UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
Institut de Mathématiques

AUTOMORPHISMES DE W*-ALGÈBRES

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences
pour obtenir le grade de docteur ès sciences
par

P.-L. AUBERT

1976
IMPRIMERIE ANDEREGG-GUENIN SA, BIENNE

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Automorphismes de W^*-algèbres

de Monsieur Pierre-Louis Aubert

UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport des membres du jury,

MM. les professeurs R. Bader, A. Robert

et A. Derighetti (Lausanne)

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 5 janvier 1976

Le doyen :

P. Hug...

P. Huguenin

AUTOMORPHISMES DE W*-ALGEBRES

Soient M une W*-algèbre et G un groupe d'automorphismes de M. Peut-on décrire la sous-algèbre M^G des points fixes de M par G? Existe-t-il entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant M^G une correspondance galoisienne? M. Nakamura et Z. Takeda [1] ont obtenu une réponse affirmative lorsque M est un facteur II_1 et G un groupe fini d'automorphismes extérieurs. En cherchant à étendre leurs résultats, nous avons rencontré les problèmes suivants: généraliser les propriétés du produit croisé utilisées par ces auteurs, obtenir un théorème permettant de prolonger aux W*-algèbres un isomorphisme défini sur des sous-algèbres involutives σ-denses, trouver de nouvelles méthodes pour aborder ces questions. Nous présentons ici le résultat de ces recherches. Une introduction se trouve au début de chaque chapitre. Pour l'essentiel nous avons suivi les définitions et les notations de Sakai [1].

Ce travail a été réalisé sous la direction de M. R. Bader, dont les encouragements et l'aide constante m'ont été précieux. Qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance. Je tiens également à adresser mes remerciements à MM. A. Derighetti et A. Robert, membres du jury.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : UNE CONSTRUCTION INTRINSEQUE DU W*-PRODUIT CROISE

Introduction.

Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe d'automorphismes apparaît déjà dans les travaux de Murray et von Neumann; c'est par cette construction que sont obtenus les premiers exemples (et tous les exemples jusqu'à aujourd'hui) de facteurs II_1. Lorsqu'on se place dans l'esprit et le langage des W*-algèbres de Sakai, on peut définir le produit croisé de la manière suivante: on représente fidèlement la W*-algèbre comme algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert, on construit le produit croisé de la manière habituelle, puis on démontre que le résultat est indépendant de la représentation choisie (voir Zeller-Meier [1], Guichardet [1]). Dans ce chapitre nous proposons une construction intrinsèque (i.e. sans passer par une algèbre de von Neumann) du produit croisé d'une W*-algèbre A par un groupe d'automorphismes G. Partant de la norme réduite sur $L^1(G,A)$ pour laquelle nous obtenons une nouvelle caractérisation, nous définissons, dans le dual D* du produit croisé réduit B, un sous-espace fermé E dont le dual sera le W*-produit croisé M de A par G. Nous étudions ensuite les représentations de M ce qui nous permet de retrouver la définition classique lorsque A est une algèbre de von Neumann. En introduisant une structure "A-préhilbertienne" sur M, nous obtenons pour les éléments de M une représentation du type "série de Fourier".

§ I.1. Produit croisé réduit

Soient A une C*-algèbre avec unité, G un groupe discret et

$$s \in G \longmapsto \sigma_s \in \mathrm{Aut}(A)$$

un homomorphisme. L'espace vectoriel $K(G,A)$ des fonctions f de G dans A à support fini devient une algèbre involutive pour le produit fg et l'involution f* définis par

$$(fg)(s) = \sum_{t\in G} f(t)\,\sigma_t[g(t^{-1}s)],$$
$$f^*(s) = \sigma_s[f(s^{-1})^*].$$

Il en va de même pour l'espace de Banach $L^1(G,A)$ des fonctions sommables f de G dans A avec la norme

$$\|f\|_1 = \sum_{s\in G} \|f(s)\|,$$

dans lequel $K(G,A)$ est dense. Si on identifie l'élément $a \in A$ à la fonction de G dans A qui vaut a au point $s = e$ et zéro ailleurs, on peut considérer A comme une sous-algèbre involutive de $K(G,A)$; on a $\|a\|_1 = \|a\|$. Nous noterons u_s l'élément de $K(G,A)$ défini par $u_s(t) = 0$ si $t \neq s$, $u_s(s) = 1$. Pour $s \in G$ et $a \in A$ on a $u_s a u_s^* = \sigma_s(a)$. A tout $\varphi \in A^*$ (dual de A) nous associerons l'élément $\tilde{\varphi} \in L^1(G,A)^*$ défini par $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e))$ pour tout $f \in L^1(G,A)$; $\tilde{\varphi}$ est positive si φ l'est.

Etant donné une représentation π de A dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on définit:

i) $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G,\mathcal{H})$: espace de Hilbert des fonctions $\tilde{\xi}$ de G dans $\mathcal{H}$ de carré sommable;

ii) V: représentation régulière gauche de G dans $\tilde{\mathcal{H}}$, donnée, pour s, $t \in G$ et $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$, par

$$[V_s\tilde{\xi}](t) = \tilde{\xi}(s^{-1}t);$$

iii) $\tilde{\pi}$:représentation de A dans $\tilde{\mathcal{H}}$ définie, pour $a \in A$, $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $s \in G$, par

$$[\tilde{\pi}(a)\tilde{\xi}](s) = \pi[\sigma_{s^{-1}}(a)]\cdot\tilde{\xi}(s).$$

On obtient alors la relation

$$\tilde{\pi}[\sigma_s(a)] = V_s\,\tilde{\pi}(a)\,V_s^*$$

pour tout $a \in A$, $s \in G$. On prolonge $\tilde{\pi}$ en une représentation de $L^1(G,A)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ en posant

$$\tilde{\pi}(f) = \sum_{s\in G} \tilde{\pi}(f(s))\,V_s$$

pour tout $f \in L^1(G,A)$; ainsi pour $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $t \in G$, on a

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}](t) = \sum_{s\in G} \pi[\sigma_{t^{-1}}(f(s))]\cdot\tilde{\xi}(s^{-1}t).$$

Pour $\xi \in \mathcal{H}$ et $s \in G$ nous noterons $\tilde{\xi}_s$ l'élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ défini par $\tilde{\xi}_s(t) = 0$ si $t \neq s$, $\tilde{\xi}_s(s) = \xi$. Il n'est pas difficile de voir que si $\xi \in \mathcal{H}$ est totalisateur pour π alors $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$ et que si π et ξ définissent la forme positive φ sur A alors $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$.

La <u>norme réduite</u> est définie sur $L^1(G,A)$ par

$$\|f\| = \sup \|\tilde{\pi}(f)\|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les représentations de A. On appelle <u>produit croisé réduit</u> de A par G la C*-algèbre complétée de $L^1(G,A)$ pour $\|f\|$; nous la noterons B. Comme $\|f\| \leqslant \|f\|_1$, $K(G,A)$ est dense dans B; d'autre part la norme réduite coïncide sur A avec la norme initiale et A est une sous-C*-algèbre de B. Les représentations $\tilde{\pi}$ et les formes linéaires $\tilde{\varphi}$ sont continues pour la norme réduite et se prolongent à B. On a d'ailleurs la caractérisation suivante de la norme réduite:

<u>Proposition I.1.</u>: <u>La norme réduite est la plus petite des normes de C*-algèbre sur $L^1(G,A)$ qui rendent toutes les formes linéaires $\tilde{\varphi}$ ($\varphi \in A^*$) continues.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit p une norme de C*-algèbre sur $L^1(G,A)$ telle que toutes les $\tilde{\varphi}$ soient continues. Le complété B_p de $L^1(G,A)$ pour p est une C*-algèbre et les $\tilde{\varphi}$ se prolongent à B_p. Pour tout $f \in L^1(G,A)$, $p(f^*f)1 - f^*f$ est un élément positif de B_p, donc pour tout $g \in K(G,A)$ et toute forme linéaire positive φ sur A, on a

$$\tilde{\varphi}[g^*(p(f^*f)1 - f^*f)g] \geqslant 0,$$

d'où $p(f)^2\,\tilde{\varphi}(g^*g) \geqslant \tilde{\varphi}(g^*f^*fg)$. On en déduit que

$$p(f) \geqslant \sup \frac{\tilde{\varphi}(g^*f^*fg)^{1/2}}{\tilde{\varphi}(g^*g)^{1/2}}$$

la borne supérieure étant prise sur tous les $g \in K(G,A)$ et les $\varphi \in A^{*+}$ (= ensemble des formes linéaires positives sur A) tels que $\tilde{\varphi}(g^*g) \neq 0$. Or Zeller-Meier [1; Prop. 4.8, 4.9] a montré que cette borne supérieure est égale à la norme réduite de f, d'où la proposition.

Nous utiliserons les résultats suivants (cf. Zeller-Meier [1], Prop. 4.12, 4.13.): B peut être considérée comme une algèbre de fonctions f de G dans A, contenant $L^1(G,A)$, le produit et l'involution étant définis comme dans $L^1(G,A)$ (la somme converge pour toute topologie définie sur A par transport de la topologie forte au moyen d'une représentation injective). Les applications $f \in B \longmapsto f(s) \in A$ sont linéaires et diminuent les normes; de plus l'application

$$\Phi : f \in B \longmapsto f(e) \in A$$

est positive fidèle. Enfin pour $\varphi \in A^{*+}$ et $f \in B$ on a $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e))$.

§ I.2. W*-produit croisé.

Conservons les notations du paragraphe 1 mais supposons maintenant que A est une W*-algèbre; nous noterons A_* [resp. A_*^+] son prédual [resp. la partie positive de son prédual].

Soit E la fermeture en norme dans B* du sous-espace engendré par les formes linéaires

$$\omega_{g,\varphi} : f \in B \longmapsto \tilde{\varphi}(g^* f g) \in \mathbb{C}$$

où $g \in K(G,A)$ et $\varphi \in A_*^+$. E est un espace de Banach.

Pour $h \in B$ et $\omega \in B^*$ les translatés à gauche et à droite $L_h\omega$ et $R_h\omega$ sont définis par

$$\langle L_h\omega, f\rangle = \langle \omega, hf\rangle \quad \text{et} \quad \langle R_h\omega, f\rangle = \langle \omega, fh\rangle$$

pour tout $f \in B$.

Lemme 1. E est stable par les translations à gauche et à droite.

Démonstration : Il faut voir que si $\omega \in E$ on a $L_h\omega \in E$, $R_h\omega \in E$, quel que soit $h \in B$. Par continuité (pour la norme) et linéarité des applications L_h et R_h, il suffit de le démontrer pour un ω de la forme $\omega_{g,\varphi}$ $(g \in K(G,A),\ \ \varphi \in A_*^+)$. Soient alors π et ξ la représentation de A et le vecteur de $\mathcal{H}_\pi$ définis par φ ; on sait que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ sont définis (à isomorphisme près) par $\tilde{\varphi}$, donc pour tout $f \in B$

$$\begin{aligned}
\langle L_h\omega_{g,\varphi}, f\rangle &= \langle \omega_{g,\varphi}, hf\rangle = \tilde{\varphi}(g^* h f g) \\
&= \tilde{\varphi}((h^* g)^* f g) = (\tilde{\pi}((h^* g)^* f g)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\xi}_e) \\
&= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\pi}(h^* g)\tilde{\xi}_e).
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{\eta} = \tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e$ et $\tilde{\zeta} = \tilde{\pi}(h^* g)\tilde{\xi}_e$; on a

$$\begin{aligned}
\langle L_h\omega_{g,\varphi}, f\rangle &= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta}) \\
&= \frac{1}{4}\Big\{ (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}+\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}+\tilde{\zeta}) - (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}-\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}-\tilde{\zeta}) \\
&\qquad + i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}+i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}+i\tilde{\zeta}) - i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}-i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}-i\tilde{\zeta}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Ainsi $L_h\omega_{g,\varphi}$ est combinaison linéaire de quatre formes associées à $\tilde{\pi}$; mais ces dernières sont toutes limites en norme de $\omega_{k,\varphi}$ $k \in K(G,A)$, (cf. Dixmier [1] Prop. 2.4.B.) donc appartiennent à E. Donc on a bien $L_h\omega_{g,\varphi} \in E$; de même pour $R_h\omega_{g,\varphi}$.

On sait que B** est une W*-algèbre; soit E^0 le polaire de E dans B** i.e.

$$E^0 = \{ x \in B^{**} \mid \langle \omega, x \rangle = 0 ,\ \forall \omega \in E \} .$$

<u>Lemme 2.</u> <u>E^0 est un idéal bilatère $\sigma(B^{**},B^*)$ - fermé de B**.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in E^0$. Pour tout $h \in B$ et tout $\omega \in E$ on a vu que $L_h\omega \in E$ et $R_h\omega \in E$, donc

$$\langle hx, \omega \rangle = \langle x, L_h\omega \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle xh, \omega \rangle = \langle x, R_h\omega \rangle = 0 ,$$

d'où $hx \in E^0$ et $xh \in E^0$. Si maintenant $y \in B^{**}$ il existe une suite généralisée $\{h_\alpha\}$ d'éléments de B telle que $h_\alpha \to x$ pour la topologie $\sigma(B^{**},B^*)$. Comme E^0 est $\sigma(B^{**},B^*)$-fermé et que la multiplication par un élément fixe dans B** est $\sigma(B^{**},B^*)$-continue, on a

$$yx = \lim_\alpha h_\alpha x \in E^0 \quad \text{et} \quad xy = \lim_\alpha x h_\alpha \in E^0$$

d'où le résultat.

E^0 étant un idéal bilatère uniformément fermé de B**, le quotient B^{**}/E^0 est une C*-algèbre; comme $B^{**}/E^0 = E^*$ avec E espace de Banach, B^{**}/E^0 est une W*-algèbre, de prédual E. Posons $M = B^{**}/E^0$ et $M_* = E$.

