *Commun. Math. Phys.*, 132 :103–118, 1990.

[6] J. Avron and B. Simon. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices. *Bull.Amer.Math.Soc. (New Series)*, pages 81–85, 1982.

[7] P. Baum and A. Connes. Geometric K-theory for Lie groups and foliations. Preprint, IHES, à paraître dans l'Ens. Math., 1982.

[8] P. Baum and A. Connes. Chern character for discrete groups. In *A fête of topology*, pages 163–232. Academic Press, 1988.

[9] P. Baum and A. Connes. K-theory for discrete groups. In D.E. Evans and M. Takesaki, editors, *Operator Algebras and applications*, volume 1, pages 1–20. Cambridge Univ. Press, 1988.

[10] P. Baum, A. Connes, and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras. *Contemporary Maths*, 164 :241–292, 1994.

[11] P. Baum and R.G. Douglas. Ext and index theory, in operator algebras and applications. *Proc. Symp. in Pure Math. AMS*, 38 :117–173, 1982.

[12] G. Baumslag. A survey of groups with a single defining relation. In *Group-St.Andrews 1985*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 121, pages 30–58. Cambridge Univ. Press, 1996.

[13] G. Baumslag and D. Solitar. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68 :199–201, 1962.

[14] G. Baumslag and T. Taylor. The centre of groups with one defining relator. *Math Annalen*, 175 :315–319, 1968.

[15] E. Bédos. Operator algebras associated with HNN-extensions. Non-publié, 1984.

[16] E. Bédos and P. de la Harpe. Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples. *L'Enseignement Mathématique*, 32 :139–157, 1986.

[17] C. Béguin. Méthodes C*-algébriques de calcul de spectre de graphe de Cayley. Master's thesis, Université de Neuchâtel, 1993.

[18] C. Béguin, H. Bettaieb, and A. Valette. K-theory for C*-algebras of one-relator groups. *K-theory*, 16 :277–298, 1999.

[19] C. Béguin and T.G. Ceccherini-Silberstein. Formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur. *A paraître dans le Bulletin de la Soc. math. de Belgique*, 1998.

[20] C. Béguin, A. Valette, and A. Zuk. On the spectrum of a random walk on the discrete Heisenberg group and the norm of Harper's operator. *Journal of Geometry and Physics*, 21 :337–346, 1997.

[21] M. Bekka, P.A. Cherix, and A. Valette. Proper affine isometric actions of amenable groups. In *Novikov Conjecture, Index Theorems and Rigidity*, London Math. Soc. Lecture Note Series 227. Cambridge Univ. Press, 1995.

[22] J. Bellissard. C*-algebras in solid state physics : 2D electrons in a uniform magnetic field. In D.E. Evans and M. Takesaki, editors, *Operator Algebras and applications*, volume 2, pages 49–76. Cambridge Univ. Press, 1988.

[23] J. Bellissard. Le papillon de Hofstadter (d'après B.Helffer et J.Sjöstrand). In *Sém. Bourbaki, Exposé 745*, 1991.

[24] J. Bellissard. Lipschitz continuity of gap boundaries for Hofstadter-like spectra. *Commun. Math. Phys.*, 160 :599–613, 1994.

[25] J. Bellissard, C.J. Camacho, A. Barelli, and F. Claro. Exact random walk distributions using non-commutative geometry. à paraître dans J. Physics A.

[26] H. Bettaieb and A. Valette. Sur le groupe K_1 des C*-algèbres réduites de groupes discrets. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322 :925–928, 1996.

[27] N. Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge Univ. Press, 1993.

[28] B. Blackadar. A simple unital projectionless C*-algebra. *J. Oper. Theory*, 5 :63–71, 1981.

[29] B. Blackadar. *K-theory for Operator Algebras.* Mathematical Sciences Research Institute Publication. Cambridge University Press, 1998.

[30] F. Boca. Projections in rotation algebras and theta functions. à paraître dans Comm. Math. Phys.

[31] M. Bozejko, T. Januszkiewicz, and R. Spatzier. Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan property (T). *J. Operator Theory*, 19 :63–67, 1988.

