SUR
LES SYSTÈMES HOLOÏDES DE TRITETTARIONS

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

HERBERT ORY
LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

LAUSANNE
IMPRIMERIE LA CONCORDE
1924

La Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de M. R. FUETER, professeur à l'Université de Zurich, et de MM. L.-G. DU PASQUIER et L. GABEREL, professeurs à l'Université de Neuchâtel, autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, juin 1923.

Le Doyen :
A. BERTHOUD.

A mon cher professeur,

Monsieur L.-Gustave Du Pasquier,

Hommage d'affectueuse reconnaissance.

Herbert Ory.

L'idée du présent travail m'a été suggérée par

Monsieur le professeur L.- GUSTAVE DU PASQUIER.

Je tiens à lui exprimer ici ma vive gratitude pour les conseils qu'il a bien voulu me donner et pour l'intérêt qu'il m'a toujours témoigné au cours de mes travaux.

HERBERT ORY.

SUR LES SYSTÈMES HOLOÏDES DE TRITETTARIONS

INTRODUCTION

1. On appelle *système de nombres* tout ensemble d'éléments sur lesquels on a défini l'égalité et certaines opérations de calcul. On définit en général quatre opérations qu'on nomme, par analogie avec l'Arithmétique élémentaire, addition, soustraction, multiplication et division. Les définitions de l'égalité et de ces opérations doivent satisfaire à certaines conditions qu'on trouvera développées dans des ouvrages spéciaux auxquels je renvoie le lecteur pour ce qui concerne ce point [1].

Considérons un système de nombres dont les éléments, nous le supposons, se reproduisent par addition, soustraction, multiplication et division. Pour ériger l'arithnomie de ce corps de nombres donné, on est obligé tout d'abord d'en séparer les éléments en *entiers* et *non entiers*, puisque l'objet essentiel de toute théorie des nombres est l'étude des relations entre *nombres entiers*. HURWITZ [2] a découvert que cette définition est importante, car suivant la manière dont elle est posée, l'arithnomie qui en résulte peut être simple ou compliquée. Il a montré que les lois arithnomiques qui régissent le corps des quaternions rationnels deviennent semblables à celles de l'Arithmétique élémentaire, si la définition du quaternion *entier* est judicieusement choisie. LIPSCHITZ était arrivé à une arithnomie sensiblement plus compliquée [3].

---

[1] Voir par exemple : H. HANKEL, *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867 ; *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, éd. française rédigée sous la direction de J. MOLK, Tome I, vol. 1, fascicule 3, Paris et Leipzig 1906.

[2] A. HURWITZ, *Über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physik. Klasse, Heft 4, Göttingen 1896.

HURWITZ a développé les idées exposées dans ce mémoire et donné les démonstrations dans son dernier livre, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin 1919.

[3] R. LIPSCHITZ, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, Bonn 1886. Trad. française par J. MOLK dans le Journal de mathématiques pures et appliquées fondé par LIOUVILLE, IV^{e} série, tome 2 (année 1886), p. 373-439 : *Recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même.*

Les travaux de HURWITZ ont attiré l'attention générale des mathématiciens. On s'est demandé si, étant donné un corps quelconque de nombres complexes, on ne pourrait pas définir le nombre entier d'une façon telle que l'arithnomie basée sur cette définition soit d'une simplicité analogue à celle de la théorie classique des nombres. On a reconnu qu'il en est effectivement ainsi dans un grand nombre de cas ; mais la définition appropriée de ce qu'il faut entendre par nombre « entier » demande une étude préalable quelquefois assez longue.

M. le professeur L.-G. DU PASQUIER m'a proposé d'étudier à ce point de vue les tritettarions [1]. Il a lui-même traité les duotettarions [2] et indiqué le cas le plus simple possible où peut se montrer l'influence de la définition du nombre « entier » sur la nature de l'arithnomie qui en résulte [3].

2. Le but de la présente étude est donc la recherche de la définition appropriée du *tritettarion entier*. Pour y arriver, je me suis basé principalement sur la théorie des nombres de P.-LEJEUNE DIRICHLET [4] et sur les travaux de M. L.-G. DU PASQUIER dans le domaine des nombres complexes généraux [5].

Après avoir rappelé quelques définitions et propriétés générales, je recherche le domaine holoïde général, puis le domaine holoïde maximal de tritettarions (on verra plus loin les définitions de ces termes). Je parviens ensuite à la définition cherchée du tritettarion entier. J'ai réussi à démontrer qu'on peut séparer le corps des tritettarions rationnels d'une infinité de manières en tritettarions « entiers » et « non entiers », de façon à rendre l'arithnomie de ce système de nombres ennéacomplexes [6] semblable à l'Arithmétique classique, abstraction faite des différences, d'ailleurs très profondes, inhérentes à la nature même des tettarions et provenant d'une part de la non-commutativité de la multiplication, d'autre part du fait qu'un produit de tettarions peut s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs ne soit nul. En terminant, je démontre que les nonions de SYLVESTER sont un cas particulier des tettarions, ce qui confirme une proposition énoncée par M. DU PASQUIER, que tous les systèmes de nombres complexes à multiplication associative et liée à l'addition par la loi de distributivité, sont des cas particuliers des polytettarions.

---

[1] La définition générale des tettarions (duotettarions, tritettarions, etc., en général ν-tettarions) est donnée dans le travail de M. L.-G. DU PASQUIER, *Zahlentheorie der Tettarionen*, Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. in Zürich, Jahrgang 51, p. 55-130, Zürich 1906.

[2] L.-G. DU PASQUIER, *Über holoide Systeme von Düotettarionen*, Vierteljahrsschrift d. Naturforsch. Ges. in Zürich, Jahrg. 54, p. 116-148, Zürich 1909.

[3] L.-G. DU PASQUIER, *Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce*, Nouv. Annales de math. (4e série) tome 18 (année 1918), p. 448-461.

[4] P.-LEJEUNE DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausg. von R. DEDEKIND, Braunschweig 1894.

[5] L.-G. DU PASQUIER, *Sur l'arithmétique des nombres hypercomplexes*, L'Enseignement mathématique t. 18 (1916), p. 201-259.

— *Sur la théorie des nombres hypercomplexes à coordonnées rationnelles*, Bulletin de la Soc. math. de France, t. 48 (1920) p. 109-132.

— *Sur les nombres complexes généraux*, Comptes-rendus du Congrès internat. des math. à Strasbourg 1920, Toulouse 1920, p. 164-175.

[6] Du grec ἐννέα qui signifie 9.

Comme le corps des duotettarions rationnels peut aussi être scindé d'une infinité de manières en « entiers » et « non entiers », le résultat obtenu permet de penser qu'il en sera de même des polytettarions quelconques. Et comme ceux-ci comprennent, ainsi que je viens de le rappeler, tous les systèmes de nombres complexes à multiplication associative et distributive, ce résultat n'est pas dénué d'intérêt.

CHAPITRE PREMIER

Définitions préliminaires.

3. *Définition des tritettarions.* Un tritettarion t est un nombre ennéacomplexe de la forme

$$t = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7 + \alpha_8 e_8 + \alpha_9 e_9 = \sum_{\lambda}^{1\ldots 9} \alpha_\lambda e_\lambda,$$

où les α_λ sont des nombres réels quelconques dits *coordonnées du tritettarion.* Les neuf symboles e_λ sont dits les *unités relatives* du système.

On peut représenter le tritettarion t symboliquement par un tableau carré, où la place occupée par chacun des nombres réels n'est pas indifférente,

$$t = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_8, & \alpha_9 \end{matrix} \right\}$$

Si les neuf coordonnées α_λ sont des nombres rationnels, le tritettarion lui-même est dit *rationnel.* Dans la suite, sauf indication contraire, nous ne nous occuperons que de tritettarions rationnels.

Le tritettarion dont toutes les coordonnées sont nulles est appelé *tritettarion nul;* on le représente par 0. Il joue dans la théorie des tettarions un rôle analogue à celui du zéro dans l'arithmétique classique. C'est le *module* de l'addition, $t + 0 = t$ quel que soit le tritettarion t.

Egalité et addition des tritettarions.

4. *Egalité des tritettarions.* Deux trittetarions t_1 et t_2 sont dits *égaux,* quand leurs coordonnées correspondantes sont égales. Par coordonnées correspondantes nous entendons celles qui, dans t_1 et t_2, sont affectées de la même unité relative, ou qui dans les tableaux carrés, occupent des places homologues.

Dès lors, une égalité entre tritettarions entraîne neuf égalités entre nombres réels.

5. *Addition.* L'addition de deux tritettarions * $t_1 \equiv \sum_{\lambda}^{1...9} \alpha_\lambda e_\lambda$ et $t_2 \equiv \sum_{\lambda}^{1...9} \beta_\lambda e_\lambda$ est définie par l'addition des coordonnées correspondantes.

$$t_1 + t_2 = \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_8, & \alpha_9 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ \beta_4, & \beta_5, & \beta_6 \\ \beta_7, & \beta_8, & \beta_9 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \alpha_1 + \beta_1, & \alpha_2 + \beta_2, & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_4, & \alpha_5 + \beta_5, & \alpha_6 + \beta_6 \\ \alpha_7 + \beta_7, & \alpha_8 + \beta_8, & \alpha_9 + \beta_9 \end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_{\lambda}^{1...9} (\alpha_\lambda + \beta_\lambda) e_\lambda .$$

L'addition des tritettarions est commutative et associative. On voit, en effet, en se reportant aux définitions, que

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1$$
$$t_1 + (t_2 + t_3) = (t_1 + t_2) + t_3,$$

propriétés qui s'étendent à des sommes d'un nombre fini quelconque de termes.