<u>Lemme 3.</u> <u>B est une sous-C*-algèbre $\sigma(M,M_*)$-dense de M.</u>

<u>Démonstration</u> : On a un homomorphisme (d'algèbres involutives) canonique $f \in B \longmapsto [f] \in M$; il suffit de montrer qu'il est injectif (il sera alors isométrique et on pourra identifier B à son image dans M). Soit donc $f \in B$ tel que $[f] = 0$ i.e. $f \in E^0$; on a $\langle \omega , f \rangle = 0$ pour tout $\omega \in E$. Prenons en particulier $\omega = R_h\tilde{\varphi}$ où $\varphi \in A_*^+$ et $h = u_s \in B$; on a alors

$$0 = \langle \omega, f \rangle = \langle R_h\tilde{\varphi}, f \rangle = \langle \tilde{\varphi}, f u_s \rangle = \langle \varphi, (f u_s)(e) \rangle$$

Mais

$$(f u_s)(e) = \sum_{t \in G} f(t)\, \sigma_t[\, u_s(t^{-1}e)] = f(s^{-1}) ,$$

donc $\langle \varphi, f(s^{-1}) \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in A_*^+$ et tout $s \in G$ on a $f = 0$. La σ-densité de B dans M provient de la σ-densité de B dans B** et de la σ-continuité de l'application canonique de B** sur M.

<u>Définition</u> : <u>La W*-algèbre $M = B^{**}/E^0$ sera appelée W*-produit croisé de A par G selon σ et notée $W^*(A,G,\sigma)$</u>.

§ I.3. Représentation de $W^*(A,G,\sigma)$

Nous conservons les notations A,G,σ,B,E et $M = W^*(A,G,\sigma)$ du paragraphe 2. Rappelons qu'une W^*-représentation π de A dans $\mathcal{H}$ est une représentation de A dans $\mathcal{H}$ continue pour les topologies $\sigma(A,A_*)$ et $\sigma(L(\mathcal{H}), L(\mathcal{H})_*)$.

Théorème I.1. Soient π une W^*-représentation de A dans $\mathcal{H}$ et $\tilde{\pi}$ la représentation de B dans $\tilde{\mathcal{H}}$ associée à π.

1) $\tilde{\pi}$ se prolonge de façon unique en une W^*-représentation (notée encore $\tilde{\pi}$) de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$.

2) Si π est injective sur A alors $\tilde{\pi}$ est injective sur M.

Démonstration : 1) Nous supposerons d'abord que π possède un vecteur totalisateur $\xi \in \mathcal{H}$; la forme positive φ définie par π et ξ appartient à A_*^+. On sait alors que $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$ et que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$, et on peut admettre que $\tilde{\pi}$ est la représentation définie par $\tilde{\varphi}$; les formes linéaires

$$f \in B \longmapsto (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta}) \in \mathbb{C} \qquad \tilde{\eta},\tilde{\zeta} \in \tilde{\mathcal{H}}$$

sont donc des limites en norme de combinaisons linéaires de $\omega_{g,\varphi}$ $g \in K(G,A)$, donc appartiennent à E. La représentation $\tilde{\pi} : B \longrightarrow L(\tilde{\mathcal{H}})$ est continue (pour la norme); soit

$$\tilde{\pi}^* : L(\tilde{\mathcal{H}})^* \longrightarrow B^*$$

son adjointe. Montrons que $\tilde{\pi}^*(L(\tilde{\mathcal{H}})_*) \subset E$: si $\omega \in L(\tilde{\mathcal{H}})_*$ il existe $\tilde{\eta}_i \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\tilde{\zeta}_i \in \tilde{\mathcal{H}}$, $i = 1, 2, \ldots$ avec

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty , \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\zeta}_i\|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \omega(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i) ,$$

pour tout $T \in L(\tilde{\mathcal{H}})$; on a donc

$$\langle \tilde{\pi}^*(\omega), f \rangle = \langle \omega \circ \tilde{\pi}, f \rangle = \langle \omega, \tilde{\pi}(f) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i) ,$$

pour tout $f \in B$. Par ce qui précède on voit donc que $\tilde{\pi}^*(\omega) \in E$. Notons $\tilde{\pi}_o^*$ la restrictions de $\tilde{\pi}^*$ à $L(\tilde{\mathcal{H}})_*$ et $\hat{\pi}$ l'adjoint de $\tilde{\pi}_o^*$; $\hat{\pi}$ est donc une application linéaire continue (pour la norme) de $E^* = M$ dans $L(\tilde{\mathcal{H}})_*^* = L(\tilde{\mathcal{H}})$; $\hat{\pi}$ est également continue pour les topologies $\sigma(M,M_*)$ et $\sigma(L(\tilde{\mathcal{H}}), L(\tilde{\mathcal{H}})_*)$. Si $f \in B$, $\hat{\pi}(f)$ est défini par

$$\langle \hat{\pi}(f), \omega \rangle = \langle f, \tilde{\pi}_o^*(\omega) \rangle = \langle \tilde{\pi}(f), \omega \rangle$$

pour tout $\omega \in L(\tilde{\mathcal{H}})_*$, donc $\hat{\pi} = \tilde{\pi}$ sur B i.e. $\hat{\pi}$ prolonge $\tilde{\pi}$. On en déduit alors que $\hat{\pi}$ est un homomorphisme (d'algèbres involutives) de M dans $L(\tilde{\mathcal{H}})$, donc une W*-représentation. En effet si $x, y \in M$ il existe deux suites généralisées $\{f_\alpha\}$ et $\{g_\beta\}$ d'éléments de B telles que $f_\alpha \to x$ et $g_\beta \to y$ pour la topologie $\sigma(M, M_*)$; on a donc

$$\begin{aligned}\hat{\pi}(xy) &= \hat{\pi}(x \lim_\beta g_\beta) = \hat{\pi}(\lim_\beta x g_\beta) = \lim_\beta \hat{\pi}(x g_\beta) \\ &= \lim_\beta \hat{\pi}((\lim_\alpha f_\alpha) g_\beta) = \lim_\beta \hat{\pi}(\lim_\alpha f_\alpha g_\beta) \\ &= \lim_\beta \lim_\alpha \tilde{\pi}(f_\alpha g_\beta) = \lim_\alpha \tilde{\pi}(f_\alpha) \lim_\beta \tilde{\pi}(g_\beta) \\ &= \hat{\pi}(x)\hat{\pi}(y)\end{aligned}$$

et de même pour $\hat{\pi}(x^*) = \hat{\pi}(x)^*$.

Le cas d'une W*-représentation quelconque π se ramène au cas précédent; on peut supposer π non dégénérée et alors $\pi = \oplus \pi_i$ où chaque π_i est une W*-représentation possédant un vecteur totalisateur; on a $\tilde{\pi} = \oplus \tilde{\pi}_i$ et en posant $\hat{\pi} = \oplus \hat{\pi}_i$ on obtient la W*-représentation de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$ cherchée.

L'unicité du prolongement $\hat{\pi}$ provient de la σ-densité de B dans M et de la σ-continuité de $\hat{\pi}$. Dans la suite, nous noterons simplement $\tilde{\pi}$ pour $\hat{\pi}$.

2) Soit π une W*-représentation injective de A. On peut supposer π non dégénérée; $\pi(A)$ est alors une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$. Soit $\varphi \in A_*^+$; comme π^{-1} est σ-continu on a $\varphi \circ \pi^{-1} \in \pi(A)_*^+$: il existe alors $\xi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \ldots$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \varphi\circ\pi^{-1}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i | \xi_i)$$

pour tout $T \in \pi(A)$, donc

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(a)\xi_i | \xi_i)$$

pour tout $a \in A$. Passons à $\tilde{\varphi}$; on a $\tilde{\varphi} \in E = M_*$ et, pour tout $f \in B$,

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(f(e))\xi_i | \xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\xi}_i)_e \mid (\tilde{\xi}_i)_e),$$

la dernière égalité provenant de

$$(\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e | \tilde{\xi}_e) = \sum_{t\in G} ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](t) | \tilde{\xi}_e(t)) = ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) | \xi)$$

et de

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) = \sum_{s\in G} \pi[\sigma_{e^{-1}}(f(s))]\tilde{\xi}_e(s^{-1}e) = \pi(f(e))\xi \ .$$

Quel que soit $g \in K(G,A)$, on a, pour tout $f \in B$,

$$\omega_{g,\varphi}(f) = \tilde{\varphi}(g^* f g) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(g^* f g)(\tilde{\xi}_i)_e \mid (\tilde{\xi}_i)_e)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e \mid \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\eta}_i)$$

en posant $\tilde{\eta}_i = \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e$; on a $\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty$. Par σ-continuité on en déduit

$$\omega_{g,\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(x)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\eta}_i)$$

pour tout $x \in M$. L'injectivité de $\tilde{\pi}$ en découle: si $\tilde{\pi}(x) = 0$ on a $\omega_{g,\varphi}(x) = 0$ pour tout $g \in K(G,A)$ et tout $\varphi \in A_*^+$, donc $\omega(x) = 0$ pour tout $\omega \in E = M_*$, d'où $x = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I.1. : Ce résultat montre que notre définition du produit croisé coïncide avec la définition classique lorsque A est une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $s \longmapsto U_s$ une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$, telle que $\sigma_s(a) = U_s a U_s^*$ pour tout $s \in G$ et tout $a \in A$. En effet désignons par π la représentation identité de A dans $\mathcal{H}$; alors $M = W^*(A,G,\sigma)$ est isomorphe a $\tilde{\pi}(M)$, qui est l'algèbre de von Neumann dans $\tilde{\mathcal{H}}$ engendrée par $\tilde{\pi}(K(G,A))$. Soit W l'opérateur unitaire sur $\tilde{\mathcal{H}}$ défini par

$$(W\tilde{\xi})(s) = U_s \cdot \tilde{\xi}(s)$$

pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et tout $s \in G$. Par un simple calcul on obtient alors

$$[W\tilde{\pi}(a)W^*\tilde{\xi}](s) = a \cdot \tilde{\xi}(s),$$
$$[W V_t W^* \tilde{\xi}](s) = U_t \cdot \tilde{\xi}(t^{-1}s),$$

ce qui montre que le produit croisé (classique) de A par G (selon la représentation U) est l'algèbre de von Neumann engendrée par $W\tilde{\pi}(K(G,A))W^*$ (Dixmier [2] p. 130, Suzuki [1]), donc $W\tilde{\pi}(M)W^*$, qui est bien isomorphe à M.

§ I.4. Structure "préhilbertienne" sur $W^*(A,G,\sigma)$.

Nous conservons les notations A,G,σ,B,E, et $M = W^*(A,G,\sigma)$ du paragraphe 2. Nous avons déjà rappelé que l'application $\Phi : B \longrightarrow A$ définie par $\Phi(f) = f(e)$ est une projection positive fidèle.

Théorème I.2. Φ se prolonge de façon unique en une projection $\tilde{\Phi}: M \longrightarrow A$ σ et s-continue, positive et fidèle, diminuant la norme et vérifiant $\tilde{\Phi}(axb) = a\tilde{\Phi}(x)b$ pour $a, b \in A$ et $x \in M$.

Démonstration : L'adjoint Φ^* de Φ est une application linéaire continue de A^* dans B^* définie par

$$\langle \Phi^*(\varphi), f \rangle = \langle \varphi, \Phi(f) \rangle = \langle \varphi, f(e) \rangle$$

pour tout $f \in B$, $\varphi \in A^*$; on a donc $\Phi^*(\varphi) = \tilde{\varphi}$ pour tout $\varphi \in A^*$. On voit ainsi que $\Phi^*(A_*) \subset E$. Soit Φ^*_o la restriction de Φ^* à A_*; c'est une application linéaire continue de A_* dans E; nous noterons $\tilde{\Phi}$ son adjoint, qui est une application linéaire continue de $E^* = M$ dans $A_*{}^* = A$; il est facile de voir qu'elle est σ-continue, positive et qu'elle prolonge Φ. Par exemple, si $x \in M$, $x \geqslant 0$, on a

$$\langle \tilde{\Phi}(x), \varphi \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \rangle \geqslant 0$$

pour tout $\varphi \in A_*^+$, d'où $\tilde{\Phi}(x) \geqslant 0$. On en déduit alors que

i) $\|\tilde{\Phi}(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in M$;

ii) $\tilde{\Phi}(axb) = a\tilde{\Phi}(x)b$ pour $a,b \in A$, $x \in M$;

iii) $\tilde{\Phi}(x)^*\tilde{\Phi}(x) \leqslant \tilde{\Phi}(x^*x)$ pour tout $x \in M$

(voir J. Tomiyama [1] Thm. 3.1.). La s-topologie sur M (resp. sur A) est définie par les semi-normes

$$\alpha_\omega(x) = \omega(x^*x)^{1/2} \quad (\text{resp. } \alpha_\varphi(a) = \varphi(a^*a)^{1/2})$$

où $\omega \in M_*^+$, $x \in M$ (resp. $\varphi \in A_*^+$, $a \in A$). La s-continuité de $\tilde{\Phi}$ découle alors de iii) car, pour tout $\varphi \in A_*^+$, on a

$$\alpha_\varphi[\tilde{\Phi}(x)] = \varphi[\tilde{\Phi}(x)^*\tilde{\Phi}(x)]^{1/2} \leqslant \varphi[\tilde{\Phi}(x^*x)]^{1/2} = \tilde{\varphi}(x^*x)^{1/2} = \alpha_{\tilde{\varphi}}(x)$$

avec $\tilde{\varphi} \in M_*^+$.