[32] S. Cappell. On homotopy invariance of higher signatures. *Inventiones Math.*, 33 :171–179, 1976.

[33] T.G. Ceccherini-Silberstein and R.I. Grigorchuk. Amenability and growth of one-relator groups. *L'Enseignement Mathématique*, 43 :337–353, 1997.

[34] T.G. Ceccherini-Silberstein, R.I. Grigorchuk, and P. de la Harpe. Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and for discrete metric spaces. to appear in Proc. Steklov Math. Inst., 1998.

[35] P.-A. Cherix and A. Valette. On spectra of simple random walks on one relator groups. *Pac.J.Maths*, 175 :417–438, 1996.

[36] M.-D. Choi, G.A. Eliott, and N. Yui. Gauss polynomials and the rotation algebra. *Inventiones Math.*, 99 :225–246, 1990.

[37] A. Connes. An analogue of the Thom isomorphism for crossed-products of a C*-algebra by an action of $\mathbb{R}$. *Adv. in Math.*, 39 :31–55, 1981.

[38] A. Connes and H. Moscovici. The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups. *Ann. of Math.*, 115 :291–330, 1982.

[39] A. Connes and G. Skandalis. The longitudinal index for foliations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, 20 :1139–1183, 1984.

[40] J. Cuntz. The K-groups for free products of C*-algebras. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 38, 1982.

[41] J. Cuntz. K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math*, 344 :180–195, 1983.

[42] P. de la Harpe. Reduced C*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace. *Lecture Notes in Math.*, 1132 :230–253, 1985.

[43] P. de la Harpe and A. Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Société mathématique de France, 1989.

[44] J. Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1964.

[45] A. Dold. *Lectures on algebraic topology.* Springer, 1972.

[46] P.G. Doyle and J.L. Snell. *Random walks and electric networks.* Carus Math. Monograph 2. Math. Assoc. Amer., 1984.

[47] E.G. Effros. Property Γ and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47 :483–486, 1975.

[48] G.A. Elliott. Gaps in the spectrum of an almost periodic Schrödinger operator. *C.R.Math.Rep.Acad.Sci.Canada*, 4 :255–259, 1982.

[49] G.A. Elliott and T. Natsume. A Bott periodicity map for crossed products of C*-algebras by discrete groups. *K-theory*, 1 :423–435, 1987.

[50] P. Eymard and M. Terp. La transformation de Fourier et son inverse sur le groupe des $ax + b$ d'un corp local. *Analyse harmonique sur les groupes de Lie II, Lecture Notes in Math.*, 739 :207–248, 1979.

[51] J. Faraut and K. Harzallah. Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 24 :171–217, 1974.

[52] K. Gröchenig, E. Kaniuth, and K.F. Taylor. Compact open sets in duals and projections in L^1-algebras of certain semi-direct product groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 111 :545–556, 1992.

[53] U. Haagerup. An example of a non-nuclear C*-algebra which has the metric approximation property. *Invent. Math.*, 50 :279–293, 1979.

[54] W.H. Haemers. Interlacing eigenvalues and graphs. To appear in Linear Alg. and Applications.

[55] P.de.la Harpe, A.G. Robertson, and A. Valette. On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group. *Israel Journal of Math*, 81 :65–96, 1993.

[56] P.de.la Harpe, A.G. Robertson, and A. Valette. On the spectrum of the sum of generators for a finitely generated group II. *Coll. Math.*, LXV :87–102, 1993.

[57] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper ii ; comportement semi-classique près d'un rationnel. *Mémoire de la SMF n°40*, 118, 1990.

[58] D.R. Hofstadter. Energy levels and waves functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review*, 14 :2239–2249, 1976.

[59] K. Iwasawa. Some types of topological groups. *Annal. of Math.*, 50(3) :507–558, 1949.

[60] K.K. Jensen and K. Thomsen. *Element of KK-theory.* Mathematics : Theory and Applications. Birkhäuser, 1991.

[61] R. Ji. Smooth dense subalgebras of reduced group C*-algebras, Schwartz cohomology of groups, and cyclic cohomology. *J.Funct.Anal.*, 107 :1–33, 1992.

[62] R. Ji and S. Pedersen. Certain full group C*-algebras without proper projection. *Journal of operator theory*, 24 :239–252, 1990.