6. *Soustraction.* Etant donnés deux tritettarions t_1 et t_2, on peut déterminer d'une façon univoque un tritettarion x tel que $t_2 + x = t_1$; par analogie avec l'arithmétique ordinaire, on écrit $x = t_1 - t_2$ et l'on appelle x une *différence de deux tritettarions.* Soustraire le tritettarion t_2 du tritettarion t_1, c'est trouver x tel que l'égalité ci-dessus soit satisfaite. On obtient les coordonnées de x, en soustrayant des coordonnées de t_1 les coordonnées correspondantes de t_2.

Il résulte de là que la soustraction est l'opération inverse de l'addition.

Multiplication dans le domaine des tritettarions.

7. *Multiplication des unités relatives.* Formons le produit des deux tritettarions $t_1 \equiv \sum_{i}^{1...9} \alpha_i e_i$ et $t_2 \equiv \sum_{k}^{1...9} \beta_k e_k$, d'après les règles de la multiplication algébrique ordinaire. Il vient

$$t_1 t_2 = \sum_{i}^{1...9} \alpha_i e_i \,.\, \sum_{k}^{1...9} \beta_k e_k = \sum_{i}^{1...9} \sum_{k}^{1...9} \alpha_i \beta_k e_i e_k .$$

Or, dire que les tritettarions doivent se reproduire par multiplication, c'est dire que le produit de deux tritettarions doit être de nouveau un tritettarion. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le produit $e_i e_k$ des deux unités relatives e_i et e_k $(i, k = 1, 2, ..., 9)$ s'exprime en fonction linéaire des mêmes neuf unités relatives,

par exemple : $$e_i e_k = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \dots + r_9 e_9 ,$$

où les r_n sont 9 nombres réels. S'il n'en était pas ainsi, $e_i e_k$ constituerait un nouveau

* Le signe $\equiv$ (doublement égal) signifie *égal par définition.*

symbole que l'on pourrait envisager comme une nouvelle unité relative, et l'on n'aurait plus un système de nombres ennéacomplexes. Il faut donc définir les 81 produits e_ie_k comme autant de fonctions linéaires des unités relatives e_λ ; en d'autres termes, il faut donner $9 \,.\, 81 = 729$ nombres réels c_{ikn}, de façon qu'on ait 81 égalités de définition :

$$e_ie_k = c_{ik1}e_1 + c_{ik2}e_2 + c_{ik3}e_3 + \ldots + c_{ik9}e_9 = \sum_n^{1\ldots9} c_{ikn}e_n .$$

Dans le cas des tritettarions, les 729 nombres réels c_{ikn} ont des valeurs particulièrement simples : 27 d'entre eux sont égaux à 1 et les 702 autres sont nuls.

Les 81 produits des unités relatives sont indiqués dans le tableau de définition suivant :

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
e_1	e_1	e_2	e_3	0	0	0	0	0	0
e_2	0	0	0	e_1	e_2	e_3	0	0	0
e_3	0	0	0	0	0	0	e_1	e_2	e_3
e_4	e_4	e_5	e_6	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	0	e_4	e_5	e_5	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0	e_4	e_5	e_6
e_7	e_7	e_8	e_9	0	0	0	0	0	0
e_8	0	0	0	e_7	e_8	e_9	0	0	0
e_9	0	0	0	0	0	0	e_7	e_8	e_9

Dans ce tableau, le produit e_ie_k se trouve à l'intersection de la ligne portant à gauche e_i et de la colonne portant au haut e_k ; par exemple ; $e_2e_4 = e_1$; $e_4e_2 = e_5$; $e_5^2 = e_5$; $e_6^2 = 0$; etc.

8. *Multiplication des tritettarions entre eux.* Cela posé, le *produit* des deux tritettarions t_1 et t_2 se forme selon les règles de l'algèbre ordinaire, mais en tenant compte du tableau ci-dessus. On a donc

$$t_1t_2 = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_7 , & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_5 + \alpha_3\beta_8 , & \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_6 + \alpha_3\beta_9 \\ \alpha_4\beta_1 + \alpha_5\beta_4 + \alpha_6\beta_7 , & \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_5 + \alpha_6\beta_8 , & \alpha_4\beta_3 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_9 \\ \alpha_7\beta_1 + \alpha_8\beta_4 + \alpha_9\beta_7 , & \alpha_7\beta_2 + \alpha_8\beta_5 + \alpha_9\beta_8 , & \alpha_7\beta_3 + \alpha_8\beta_5 + \alpha_9\beta_9 \end{array} \right\}$$

$$t_2t_1 = \left\{ \begin{array}{lll} \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_4 + \beta_3\alpha_7 , & \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_5 + \beta_3\alpha_8 , & \beta_1\alpha_3 + \beta_2\alpha_6 + \beta_3\alpha_9 \\ \beta_4\alpha_1 + \beta_5\alpha_4 + \beta_5\alpha_7 , & \beta_4\alpha_2 + \beta_5\alpha_5 + \beta_6\alpha_8 , & \beta_4\alpha_3 + \beta_5\alpha_6 + \beta_6\alpha_9 \\ \beta_7\alpha_1 + \beta_8\alpha_4 + \beta_9\alpha_7 , & \beta_7\alpha_2 + \beta_8\alpha_5 + \beta_9\alpha_8 , & \beta_7\alpha_3 + \beta_8\alpha_6 + \beta_8\alpha_9 \end{array} \right\}$$

On voit par là que la multiplication des tritettarions se fait d'après la même règle que la composition des substitutions linéaires à trois variables homogènes.

Corollaires. 1° La multiplication des tritettarions n'est pas toujours commutative, en général $t_i t_k \neq t_k t_i$. Si $t_i t_k = t_k t_i$, on dit que t_i et t_k sont *permutables.*

2° La multiplication des tritettarions est associative. On a

$$t_i(t_k t_l) = (t_i t_k)t_l.$$

3° La multiplication est liée à l'addition par les deux lois de distributivité exprimées par les formules

$$t_i(t_k + t_l) = t_i t_k + t_i t_l$$
$$(t_k + t_l)t_i = t_k t_i + t_l t_i$$

9. *Nombres réels.* Le tritettarion

$$p \equiv \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} = e_1 + e_5 + e_9$$

est appelé *tritettarion principal.* On vérifie qu'il joue dans le système des tritettarions le même rôle que le nombre 1 en arithmétique. C'est le *module* de la multiplication. On a

$$\alpha p = p\alpha = \alpha,$$

quel que soit le tritettarion α. On peut donc identifier p avec 1 et écrire

$$e_1 + e_5 + e_9 = 1.$$

Il suit de là que les tritettarions contiennent comme sous-groupe les nombres réels. Tout nombre réel r peut se mettre sous forme de tritettarion :

$$r = r(e_1 + e_5 + e_9) = re_1 + re_5 + re_9 = \begin{Bmatrix} r, & 0, & 0 \\ 0, & r, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{Bmatrix}$$

10. *Produit d'un tritettarion par un nombre réel.* En appliquant la définition de l'addition à la somme $t + t + t + \ldots.. + t$ formée de n tritettarions tous égaux à t, on remarque que pour multiplier un tritettarion t par un nombre entier positif n, il faut multiplier chacune de ses coordonnées par n. En cherchant à généraliser ce théorème au cas où n cesse de représenter un nombre entier positif, on est amené à poser la définition suivante : Pour multiplier un tritettarion t par un nombre réel r, il faut multiplier chaque coordonnée de t par r. Or, il se trouve que ce n'est pas là une définition nouvelle, mais un cas particulier de la multiplication définie au § 8 ; en effet,

$$r \cdot t = \begin{Bmatrix} r, & 0, & 0 \\ 0, & r, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_8, & \alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\alpha_1, & r\alpha_2, & r\alpha_3 \\ r\alpha_4, & r\alpha_5, & r\alpha_6 \\ r\alpha_7, & r\alpha_8, & r\alpha_9 \end{Bmatrix}$$

Il s'en suit que $rt = tr$: tout tritettarion t est permutable avec tout nombre réel r.