Il reste à démontrer la fidélité de $\tilde{\Phi}$ i.e. que si $x \in M$, $x \geqslant 0$ et $\tilde{\Phi}(x) = 0$, alors $x = 0$. Ecrivons $x = yy^*$ avec $y \in M$; on a, pour tout $s \in G$,

$$x = yy^* = (yu_s^*)(yu_s^*)^*,$$

donc en utilisant iii)

$$0 = \tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(yy^*) = \tilde{\Phi}[(yu_s^*)(yu_s^*)^*] \geqslant \tilde{\Phi}(yu_s^*)\tilde{\Phi}(yu_s^*)^* \geqslant 0$$

d'où $\tilde{\Phi}(yu_s^*) = 0$ (rappelons que u_s est l'élément unitaire de $K(G,A)$ défini par $u_s(t) = 0$ si $t \neq s$, $u_s(s) = 1$). Pour conclure nous utiliserons le résultat suivant (voir Suzuki [1]):

<u>Lemme</u> : <u>Soient π une W^*-représentation fidèle de A dans $\mathcal{H}$ et $\tilde{\pi}$ la W^*-représentation fidèle de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$ associée à π. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $t \in G$ et $z \in M$, on a</u>

$$\tilde{\pi}(z)\tilde{\xi}_t = \sum_{s \in G} \tilde{\pi}(\tilde{\Phi}(zu_s^*))V_s\tilde{\xi}_t$$

<u>la sommation ayant lieu pour la topologie forte de $\tilde{\mathcal{H}}$</u>.

Avant de démontrer le lemme nous en déduisons que $\tilde{\Phi}$ est fidèle: par ce qui précède on a $\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi}_t = 0$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $t \in G$, donc $\tilde{\pi}(y)$ est nul sur une partie dense de $\tilde{\mathcal{H}}$, d'où $\tilde{\pi}(y) = 0$, $y = 0$ et $x = yy^* = 0$.

<u>Démonstration du lemme</u>: Fixons $\tilde{\xi}_t$, x et $\varepsilon > 0$. $K(G,A)$ est $s(M,M_*)$-dense dans M, donc il existe une suite généralisée $\{f_\alpha\}$ d'éléments de $K(G,A)$ telle que $x = s\text{-}\lim f_\alpha$. Comme $\tilde{\pi}$ est s-continue, et que la s-topologie de $L(\tilde{\mathcal{H}})$ est la topologie ultraforte, $\tilde{\pi}(x)$ est limite ultraforte des $\tilde{\pi}(f_\alpha)$; il existe donc α_0 tel que

(1) $$\|(\tilde{\pi}(x) - \tilde{\pi}(f_\alpha))\tilde{\xi}_t\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } \alpha \geqslant \alpha_0$$

On a donc

$$\|(\tilde{\pi}(f_\alpha) - \tilde{\pi}(f_{\alpha_0}))\tilde{\xi}_t\| < 2\varepsilon \qquad \text{si } \alpha \geqslant \alpha_0$$

Par définition on a $\tilde{\pi}(f_\alpha) = \sum_{s \in G} \tilde{\pi}(f_\alpha(s))V_s$, donc

(2) $$\|\sum_{s \in G} \tilde{\pi}[f_\alpha(s) - f_{\alpha_0}(s)]V_s\tilde{\xi}_t\| \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{si } \alpha \geqslant \alpha_0$$

Remarquons maintenant que si $s_1, s_2 \in G$, $s_1 \neq s_2$ et si $a_1, a_2 \in A$, alors les vecteurs $\tilde{\pi}(a_i)V_{s_i} \cdot \tilde{\xi}_t$ sont orthogonaux; en effet

$$[\tilde{\pi}(a_i)V_{s_i}\tilde{\xi}_t](r) = \pi(\sigma_{r^{-1}}(a_i))\tilde{\xi}_t(s_i^{-1}r)$$
$$= \begin{cases} \pi(\sigma_{r^{-1}}(a_i))\xi & \text{si } r = s_i t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$(\tilde{\pi}(a_1)V_{s_1}\tilde{\xi}_t \mid \tilde{\pi}(a_2)V_{s_2}\tilde{\xi}_t) = \sum_{r \in G} ([\tilde{\pi}(a_1)V_{s_1}\tilde{\xi}_t](r) \mid [\tilde{\pi}(a_2)V_{s_2}\tilde{\xi}_t](r)) = 0.$$

Posons $J_0 = \{s \in G \mid f_{\alpha_0}(s) \neq 0\}$; J_0 est un ensemble fini. A cause de l'orthogonalité des vecteurs $\tilde{\pi}(f_\alpha(s))V_s\tilde{\xi}_t$ on tire de (2) que , pour toute partie finie $J_0 \subset J \subset G$ et tout $\alpha \geqslant \alpha_0$, on a

(3) $$\| \sum_{s \in J} \tilde{\pi}[f_\alpha(s) - f_{\alpha_0}(s)] V_s \tilde{\xi}_t \| \leqslant 2\varepsilon .$$

D'autre part on a $f_\alpha(s) = \tilde{\Phi}(f_\alpha u_s^*)$, pour tout $s \in G$, donc de $x = $ s-lim f_α on tire $\tilde{\Phi}(xu_s^*) = $ s-lim $f_\alpha(s)$, puis

$$\tilde{\pi}(\tilde{\Phi}(xu_s^*))V_s = \text{uft-}\lim \tilde{\pi}(f_\alpha(s))V_s ,$$

et enfin

$$\tilde{\pi}(\tilde{\Phi}(xu_s^*))V_s \tilde{\xi}_t = \lim \tilde{\pi}(f_\alpha(s))\tilde{\xi}_t$$

En passant à la limite dans (3) on a donc

$$\| \sum_{s \in J} \tilde{\pi}[\tilde{\Phi}(xu_s^*) - f_{\alpha_0}(s)] V_s \tilde{\xi}_t \| \leqslant 2\varepsilon ,$$

ou encore

(4) $$\| (\sum_{s \in J} \tilde{\pi}[\tilde{\Phi}(xu_s^*)] V_s - \tilde{\pi}(f_{\alpha_0})) \tilde{\xi}_t \| \leqslant 2\varepsilon .$$

De (1) et (4) on tire

$$\| (\tilde{\pi}(x) - \sum_{s \in J} \tilde{\pi}[\tilde{\Phi}(xu_s^*)] V_s) \tilde{\xi}_t \| \leqslant 3\varepsilon ,$$

ceci pour toute partie finie J de G contenant J_0 . Le lemme et le théorème sont ainsi démontrés.

<u>Notation</u>: Dans la suite nous noterons simplement Φ pour $\tilde{\Phi}$.

Nous utiliserons maintenant une topologie introduite par D. Dures [1] et qui nous permettra d'obtenir une représentation du type "série de Fourier" pour les éléments de M.

Pour $x, y, \in M$, posons $(x|y) = \Phi(xy^*)$; les propriétés suivantes de ce "produit scalaire à valeurs dans A" découlent des propriétés de Φ :

1) sesquilinéarité;
2) $(ax|y) = a(x|y)$ et $(x|ay) = (x|y)a^*$ pour $x, y \in M$, $a \in A$;
3) $(y|x) = (x|y)^*$ pour $x, y \in M$;
4) $(x|x) \geqslant 0$ pour tout $x \in M$ et $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour tout $\varphi \in A_*^+$ notons β_φ la semi-norme sur M définie par $\beta_\varphi(x) = \varphi(\Phi(xx^*))^{\frac{1}{2}} = \tilde{\varphi}(xx^*)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in M$; β_φ est donc la semi-norme $\alpha_{\tilde{\varphi}}^*$ de Sakai [1; page 20] . Soit $\mathcal{T}$ la topologie d'espace localement convexe séparé définie par les β_φ, $\varphi \in A_*^+$ ("séparé" provient de la fidélité de Φ).

<u>Proposition I.2.</u> 1) <u>Pour tout $y \in M$, tout $a \in A$ et tout $s \in G$, les applications $x \in M \longmapsto xy \in M$, $x \in M \longmapsto ax \in M$ et $x \in M \longmapsto u_s x \in M$ sont continues pour $\mathcal{T}$</u>.

2) <u>L'application $(x,y) \in M \times M \longmapsto (x|y) \in A$ est</u>

<u>continue lorsqu'on munit M de la topologie $\mathcal{T}$ et A de la topologie $\sigma(A,A_*)$.</u>

<u>Démonstration</u> : 1) Pour tout $\varphi \in A_*^+$ on a

$$\beta_\varphi(xy)^2 = \tilde{\varphi}(xyy^*x^*) \leqslant \|y\|^2\tilde{\varphi}(xx^*) = \|y\|^2\beta_\varphi(x)^2 ,$$

donc $x \longmapsto xy$ est continue. Remarquons que si $a,b \in A$ et $\varphi \in A_*^+$ on a $(L_aR_b\varphi)^\sim = L_aR_b\tilde{\varphi}$; en effet, pour tout $x \in M$,

$$\langle (L_aR_b\varphi)^\sim, x\rangle = \langle L_aR_b\varphi, \Phi(x)\rangle = \langle \varphi, a\Phi(x)b\rangle$$

$$\langle L_aR_b\tilde{\varphi}, x\rangle = \langle \tilde{\varphi}, axb\rangle = \langle \varphi, \Phi(axb)\rangle$$

et $\Phi(axb) = a\,\Phi(x)b$. Mais alors

$$\beta_\varphi(ax)^2 = \tilde{\varphi}(axx^*a^*) = L_aR_{a^*}\tilde{\varphi}(xx^*) = (L_aR_{a^*}\varphi)^\sim(xx^*) = \beta_{L_aR_{a^*}\varphi}(x)^2$$

d'où la continuité de $x \longmapsto ax$ puisque $L_aR_{a^*}\varphi \in A_*^+$. Soit $s \in G$; on vérifie que pour tout $f \in B$ on a $\Phi(u_sfu_s^*) = \sigma_s[\Phi(f)]$; puis par passage à la limite, que $\Phi(u_sxu_s^*) = \sigma_s[\Phi(x)]$ pour tout $x \in M$. Alors, pour tout $\varphi \in A_*^+$, on a

$$\beta_\varphi(u_sx)^2 = \tilde{\varphi}(u_sxx^*u_s^*) = \varphi\circ\sigma_s\circ\Phi(xx^*) = (\varphi\circ\sigma_s)^\sim(xx^*) = \beta_{\varphi\circ\sigma_s}(x)^2$$

et comme $\varphi\circ\sigma_s \in A_*^+$, l'application $x \longmapsto u_sx$ est continue.

2) Pour tout $x,y \in M$ et tout $\varphi \in A_*^+$, l'inégalité $|\tilde{\varphi}(xy^*)|^2 \leqslant \tilde{\varphi}(xx^*)\tilde{\varphi}(yy^*)$ donne

$$|\varphi[(x|y)]| \leqslant \beta_\varphi(x)\,\beta_\varphi(y) \;;$$

on en déduit la continuité de $(x,y) \mapsto (x|y)$.

<u>Proposition I.3.</u> <u>La famille</u>, $\{u_s\}_{s\in G}$ <u>est base orthonormée du A-module à gauche M muni de la topologie $\mathcal{T}$ i.e.</u>

i) $(u_s|u_t)$ <u>$= 0$ si $s \neq t$ et</u> $(u_s|u_s)$ <u>$= 1$;</u>

ii) <u>l'ensemble des sommes finies</u> $\sum a_su_s$, $a_s \in A$, <u>est dense dans M pour la topologie $\mathcal{T}$</u>.

<u>Démonstration</u> : i) est immédiat car $(u_s|u_t) = u_{st^{-1}}(e)$.

ii) la topologie $\mathcal{T}$ est moins fine que la $s^*(M,M_*)$-topologie car cette dernière est définie par les semi-normes α_ω, α_ω^* $(\omega \in M_*^+)$ (Sakai [1]); donc $K(G,A)$ est dense dans M pour $\mathcal{T}$. Comme l'égalité $f = \sum f(s)u_s$ montre que $K(G,A)$ est identique à l'ensemble des sommes finies $\sum a_su_s$, $a_s \in A$, la proposition est démontrée.

<u>Théorème I.3.</u> <u>Pour tout $x \in M$, la famille</u> $\{(x|u_s)u_s\}_{s\in G}$ <u>est sommable pour la topologie $\mathcal{T}$ et</u>

$$x = \sum_{s\in G}(x|u_s)\,u_s \,.$$

<u>De plus si x peut s'écrire</u> $x = \Sigma a_s u_s$, $a_s \in A$, <u>avec sommabilité pour $\mathcal{T}$, alors</u> $a_s = (x|u_s)$ <u>pour tout $s \in G$</u>.

<u>Démonstration</u> (d'après Bures [1]): Soient $\varphi \in A_*^+$, $\varepsilon > 0$ et $x \in M$; il existe $f_0 \in K(G,A)$ tel que $\beta_\varphi(x - f_0) \leqslant \varepsilon$. Soit J_0 le sous-ensemble fini de G formé des $s \in G$ tel que $f_0(s) \neq 0$; posons $g_0 = \sum_{s\in J_0}(x|u_s)u_s$; en écrivant

$$x - f_0 = x - g_0 + \sum_{s\in J_0}[(x|u_s) - f_0(s)]u_s$$

et en utilisant l'orthogonalité des u_s, on obtient

$$(x-f_0|x-f_0) = (x-g_0|x-g_0) + (z|z)$$

où $z = \sum_{s\in J_0}[(x|u_s) - f_0(s)]u_s$; on a donc

$$(x-g_0|x-g_0) \leqslant (x-f_0|x-f_0)$$

et

$$\beta_\varphi(x-g_0) \leqslant \varepsilon .$$

Soit J une partie finie de G contenant J_0 et posons $g = \sum_{s\in J}(x|u_s)u_s$; comme ci-dessus on obtient

$$(x-g_0|x-g_0) = (x-g+g-g_0|x-g+g-g_0) = (x-g|x-g)+(g-g_0|g-g_0)$$

d'où $\beta_\varphi(x-g) \leqslant \beta_\varphi(x-g_0) \leqslant \varepsilon$. Donc $x = \Sigma(x|u_s)u_s$.
Si maintenant $x = \Sigma a_s u_s$, avec $a_s \in A$ et sommabilité pour $\mathcal{T}$, la continuité de $(x,y)\mapsto(x|y)$ et l'orthogonalité des u_s montrent que $(x|u_s) = a_s$ pour tout $s \in G$. Le théorème est démontré.

Nous allons voir maintenant que les formules qui donnent l'adjoint et le produit dans $K(G,A)$ sont encore valables dans M.