[63] P. Jolissaint. Borel cocycles, approximation properties and relative property T. Preprint, 1997.

[64] P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette. The case of discrete groups : Chap. 3 de "Locally compact groups with the Haagerup property". Ouvrage collectif en préparation, 1998.

[65] P. Julg. C*-algèbre associées à des complexes simpliciaux. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 308 :97–100, 1989. Série I.

[66] P. Julg. Travaux de Higson et Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes. *Séminaire Bourbaki*, 1998.

[67] P. Julg and G.G. Kasparov. Operator K-theory for the group $SU(n,1)$. *J. reine angew. Math.*, 463 :99–152, 1995.

[68] P. Julg and A. Valette. Group action on trees and K-amenability. In *Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory*, Lecture Notes in Math. 1132, pages 289–296, 1983.

[69] P. Julg and A. Valette. K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree. *J. Functional Analysis*, 58 :194–215, 1984.

[70] E. Kaniuth and K.F. Taylor. Projections in C*-algebras of nilpotent groups. *Manuscripta Math.*, 65 :93–111, 1989.

[71] E. Kaniuth and K.F. Taylor. Minimal projections in L^1-algebras and open points in the dual spaces of semi-direct product groups. *J. London Math. Soc.*, 53 :141–157, 1996.

[72] I. Kaplansky. Functional analysis. *Some aspects of Analysis and Probability*, pages 1–34, 1958.

[73] M. Karoubi. *K-theory.* Grundlehren der math. Wiss. 226. Springer, 1978.

[74] A. Karrass, W. Magnus, and D. Solitar. Elements of finite order in groups with a single defining relation. *Commm. Pure and Appl. Math*, 13 :57–66, 1960.

[75] G.G. Kasparov. The operator K-functor and extensions of C*-algebras. *Math. USSR-Izv.*, 16 :513–572, 1981.

[76] G.G. Kasparov. The index of invariant elliptic operators, K-theory and Lie group representations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 268 :533–537, 1983.

[77] G.G. Kasparov. Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275 :541–545, 1984.

[78] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent.Math.*, 91 :147–201, 1988.

[79] G.G. Kasparov. K-theory, group C*-algebras, and higher signatures, in Novikov conjectures, index theorems and rigidity. *London Math. Soc. lecture notes ser.*, 226 :101–146, 1995.

[80] G.G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-theory*, 4 :303–337, 1991.

[81] G.G. Kasparov and G. Skandalis. Groupes "boliques" et conjecture de Novikov. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 319 :815–820, 1994.

[82] H. Kesten. Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.*, 7 :146–156, 1959.

[83] H. Kesten. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 :336–354, 1959.

[84] A.G. Kurosh. *The theory of groups II.* Chelsea, 1956.

[85] V. Lafforgue. K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. Preprint de l'ENS, 1998.

[86] E.C. Lance. K-theory for certain group C*-algebras. *Acta Math.*, 151 :209–230, 1983.

[87] Y. Last. Zero measure spectrum for the almost Mathieu operator. *Commun. Math. Phys.*, 164 :421–432, 1994.

[88] J. Lewin and T. Lewin. An embedding of the group algebra of a torsion-free one-relator group in a field. *J. Algebra*, 52 :39–74, 1978.

[89] R.L. Lipsman. *Group representations.* Lecture Notes in Math. 388. Springer-Verlag, 1970.

[90] R.C. Lyndon. Cohomology theory of groups with a single defining relation. *Annals of Math.*, 52 :650–665, 1950.

[91] R.C. Lyndon and P.E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 89. Springer-Verlag, 1977.

[92] W. Magnus. Uber discontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz). *J. f. d. reine u. angew. Math.*, 163 :141–165, 1930.

[93] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial group theory.* Interscience Publishers, 1966.

[94] J. McCool and P.E. Schupp. On one-relator groups and HNN-extensions. *J. Austral. Math. Soc.*, 16 :249–256, 1973.

[95] J.A. Mingo and A. Nica. On the distribution of the area enclosed by a random walk on $\mathbb{Z}^2$. à paraître dans J. Comb. A.