11. *Tritettarions transposés, adjoints, conjugués. Norme.* A tout tritettarion t, on peut faire correspondre un tritettarion *transposé* (que nous désignons par t') en remplaçant, dans le tableau des coordonnées de t, la $i^{\text{ième}}$ ligne par la $i^{\text{ième}}$ colonne. Au tritettarion

$$t \equiv \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_8, & \alpha_9 \end{Bmatrix}$$

correspond donc comme transposé

$$t' \equiv \begin{Bmatrix} \alpha_1, & \alpha_4, & \alpha_7 \\ \alpha_2, & \alpha_5, & \alpha_8 \\ \alpha_3, & \alpha_6, & \alpha_9 \end{Bmatrix}$$

Nous appellerons *adjoint de t* le tritettarion T dont les coordonnées $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_9$ sont les mineurs correspondant à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_9$, dans le déterminant Δ dont les éléments sont les coordonnées de t. En posant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_8, & \alpha_9 \end{vmatrix}, \quad \text{on a} \quad T \equiv \begin{Bmatrix} \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3 \\ \alpha'_4, & \alpha'_5, & \alpha'_6 \\ \alpha'_7, & \alpha'_8, & \alpha'_9 \end{Bmatrix},$$

où

$$\alpha'_1 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_5, & \alpha_6 \\ \alpha_8, & \alpha_9 \end{vmatrix}; \quad \alpha'_2 \equiv - \begin{vmatrix} \alpha_4, & \alpha_6 \\ \alpha_7, & \alpha_9 \end{vmatrix}; \quad \text{etc.} \quad \alpha'_9 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 \\ \alpha_4, & \alpha_5 \end{vmatrix}.$$

Le tritettarion T' transposé de T est dit le *conjugué de t.*

$$T' \equiv \begin{Bmatrix} \alpha'_1, & \alpha'_4, & \alpha'_7 \\ \alpha'_2, & \alpha'_5, & \alpha'_8 \\ \alpha'_3, & \alpha'_6, & \alpha'_9 \end{Bmatrix}$$

Théorème. Le produit d'un tritettarion t par son conjugué T' est un tritettarion réel. En effet, on trouve (§ 8)

$$t \,.\, T' = \begin{Bmatrix} \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_3, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha_4\alpha'_4 + \alpha_5\alpha'_5 + \alpha_6\alpha'_6, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha_7\alpha'_7 + \alpha_8\alpha'_8 + \alpha_9\alpha'_9 \end{Bmatrix}$$

Comme les coordonnées de la diagonale principale sont toutes égales à la valeur du déterminant Δ ci-dessus défini, il vient

$$t \,.\, T' = \begin{Bmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta, & 0 \\ 0, & 0, & \Delta \end{Bmatrix} = \Delta \,.\, \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} = \Delta .$$

On vérifie que tout tritettarion est permutable avec son conjugué. Ce produit est donc univoque ; on l'appelle la norme du tritettarion t, en formule

$$N(t) \equiv t \,.\, T' = T' . t = \Delta .$$

La norme d'un produit de tritettarions est égale au produit des normes des facteurs :

$$N(a\,.\,b\,.\,c\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,m) = N(a)\,.\,N(b)\,.\,N(c)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,N(m).$$

Un tritettarion dont la norme est nulle est appelé *diviseur de zéro* *.

12. Frobenius ** a démontré un théorème général dont on peut tirer comme cas particulier l'importante proposition que voici : Tout tritettarion $t \equiv \sum_i^{1...9} r_i e_i$ satisfait à une équation du 3ième degré à coefficients réels, dite *équation caractéristique*. On peut lui donner la forme

$$\begin{vmatrix} r_1 - t\,, & r_2\,, & r_3 \\ r_4\,, & r_5 - t\,, & r_6 \\ r_7\,, & r_8\,, & r_9 - t \end{vmatrix} = 0$$

Grâce à cette propriété, on peut réduire à une fonction quadratique de t toute fonction rationnelle entière du tritettarion t, dès que son degré $n > 2$.

Division dans le domaine des tritettarions.

13. *Définition générale.* Soient deux tritettarions t_1 et t_2. Par suite de la non-commutativité de la multiplication, on peut définir deux tritettarions, x et y, en général différents l'un de l'autre, tels que

$$t_1 = xt_2\ ; \quad t_1 = t_2 y\,.$$

x est appelé le *quotient à gauche* de t_1 par t_2, et y le *quotient à droite* de t_1 par t_2. Il faut donc distinguer dans le domaine des tritettarions une *division à droite* et une *division à gauche*. On ne peut supprimer les mots « à gauche » et « à droite » que si les tritettarions x et y sont égaux. La division qu'on vient de définir est l'opération inverse de la multiplication.

14. *Tritettarions réciproques.* Pour arriver pratiquement à déterminer x et y, quotients à gauche et à droite d'un tritettarion t par un autre, commençons par introduire la notion du tritettarion réciproque. La théorie des nombres complexes ordinaires suggère l'idée de rendre réel le dénominateur de la fraction $\frac{1}{t} = t^{-1}$ en l'amplifiant par T', conjugué de t, et de poser la définition suivante :

---

* L'expression « diviseur de zéro » est due à Weierstrass, voir Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, 1884 p. 396 ; Werke 2, Berlin 1895, p. 311. — Lorsque $ab = c$ et que les nombres a, b et c sont entiers, on dit que a est diviseur de c. On étend cette définition au cas où $c = 0$ (car il peut arriver que $ab = 0$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$). Il est naturel de dire dans ce cas que a est diviseur de zéro.

** Frobenius, *Über lineare Substitutionen u. bilineare Formen*, Journal de Crelle, t. 84.

Lorsque t n'est pas diviseur de zéro, on entend par *tritettarion réciproque de t* le tritettarion

$$t^{-1} = \frac{T'}{N(t)}$$

Il satisfait à l'équation $tt^{-1} = t^{-1} . t = 1$.

15. *Division d'un tritettarion par un autre.* Reprenons l'équation $t_1 = xt_2$. Multiplions à droite les deux membres de cette équation par t_2^{-1} ; il vient.

$$t_1 t_2^{-1} = xt_2 t_2^{-1} = x .$$

On a donc
$$x = \frac{t_1 T'_2}{N(t_2)} .$$

Le même procédé permet de déterminer y, quotient à droite de t_1 par t_2. L'équation de définition $t_1 = t_2 y$ devient

$$t_2^{-1} t_1 = t_2^{-1} t_2 y = y , \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{T'_2 t_1}{N(t_2)} .$$

Les deux quotients x et y sont bien déterminés quand t_2 n'est pas diviseur de zéro. Si t_2 est diviseur de zéro, la division est en général impossible ; elle est indéterminée quand les produits $t_1 T'_2$ ou $T'_2 t_1$ sont nuls.

On ne peut supprimer les mots « à gauche » et « à droite » et parler du « quotient de t_1 par t_2 » que lorsque t_1 est permutable avec T'_2 ; c'est aussi dans ce cas seulement que le symbole ordinaire de la division, $\frac{t_1}{t_2}$, a un sens déterminé.

16. *Corps, module, domaine d'intégrité.* Un ensemble constitué par une infinité de tritettarions est dit un *corps de tritettarions*, quand les sommes, différences, produits et quotients de deux tritettarions quelconques de cet ensemble appartiennent au même ensemble.

Deux ensembles de tritettarions sont dits *égaux*, s'ils contiennent les mêmes tritettarions.

D'après ces définitions, l'ensemble des tritettarions rationnels forme un corps de tritettarions ; nous le désignerons par $\{R\}$. Pour construire l'arithnomie de ce corps il faut d'abord en séparer les éléments en « entiers » et « non entiers » (v. Introduction). A cet effet, procédons par analogie avec l'arithnomie classique. Les nombres entiers ordinaires sont caractérisés par les quatre propriétés suivantes :

1° ils se reproduisent par addition et soustraction ;

2° ils se déduisent tous du nombre 1 par l'application illimitée de la soustraction.

3° ils se reproduisent par multiplication ;

4° on ne peut pas, dans le corps de nombres considéré, élargir le système des nombres entiers sans abandonner l'une ou l'autre de ces propriétés.

Nous rechercherons donc les systèmes de tritettarions satisfaisant à quatre conditions analogues. A cet effet, nous nous baserons sur les définitions suivantes * :

a) Un ensemble d'un nombre infini de tritettarions est dit *un module* de tritettarions, quand toute somme et toute différence de deux tritettarions de cet ensemble appartiennent au même ensemble.

b) On appelle *domaine d'intégrité* un ensemble $[J]$ d'un nombre infini de tritettarions tel que toute somme, différence et produit de deux quelconques d'entre eux. appartiennent à ce même ensemble $[J]$.

c) Un ensemble E, module ou domaine d'intégrité, est dit *fini*, quand il est possible d'y choisir un nombre fini de tritettarions $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tels que l'ensemble des tritettarions

$$m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots\ldots + m_nt_n$$

qu'on obtient en faisant parcourir aux $m_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$ indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, soit égal précisément au module ou domaine E en question. Les tritettarions $t_1, t_2, \ldots, t_n$ forment alors une *base* du module ou du domaine d'intégrité E. Chaque terme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ est un *membre de la base.*

d) Un domaine d'intégrité $[J]$ à base finie est dit *maximal*, quand il n'existe dans le corps $\}R\{$, aucun autre domaine d'intégrité fini renfermant tous les tritettarions de $[J]$ et, en plus, des tritettarions non compris dans $[J]$.

Exemples. Dans le corps des nombres rationnels, les nombres entiers forment un domaine d'intégrité fini et maximal, de base 1, le seul maximal de ce corps. De même, les nombres complexes ordinaires $a + bi$, à coordonnées a et b entières forment le seul domaine d'intégrité fini et maximal du corps constitué par tous les nombres complexes gaussiens $\alpha + \beta i$ à coordonnées α et β rationnelles.

Il résulte des considérations précédentes que les tritettarions faisant partie du domaine d'intégrité fini et maximal du corps $\}R\{$ seront à envisager comme « entiers ». Ils possèdent en effet les propriétés caractéristiques : 1° de se reproduire par addition, soustraction et multiplication ; 2° de constituer un domaine d'intégrité $\}M\{$ fini et maximal.

e) Dernière condition : le domaine d'intégrité cherché devra renfermer le trittettarion principal, c'est-à-dire le nombre 1 (§ 9). Pour arriver à une définition avantageuse des tritettarions *entiers*, nous avons donc 1° à rechercher quels sont les domaines d'intégrité finis de tritettarions rationnels ; 2° à déterminer lequel d'entre eux est maximal, éventuellement lesquels jouissent de la propriété de maximalité.