<u>Proposition I.4.</u> <u>Soient $x, y \in M$; posons, pour tout $s \in G$,</u> $(x|u_s) = a_s$, $(y|u_s) = b_s$, $(x^*|u_s) = \hat{a}_s$ <u>et</u> $(xy|u_s) = c_s$. <u>On a les égalités</u>:

1) $\hat{a}_s = \sigma_s(a^*_{s^{-1}})$;
2) $c_s = \sum_{t\in G} a_t \sigma_t(b_{t^{-1}s})$ <u>avec sommabilité pour la topologie $\sigma(A,A_*)$</u>.

<u>Démonstration</u> : 1) L'égalité à démontrer est vraie si $x \in K(G,A)$. Comme $\hat{a}_s = \Phi(x^*u_s^*)$ et $\sigma_s(a^*_{s^{-1}}) = \sigma_s(\Phi(xu_s)^*)$ sont deux fonctions σ-continues de $x \in M$ on a le résultat par σ-densité de $K(G,A)$ dans M.

2) On a

$$c_s = (xy|u_s) = \phi(xyu_s^*) = \phi(x(u_sy^*)^*) = (x|u_sy^*).$$

En utilisant la relation 1) pour y^* et la continuité pour $\mathcal{T}$ de $z \in M \longmapsto u_s z \in M$ on obtient

$$u_s y^* = \sum_{r\in G} \sigma_r(b^*_{r^{-1}s})u_r$$

La continuité de $(x,y) \longmapsto (x|y)$ (voir Proposition I.2.) donne alors

$$c_s = (x\,|\,u_sy^*) = \Big(\sum_{t\in G} a_t u_t \,\Big|\, \sum_{r\in G} \sigma_r(b^*_{r^{-1}s})u_r\Big)$$
$$= \sum_{t\in G} a_t\,\sigma_t(b_{t^{-1}s})$$

avec sommabilité pour $\sigma(A,A_*)$.

En remarquant que $\phi(xx^*) = (xx^*|u_e)$ et $\phi(x^*x) = (x^*x|u_e)$ on déduit de la proposition le

<u>Corollaire</u> : <u>Pour tout $x \in M$ on a, en posant</u> $(x|u_s) = a_s$ <u>pour tout $s \in G$</u>,

$$\phi(xx^*) = \sum_{s\in G} a_s a_s^*$$
$$\phi(x^*x) = \sum_{s\in G} \sigma_{s^{-1}}(a_s^* a_s)$$

<u>avec sommabilité pour $\sigma(A,A_*)$</u>.

<u>Remarque I.2.</u> La somme 2) de la proposition I.4. converge en fait pour la topologie induite sur A par $\mathcal{T}$; cela découle de la continuité pour $\mathcal{T}$ des applications $z \in M \longmapsto zy \in M$ et $z \in M \longmapsto (z|u_t) \in A$, quel que soit $t \in G$. Il faut noter ici que la topologie induite sur A par $\mathcal{T}$ est définie par les semi-normes $\varphi(aa^*)^{\frac{1}{2}}$, $\varphi \in A_*^+$; elle est plus fine que $\sigma(A,A_*)$ et plus grossière que $s^*(A,A_*)$, mais non comparable à $s(A,A_*)$.

<u>Remarque I.3.</u> Si τ est une trace normale semi-finie fidèle et G-invariante sur A^+, le corollaire ci-dessus montre que $\tau \circ \phi$ est une trace normale semi-finie fidèle sur M^+; $\tau \circ \phi$ est finie si et seulement si τ est finie. Le théorème 1.3. est du même type que celui que Suzuki [1] a démontré lorsque A est un facteur II_1 et M est muni de la norme d'espace préhilbertien définie par la trace i.e. $\|x\|_2 = \tau \circ \phi(xx^*)^{\frac{1}{2}}$. Notons que dans ce cas la topologie $\mathcal{T}$

est plus fine que la topologie définie par $\|\cdot\|_2$ car " $x_\alpha \longrightarrow o$ pour τ " implique " $\varphi\cdot\phi(x_\alpha x_\alpha^*)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$ pour tout $\varphi \in A_*^+$ " donc en particulier " $\tau\cdot\phi(x_\alpha x_\alpha^*)^{\frac{1}{2}} = \|x_\alpha\|_2 \longrightarrow 0$ ".

<u>Remarque I.4.</u> Prenons $A = \mathbb{C}$, G opérant trivialement sur $\mathbb{C}$ i.e. $\sigma_s(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $s \in G$. Le produit croisé $M = W^*(\mathbb{C}, G, 1)$ est alors isomorphe à l'algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H} = l^2_G$ engendrée par la représentation régulière gauche de G; il est noté U(G). La projection ϕ est une trace normale finie et fidèle et la topologie τ est alors la topologie d'espace préhilbertien définie par cette trace. Le théorème I.3. est alors un résultat de Murray et von Neumann.

<u>Application</u> : <u>Conditions suffisantes pour que $W^*(A,G,\sigma)$ soit un facteur</u>.

Comme application du théorème I.3., nous donnons ici quelques généralisations de résultats connus.

1) Nous dirons que G opère <u>quasi librement</u> sur A si pour tout $s \in G$, $s \neq e$, on a l'implication suivante:

$$a \in A,\ ab = \sigma_s(b)a \text{ pour tout } b \in A \Rightarrow a = 0.$$

Si A est un facteur cela revient à dire que tout σ_s, $s \neq e$, est un automorphisme extérieur et si A est abélienne on retrouve la notion de "free action" de von Neumann (tout projecteur $\neq 0$ de A majore un projecteur $\neq 0$ de A qui est orthogonal à son image par σ_s). Notons que si G opère <u>presque librement</u> sur A (i.e. opère quasi librement sur Z(A), voir Zeller-Meier [1], définition 1.13) alors G opère quasi librement sur A. L'intérêt de la notion d'action quasi libre est qu'elle englobe le cas des automorphismes extérieurs d'un facteur. Pour tout cela voir Kallman [1].

<u>Proposition I.5.</u> (voir Zeller-Meier [1], Corollaire 8.10.) <u>Soit $M = W^*(A,G,\sigma)$ avec G opérant quasi librement sur A.</u>

i) <u>Le commutant de A dans M est égal à Z(A) (= centre de A).</u>

ii) <u>$Z(M) = Z(A)^G$ (= ensemble des points de Z(A) fixes par G).</u>

iii) M est un facteur si et seulement si G opère ergodiquement dans $Z(A)$ i.e. $Z(A)^G = \mathbb{C}$.

Démonstration : i) Soit $x \in M$ un élément commutant à A. Pour tout $s \in G$ et tout $b \in A$ on a

$$(x|u_s)b = \phi(xu_s^* b) = \phi(x\sigma_{s^{-1}}(b)u_s^*) = \phi(\sigma_{s^{-1}}(b)xu_s^*) = \sigma_{s^{-1}}(b)(x|u_s^*) ;$$

comme G opère quasi librement on en déduit que $(x|u_s) = 0$ pour tout $s \neq e$, donc que $x \in A$. L'inclusion inverse est évidente.

ii) Par i) on a $Z(M) \subset Z(A)$. De plus si $a \in Z(M)$ on a $au_s = u_s a$ pour tout $s \in G$ donc $a \in Z(A)^G$. La réciproque est claire.

iii) découle de ii).

2) Le résultat suivant se trouve dans Suzuki [1] dans le cas où A est un facteur.

Proposition I.6. Si G est abélien et opère ergodiquement et fidèlement dans A alors $M = W^*(A,G,\sigma)$ est un facteur.

Démonstration : Soit $x \in Z(M)$; par continuité (pour τ) des applications $x \longrightarrow u_t x$ et $x \longrightarrow xu_t$ et par commutativité de G, on a

$$u_t x = \sum_s u_t(x|u_s)u_s = \sum_s \sigma_t[(x|u_s)]\, u_{ts} ,$$

$$x\, u_t = \sum_s (x|u_s)\, u_{st} = \sum_s (x|u_s)\, u_{ts} ,$$

d'où $\sigma_t[(x|u_s)] = (x|u_s)$ pour s, $t \in G$. Donc $(x|u_s) \in A^G$; par hypothèse il existe alors $\lambda_s \in \mathbb{C}$ tel que $(x|u_s) = \lambda_s 1$. De l'égalité $ax = xa$, pour $a \in A$, on tire

$$a(x|u_s) = (x|u_s)\, \sigma_s(a) ,$$

donc $\lambda_s a = \lambda_s\, \sigma_s(a)$. Ceci étant vrai pour tout $s \in G$ et tout $a \in A$, on doit avoir $\lambda_s = 0$ si $\sigma_s \neq 1$, donc pour tout $s \neq e$. Ainsi $x = \lambda_e 1$.

3) Le résultat classique selon lequel $U(G)$ est un facteur si G est un groupe ICC (les classes d'éléments conjugués, excepté celle de e, sont infinies) peut se généraliser (voir Zeller-Meier [1] Prop.8.12.).

Rappelons que A est dite <u>G-finie</u> si pour tout $a \in A^+$, $a \neq 0$, il existe une forme G-invariante $\varphi \in A_*^+$ telle que $\varphi(a) > 0$.

<u>Proposition I.7.</u> <u>Soit $M = W^*(A,G,\sigma)$. Si G est un groupe ICC et si A est G-finie alors $Z(M) \subset Z(A)$. Donc si A est un facteur, M est un facteur.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in Z(M)$; posons $(x|u_s) = a_s$ pour tout $s \in G$. En égalant les coefficients de u_s dans $xu_t = u_t x$ on obtient $\sigma_t(a_s) = a_{tst^{-1}}$, d'où

$$\sigma_t(a_s a_s^*) = a_{tst^{-1}}\, a_{tst^{-1}}{}^*$$

pour $s,t \in G$. Pour toute forme G-invariante $\varphi \in A_*^+$ on a donc

$$(*) \qquad \varphi(a_s a_s^*) = \varphi(a_{tst^{-1}}\, a_{tst^{-1}}{}^*)$$

pour $s,t \in G$. La sommabilité pour la topologie $\sigma(A,A_*)$ de $\Phi(xx^*) = \sum a_s a_s{}^*$ implique, pour tout $\varphi \in A_*^+$, la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$. Le groupe G étant ICC, la relation $(*)$ montre qu'on doit avoir $\varphi(a_s a_s{}^*) = 0$ pour tout $s \neq e$ et toute forme G-invariante $\varphi \in A_*^+$. Comme A est G-finie on a $a_s = 0$ pour tout $s \neq e$, donc $x \in A$ et $x \in Z(A)$.

<u>Corollaire</u> : <u>Si A est un facteur fini et G un groupe ICC $M = W^*(A,G,\sigma)$ est un facteur fini.</u>

En effet, un facteur fini est G-fini quel que soit G et sa trace est G-invariante.

Chapitre II.: UN THEOREME DE PROLONGEMENT ET SES APPLICATIONS

Introduction.

Deux W*-algèbres possédant des sous-algèbres involutives σ-denses isomorphes ne sont pas nécessairement isomorphes. Pearcy et Ringrose [1] ont obtenu, pour des algèbres finies, un résultat permettant de prolonger les isomorphismes qui conservent les applications canoniques $\natural$ sur les centres. Enomoto et Tamaki [1] ont généralisé ce résultat, mais ils gardent une condition de finitude. Indépendamment de leur travail, nous avons obtenu un résultat plus fort: on peut prolonger les isomorphismes qui conservent des projections positives normales fidèles. Ce résultat peut s'exprimer à l'aide des structures "A-préhilbertiennes" rencontrées au § 1.4. et montre une nouvelle fois qu'une W*-algèbre munie d'une telle projection se comporte parfois comme un espace hilbertien. Au paragraphe 2 nous tirons de ce théorème quelques résultats concernant certaines sous-algèbres et certains automorphismes du produit croisé. Puis au paragraphe 3 nous étudions la sous-algèbre des points fixes par un groupe d'automorphismes. Notre théorème nous permet, sous certaines conditions, d'identifier le commutant de cette algèbre avec un produit croisé. C'est une généralisation du résultat utilisé par Nakamura et Takeda dans leur théorie de Galois pour les facteurs II_1; il nous permet d'obtenir l'injectivité de l'application "sous-groupe $\longmapsto$ sous-algèbre". Nous étudions la surjectivité de cette application sur deux exemples.

§ II.1. Prolongement de certains isomorphismes.

Soient M [resp. $\tilde{M}$] une W*-algèbre, N [resp. $\tilde{N}$] une sous-W*-algèbre de M [resp. $\tilde{M}$] contenant l'élément unité de M [resp. $\tilde{M}$], et ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] une projection positive normale et fidèle de M sur N [resp. de $\tilde{M}$ sur $\tilde{N}$]. Soient M_0 [resp. $\tilde{M}_0$] une sous-algèbre involutive de M [resp. $\tilde{M}$], contenant N [resp. $\tilde{N}$] et σ-dense dans M [resp. $\tilde{M}$] et Λ_0 un isomorphisme (d'algèbres involutives) de M_0 sur $\tilde{M}_0$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

1) $\Lambda_0(N) = \tilde{N}$; on notera Λ la restriction de Λ_0 à N;
2) $\tilde{\phi}\cdot\Lambda_0 = \Lambda\cdot(\phi|M_0)$.

On peut illustrer cette situation par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} M & & \tilde{M} \\ \cup & & \cup \\ M_0 & \xrightarrow{\Lambda_0} & \tilde{M}_0 \\ \phi\big\downarrow & & \big\downarrow\tilde{\phi} \\ N & \xrightarrow[\Lambda]{} & \tilde{N} \end{array}$$

<u>Théorème II.1.</u> <u>Dans ces conditions Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme $\bar{\Lambda}$ de M sur $\tilde{M}$, qui vérifie</u>

$$\tilde{\phi}\cdot\bar{\Lambda} = \Lambda\circ\phi .$$

<u>Démonstration</u> :

a) Soit $\omega\in N_*^+$; on a $\omega\circ\phi\in M_*^+$. L'ensemble $I_\omega = \{x\in M \mid \omega\circ\phi(x^*x) = 0\}$ est un idéal à gauche fermé pour la norme et M/I_ω est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $(x_\omega|y_\omega)_\omega = \omega\cdot\phi(y^*x)$ [x_ω désigne la classe de $x\in M$ dans M/I_ω]. Soit $\mathcal{H}_\omega$ l'espace de Hilbert complété de M/I_ω.