[96] P.van Moerbeke. The spectrum of Jacobi matrices. *Invent. Math.*, 37 :45–81, 1976.

[97] D.I. Moldavanskii. Certain subgroups of groups with one defining relation. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 8 :1370–1384, 1967.

[98] K. Murasugi. The center of a group with a single defining relation. *Math. Annalen*, 155 :246–251, 1964.

[99] T. Natsume. On $K_*(C^*(SL_2(\mathbb{Z})))$. *J. Operator Theory*, 13 :108–118, 1985.

[100] T. Natsume. The Baum-Connes conjecture, the commutator theorem, and Rieffel projections. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 1 :13–18, 1988.

[101] B.B. Newman. Some results on one-relator groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :568–571, 1968.

[102] G. Niblo and L. Reeves. Groups acting on CAT(0) cube complexes. *Geometry and Topology*, 1 :1–7, 1997.

[103] H. Oyono-Oyono. La conjecture de Baum-Connes pour les groupes agissant sur les arbres. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 326(Sér. I) :799–804, 1998.

[104] G.K. Pedersen. *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, 1979.

[105] M. Pimsner and D. Voiculescu. K-groups of reduced crossed products by free groups. *J. Operator Theory*, 8 :131–156, 1982.

[106] M.V. Pimsner. KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Inventiones mathematicae*, 86 :603–634, 1986.

[107] L. Pontrjagin. *Topological groups.* Princeton University Press, 1946.

[108] M.S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups.* Springer, 1979.

[109] R. Rammal and J. Bellissard. An algebraic semi-classical approach to Bloch electrons in a magnetic field. *J. Phys. France*, 51 :1803–1830, 1990.

[110] H. Reiter. *Classical harmonic analysis and locally compact groups.* Oxford mathematical monographs. Oxford at the Clarendon press, 1968.

[111] C.E. Rickart. *General theory of Banach algebras.* Van Nostrand, 1960.

[112] M. Rieffel. C*-algebras associated with irrational rotations. *Pacific J. Maths*, 93 :415–429, 1981.

[113] M. Rieffel. Non-commutative tori - a case study of non-commutative differentiable manifolds. *Contempary Math.*, 105 :191–211, 1990.

[114] J. Rosenberg. C*-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture. *Publ.Math.IHES*, 58 :197–212, 1983.

[115] R. Roy. A counterexample to a question on the rationality of the trace map. Preprint, 1998.

[116] J.-P. Serre. *Arbres, Amalgames, SL_2*. Astérisque 46. Société mathématique de France, 1977.

[117] M.A. Shubin. Discrete magnetic Laplacian. *Commun.Math.*, 164 :259–275, 1994.

[118] G. Skandalis. Kasparov's bivariant K-theory and applications. *Expositiones Math.*, 9 :193–250, 1991.

[119] R. Szwarc. Norm estimates of discrete Schrödinger operators. *Coll. Math.*, 76 :153–160, 1998.

[120] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I.* Springer-Verlag, 1979.

[121] A.-M. Torpe. K-theory for the leaf space of foliations by Reeb components. *J. Funct. Anal.*, 61 :15–71, 1985.

[122] J.-L. Tu. *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages hyperboliques.* PhD thesis, Université de Paris VII, 1996.

[123] J.-L. Tu. The Baum-Connes conjecture and discrete group actions on trees. Preprint, 1997.

[124] J.-L. Tu. La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables. Preprint, 1997.

[125] A. Valette. Minimal projections, integrable representations and property (T). *Arch. Math.*, 43 :397–406, 1984.

[126] A. Valette. The conjecture of idempotents : A survey of the C*-algebraic approach. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XLI :485–521, 1989.

[127] A. Valette. *Weak forms of amenability for split rank* 1 *p-adic groups*, pages 143–165. Oxford Science Publ., Clarendon Press, 1992.

[128] A. Valette. On the Baum-Connes assembly map for discrete groups. Preliminary version, 1996.

[129] N.E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras.* Oxford University Press, 1993.

[130] D. N. Zep. Structure of the group C*-algebra of the group of affine transformation of a straight line. *Moscow State University, Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, 9(1) :63–64, 1975.