* Les définitions *a*), *b*) et *c*) sont les analogues de celles posées par Dirichlet dans sa théorie des corps algébriques. Voir Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig 1894, p. 435-457. La notion du domaine maximal, définition *d*), est due à Hurwitz.

CHAPITRE II

Du domaine holoïde le plus général de tritettarions.

17. *Définition.* Un ensemble composé d'une infinité de tritettarions est dit un *domaine holoïde*, quand il contient le tritettarion principal, qu'il a une base finie et que ses éléments se reproduisent par addition, soustraction et multiplication.

Il est toujours possible de choisir dans un domaine holoïde de tritettarions un nombre fini de tritettarions, t_1, t_2, ..., t_n, tels que le domaine considéré contienne les seuls tritettarions

$$m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots\ldots + m_nt_n$$

qu'on obtient en faisant parcourir aux m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, indépendamment les uns des autres la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$.

18. *Théorèmes généraux.* Commençons par rechercher tous les domaines holoïdes de tritettarions du corps $\}R\{$.

Définition. On dit que r tritettarions t_1, t_2, ..., t_r, rationnels ou non, sont (*linéairement*) *indépendants*, lorsqu'il n'est pas possible de satisfaire à l'équation

$$x_1t_1 + x_2t_2 + \ldots + x_rt_r = 0 \qquad (1)$$

par des nombres réels x_1, x_2, ..., x_r non tous nuls. Si, au contraire, il existe r nombres réels x_1, x_2, ..., x_r non tous nuls et tels que l'égalité (1) soit satisfaite, l'un au moins des tritettarions t_λ peut s'exprimer linéairement en fonction des autres ; on dit alors que les tritettarions sont (*linéairement*) *dépendants*.

Tout module fini possède une infinité de bases. Soit $[b]$ l'une d'elles, composée des membres $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Quand ceux-ci ne sont pas indépendants, on peut réduire la base $[b]$, c'est-à-dire qu'on peut trouver, pour le même module, une autre base ayant au moins un membre de moins que $[b]$. Si les membres de la base sont indépendants, elle est dite *irréductible*. Dans ce cas, toute autre base du même module comprend au moins r membres.

*Théorème 1.** Dans tout module fini du corps de tritettarions $\}R\{$, on peut choisir $r \leqq 9$ tritettarions, t_1, t_2, ..., t_r, de telle manière que tous les tritettarions t du module soient contenus dans l'expression

$$t = m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots + m_rt_r\,,$$

où les m_i sont des nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs). Ces tritettarions t_1, t_2, ..., t_r peuvent être choisis linéairement indépendants.

Théorème 2. Il est toujours possible de choisir les $r \leqq 9$ membres d'une base

---

* *Pour la démonstration de ce théorème et des suivants voir page 18, dernier alinéa.*

$[t_1, t_2, \ldots, t_r]$ d'un module fini de tritettarions de telle façon que l'un de ces membres ne contienne qu'une seule unité relative, un autre seulement deux unités relatives, un 3ième au plus trois unités relatives, un 4ième au plus 4 et ainsi de suite. D'après ce théorème, les membres d'une base irréductible d'un module fini de tritettarions pourront toujours se mettre sous la forme suivante :

$$(B): \quad \begin{aligned} t_1 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_5 + \gamma_1 e_9 + \delta_1 e_7 + \varepsilon_1 e_4 + \varphi_1 e_8 + \chi_1 e_6 + \psi_1 e_2 + \lambda_1 e_3 \,^* \\ t_2 &= \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_5 + \gamma_2 e_9 + \delta_2 e_7 + \varepsilon_2 e_4 + \varphi_2 e_8 + \chi_2 e_6 + \psi_2 e_2 \\ t_3 &= \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_5 + \gamma_3 e_9 + \delta_3 e_7 + \varepsilon_3 e_4 + \varphi_3 e_8 + \chi_3 e_6 \\ t_4 &= \alpha_4 e_1 + \beta_4 e_5 + \gamma_4 e_9 + \delta_4 e_7 + \varepsilon_4 e_4 + \varphi_4 e_8 \\ t_5 &= \alpha_5 e_1 + \beta_5 e_5 + \gamma_5 e_9 + \delta_5 e_7 + \varepsilon_5 e_4 \\ t_6 &= \alpha_6 e_1 + \beta_6 e_5 + \gamma_6 e_9 + \delta_6 e_7 \\ t_7 &= \alpha_7 e_1 + \beta_7 e_5 + \gamma_7 e_9 \\ t_8 &= \alpha_8 e_1 + \beta_8 e_5 \\ t_9 &= \alpha_9 e_1 \end{aligned}$$

où $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ sont 45 nombres rationnels.

En supposant $r = 9$, nous avons pris d'emblée le cas le plus général.

Théorème 3. Des 45 coordonnées $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_9$ qui figurent dans les membres d'une base irréductible (B), les 9 nombres $\alpha_9, \beta_8, \gamma_7, \delta_6, \varepsilon_5, \varphi_4, \chi_3, \psi_2, \lambda_1$ sont différents de zéro. On peut en effet démontrer que si l'un de ces nombres était nul, la base serait réductible, contrairement à l'hypothèse.

Théorème 4. Soit $[T]$ un module fini de tritettarions du corps $\}R\{$, ayant la base (B). Toute base (B') du même module $[T]$, pourra s'écrire :

$$(B'): \quad \begin{aligned} t'_1 &= \pm t_1 + m_1 t_2 + n_1 t_3 + p_1 t_4 + q_1 t_5 + r_1 t_6 + s_1 t_7 + u_1 t_8 + v_1 t_9 \\ t'_2 &= \pm t_2 + m_2 t_3 + n_2 t_4 + p_2 t_5 + q_2 t_6 + r_2 t_7 + s_2 t_8 + u_2 t_9 \\ t'_3 &= \pm t_3 + m_3 t_4 + n_3 t_5 + p_3 t_6 + q_3 t_7 + r_3 t_8 + s_3 t_9 \\ t'_4 &= \pm t_4 + m_4 t_5 + n_4 t_6 + p_4 t_7 + q_4 t_8 + r_4 t_9 \\ t'_5 &= \pm t_5 + m_5 t_6 + n_5 t_7 + p_5 t_8 + q_5 t_9 \\ t'_6 &= \pm t_6 + m_6 t_7 + n_6 t_8 + p_6 t_9 \\ t'_7 &= \pm t_7 + m_7 t_8 + n_7 t_9 \\ t'_8 &= \pm t_8 + m_8 t_9 \\ t'_9 &= \pm t_9 \end{aligned}$$

où $m_1, n_1, \ldots, v_1, \ldots, m_8$ sont 36 nombres entiers qui peuvent être choisis arbitrairement.

On peut démontrer ces quatre théorèmes en se basant sur les méthodes déve-

---

* C'est à dessein que nous n'avons pas pris les unités relatives dans l'ordre $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_9$, mais d'abord les unités e_1, e_5, e_9 dont la somme donne le tritettarion principal, puis les six autres dans l'ordre $e_7, e_4, e_8, e_6, e_2, e_3$. Après de nombreux essais, nous avons constaté que les calculs deviennent plus simples si l'on choisit cet ordre de succession-là. Il va de soi que l'on pourrait, en prenant un autre ordre de succession, conduire les calculs de $9\,! = 362\,880$ manières différentes et que le résultat final devrait être essentiellement le même. Mais en adoptant l'ordre de succession $e_1, e_2, \ldots, e_9$, le chemin à parcourir serait incomparablement plus long et les calculs plus laborieux.

loppées dans le mémoire déjà cité de M. Du Pasquier *. On y trouvera démontrés les théorèmes analogues dans le domaine des duotettarions. Il est facile de les étendre au cas des tritettarions.

Du domaine holoïde.

19. Les théorèmes énoncés ci-dessus sont valables pour tout module fini de tritettarions. Or, nous recherchons les domaines holoïdes, c'est-à-dire certains domaines d'intégrité. Pour qu'un module soit en même temps un domaine d'intégrité, il faut que non seulement la somme et la différence, mais encore le produit de deux quelconques de ses éléments fasse partie du même module.

En d'autres termes : le module $[T]$, de base finie (B), sera un domaine d'intégrité, si les produits $t_i t_k$ de deux tritettarions quelconques du module s'expriment linéairement en fonction des membres de la base, de sorte que

$$t_i t_k = m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots + m_9 t_9 \tag{1}$$

où les m_i sont des nombres entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs.

Enfin, pour que le domaine d'intégrité soit holoïde, il faut encore qu'il renferme le tritettarion principal $e_1 + e_5 + e_8$.

Les 81 produits $t_i t_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, 9)$ des membres de la base doivent donc pouvoir s'exprimer en fonction des t_i eux-mêmes, conformément à l'équation (1). Cette propriété implique des conditions qu'il s'agit d'établir. A cet effet, formons ces produits.

20. *Calcul de* t_8 *et de* t_8.