Montrons que $M_0/M_0\cap I_\omega$ est dense dans $\mathcal{H}_\omega$. Pour cela il suffit de voir que $M_0/M_0\cap I_\omega$ est dense dans M/I_ω; soient $x\in M$ et $\varepsilon>0$; comme M_0 est $s(M,M_*)$-dense dans M, il existe un $x_0\in M_0$ tel que $\omega\circ\phi[(x-x_0)^*(x-x_0)] \leqslant \varepsilon$; mais $\omega\circ\phi[(x-x_0)^*(x-x_0)] = \|x_\omega - (x_0)_\omega\|_\omega^2$ d'où l'affirmation.

D'autre part à ω correspond un $\tilde{\omega}\in\tilde{N}_*^+$ unique par la relation $\omega = \tilde{\omega}\cdot\Lambda$ [$\Lambda : N\longrightarrow\tilde{N}$ étant un isomorphisme est σ-bicontinu].

On construit comme ci-dessus les objets $\tilde{\omega}\cdot\tilde{\phi}$, $\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$, $\tilde{M}/\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$ et $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}}$.

Montrons que $\Lambda_o(M_0 \cap I_\omega) = \tilde{M}_0 \cap \tilde{I}_{\tilde{\omega}}$. Pour tout $x \in M_0$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}\cdot\tilde{\phi}\left[\Lambda_o(x)^*\Lambda_o(x)\right] &= \tilde{\omega}\circ\tilde{\phi}\cdot\Lambda_o(x^*x)\\ &= \omega\cdot\Lambda^{-1}\cdot\Lambda\cdot\phi(x^*x)\\ &= \omega\cdot\phi(x^*x)\end{aligned}$$

d'où l'affirmation.

Donc Λ_o induit une application linéaire biunivoque

$$\mathcal{U}_\omega : M_o/M_o\cap I_\omega \longrightarrow \tilde{M}_o/\tilde{M}_o\cap\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$$

définie par $U_\omega(x_\omega) = (\Lambda_o(x))_{\tilde{\omega}}$. L'égalité ci-dessus s'écrit encore

$$\| \mathcal{U}_\omega(x_\omega)\|^2_{\tilde{\omega}} = \| x_\omega\|^2_\omega$$

donc $\mathcal{U}_\omega$ se prolonge en une isométrie, notée encore $\mathcal{U}_\omega$, entre $\mathcal{H}_\omega$ et $\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}}$.

b) Soit maintenant $\pi_\omega : M \to L(\mathcal{H}_\omega)$ la représentation associée à $\omega\circ\phi$ [i.e. pour tout $x \in M$, $\pi_\omega(x)$ est le prolongé à $\mathcal{H}_\omega$ de l'opérateur $y_\omega \longmapsto (xy)_\omega$]; on construit de même $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}} : \tilde{M} \to L(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}})$.

Montrons que, pour tout $x \in M_0$, on a

$$\mathcal{U}_\omega\circ\pi_\omega(x) = \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_o(x))\circ\mathcal{U}_\omega . \qquad \begin{array}{ccc}\mathcal{H}_\omega & \xrightarrow{\mathcal{U}_\omega} & \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}}\\ {\scriptstyle\pi_\omega(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_o(x))}\\ \mathcal{H}_\omega & \xrightarrow[\mathcal{U}_\omega]{} & \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}}\end{array}$$

Il suffit de vérifier cette égalité sur $M_0/M_0\cap I_\omega$; or, pour tout $y_\omega \in M_0/M_0\cap I_\omega$, on a

$$[\mathcal{U}_\omega\circ\pi_\omega(x)]\, y_\omega = \mathcal{U}_\omega\cdot(xy)_\omega = (\Lambda_o(xy))_{\tilde{\omega}}$$

et

$$[\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_o(x))\,\mathcal{U}_\omega]\, y_\omega = \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_o(x))\cdot(\Lambda_o(y))_{\tilde{\omega}} = (\Lambda_o(x)\Lambda_o(y))_{\tilde{\omega}}$$

d'où l'égalité cherchée.

Donc l'isomorphisme spatial

$$T \in L(\mathcal{H}_\omega) \longmapsto \mathcal{U}_\omega\cdot T\cdot\mathcal{U}_\omega^{-1} \in L(\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}})$$

envoie $\pi_\omega(M_0)$ sur $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M}_0)$. Comme π_ω et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}$ sont des W*-représentations, $\pi_\omega(M_0)$ et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M}_0)$ sont ultrafaiblement denses dans $\pi_\omega(M)$ et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M})$ respectivement, et l'isomorphisme ci-dessus envoie $\pi_\omega(M)$ sur $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M})$.

c) Considérons enfin l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \oplus\mathcal{H}_\omega$ $(\omega\in N_*^+)$ et la W*-représentation $\pi = \oplus\pi_\omega$ $(\omega\in N_*^+)$ de M dans $L(\mathcal{H})$; $\pi(M)$ est une W*-algèbre et comme ϕ est fidèle, π est un isomorphisme de M sur $\pi(M)$. On construit de même $\tilde{\mathcal{H}} = \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\omega}}$ $(\omega \in N_*^+)$ et $\tilde{\pi} = \oplus \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}$ $(\omega \in N_*^+)$ et on a le même résultat. Soit $\mathcal{U}$ l'isométrie de $\mathcal{H}$ sur $\tilde{\mathcal{H}}$ définie par $\mathcal{U}(\xi_\omega) = (\mathcal{U}_\omega \xi_\omega)$; il est clair que l'isomorphisme spatial

$$T \in L(\mathcal{H}) \longmapsto \mathcal{U} \cdot T \cdot \mathcal{U}^{-1} \in L(\tilde{\mathcal{H}})$$

envoie $\pi(M)$ sur $\tilde{\pi}(\tilde{M})$. Alors en posant, pour tout $x \in M$,

$$\bar{\Lambda}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}\pi(x)\mathcal{U}^{-1})$$

on a défini le prolongement cherché. L'unicité étant évidente, le théorème est démontré.

Le corollaire suivant est une généralisation d'un théorème de C. Pearcy et J.R. Ringrose [1] ainsi que de son extension par M. Enomoto et K. Tamaki [1].

<u>Corollaire</u> : <u>Soient M une W*-algèbre, N une sous-W*-algèbre de M contenant l'élément unité de M et Φ une projection positive normale et fidèle de M sur N. Soient A et B deux sous-algèbres involutives de M dont les éléments commutent avec ceux de N. Notons $\hat{A}$ et $\hat{B}$ les W*-algèbres engendrées par A et N, B et N respectivement. Si un isomorphisme Ψ de A sur B vérifie la condition $\Phi(\Psi(x)) = \Phi(x)$ pour tout $x \in A$, il se prolonge en un isomorphisme $\hat{\Psi}$ de $\hat{A}$ sur $\hat{B}$ tel que</u>

1) <u>$\hat{\Psi}(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$</u>,
2) <u>$\hat{\Psi}(x) = x$ pour tout $x \in N$</u>,
3) <u>$\Phi(\hat{\Psi}(x)) = \Phi(x)$ pour tout $x \in \hat{A}$</u>,
4) <u>$\hat{\Psi}(\bar{A}) = \bar{B}$ [$\bar{A}, \bar{B}$: σ-fermetures de A,B]</u>.

<u>Démonstration</u> : Notons A_0 [resp. B_0] les sous-algèbres involutives de M engendrées par A et N [resp. B et N]. Comme les éléments de A et N commutent, A_0 est l'ensemble des sommes finies $x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec $a_i \in A$ et $x_i \in N$. De même pour B_0. On aimerait prolonger Ψ à A_0 en posant

$$\Psi_0\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Psi(a_i) x_i \quad .$$

Pour que cette relation définisse Ψ_o il suffit que

$$x_o + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = o$$

soit équivalent à

$$x_o + \sum_{i=1}^{n} \Psi(a_i) x_i = o .$$

Or en utilisant les propriétés algébriques de ϕ, on voit facilement que

$$\phi[(x_o+\Sigma a_i x_i)^*(x_o+\Sigma a_i x_i)] = \phi[(x_o+\Sigma \Psi(a_i)x_i)^*(x_o+\Sigma \Psi(a_i)x_i)]$$

ce qui, compte tenu de la fidélité de ϕ, établit l'équivalance ci-dessus; Ψ_o est donc bien défini. Il est alors facile de voir que Ψ_o est un isomorphisme d'algèbres involutives de A_0 sur B_0, que $\Psi_o(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$, $\Psi_o(x) = x$ pour tout $x \in N$ et $\phi \cdot \Psi_o(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in A_0$. Le théorème II.1. affirme alors qu'on peut prolonger Ψ_o en un isomorphisme de $\hat{A}$ ($= \sigma$-fermeture de A_0) sur $\hat{B}$ ($= \sigma$-fermeture de B_0) qui vérifie 1) 2) 3) et 4).

<u>Remarque II.1</u>. Ajoutons aux hypothèses du théorème II.1. les conditions $N = \tilde{N}$ et $\Lambda = id_N$ et considérons sur M [resp. $\tilde{M}$] la structure "N-préhilbertienne" définie par ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] (voir § I.4.). Λ_o est alors un homomorphisme de N-modules et la condition $\tilde{\phi}\cdot\Lambda_o = \phi|M_o$ est équivalente à

$$(\Lambda_o(x) \mid \Lambda_o(y)) = (x|y)$$

pour $x,y \in M_0$ i.e. Λ_o conserve le "produit scalaire".

§ II.2. Application 1 : Compléments sur le produit croisé.

1) Soit $M = W^*(A,G,\sigma)$ le produit croisé d'une W^*-algèbre A par un groupe G selon la représentation σ. Si H est un sous-groupe de G on peut considérer l'homomorphisme σ_H, restriction de σ à H, et le produit croisé $W^*(A,H,\sigma_H)$.

Proposition II.1. $W^*(A,H,\sigma_H)$ est canoniquement isomorphe à la sous-W^*-algèbre N de $M = W^*(A,G,\sigma)$ formée des $x \in M$ tels que $(x|u_s) = 0$ pour tout $s \in G \setminus H$.

Démonstration : On voit facilement que N est une algèbre involutive (pour le produit et l'involution voir le § 1.4.); elle est σ-fermée dans M car égale à l'intersection des ensembles σ-fermés $\{ x \in M \mid (x|u_s) = 0 \}$ pour $s \in G \setminus H$. D'autre part la sous-algèbre involutive N_0 des sommes finies $\sum_{s\in H} a_s u_s$, $a_s \in A$, est σ-dense dans N car si $x \in N$ et J est une partie finie de G, on a

$$\sum_{s\in J}(x|u_s)\, u_s = \sum_{s\in J\cap H}(x|u_s)u_s \in N_0 .$$

Soit maintenant, pour tout $s \in H$, $v_s : H \longrightarrow A$ la fonction caractéristique de s. On sait, par construction du produit croisé, que l'algèbre involutive P_0 des sommes finies $\sum_{s\in H} a_s v_s$ est σ-dense dans $W^*(A,H,\sigma_H)$. L'application $\Lambda_0 : \sum a_s v_s \in P_0 \longmapsto \sum a_s u_s \in N_0$ est un isomorphisme d'algèbres involutives tels que $\Lambda_0|A = \mathrm{id}_A$. Les projections canoniques $\Phi : W^*(A,G,\sigma) \longrightarrow A$ et $\Psi : W^*(A,H,\sigma_H) \longrightarrow A$ vérifient $\Phi \cdot \Lambda_0 = \Psi \mid P_0$. Par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme Λ de $W^*(A,H,\sigma_H)$ sur N.

2) Notons M_0 l'algèbre involutive des sommes finies $\sum_{s\in G} a_s u_s$, $a_s \in A$; M_0 est σ-dense dans M. Soit α un automorphisme de G. L'application $\Lambda_0 : \sum a_s u_s \longmapsto \sum a_s u_{\alpha(s)}$ est un automorphisme de M_0 (pour la structure d'algèbre involutive); on a $\Lambda_0|A = \mathrm{id}_A$ et $\Phi \cdot \Lambda_0 = \Phi \mid M_0$, donc par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge en un automorphisme Λ_α de M. Kallman [1] a étudié certaines propriétés de ces automorphismes dans le cas où $A = \mathbb{C}$ et G est groupe ICC (i.e. les classes d'éléments conjugués des éléments $\neq e$ sont infinies). Nous généralisons ici un de ses résultats:

Proposition II.2. Supposons que A soit G-finie. Une condition suffisante pour que Λ_α opère quasi librement

<u>sur M est que, pour tout $s \in G$, l'ensemble $\{\alpha(t)^{-1}st \mid t \in G\}$ soit infini.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in M$ tel que $xy = \Lambda_\alpha(y)x$ pour tout $y \in M$. Posons $(x|u_s) = a_s$ pour tout $s \in G$; en égalant les coefficients de u_s dans l'égalité $xu_t = \Lambda_\alpha(u_t)x = u_{\alpha(t)}x$, on obtient $a_s = \sigma_{\alpha(t)}(a_{\alpha(t)^{-1}st})$, d'où

$$(*) \qquad a_s a_s^* = \sigma_{\alpha(t)}[a_{\alpha(t)^{-1}st}\, a_{\alpha(t)^{-1}st}^*]$$

pour $s,t \in G$. La sommabilité pour la topologie $\sigma(A,A_*)$ de $\Phi(xx^*) = \sum a_s a_s^*$ implique, pour tout $\varphi \in A_*^+$, la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$. La condition "$\{\alpha(t^{-1})st \mid t \in G\}$ est infini pour tout $s \in G$" et la relation $(*)$ impliquent alors que $\varphi(a_s a_s^*) = 0$ pour tout $s \in G$ et toute forme G-invariante $\varphi \in A_*^+$. Comme A est G-finie on a $a_s = 0$ pour tout $s \in G$, donc $x = 0$ et Λ_α opère quasi librement.