1° $t_9^2 = \alpha_9^2 e_1$ doit s'exprimer linéairement en fonction des t_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, d'où l'équation

$$\alpha_9^2 e_1 = p_1 t_1 + p_2 t_9 + \ldots + p_8 t_8 ,$$

où les p_i sont des nombres entiers. La définition de l'égalité (§4) entraîne $p_1 = p_2 = \ldots = p_8 = 0$, puisque les coefficients correspondants doivent être égaux. Dès lors, il reste

$$\alpha_9^2 e_1 = p_9 t_9 = p_9 \alpha_9 e_1 , \qquad \text{d'où}$$

$\alpha_9 = p_9 =$ nombre entier, soit g. Ce g doit être différent de zéro (Théorème 3). On a donc

$$t_9 = g e_1$$

2° Formons les produits $t_9 t_8$, $t_8 t_9$ et t_8^2.

$$t_9 t_8 = g e_1 (\alpha_8 e_1 + \beta_8 e_5) = g \alpha_9 e_1$$

Ce produit devant s'exprimer linéairement en fonction des t_i, il vient

$$g \alpha_8 e_1 = p_1' t_1 + p_2' t_2 + \ldots + p_9' t_9 .$$

* L.-G. Du Pasquier, *Über holoide Systeme von Düotettarionen*, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich, Jahrgang 54, p. 116-148, Zürich 1909.

L'égalité des coefficients correspondants entraîne (§ 4)

$$p'_1 = p'_2 = \ldots = p'_8 = 0\ ;$$

dès lors, $g\alpha_8 e_1 = p'_9 t_9 = p'_9 g e_1$, d'où

$$\alpha_8 = p'_9 = \text{nombre entier, soit } g_1 .$$

$$t_8^2 = (g_1 e_1 + \beta_8 e_5)^2 = g_1^2 e_1 + \beta_8^2 e_5 = p''_1 t_1 + \ldots + p''_9 t_9 ,$$

mais $p''_1 = p''_2 = \ldots = p''_7 = 0$, par suite de l'égalité des coefficients correspondants ; donc

$$g_1^2 e_1 + \beta_8^2 e_5 = p''_8 t_8 + p''_9 t_9 = p''_8(g_1 e_1 + \beta_8 e_5) + p''_9 g e_1 .$$

Cette égalité entraîne

$g_1^2 = p''_8 g_1 + p''_9 g$

$\beta_8^2 = p''_8 \beta_8$; cette dernière égalité montre que

$\beta_8 = p''_8 =$ nombre entier, soit $g_2 \neq 0$ (Théorème 3).

p''_9 étant un nombre entier, la première égalité exige que $(g_1^2 - g_1 g_2)$ soit un multiple de g. C'est une première condition à laquelle doivent satisfaire g, g_1 et g_2.

$$\frac{g_1(g_1 - g_2)}{g} = \text{nombre entier, soit } m_1 .$$

Le produit $t_8 t_9$ ne donne aucune condition nouvelle, puisque $t_8 t_9 = g_1 g e_1 = g_1 t_9$. On a donc

$$t_8 = g_1 e_1 + g_2 e_5 .$$

Formons les autres produits $t_i t_k$, puis appliquons toujours l'équation (1), (§ 19) et le principe de la comparaison des coefficients correspondants (§ 4).

21. *Calcul de t_7.*

1° $t_9 t_7 = g e_1(\alpha_7 e_1 + \beta_7 e_5 + \gamma_7 e_9) = g\alpha_7 e_1 = k_9 t_9 = g k_9 e_1$.

Donc $\alpha_7 = k_9 =$ nombre entier.

2° $t_8 t_7 = (g_1 e_1 + g_2 e_5)(\alpha_7 e_1 + \beta_7 e_5 + \gamma_7 e_9) = g_1 \alpha_7 e_1 + g_2 \beta_7 e_5 = q_8 t_8 + q_9 t_9$,

donc $g_1 \alpha_7 e_1 + g_2 \beta_7 e_5 = q_8(g_1 e_1 + g_2 e_5) + q_9 g e_1$,

d'où $q_8 g_2 = g_2 \beta_7$; $g_1 \alpha_7 = q_8 g_1 + q_9 g$.

On tire de la première égalité $\beta_7 = q_8 =$ n. entier, soit k_8.

Nous avons ensuite

3° $t_7^2 = (\alpha_7 e_1 + \beta_7 e_5 + \gamma_7 e_9)^2 = \alpha_7^2 e_1 + \beta_7^2 e_5 + \gamma_7^2 e_9 = r_7 t_7 + r_8 t_8 + r_9 t_9$,

ce qui donne entre autres la condition,

$$r_7 \gamma_7 = \gamma_7^2, \text{ d'où } \gamma_7 = r_7 = \text{nombre entier, soit } k_7 .$$

t_7 pourra donc s'écrire $\quad t_7 = k_9 e_1 + k_8 e_5 + k_7 e_9 .$

Le tritettarion principal devant être contenu dans notre domaine, il faut que

$$e_1 + e_5 + e_9 = x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_9 t_9 ,$$

mais $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_6 = 0$ (§4), donc

$$\begin{aligned} e_1 + e_5 + e_9 &= x_7 t_7 + x_8 t_8 + x_9 t_9 \\ &= (x_7 k_9 + x_8 g_1 + x_9 g) e_1 + (x_7 k_8 + x_8 g_2) e_5 + x_7 k_7 e_9 . \end{aligned}$$

En vertu du § 4, cette égalité ne peut avoir lieu que si

$$\begin{aligned} x_7 k_8 + x_8 g_1 + x_8 g &= 1 \\ x_7 k_8 + x_8 g_2 \qquad &= 1 \\ x_7 k_7 \qquad\qquad &= 1 \end{aligned}$$

On en tire successivement

$$k_7 = x_7 = \pm 1 \; ; \quad k_8 = \pm (1 - x_8 g_2) \; ; \quad k_8 = \pm (1 - x_8 g_1 - x_9 g),$$

et t_7 devient

$$t_7 = \pm (1 - x_8 g_1 - x_9 g)\, e_1 \pm (1 - x_8 g_2) e_5 \pm e_9$$

Le théorème 4, § 18, permet de remplacer, dans la base, t_7 par

$$t_7' = \pm t_7 + x_8 t_8 + x_9 t_9 .$$

Dès lors, t_7 devient, si l'on supprime l'accent prime,

$$t_7 = e_1 + e_5 + e_9 = 1 \quad (\S\, 9).$$

22. *Calcul de* t_8. Formons les produits $t_9 t_6$, $t_8 t_6$, t_6^2, $t_8 t_9$ et $t_6 t_8$.

1° $t_9 t_6 = g e_1 (\alpha_6 e_1 + \beta_6 e_5 + \gamma_6 e_9 + \delta_6 e_7) = g \alpha_6 e_1 = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_9 t_9$
$= p_9 t_9$, car $p_1, p_2, \ldots, p_8$ sont nuls (§ 4).

L'égalité $g \alpha_6 e_1 = p_9 g e_1$ entraîne $\alpha_6 = p_9 =$ nombre entier.

2° $t_8 t_6 = (g_1 e_1 + g_2 e_5)(\alpha_6 e_1 + \beta_6 e_5 + \gamma_8 e_9 + \delta_8 e_7) = g_1 \alpha_6 e_1 + \beta_6 g_2 e_5 = r_8 t_8 + r_9 t_9$.

En égalant les coefficients correspondants, on trouve $\beta_6 = r_8 =$ nombre entier et, en plus, la condition

$$r_9 = \frac{g_1 (p_9 - r_8)}{g}$$

3° $t_6^2 = (\alpha_6 e_1 + \beta_6 e_5 + \gamma_6 e_9 + \delta_6 e_7)^2 = \alpha_6^2 e_1 + \beta_6^2 e_5 + \gamma_6^2 e_9 + (\alpha_6 + \gamma_6) \delta_6 e_7$
$= \nu_6 t_6 + \ldots + \nu_9 t_9$.

Par la comparaison des coefficients correspondants, on obtient $\alpha_6 + \gamma_6 = \nu_6$ $=$ n. entier ; α_6 étant entier, $\gamma_6 \equiv k$ l'est aussi ; t_6 s'écrira

$$t_6 = p_9 e_1 + r_8 e_5 + k e_9 + \delta_6 e_7 .$$

Le théorème 4 permet de remplacer t_6 par

$$t_6' = t_6 - k t_7 .$$

En désignant par g_3 et g_4 deux entiers, puis supprimant l'accent prime, on peut donc écrire

$$t_6 = g_3 e_1 + g_4 e_5 + \delta_6 e_7 .$$

Exprimons derechef que t_6^2 doit se trouver dans le module envisagé :

$$(g_3 e_1 + g_4 e_5 + \delta_6 e_7)^2 = g_3^2 e_1 + g_4^2 e_5 + g_3 \delta_6 e_7 = n_6 t_6 + n_7 t_7 + n_8 t_8 + n_9 t_9 .$$

La comparaison des coefficients correspondants fournit deux nouvelles conditions :

$$\frac{g_4 (g_3 - g_4)}{g_2} = \text{n. entier} \; ; \quad \frac{g_1 g_4 (g_3 - g_4)}{g g_2} = \text{n. entier}. \qquad (a)$$

4° De $t_6 t_9 = (g_3 e_1 + g_4 e_5 + \delta_6 e_7) g e_1 = g g_3 e_1 + g \delta_6 e_7 = q_9 t_6 + \ldots + q_6 t_9$, on déduit les conditions :

$$\frac{g g_4}{g_2} = \text{n. entier} \equiv n_1\ ; \quad \frac{g_1 g_4}{g_2} = \text{n. entier} \equiv n_2 \qquad (b)$$

5° $t_9 t_8 = (g_3 e_1 + g_4 e_5 + \delta_6 e_7)(g_1 e_1 + g_2 e_5) = g_1 g_3 e_1 + g_2 g_4 e_5 + g_1 \delta_6 e_7$
$= s_9 t_8 + \ldots + s_8 t_9$ entraîne

$$\frac{g_1 g_4 (g_2 - g_1)}{g g_2} = \text{n. entier.} \qquad (c)$$

6° $t_6 t_7 = t_7 t_6 = t_8$ ne donne aucune condition nouvelle.

23. Nous avons ainsi déterminé les formes que doivent avoir t_9, t_8, t_7 et t_6, savoir

$$\begin{aligned} t_6 &= g_3 e_1 + g_4 e_5 \qquad + \delta_6 e_7 \\ t_7 &= \quad e_1 + \quad e_5 + e_6 \\ t_8 &= g_1 e_1 + g_2 e_5 \\ t_9 &= g\ e_1 \end{aligned}$$

Dans ces expressions, g et les g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) représentent des nombres entiers et δ_6 un nombre rationnel non nul ; g et les g_i sont liés par les conditions sus-indiquées. Si elles sont remplies, tous les produits $t_i t_k$ étudiés jusqu'ici feront partie du module envisagé. On aura par exemple

$$\begin{aligned} t_9 t_6 &= g_3 t_9\,, \\ t_6 t_9 &= g t_6 - n_1 t_8 + n_2 t_9\,, \end{aligned}$$

où n_1 et n_2 sont les nombres entiers définis par les relations (b) ci-dessus. Et ainsi de suite pour les autres produits.

Les développements précédents montrent suffisamment de quelle manière il faut procéder pour trouver les conditions auxquelles doivent être soumises les coordonnées des tritettarions t_i et t_k (i, $k = 1, 2, \ldots, 9$) pour que le produit $t_i t_k$ fasse partie du module envisagé (§ 19). Nous allons continuer cette analyse, en supprimant toutefois les détails et en nous bornant à indiquer, parmi les conditions trouvées, celles que nous utiliserons dans les démonstrations subséquentes.

24. *Calcul de* t_5. Formons les produits $t_9 t_5$, $t_5 t_8$, t_5^2, $t_8 t_5$.

1° $t_9 t_5 = g e_1 (\alpha_5 e_1 + \beta_5 e_5 + \gamma_5 e_9 + \delta_5 e_7 + \varepsilon_5 e_4) = g \alpha_5 e_1 = p t_9$.
On en tire $\alpha_5 = p = $ n. entier.

2° $t_5 t_6 = \alpha_5 g_3 e_1 + \beta_5 g_4 e_5 + \gamma_5 \delta_6 e_7 + \delta_5 g_3 e_7 + \varepsilon_5 g_3 e_4 = \nu_5 t_5 + \ldots + \nu_9 t_9$,
entraîne $\gamma_5 = \nu_6 = $ n. entier.

3° $t_5^2 = \alpha_5^2 e_1 + \beta_5^2 e_5 + \gamma_5^2 e_9 + \beta_5 \varepsilon_5 e_4 + \gamma_5 \delta_5 e_7 + \alpha_5 \delta_5 e_7 + \alpha_5 \varepsilon_5 e_4$
$= x_5 t_5 + \ldots + x_9 t_9$,
entraîne $\beta_5 = $ n. entier $\equiv k$.

4° $t_8 t_5 = g_1\alpha_5 e_1 + g_2\beta_5 e_5 + g_2\varepsilon_5 e_4$
$= r_5 t_5 + \dots + r_9 t_9$, entraîne
$\delta_5 = -\frac{r_6\delta_6}{g_2}$; t_5 devient
$$t_5 = pe_1 + ke_5 + \nu_5 e_9 - \frac{r_6\delta_6}{g_2} e_7 + \varepsilon_5 e_4 .$$

En vertu du théorème 4, on peut remplacer t_5 comme membre de la base, par
$$t'_5 = t_5 - \nu_6 t_7 .$$

Supprimant ensuite l'accent prime, il vient
$$t_5 = g_5 e_1 + g_6 e_5 + \frac{g_7}{g_2}\delta_6 e_7 + \varepsilon_5 e_4 ,$$
où g_5, g_6 et g_7 représentent des nombres entiers.

25. *Calcul de t_4*. 1° Le produit
$$t_9 t_4 = ge_1(\alpha_4 e_1 + \beta_4 e_5 + \gamma_4 e_9 + \delta_4 e_7 + \varepsilon_4 e_4 + \varphi_4 e_8) = g\,\alpha_4 e_1 = pt_9$$
entraîne $\alpha_4 = p =$ n. entier.

2° $t_4 t_9 = \alpha_4 g e_1 + \delta_4 g e_7 + \varepsilon_4 g e_4 = q_5 t_5 + \dots + q_9 t_9$,
donne les relations
$$\varepsilon_4 = \frac{q_5\varepsilon_5}{g} ; \; \delta_4 = \left(\frac{q_6}{g} + \frac{q_5 g_7}{gg_2}\right)\delta_6 .$$

3° Du produit $t_8 t_4 = g_1\alpha_4 e_1 + g_2\beta_4 e_5 + g_2\varepsilon_4 e_4 = r_5 t_5 + \dots + r_9 t_9$,
nous déduisons
$$\beta_4 = r_8 + \frac{q_5 g_6}{g} - \frac{q_5 g_4 g_7}{gg_2} .$$

4° De $t_6 t_4 = g_3\alpha_4 e_1 + g_4\beta_4 e_5 + g_4\varepsilon_4 e_4 + \delta_6\alpha_4 e_7 = u_5 t_5 + \dots + u_9 t_9$,
il découle

$\alpha_4 - \frac{q_5 g_4 g_7}{gg_2} = u_6$; α_4 et u_6 étant entiers, le produit $q_5 g_4 g_7$ doit être divisible par gg_2.

5° $t_5 t_4 = g_5\alpha_4 e_1 + g_6\beta_4 e_5 + g_6\varepsilon_4 e_4 + \frac{g_7}{g_2}\delta_5\alpha_4 e_7 + \varepsilon_5\alpha_4 e_4$
$= x_5 t_5 + \dots + x_9 t_9$, entraîne

$\alpha_4 + \frac{q_5 g_6}{g} = x_5$; comme α_4 et x_5 représentent des nombres entiers, il faut que $q_5 g_6$ soit divisible par g ; donc β_4 est un nombre entier, k_1.

6° $t_4^2 = \alpha_4^2 e_1 + \beta_4^2 e_5 + \gamma_4^2 e_9 + \beta_4\varepsilon_4 e_4 + \gamma_4\delta_4 e_7 + \gamma_4\varphi_4 e_8 + \delta_4\alpha_4 e_7 + \varepsilon_4\alpha_4 e_4$
$+ \varphi_4\beta_4 e_8 + \varphi_4\varepsilon_4 e_7 = z_4 t_4 + \dots + z_9 t_9$, entraîne $\beta_4 + \gamma_4 = z_4$.

Il s'en suit que $\gamma_4 =$ n. entier $\equiv k_2$, de sorte que
$$t_4 = pe_1 + k_1 e_5 + k_2 e_9 + \left(\frac{q_6}{g} + \frac{q_5 g_7}{gg_2}\right)\delta_6 e_7 + \frac{q_5\varepsilon_5}{g} e_4 + \varphi_4 e_8 .$$

Le théorème 4 permet de prendre, à la place de t_4, comme nouveau membre de la base

$$t_4' = t_4 - k_2 t_7 .$$

Ecrivons $\quad g_3 \;,\quad g_9 \;,\; g_{10} \,,\; g_{11} \,,\; \dfrac{G_1}{g g_2}$

au lieu de $\quad p - k_3 ,\quad k_1 - k_2 ,\quad q_8 \;,\quad q_5 \;,\quad \dfrac{g_{10}}{g} + \dfrac{g_7 g_{11}}{g g_2} ,$

il vient

$$t_4 = g_3 e_1 + g_9 e_5 + \frac{G_1}{g g_2} \delta_8 e_7 + \frac{g_{11}}{g} \varepsilon_5 e_4 + \varphi_4 e_3 .$$

26. *Calcul de* t_3.

1° Le produit $t_9 t_3 = g e_1 (\alpha_3 e_1 + \beta_3 e_5 + \gamma_3 e_8 + \delta_3 e_7 + \varepsilon_3 e_4 + \varphi_3 e_3 + \chi_3 e_6)$
$= g \alpha_3 e_1 = p_9 t_9$

montre que $\alpha_3 = p_9 =$ n. entier.