Nous verrons plus loin (§ II.3.) un exemple qui montre que l'hypothèse "A est G-finie" est essentielle. On peut étendre sans restriction un autre résultat de Kallman :

<u>Proposition II.2'</u>. <u>Pour que Λ_α ne laisse que les éléments de A fixes, il faut et il suffit que pour tout $s \in G$, $s \neq e$, l'ensemble $\{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit infini.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in M$; posons $a_s = (x|u_s)$ pour tout $s \in G$. Si $\Lambda_\alpha(x) = x$ on voit facilement que, pour tout $s \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a_s = a_{\alpha^n(s)}$, donc pour tout $\varphi \in A_*$, $\varphi[a_s a_s^*] = \varphi[a_{\alpha^n(s)} a_{\alpha^n(s)}^*]$; la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$ montre alors que la condition est suffisante. Inversément s'il existe $s \neq e$ tel que $F = \{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit fini, alors l'élément $x = \sum_{t \in F} u_t \in M$ vérifie $x \notin A$ et $\Lambda_\alpha(x) = x$.

§ II.3. Application 2 : Sous-algèbre des invariants par un groupe d'automorphismes.

Soient M une W*-algèbre, G un groupe discret et $\sigma : s \in G \longmapsto \sigma_s \in \mathrm{Aut}\, M$ un homomorphisme. En appliquant le théorème I.1. on voit qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une W*-représentation (non dégénérée) fidèle π de M dans $\mathcal{H}$ et une représentation unitaire V de G dans $\mathcal{H}$ tels que, pour tout $s \in G$ et tout $x \in M$, on ait

$$\pi(\sigma_s(x)) = V_s \pi(x) V_s^*.$$

Dans ce paragraphe, pour simplifier les notations, nous identifierons M et $\pi(M)$ de sorte que nous sommes placés dans les conditions suivantes: M est une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$ et V une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$ telle que pour tout $s \in G$, $V_s M V_s^* = M$; nous posons $\sigma_s(x) = V_s x V_s^*$ pour tout $s \in G$ et $V_G = \{V_s \mid s \in G\}$.

Soit $N = M^G$ la sous-algèbre de von Neumann de M formée des éléments $x \in M$ qui sont laissés fixes par G; on a $N = M \cap V_G'$ (V_G' = commutant de V_G dans $L(\mathcal{H})$), donc N' est l'algèbre de von Neumann engendrée par M' et V_G. Constatons d'autre part que G opère par automorphismes dans M'; en effet, si $x' \in M'$ et $s \in G$ on a, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} V_s x' V_s^* x &= V_s x' \sigma_{s^{-1}}(x) V_s^* = V_s \sigma_{s^{-1}}(x) x' V_s^* \\ &= x V_s x' V_s^* , \end{aligned}$$

donc $V_s x' V_s^* \in M'$. Posons $\sigma_s'(x') = V_s x' V_s^*$; σ' est un homomorphisme de G dans Aut(M'). On voit donc que

$$(N')_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i' V_{s_i} \mid x_i' \in M' \right\}$$

est une algèbre involutive dont la fermeture faible est N'. Nous allons chercher à identifier N' et le produit croisé $W^*(M', G, \sigma')$. Nous aurons besoin de la remarque suivante:

Lemme : Si l'action σ de G dans M est quasi libre, il en est de même de l'action σ' de G dans M'.

Démonstration : Soient $s \neq e$ et $x' \in M'$ tel que $x'y' = \sigma_s'(y')x'$ pour tout $y' \in M'$; il faut voir que $x' = 0$. On a $x'y' = V_s y' V_s^* x'$, donc $V_s^* x' y' = y' V_s^* x'$, pour tout $y' \in M'$; d'où $V_s^* x' \in M$ et

$$V_s^* x' y = V_s^* y x' = \sigma_{s^{-1}}(y) V_s^* x'$$

pour tout $y \in M$. Comme l'action σ de G dans M est quasi libre on a $V_s^* x' = 0$, $x' = 0$.

Nous traiterons d'abord le cas particulier où G est un groupe fini.

1^{er} cas : G est un groupe fini.

Lorsque G est fini on a $W^*(M',G,\sigma') = K(G,M')$ et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{s\in G} x'_s u_s$ (somme finie). On définit donc une application

$$\Lambda : W^*(M',G,\sigma') \longrightarrow N'$$

en posant $\Lambda(\sum x'_s u_s) = \sum x'_s V_s$. Comme les relations qui lient l'action σ' de G dans M' et les représentations unitaires u et V sont les mêmes [i.e.

$$\sigma'_s(x') = u_s x' u_s^* = V_s x' V_s^*$$

pour tout $x'\in M'$ et tout $s\in G$] on voit que Λ est un homomorphisme d'algèbres involutives. Montrons que Λ est σ-continu : soient π la représentation identité de M' dans $\mathcal{H}$ et $\tilde{\pi}$ la représentation de $W^*(M',G,\sigma')$ dans $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G,\mathcal{H})$ qui lui est associée; l'image $P = \tilde{\pi}(W^*(M',G,\sigma'))$ est une algèbre de von Neumann et $\tilde{\pi}$ un isomorphisme (théorème I.1.); il nous suffit donc de démontrer que l'homomorphisme $\Lambda\cdot\tilde{\pi}^{-1} : P \longrightarrow N'$ est ultrafaiblement continu; étant donné $\xi,\eta \in \mathcal{H}$, définissons $\tilde{\xi}, \hat{\eta} \in \tilde{\mathcal{H}}$ par

$$\tilde{\xi}(s) = \begin{cases} \xi & \text{si } s=e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \hat{\eta}(s) = V_s^*\eta \quad \text{pour tout } s\in G;$$

si $y = \sum x'_s u_s \in W^*(M',G,\sigma')$, on a, pour tout $t\in G$,

$$(\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi})(t) = \sum_s \sigma'_{t^{-1}}(x'_s)\,\tilde{\xi}(s^{-1}t) = \sigma'_{t^{-1}}(x'_t)\,\xi$$

et

$$\begin{aligned}(\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi}\,|\,\hat{\eta}) &= \sum_t (\sigma'_{t^{-1}}(x'_t)\xi \,|\, V_t^*\eta) \\ &= \sum_t (x'_t V_t \xi \,|\, \eta) \\ &= (\Lambda(y)\xi\,|\,\eta),\end{aligned}$$

d'où on déduit la continuité ultrafaible de Λ. On voit ainsi que Λ est surjectif ($\Lambda(P)$ est une algèbre de von Neumann qui contient $(N')_0$) et que son noyau est un idéal bilatère σ-fermé. On a démontré:

Proposition II.3. *Λ est un homomorphisme σ-continu de $W^*(M',G,\sigma')$ sur N'; il existe un projecteur p du centre de $W^*(M',G,\sigma')$ tel que Λ induise un isomorphisme de $pW^*(M',G,\sigma')$ sur N'.*

Corollaire : Soient M un facteur et G un groupe fini opérant par automorphismes extérieurs dans M. Alors $N = M^G$ est un facteur, $M \cap N' = \mathbb{C}\cdot 1$ et toute sous-W*-algèbre L telle que $N \subset L \subset M$ est un facteur. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_1} = M^{H_2}$ alors $H_1 = H_2$.

Démonstration : En effet, dans ces conditions $W^*(M', G, \sigma')$ est un facteur et Λ un isomorphisme de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N'; les deux premières affirmations découlent alors de la proposition I.5. Enfin L est un facteur car $L \cap L' \subset M \cap N' = \mathbb{C}\cdot 1$ et si H est un sous-groupe de G, $(M^H)'$ est l'image par Λ de la sous-algèbre $\{y \in W^*(M', G, \sigma') \mid (y|u_s) = 0 \text{ pour tout } s \notin H\}$ isomorphe à $W^*(M', H, \sigma'_H)$.

Remarque II.2. Lorsque M est un facteur II_1, ce corollaire se trouve dans un article de M. Nakamura et Z. Takeda [1], dont nous avons ici quelque peu généralisé la méthode. En utilisant des propriétés attachées plus étroitement aux facteurs II_1 (la trace finie ou la simplicité algébrique) les auteurs montrent que toute sous-algèbre de M contenant N est de la forme M^H où H est un sous-groupe de G, établissant ainsi une correspondance galoisienne entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant N. Nous n'avons pas pu établir, pour un facteur quelconque, la surjectivité de l'application $H \longmapsto M^H$.

Remarque II.3. Les hypothèses faites par Nakamura et Takeda [1] leur interdisaient de considérer des groupes G infinis. Nous pouvons affaiblir ces hypothèses et établir un isomorphisme Λ entre N' et $W^*(M', G, \sigma')$ sans restriction sur G; nous en déduirons plus loin un exemple de correspondance galoisienne lorsque G est infini.

2ème cas : G groupe quelconque.

Nous ne supposerons plus que G est fini mais nous ferons les deux hypothèses suivantes:

(h_1): G opère quasi librement (par σ) dans M;

(h_2): il existe une projection positive normale fidèle Ψ de N' sur M'.

Considérons sur $W^*(M',G,\sigma')$ et sur N' les structures "M'-préhilbertiennes" définies par Φ et Ψ respectivement (Φ désigne la projection positive normale fidèle de $W^*(M',G,\sigma')$ sur M'; voir § I.4.); nous noterons $\mathcal{T}_\Phi$ et $\mathcal{T}_\Psi$ les topologies associées. Notons que $\{V_s\}$ est un système orthonormé dans N'; en effet, pour tout $x' \in M'$ et tout $s \in G$, $s \neq e$, on a

$$\Psi(V_s)x' = \Psi(V_s x') = \Psi(\sigma_s(x')V_s) = \sigma_s(x')\Psi(V_s)$$

d'où

$\Psi(V_s) = 0$ à cause de l'hypothèse (h_1); on a donc $(V_s|V_t) = \Psi(V_s V_t^*) = \Psi(V_{st^{-1}}) = 0$ si $s \neq t$ et $(V_s|V_s) = \Psi(1) = 1$.
Considérons les sous-algèbres involutives σ-denses $K(G,M')$ et $(N')_0$ de $W^*(M',G,\sigma')$ et N' respectivement; on définit un homomorphisme d'algèbres involutives Λ_0 de $K(G,M')$ sur $(N')_0$ en posant

$$\Lambda_0\Big(\sum_{s\in G} x_s' u_s\Big) = \sum_{s\in G} x_s' V_s \qquad \text{(somme finie)}$$

on voit immédiatement que $\Lambda_0|M' = \mathrm{id}_{M'}$ et $\Psi\circ\Lambda_0 = \Phi|K(G,M')$ d'où, pour $y_1, y_2 \in K(G,M')$, l'égalité

$$(\Lambda_0(y_1)\,|\,\Lambda_0(y_2)) = (y_1\,|\,y_2)$$

Λ_0 est donc injectif et se prolonge de façon unique en un isomorphisme Λ de $W^*(M',G,\sigma')$ sur N', qui vérifie $\Psi\circ\Lambda = \Phi$
On a démontré:

<u>Proposition II.4.</u> <u>Avec les hypothèses (h_1) et (h_2) ci-dessus il existe un isomorphisme</u>

$$\Lambda : W^*(M',G,\sigma') \longrightarrow N'$$

<u>tel que</u>

$$\Lambda\Big(\sum_{s\in G} x_s' u_s\Big) = \sum_{s\in G} x_s' V_s$$

<u>(les sommes convergent pour les topologies $\mathcal{T}_\Phi$ et $\mathcal{T}_\Psi$ respectivement).</u>

On en déduit, comme pour la proposition II.3., le corollaire suivant:

<u>Corollaire :</u> <u>Dans les conditions ci-dessus on a $M \cap N' = Z(M)$, $Z(N) = Z(M)^G$ donc N est un facteur si et seulement si G opère ergodiquement dans $Z(M)$. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_2} = M^{H_1}$ alors $H_1 = H_2$.</u>

Exemple II.1.

Soient G un groupe discret dénombrable et M la W*-algèbre abélienne l^{∞}_{G}. On définit un homomorphisme σ de G dans Aut(M)en posant $\sigma_s(a)(t) = a(s^{-1}t)$, pour $a \in M$ et $s,t \in G$. En particulier, si $e_t \in M$ est la fonction caractéristique de t, on a $\sigma_s(e_t) = e_{st}$; les $e_t (t \in G)$ étant les projecteurs minimaux de M on en déduit que l'action σ de G dans M est quasi libre.

Posons $\mathcal{H} = l^2_G$ et identifions M avec la sous-algèbre de $L(\mathcal{H})$ formée des opérateurs de multiplication par les éléments de M; M est alors une sous-algèbre abélienne maximale de $L(\mathcal{H})$ et il existe une projection positive normale fidèle Ψ de $L(\mathcal{H})$ sur M, définie, pour tout $x \in L(\mathcal{H})$, par $\Psi(x) = \sum_{s\in G} e_s x e_s$ (convergence forte), i.e. si $\{\varepsilon_s\}$ est la base orthonormée canonique de $\mathcal{H}$, $e_s \varepsilon_t = \delta_{st}\,\varepsilon_t$, alors

$$\left(\Psi(x)\,\varepsilon_t \,\middle|\, \varepsilon_s\right) = \begin{cases} (x\varepsilon_t \mid \varepsilon_t) & \text{si } s = t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $s \longmapsto U_s$ la représentation régulière gauche de G dans $\mathcal{H}$; on voit facilement que

$$\sigma_s(a) = U_s a U_s^*$$

pour tout $s \in G$ et tout $a \in M$. Notons que $M = M'$, $\sigma = \sigma'$ et $N = M^G = \mathbb{C}\cdot 1$. On tire alors de la proposition II.4. que $L(\mathcal{H})$ est canoniquement isomorphe à $W^*(M,G,\sigma)$; en particulier, <u>tout $x \in L(\mathcal{H})$ s'écrit de façon unique sous la forme</u>:

$$x = \sum_{s\in G} a_s U_s$$

<u>avec convergence pour la topologie $\mathcal{T}_\Psi$</u>; les coefficients a_s de x sont définis par $a_s = \Psi(xU_s^*)$, i.e.

$$a_s(t) = (x\varepsilon_{s^{-1}t} \mid \varepsilon_t)$$

pour $s,t \in G$. Grâce au théorème de Hellinger-Toeplitz on peut d'ailleurs caractériser les familles $\{a_s\}$ qui correspondent aux éléments de $L(\mathcal{H})$: <u>la famille $\{a_s\}_{s\in G}$ d'éléments de M définit un élément $x \in L(\mathcal{H})$, par $x = \sum a_s U_s$, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites</u> :

(1) $\sum_t |a_t(ts)|^2 < \infty$ <u>pour tout $s \in G$</u>;

(2) $\sum_s \left| \sum_t a_t(s)\,\xi(t^{-1}s)\right|^2 < \infty$ <u>pour tout $\xi \in \mathcal{H}$</u>.

Dans le cas particulier où $a_s = \lambda_s \in \mathbb{C}$, pour tout $s \in G$, on retrouve la caractérisation bien connue des éléments $x \in U(G)$:

(1)' $\sum_t |\lambda_t|^2 < \infty$;

(2)' $\sum_s |\sum_t \lambda_t \xi(t^{-1}s)|^2 < \infty$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$;

i.e. la fonction $\lambda : t \mapsto \lambda_t$ appartient à $\mathcal{H}$ et, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, le produit de convolution $\lambda * \xi$ appartient à $\mathcal{H}$. On a le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & L(\mathcal{H}) \arrow[dr, "\Psi"] & \\ U(G) \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "\tau"'] & & \ell^\infty_G \\ & \mathbb{C} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

Notons que $\Psi(\sum a_s U_s) = a_e$, donc que $\tau = \Psi \,|\, U(G)$ est la trace canonique sur $U(G)$.

Ce diagramme rend "naturelle" la caractérisation suivante des groupes amenables (voir Sakai [1], Prop. 4.4.21 et Tomiyama [1], Prop. 7.4.) et permet de préciser la relation liant P à φ:

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

a) G est amenable i.e. il existe un état G-invariant φ sur l^∞_G;

b) il existe une projection P de norme un de $L(\mathcal{H})$ sur $U(G)$.

Si ces conditions sont réalisées on a, pour tout $x = \sum a_s U_s \in L(\mathcal{H})$,

$$P(\sum a_s U_s) = \sum \varphi(a_s) U_s$$

et $\tau \circ P = \varphi \circ \Psi$.

Pour voir que b) implique a) il suffit de poser $\varphi(a) = \tau(P(a))$ pour tout $a \in l^\infty_G$; on utilise ensuite la positivité de P et la relation $P(\sigma_a(a)) = P(U_s a U_s^*) = U_s P(a) U_s^*$. Inversément supposons G amenable et soit $s \longmapsto V_s$ la représentation régulière droite de G dans $\mathcal{H}$. Pour tout $x = \sum a_s U_s \in L(\mathcal{H})$, la forme sesquilinéaire sur $\mathcal{H}$

$$B(\xi, \eta) = \varphi\{\ s \longmapsto (V_s x V_s^* \xi \,|\, \eta)\}$$

est continue; il existe donc $y \in L(\mathcal{H})$ tel que $B(\xi, \eta) = (y\xi \,|\, \eta)$ pour tout couple ξ, η de vecteurs de $\mathcal{H}$. La décomposition $y = \sum b_s U_s$ est donnée par

$$b_s(t) = (y\,\varepsilon_{s^{-1}t} \,|\, \varepsilon_t) = \varphi\{r \longmapsto (V_r x V_r^* \varepsilon_{s^{-1}t} \,|\, \varepsilon_t)\}$$
$$= \varphi\{r \longmapsto (x\,\varepsilon_{s^{-1}tr} \,|\, \varepsilon_{tr})\}$$

car $V_r \varepsilon_t = \varepsilon_{tr^{-1}}$; comme $(x\,\varepsilon_{s^{-1}t} \,|\, \varepsilon_t) = a_s(t)$ on a

$$b_s(t) = \varphi\{r \longmapsto a_s(tr)\} = \varphi(a_s)$$

puisque φ est G-invariant. On voit ainsi que $h_s = \varphi(a_s) \in \mathbb{C}$ donc que $y \in U(G)$. Posons $y = P(x)$; il est clair que P est une projection de $L(\mathcal{H})$ sur $U(G)$ et que $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$ car, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|P(x)\xi\|^2 = \varphi\{s \mapsto (V_s x V_s^* \xi \mid P(x)\xi)\} \leqslant \|x\| \|\xi\| \|P(x)\xi\|,$$

d'où $\|P(x)\xi\| \leqslant \|x\| \|\xi\|$.

Notons que le produit croisé $L(\mathcal{H}) = W^*(M,G,\sigma)$ montre que la proposition II.2. peut être fausse lorsque l'hypothèse de G-finitude n'est pas satisfaite.

Remarquons enfin que nous avons là un exemple d'une algèbre M, d'un groupe G et d'un homomorphisme $\sigma : G \mapsto \mathrm{Aut}(M)$ qui vérifient les conditions de la proposition II.4. mais pour lequel on n'a pas de correspondance galoisienne: l'application $G_1 \longmapsto M^{G_1}$ est injective mais non surjective. Prenons $G = \mathbb{Z}$ et $G_n = n\mathbb{Z}$; M^{G_n} est alors l'ensemble des fonctions $a \in M$ qui sont constantes sur les classes $s + n\mathbb{Z}$ $(s \in \mathbb{Z})$; or M contient d'autres sous-W*-algèbres que les M^{G_n} $(n \in \mathbb{Z})$, par exemple

$$L = \{a \in M \mid a(0) = a(1)\}$$

Nous allons voir maintenant un exemple où la correspondance galoisienne a lieu.

Exemple II.2.

Soit $G = H \times_\alpha K$ un groupe dénombrable, produit semi-direct des groupes H et K, α étant un homomorphisme de K dans Aut (H) [donc G est l'ensemble des couples $(h,k) \in H \times K$ avec la loi

$$(h,k)(h',k') = (h\,\alpha_k(h'),\ kk').$$

Nous identifierons H au sous-groupe $\{(h,e) \mid h \in H\}$ de G et K au sous-groupe $\{(e,k) \mid k \in K\}$; H est un sous-groupe distingué de G et $G/H = K$]. Nous supposerons que α vérifie la condition suivante, pour tout $h_0 \in H$ et tout $e \neq k \in K$, l'ensemble

$$\{\alpha_k(h)^{-1} h_0 h \mid h \in H\}$$

est infini.

Ces conditions sont vérifiées en prenant $H = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}^\times$ et $\alpha_k(h) = kh$.

Soient $A = l^{\infty}_{G}$ et $B = l^{\infty}_{K}$ qu'on identifiera à la sous-algèbre des fonctions $a \in A$ qui ne dépendent pas de la $1^{\text{ère}}$ variable i.e. qui sont constantes sur les classes modulo H. Soient U et V les représentations régulières gauche et droite de G dans $\mathcal{H} = l^{2}_{G}$, $U(G)$ et $V(G)$ les algèbres de von Neumann qu'elles engendrent dans $\mathcal{H}$. A et B seront également considérées comme des algèbres de von Neumann dans $\mathcal{H}$ (cf. exemple 1).

Soit M l'algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$ engendrée par $U(G)$ et B. Tout élément $x \in M$ s'écrit

$$x = \sum_{s \in G} b_s U_s$$

avec $b_s \in B$ et sommabilité pour $\mathcal{T}$ (cf. exemple 1). Pour tout $k \in K$ on a $V_{(e,k)} M V_{(e,k)}^* = M$ car $V_{(e,k)} B V_{(e,k)}^* = B$ et $V_{(e,k)} U(G) V_{(e,k)}^* = U(G)$. [on a $(h',k')(e,k) = (h',k'k)$]. Posons pour $x \in M$

$$\tau_k (x) = V_{(e,k)}\, x\, V_{(e,k)}^* \;;$$

τ est un homomorphisme de K dans $\mathrm{Aut}(M)$. Cette action est-elle quasi libre? On sait qu'il est équivalent de savoir si l'action de K dans $\mathrm{Aut}(M')$ est quasi libre. Déterminons M': pour $a \in A$ on a l'équivalence

$$a \in B \Leftrightarrow V_{(h,e)}\, a\, V_{(h,e)}^* = a \quad \text{pour tout } h \in H,$$

car $(h',k')(h,e) = (h'\alpha_k(b),k')$. Donc si $x \in L(\mathcal{H})$, $x = \sum_{s \in G} a_s U_s$, on a

$$\begin{aligned} x \in M &\Leftrightarrow a_s \in B \quad \text{pour tout } s \in G \\ &\Leftrightarrow V_{(h,e)}\, a_s\, V_{(h,e)}^* = a_s \quad \text{pour tout } s \in G \text{ et tout } h \in H \\ &\Leftrightarrow V_{(h,e)}\, x\, V_{(h,e)}^* = x \quad \text{pour tout } h \in U \\ &\Leftrightarrow x \in V(H)'. \end{aligned}$$

Donc $M' = V(H)$. D'autre part τ' est donné par

$$\begin{aligned} \tau'_k \left(\sum \lambda_{(h,e)} V_{(h,e)} \right) &= \sum \lambda_{(h,e)} V_{(e,k)} V_{(h,e)} V_{(e,k)}^* \\ &= \sum \lambda_{(h,e)} V_{(\alpha_k(h),e)} , \end{aligned}$$

i.e. τ'_k est l'automorphisme obtenu par prolongement de α_k à $V(H)$ (cf. § II.2.). L'hypothèse faite sur α_k ainsi que la proposition II.2. montrent alors que τ'_k $(k \neq e)$ opère quasi librement ($M' = V(H)$ est K-finie car la trace canonique est K-invariante).

L'algèbre N des points fixes de M par τ s'obtient facilement: si $x = \sum b_s U_s \in M$ vérifie

$$\tau_k(x) = \sum V_{(e,k)} b_s V_{(e,k)}^* U_s = x$$

pour tout $k \in K$, on a, pour tout $s \in G$,

$$V_{(e,k)} b_s V_{(e,k)}^* = b_s$$

i.e. b_s ne dépend pas de la $2^{\text{ème}}$ variable; mais alors $b_s = \lambda_s \in \mathbb{C}$ et $x \in U(G)$. On a donc $N = U(G)$.

Comme $N' = V(G)$ est une algèbre finie avec une trace normale finie et fidèle, il existe une projection positive normale et fidèle de $N' = V(G)$ sur $M' = V(H)$ (Sakai [1], Prop. 4.4.23).
La proposition II.4. s'applique donc et donne:

1) un isomorphisme canonique $N' = V(G) \cong W^*(M', K, \tau')$ $= W^*(V(H), K, \tau')$, ce qui n'est pas nouveau: on a toujours un isomorphisme

$$V(\Gamma \times_\alpha \Delta) \cong W^*(V(\Gamma), \Delta, \hat{\alpha})$$

quel que soit le produit semi-direct $\Gamma \times_\alpha \Delta$; mais en général, Δ n'opère pas quasi librement dans $V(\Gamma)$ par $\hat{\alpha}$.

2) un exemple de correspondance galoisienne: supposons que H est un groupe ICC; on en déduit que
   a) $M' = V(H)$ est un facteur II_1,
   b) M est un facteur II_∞,
   c) $N' = W^*(M', K, \tau')$ est un facteur (car M' est un facteur et K opère quasi librement; Prop. I.5.),
   d) G est ICC et N' est de type II_1,
   e) N est un facteur II_1.

   Comme M' est un facteur II_1 et K opère quasi librement dans M' on sait (M. Nakamura, Z. Takeda [2], Thm. 2) que toute sous-algèbre L' vérifiant $M' \subset L' \subset N'$ est un facteur de la forme

$$L' = \{z' \in N' \mid (z' \mid V_k) = 0 \text{ si } k \notin K_1\} \cong W^*(M', K_1, \tau_1)$$

   où K_1 est un sous-groupe de K.
   Mais alors

$$L = M^{K_1}$$

   i.e. toute sous-algèbre L vérifiant $N \subset L \subset M$ est un facteur de la forme M^{K_1}, K_1 sous-groupe de K. Par le corollaire de la proposition II.4. le sous-groupe K_1 est unique; on a donc une correspondance galoisienne entre les sous-groupes de K et les sous-algèbres de M qui contiennent $N = M^K$. On prendra par exemple pour H le sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ formé des permutations qui laissent fixes tous les éléments sauf un nombre fini d'entre eux, et pour K le sous-groupe cyclique de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ engendré par l'élément σ défini par $\sigma(n) = n + 1$. L'homomorphisme $\alpha : K \to \mathrm{Aut}(H)$ sera donné par $\alpha_{\sigma^m}(\pi) = \sigma^m \pi \sigma^{-m}$.

Chapitre III : UNE CORRESPONDANCE GALOISIENNE POUR LES W*-ALGEBRES

Introduction.

Une théorie de Galois pour les groupes finis d'automorphismes extérieurs des facteurs II_1 a été faite par M. Nakamura et Z. Takeda [1]. D'autre part, en algèbre pure, S.U. Chase, D.K. Harrison et A. Rosenberg [1] ont obtenu une théorie de Galois pour les anneaux commutatifs. En essayant d'appliquer les méthodes algébriques à l'étude d'un groupe fini G d'automorphismes d'une W*-algèbre M, nous avons vu que la notion importante était celle d'action presque libre du groupe d'automorphismes. Sous cette seule hypothèse on peut en effet démontrer le "*théorème fondamental de la théorie de Galois*", qui établit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de G et certaines sous-algèbres, dites G-libres, de M. On peut considérer notre résultat comme complémentaire de celui de M. Nakamura et Z. Takeda: leurs automorphismes sont extérieurs sur des facteurs alors que l'action des nôtres sur le centre de M est très importante. Il reste à découvrir une méthode générale, englobant les deux situations.

§ III.1. Exemples et définitions.

Nous commencerons par donner deux exemples simples d'une W*-algèbre munie d'un groupe d'automorphismes:

Exemple III.1.