2° De $t_3 t_8 = \alpha_3 g e_1 + \delta_3 g e_7 + \varepsilon_3 g e_4 = q_5 t_5 + \ldots + q_9 t_9$, on déduit

$$\varepsilon_3 = \frac{q_5 \varepsilon_5}{g} ; \quad \delta_3 = \left(\frac{q_8}{g} + \frac{q_5 g_7}{g g_2} \right) \delta_8 .$$

3° $t_8 t_3 = g_1 \alpha_3 e_1 + g_2 \beta_3 e_5 + g_2 \varepsilon_3 e_4 + g_2 \chi_3 e_8 = r_3 t_3 + \ldots + r_9 t_9$, entraîne

$$\varphi_3 = - \frac{r_4 \varphi_4}{g_2} ; \quad \gamma_3 = - \frac{r_7}{g_2} .$$

4° $t_4 t_3 = g_3 \alpha_3 e_1 + g_9 \beta_3 e_5 + g_9 \varepsilon_3 e_4 + g_9 \chi_3 e_8 + \dfrac{G_1}{g g_2} \delta_8 \alpha_3 e_7 + \dfrac{g_{11}}{g} \varepsilon_5 \alpha_3 e_4 + \varphi_4 \beta_3 e_3$
$+ \varphi_4 \varepsilon_3 e_7 + \varphi_4 \chi_3 e_9 = k_3 t_3 + \ldots + k_9 t_9$, montre que

$$\beta_3 = k_4 + \frac{g_9 \varphi_3}{\varphi_4} = k_4 - \frac{g_9 r_4}{g_2} .$$

Le théorème 4 permet de prendre, à la place de t_3,

$$t_3' = t_3 - p_9 t_7$$

Désignons par g_{13} et g_{14} des nombres entiers et

écrivons $\quad g_{15} \,,\; g_{16} \,,\; g_{17} \;,\quad \dfrac{G_2}{g_2} \quad ,\quad \dfrac{G_3}{g g_2}$

au lieu de $\quad q_6 \;,\quad q_5 \;,\quad - r_4 \,,\quad g_{13} + \dfrac{g_8 g_{17}}{g_2} ,\quad \dfrac{g_{15}}{g} + \dfrac{g_7 g_{15}}{g g_2} .$

La forme définitive de t_3 sera

$$t_3 = \frac{G_2}{g_2} e_5 + \frac{g_{14}}{g_2} e_8 + \frac{G_3}{g g_2} \delta_8 e_7 + \frac{g_{16}}{g} \varepsilon_5 e_4 + \frac{g_{17}}{g_2} \varphi_4 e_3 + \chi_3 e_8 .$$

27. *Calcul de* t_2.

1° $t_2 t_8 = (\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_5 + \gamma_2 e_9 + \delta_2 e_7 + \varepsilon_2 e_4 + \varphi_2 e_3 + \chi_2 e_8 + \psi_2 e_2) g e_1$
$= \alpha_2 g e_1 + \delta_2 g e_7 + \varepsilon_2 g e_4 = q_5 t_5 + \ldots + q_9 t_9$, montre que

$$\varepsilon_2 = \frac{q_5 \varepsilon_5}{g} ; \quad \delta_2 = \left(\frac{q_6}{g} + \frac{q_5 g_7}{g g_2} \right) \delta_8 ; \quad \alpha_2 = q_8 + \frac{q_5 g_5 + q_8 g_3 + q_8 g_1}{g} .$$

On en tire de plus la condition

$$\frac{g_4 q_8 + g_5 q_6}{g_2} = \text{n. entier.} \tag{I}$$

2° $t_9 t_3 = g\alpha_2 e_1 + g\psi_2 e_9 = p_2 t_2 + \ldots + p_9 t_9$ entraîne

$$\chi_2 = -\frac{p_3 \chi_3}{g}\,;\quad \varphi_2 = -\left(\frac{p_4}{g} + \frac{p_3 g_{17}}{g g_3}\right)\varphi_4\,;\quad \gamma_2 = -\frac{p_7}{g} - \frac{p_3 g_{14}}{g g_2}\,;$$

$$\beta_2 = -\frac{p_3 G_3}{g g_3} + \frac{g_6}{g}\left(q_5 + \frac{p_3 g_{16} + p_4 g_{11}}{g}\right) + \frac{g_4}{g}\left(q_4 + \frac{p_3 g_{15} + p_4 g_{10}}{g}\right) - \frac{p_7 + p_3 g_2 + p_4 g_9}{g}$$

et l'on a entre autres les conditions

$$\frac{p_4 g_{11} + p_3 g_{16}}{g} = \text{n. entier}\,;\quad \frac{p_4 g_{10} + p_3 g_{15}}{g} = \text{n. entier.} \tag{II}$$

Ecrivons g_{18}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, g_{25}

au lieu de q_9, p_6, p_7, q_6, q_5, p_4, $-p_3$;

il vient $\alpha_2 = g_{18} + \dfrac{g_3 g_{22} + g_5 g_{23}}{g} - g_1 \dfrac{g_4 g_{22} + g_6 g_{23}}{g g_2}$.

La condition (I) montre que $g_4 g_{22} + g_6 g_{23}$ est divisible par g_2. Nous pouvons donc poser $\alpha_2 \equiv \dfrac{G_4}{g}$, où G_4 est un nombre entier. On démontrerait de même à l'aide des conditions (II), que :

$$\beta_2 = \frac{G_5}{g g_2}\quad;\qquad \gamma_2 = -\frac{g_{21}}{g} + \frac{g_{14} g_{25}}{g g_2} = \frac{G_6}{g g_2}\,;$$

$$\delta_2 = \left(\frac{g_{22}}{g} + \frac{g_7 g_{23}}{g g_2}\right)\delta_6 = \frac{G_7}{g g_3}\delta_8\,;\quad \varepsilon_2 = \frac{g_{23}}{g}\varepsilon_6\,;$$

$$\varphi_2 = \left(-\frac{g_{24}}{g} + \frac{g_{17} g_{25}}{g g_2}\right)\varphi_4 = \frac{G_8}{g g_2}\varphi_4\,;\quad \chi_2 = \frac{g_{25}}{g}\chi_3\,,$$

où les G_λ représentent des nombres entiers. La forme définitive de t_2 est ainsi

$$t_2 = \frac{G_4}{g}e_1 + \frac{G_5}{g g_2}e_5 + \frac{G_8}{g g_3}e_9 + \frac{G_7}{g g_2}\delta_8 e_7 + \frac{g_{23}}{g}\varepsilon_6 e_4 + \frac{G_6}{g g_2}\varphi_4 e_3 + \frac{g_{25}}{g}\chi_3 e_6 + \psi_2 e_2.$$

28. *Calcul de t_1.*

1° De $t_1 t_8 = (\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_5 + \gamma_1 e_9 + \delta_1 e_7 + \varepsilon_1 e_4 + \varphi_1 e_6 + \chi_1 e_8 + \psi_1 e_3 + \lambda_1 e_3) g e_1$
$= \alpha_1 g e_1 + \delta_1 g e_7 + \varepsilon_1 g e_4$
$= q_4 t_5 + \ldots + q_9 t_9$ il découle

$$\varepsilon_1 = \frac{q_5 \varepsilon_5}{g}\,;\ \delta_1 = \left(\frac{q_6}{g} + \frac{q_5 g_7}{g g_2}\right)\delta_6\,;\ \alpha_1 = q_8 + \frac{q_5 g_5 + q_6 g_3}{g} - g_1 \frac{q_5 g_8 + q_8 g_4}{g g_3}$$

avec la condition

$$\frac{g_4 q_6 + g_6 q_5}{g_2} = \text{n. entier.} \tag{III}$$

2° $t_9 t_1 = g\chi_1 e_1 + g\psi_1 e_2 + g\lambda_1 e_3 = p_1 t_1 + \ldots + p_9 t_9$ entraîne

$$\chi_1 = -\frac{p_3\chi_3}{g}\,;\quad \varphi_1 = -\left(\frac{p_4}{g} + \frac{p_3 g_{17}}{g g_2}\right)\varphi_4\,;\quad \gamma_1 = -\frac{p_7}{g} - \frac{p_3 g_{14}}{g g_2}\,;$$

$$\beta_1 = -\frac{p_8 G_2}{g g_2} + \frac{g_6}{g}\left(q_5 + \frac{p_3 g_{16} + p_4 g_{11}}{g}\right) + \frac{g_4}{g}\left(q_6 + \frac{p_3 g_{15} + p_4 g_{10}}{g}\right) - \frac{p_4 g_9 + p_7 + p_8 g_2}{g},$$

et les conditions

$$\frac{g_{11} p_4 + g_{16} p_3}{g} = \text{n. entier}\,;\quad \frac{g_{10} p_4 + g_{15} p_3}{g} = \text{n. entier.} \qquad \text{(IV)}$$

3° $t_1 t_8 = \alpha_1 g_1 e_1 + \beta_1 g_2 e_5 + \delta_1 g_1 e_7 + \varepsilon_1 g_1 e_4 + \varphi_1 g_2 e_8 + \psi_1 g_2 e_2$
$= s_2 t_2 + \ldots + s_9 t_9$ entraîne

$$\psi_1 = \frac{s_2\psi_3}{g_2}\,;\quad g_1\alpha_1 - s_2\frac{G_4}{g} = \text{n. entier.}$$

Ecrivons g_{27}, g_{28}, g_{29}, g_{30}, g_{31}, g_{32}, g_{33}, g_{34}
au lieu de q_9, p_8, p_7, q_8, q_5, p_4, $-p_3$, s_2.