Soient A la W*-algèbre commutative $\mathbb{C}^4 = \ell^{\infty}_{\{1,2,3,4\}}$ et $G = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ le groupe cyclique d'ordre 4. L'action de G dans A est définie, pour $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$ par

$$\sigma(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4, a_1, a_2, a_3)$$

Les sous-groupes de G sont $\{1\}$, $G_1 = \{1, \sigma^2\}$ et G; les sous-algèbres des points fixes correspondantes sont $A^{\{1\}} = A$, $A^{G_1} = \{a \in A \mid a_1 = a_3,\ a_2 = a_4\}$ et $A^G = \mathbb{C}\cdot 1$.

Exemple III.2.

Prenons pour A la même W*-algèbre que ci-dessus et pour H le groupe de Klein. L'action de $H = \{1, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ dans A est définie, pour $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A$, par

$$\tau_1(a) = (a_2, a_1, a_3, a_4)$$

$$\tau_2(a) = (a_1, a_2, a_4, a_3)$$

$$\tau_3(a) = (a_2, a_1, a_4, a_3).$$

Les sous-groupes de H sont $\{1\}$, $H_1 = \{1, \tau_1\}$, $H_2 = \{1, \tau_2\}$, $H_3 = \{1, \tau_3\}$ et H, et les sous-algèbres correspondantes $A^{\{1\}} = A$, $A^{H_1} = \{a \mid a_1 = a_2\}$, $A^{H_2} = \{a \mid a_3 = a_4\}$ et $A^{H_3} = \{a \mid a_1 = a_2, a_3 = a_4\} = A^H$.

Dans ce deuxième exemple il est impossible d'obtenir une correspondance galoisienne bijective entre les sous-groupes de H et certaines sous-algèbres de A. Le premier exemple est à cet égard plus encourageant: on peut espérer caractériser les sous-algèbres de A de la forme A^{G_i} qui correspondent biunivoquement aux sous-groupes de G. Nous allons voir que ce problème admet une solution assez satisfaisante pour les groupes finis d'automorphismes d'une W*-algèbre.

Dans toute la suite M désignera une W*-algèbre, Z le centre de M et G un groupe fini d'automorphismes de M. Rappelons que G opère presque librement dans M si, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq e$, et tout projecteur $p \in Z$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z$ tel que $0 < q \leq p$ et $\sigma(q)q = 0$. (cf. § 1.4. Application,1)).

Remarque III.1. D'après R. Kallman [1], dire que σ opère presque librement dans M équivaut à dire qu'il n'existe pas de décomposition $Z = Z_1 \oplus Z_2$ avec $\sigma(Z_i) = Z_i$ et $\sigma | Z_2 = id_{Z_2}$.

Remarque III.2. Soit A comme dans les exemples ci-dessus; notons e_1, e_2, e_3, e_4 ses projecteurs minimaux i.e. $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ etc. Pour tout $\alpha = 1,2,3$ et tout $i = 1,2,3,4$ on a $\sigma^{\alpha}(e_i)e_i = 0$ donc G opère presque librement dans A; mais H n'opère pas presque librement dans A, car $\tau_1(e_3)e_3 = e_3$.

Définition: Une sous-W*-algèbre L de M sera dite G-libre si pour tout $\sigma \in G$, ou bien $\sigma | L = 1$, ou bien, pour tout projecteur $p \in Z \cap L$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z \cap L$ tel que $0 < q \leqslant p$ et $\sigma(q)q = 0$.

Remarque III.3. Si G opère presque librement dans M alors M est G-libre; même dans ce cas une sous-algèbre L de M n'est pas nécessairement G-libre; dans l'exemple III.1. la sous-algèbre $B = \{ a \in A \mid a_1 = a_2,\ a_3 = a_4 \}$ n'est pas G-libre, car $p = e_1 + e_2$ est un projecteur minimal de B et $p\,\sigma(p) = e_2 \neq 0$.

Proposition III.1. Soit L une sous-W*-algèbre G-libre de M. Il existe une famille $\{q_i\}_{i \in I}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que, si $\sigma \in G$ et $\sigma | L \neq 1$, on ait $\sigma(q_i)q_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Démonstration : Soient $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s$ les éléments de G qui sont différents de l'identité sur L. L étant G-libre, il existe

- un projecteur $f_1 \in Z \cap L$ tel que $0 < f_1 \leqslant I$ et $\sigma_1(f_1)\, f_1 = 0$,
- un projecteur $f_2 \in Z \cap L$ tel que $0 < f_2 \leqslant f_1$ et $\sigma_2(f_2)\, f_2 = 0$,

  ....
- un projecteur $f_s \in Z \cap L$ tel que $0 < f_s \leqslant f_{s-1}$ et $\sigma_s(f_s)\, f_s = 0$.

Comme $f_s \leqslant f_i$ pour tout $i = 1,2,\ldots,s$, on a

$$\sigma_i(f_s)f_s = \sigma_i(f_i f_s)f_i f_s = \sigma_i(f_i)f_i\, \sigma_i(f_s)f_s = 0.$$

Posons $q_1 = f_s$; q_1 est un projecteur non nul de $Z \cap L$ et $\sigma_i(q_1)q_1 = 0$ pour tout $i = 1,2,\ldots,s$. Si $q_1 \neq 1$, on recommence la construction en partant de $1 - q_1$, ce qui fournit un projecteur non nul $q_2 \in Z \cap L$ tel que $0 < q_2 \leqslant 1 - q_1$ et $\sigma_i(q_2)\, q_2 = 0$

pour tout $i = 1,2,\ldots s$. Si $q_2 \neq 1 - q_1$, on recommence avec $1 - q_1 - q_2$, etc.

<u>Corollaire</u>: <u>Si G opère presque librement dans M, il existe une famille $\{p_i\}_{i\in I}$ de projecteurs de Z, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que, pour tout $i \in I$ on ait</u>

$$\sigma(p_i)p_i = \begin{cases} p_i & \text{si } \sigma = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases}$$

<u>Remarque III.4.</u> Soit $N = M^G$ la sous-algèbre des points fixes de M par G. Les p_i forment un système de générateurs "en topologie ultraforte" du N-module à gauche M. En effet, considérons $x \in M$ et posons, pour tout $i \in I$,

$$x_i = \sum_{\sigma\in G} \sigma(xp_i);$$

on a $x_i \in N$ et $x_i p_i = \sum_{\sigma} \sigma(x)\,\sigma(p_i)p_i = xp_i$, d'où

$$x = \sum_{i\in I} x_i p_i$$

(convergence ultraforte). Notons que cette écriture n'est pas unique: si $x = \sum y_i p_i$ on a seulement $y_i p_i = x_i p_i$ pour tout $i \in I$.

§ III.2. Correspondance galoisienne.

Soient M une W*-algèbre, G un groupe fini d'automorphismes de M et $N = M^G$ la sous-W*-algèbre des points fixes de M par G.

Théorème III.1. *Supposons que G opère presque librement dans M. Il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes H de G et les sous-W*-algèbres G-libres L de M qui contiennent N. Cette correspondance est donnée par*

$$H \mapsto M^H = \{ x \in M \mid \sigma(x) = x, \quad \forall \sigma \in H \}$$

$$L \mapsto G_L = \{ \sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \quad \forall x \in L \}.$$

Démonstration:

a) Soit L une sous-W*-algèbre G-libre de M, contenant N. Posons $H = G_L = \{ \sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \ \forall x \in L \}$; H est un sous-groupe de G. Montrons que $M^H = L$. Il est clair que $L \subset M^H$. Comme L est G-libre il existe (Proposition III.1.) une famille $\{q_j\}_{j \in J}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que,

$$\sigma(q_j)q_j = \begin{cases} q_j & \text{si } \sigma \in H \\ 0 & \text{si } \sigma \notin H \end{cases}$$

pour tout $j \in J$. Soit $x \in M^H$; on a $x = \frac{1}{|H|}\sum_{\tau \in H} \tau(x)$, où $|H|$ désigne le nombre d'éléments de H. Donc, pour tout $j \in J$, on a

$$\begin{aligned} xq_j &= \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x) q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)\tau(q_j)q_j \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)\sigma(q_j)q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(xq_j)q_j . \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{|H|}\sum_{\sigma \in G} \sigma(xq_j)$ appartient à $N = M^G$, donc $xq_j \in L$. Comme $x = \sum_{j \in J} xq_j$ on a $x \in L$. Donc $M^H \subset L$.

b) Soit H un sous-groupe de G. Posons $L = M^H$ et $H' = G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in L\}$. Montrons que $H = H'$ et que L est G-libre. Tout d'abord il est clair que $H \subset H'$ et que $M^{H'} = M^H = L$. Considérons les deux applications suivantes:

$\Phi : M \to M^H = L$ définie par $\Phi(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)$

et

$\Phi' : M \to M^{H'} = L$ définie par $\Phi'(x) = \frac{1}{|H'|} \sum_{\rho \in H'} \rho(x)$.

Φ [resp. Φ'] est une projection H-invariante [resp. H'-invariante] de M sur L. Comme $H \subset H'$, ϕ' est H-invariante et on a, pour tout $x \in M$,

$$\phi'(\phi(x)) = \phi'\left(\frac{1}{|H|}\sum_{\tau\in H}\tau(x)\right) = \phi'(x) .$$

D'autre part $\phi'(\phi(x)) = \phi(x)$ car $\phi(x) \in L$, donc on a $\phi = \phi'$. Soit p un des projecteurs de la famille $\{p_i\}$ définie dans le corollaire de la proposition III.1; on a

$$\phi(p)p = \phi'(p)p;$$

mais d'autre part:

$$\phi(p)p = \frac{1}{|H|}\sum_{\tau\in H}\tau(p)p = \frac{1}{|H|}\, p ,$$

$$\phi'(p)p = \frac{1}{|H'|}\sum_{\rho\in H'}\rho(p)p = \frac{1}{|H'|}\, p ,$$

d'où $|H| = |H'|$ et donc $H = H'$.

Montrons maintenant que L est G-libre. Soit $\{p_i\}_{i\in I}$ la famille de projecteurs de Z définie dans le corollaire de la proposition III.1. Posons, pour tout $i \in I$,

$$p_i' = \sum_{\tau\in H} \tau(p_i);$$

p_i' appartient à $Z \cap M^H = Z \cap L$ et comme

$$\sigma_1(p_i)\, \sigma_2(p_i) = \sigma_2\left[\sigma_2^{-1}\sigma_1(p_i)p_i\right] = 0$$

si $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, on voit que p_i' est un projecteur. Pour tout $\sigma \in G$, on a

$$\sigma(p_i')p_i' = \sum_{\tau\in H}\sigma\tau(p_i)\sum_{\rho\in H}\rho(p_i)$$

$$= \sum_{\tau,\rho\in H}\sigma\tau(p_i)\rho(p_i) ;$$

mais $\sigma\tau(p_i)\,\rho(p_i) = 0$ sauf si $\sigma\tau = \rho$. On voit donc que

$$\sigma(p_i')p_i' = \begin{cases} p_i' & \text{si } \sigma \in H \\ 0 & \text{si } \sigma \notin H. \end{cases}$$

Soient $\sigma \in G$ tel que $\sigma|L \neq 1$ et $e \in Z\cap L$ un projecteur non nul. Il faut trouver un projecteur $f \in Z\cap L$ tel que $0 < f \leqslant e$ et $\sigma(f)f = 0$. Comme $e \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $ep_i \neq 0$; on a a aussi $ep_i' \neq 0$ car $p_i \leqslant p_i'$. Posons $f = ep_i'$; f est un projecteur de $Z \cap L$, $0 < f \leqslant e$ et

$$\sigma(f)f = \sigma(ep_i')\, ep_i' = \sigma(e)e\, \sigma(p_i')p_i' = 0$$

car $\sigma|L \neq 1$ est équivalent à $\sigma \notin H$. Ainsi L est G-libre et le théorème est démontré.

Le cas des sous-groupes distingués est réglé par la proposition suivante:

Proposition III.2. Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème III.1. Pour qu'un sous-groupe H de G soit distingué il faut et il suffit que $L = M^H$ soit globalement fixe par G. Alors G/H peut être considéré comme un groupe d'automorphismes de L; G/H opère presque librement sur L et $L^{G/H} = N$.

Démonstration : L'équivalence

$$H \text{ distingué} \iff \sigma(L) \subset L, \text{ pour tout } \sigma \in G,$$

est classique; on en déduit alors que $\sigma \longmapsto \sigma|L$ est un homomorphisme de G dans $\mathrm{Aut}(L)$, de noyau H; son image est un groupe d'automorphismes de L, isomorphe à G/H. Comme ci-dessus pour "L est G-libre", on voit que ce groupe opère presque librement sur L. Enfin il est clair que $L^{G/H} = N$.

Remarque III.3. Les résultats de ce chapitre restent valables si on prend pour M une AW*-algèbre.

BIBLIOGRAPHIE

D. Bures [1] Abelian subalgebras of von Neumann algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 110 (1971).

S.U. Chase, D.K. Harrison, A. Rosenberg

[1] Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965).

M. Enomoto, K. Tamaki

[1] On a theorem of Pearcy and Ringrose, Math. Japon. 18 (1973) 253-256.

J. Dixmier [1] Les C*-algebres et leurs représentations. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[2] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

A. Guichardet

[1] Systèmes dynamiques non commutatifs. Collection astérisque No. 13-14, Paris, 1974.

R. Kallman [1] A generalisation of free action, Duke Math. J. vol. 36 No. 4 (1969) 781-789.

M. Nakamura, Z. Takeda

[1] On the fundamental theorem of the Galois theory of finite factors, Proc. Japan Acad. 36(1960) 313-318.

[2] On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad. 34 (1958) 489-494.

C. Pearcy, J.R. Ringrose

[1] Trace-preserving isomorphisms in finite operator algebras, Amer. J. Math. 90 (1968) 444-455.

S. Sakai [1] C*-algebras and W*-algebras. Springer, Berlin, 1971.

N. Suzuki [1] Crossed products of rings of operators. Tôhoku Math. J. 11 (1959), 113-124.

J. Tomiyama [1] Tensor products and projection of norm one in von Neumann algebras. Lecture notes, University of Copenhagen, 1970.

G. Zeller-Meier

[1] Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes. J. Math. pures et appl. 47(1968) 101-239.