Il vient $\quad \alpha_1 = g_{27} + \dfrac{g_5 g_{31} + g_3 g_{30}}{g} - g_1\dfrac{g_4 g_{30} + g_6 g_{31}}{g g_2} \equiv \dfrac{G_9}{g},$

grâce à la condition (III). On démontrerait de même que :

$\beta_1 = \dfrac{G_{10}}{g g_2}$, en tenant compte des conditions (IV) ;

$$\gamma_1 = -\frac{g_{29}}{g} + \frac{g_{14} g_{33}}{g g_2} = \frac{G_{11}}{g g_2}\,;\quad \delta_1 = \left(\frac{g_{30}}{g} + \frac{g_7 g_{31}}{g g_2}\right)\delta_6 = \frac{G_{12}}{g g_2}\delta_6\,;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{g_{21}}{g}\varepsilon_5\,;\qquad \varphi_1 = \left(-\frac{g_{32}}{g} + \frac{g_{17} g_{33}}{g g_2}\right)\varphi_4 = \frac{G_{13}}{g g_2}\varphi_4\,;$$

$$\chi_1 = \frac{g_{33}}{g}\chi_3\,;\qquad \psi_1 = \frac{g_{34}}{g_2}\psi_2\,.$$

La forme définitive de t_1 est ainsi :

$$t_1 = \frac{G_9}{g}e_1 + \frac{G_{10}}{g g_2}e_5 + \frac{G_{11}}{g g_2}e_9 + \frac{G_{12}}{g g_2}\delta_9 e_7 + \frac{g_{31}}{g}\varepsilon_5 e_4 + \frac{G_{13}}{g g_2}\varphi_4 e_9 + \frac{g_{33}}{g}\chi_3 e_8 + \frac{g_{34}}{g_2}\psi_2 e_2 + \lambda_1 e_3\,.$$

La condition $g_1\alpha_1 - s_2\dfrac{G_4}{g} = \text{n. entier}$, s'écrit

$$\frac{g_1 G_9 - g_{34} G_4}{g} = \text{n. entier.}$$

29. Les développements précédents montrent que, si le module $[T]$ doit être en même temps un domaine holoïde, les 9 membres de sa base auront respectivement la forme suivante :

$$
(C):\quad
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{G_9}{g}\,e_1 + \frac{G_{10}}{g\,g_3}\,e_5 + \frac{G_{11}}{g\,g_2}\,e_8 + \frac{G_{12}}{g\,g_3}\,\delta_8 e_7 + \frac{g_{31}}{g}\,\varepsilon_5 e_4 + \frac{G_{13}}{g\,g_2}\,\varphi_4 e_8 + \frac{g_{33}}{g}\,\chi_3 e_6 + \frac{g_{34}}{g_2}\,\psi_2 e_2 + \lambda_1 e_3 \\
t_2 &= \frac{G_4}{g}\,e_1 + \frac{G_5}{g\,g_2}\,e_5 + \frac{G_6}{g\,g_2}\,e_8 + \frac{G_7}{g\,g_2}\,\delta_8 e_7 + \frac{g_{23}}{g}\,\varepsilon_5 e_4 + \frac{G_8}{g\,g_2}\,\varphi_4 e_6 + \frac{g_{25}}{g}\,\chi_3 e_6 + \psi_2 e_2 \\
t_3 &= \frac{G_2}{g_3}\,e_5 + \frac{g_{14}}{g_3}\,e_8 + \frac{G_3}{g\,g_2}\,\delta_8 e_7 + \frac{g_{16}}{g}\,\varepsilon_5 e_4 + \frac{g_{17}}{g_2}\,\varphi_4 e_8 + \chi_3 e_4 \\
t_4 &= g_8 e_1 + g_9 e_5 + \frac{G_1}{g\,g_2}\,\delta_8 e_7 + \frac{g_{11}}{g}\,\varepsilon_5 e_4 + \varphi_4 e_8 \\
t_5 &= g_5 e_1 + g_6 e_5 + \frac{g_7}{g_2}\,\delta_8 e_7 + \varepsilon_5 e_4 \\
t_6 &= g_3 e_1 + g_4 e_5 + \delta_8 e_7 \\
t_7 &= e_1 + e_5 + e_8 \\
t_8 &= g_1 e_1 + g_2 e_5 \\
t_9 &= g e_1
\end{aligned}
$$

Dans ces expressions, les coefficients, savoir g, les g_i ($i = 1, 2, \ldots, 35$) et les G_k ($k = 1, 2, \ldots, 13$) sont des nombres entiers dont $g \neq 0$ et $g_2 \neq 0$; δ_8, ε_5, φ_4, χ_3, ψ_2, λ_1 représentent six nombres rationnels non nuls.

30. Si l'on exprime les 81 produits $t_\lambda t_\mu$ linéairement en fonction des t_λ (v. § 19) comme nous l'avons fait pour quelques-uns dans les §§ 20-28, on trouve que ces coefficients doivent satisfaire à 280 équations de condition. Il est à remarquer qu'elles peuvent être mises sous forme de congruences et, chose essentielle, qu'elles sont compatibles entre elles. Nous n'en reproduirons qu'une partie dans le tableau suivant : celles que nous utiliserons dans la suite.

Numéro	On déduit du produit	que l'expression suivante doit être un nombre entier $\equiv m_\lambda$	savoir
1	$t_2 t_8$	$(g_1 - g_2)\,\dfrac{G_4}{g}$	m_1
2	$t_2 t_6$	$(g_3 - g_4)\,\dfrac{G_4}{g}$	m_2
3	$t_2 t_5$	$(g_5 - g_6)\,\dfrac{G_4}{g} + \varepsilon_5 \psi_2$	m_3
4	$t_2 t_4$	$(g_8 - g_9)\,\dfrac{G_4}{g} + \dfrac{g_{11}}{g}\,\varepsilon_5 \psi_2$	m_4
5	$t_2 t_3$	$\dfrac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1}$	m_5
6	»	$\dfrac{G_2}{g_3} - \dfrac{g_{34}}{g_2}\,\dfrac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1}$	m_6
7	»	$\left(\dfrac{g_{34} G_4}{g g_2} - \dfrac{G_9}{g}\right)\dfrac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} - \dfrac{G_2 G_4}{g g_2} + \dfrac{g_{16}}{g}\,\varepsilon_5 \psi_2$	m_7

Numéro	On déduit du produit	que l'expression suivante doit être un nombre entier $\equiv m_\lambda$	savoir
8	t_2^2	$\frac{g_{25}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_8
9	»	$\frac{G_4}{g}+\frac{G_5}{gg_2}-\frac{g_{25}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_9
10	»	$\frac{g_{23}}{g}\varepsilon_5\psi_2+\frac{g_{25}g_{34}G_4}{g^2g_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}-\frac{g_{25}G_2}{g^2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}-\frac{G_4G_5}{g^2g_2}$	m_{10}
11	t_1t_8	$\frac{g_1G_2-g_{34}G_4}{g}$	m_{11}
12	t_1t_6	$\frac{g_4g_{34}}{g_2}$	m_{12}
13	»	$\lambda_1\delta_6+\frac{g_2G_2}{g}-\frac{g_4g_{34}G_4}{gg_2}$	m_{13}
14	t_1t_5	$\frac{g_5g_{34}}{g_2}$	m_{14}
15	»	$\frac{g_7}{g_2}\lambda_1\delta_6+\frac{g_5G_2}{g}-\frac{g_5g_{34}G_4}{gg_2}+\frac{g_{34}}{g_2}\varepsilon_5\psi_2$	m_{15}
16	t_1t_4	$\frac{g_9g_{34}}{g_2}+\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}$	m_{16}
17	»	$\frac{G_1}{gg_2}\lambda_1\delta_6+\frac{g_8G_2}{g}+\frac{g_{11}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2-\frac{G_4}{g}\left(\frac{g_9g_{34}}{g_2}+\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}\right)$	m_{17}
18	t_1t_3	$\frac{g_{14}}{g_2}+\frac{g_{34}}{g_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{18}
19	»	$\frac{g_{34}G_2}{g_2^2}+\frac{g_{17}\lambda_1\varphi_4}{g_2\psi_2}-\frac{g_{34}}{g_2}\left(\frac{g_{14}}{g_2}+\frac{g_{34}}{g_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}\right)$	m_{19}
20	»	$\frac{g_{16}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2+\frac{G_3}{gg_2}\lambda_1\delta_6-\frac{g_{34}G_2G_4}{gg_2^2}-\frac{g_{17}G_4}{gg_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}+\left(\frac{g_{34}}{g_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}+\frac{g_{14}}{g_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2}-\frac{G_9}{g}\right)$	m_{20}
21	t_1t_2	$\frac{g_{25}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}+\frac{G_6}{gg_2}$	m_{21}
22	»	$\frac{G_9}{g}+\frac{G_8}{gg_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}+\frac{g_{34}(G_5-G_6)}{gg_2^2}-\frac{g_{25}g_{34}^2}{gg_2^2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{22}
23	»	$\frac{g_{23}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2+\frac{G_7}{gg_2}\lambda_1\delta_6-\frac{g_{34}G_4G_5}{g^2g_2^2}-\frac{G_4G_8}{g^2g_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}+\left(\frac{g_{25}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}+\frac{G_6}{gg_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2}-\frac{G_9}{g}\right)$	m_{23}
24	t_2t_1	$\frac{G_4}{g}+\frac{g_{33}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{24}
25	»	$\frac{G_{10}}{gg_2}-\frac{g_{33}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{25}
26	»	$\frac{g_{31}}{g}\varepsilon_5\psi_2-\frac{G_4G_{10}}{g^2g_2}+\frac{g_{33}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2}-\frac{G_9}{g}\right)$	m_{26}
27	t_1^2	$\frac{G_9}{g}+\frac{G_{11}}{gg_2}+\frac{g_{33}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{27}
28	»	$\frac{g_{34}(G_{10}-G_{11})}{gg_2^2}+\frac{G_{12}}{gg_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}-\frac{g_{33}g_{34}^2}{gg_2^2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}$	m_{28}
29	»	$\frac{g_{31}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2+\frac{G_{12}}{gg_2}\lambda_1\delta_6-\frac{g_{34}G_4G_{10}}{g^2g_2^2}-\frac{G_4G_{12}}{g^2g_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2}+\left(\frac{g_{33}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}+\frac{G_{11}}{gg_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2}-\frac{G_9}{g}\right)$	m_{29}

31. Supposons maintenant qu'une base de notre module $[T]$ ait la forme (C) (§ 29) et que les g, g_i, δ_8, ..., λ_1 satisfassent aux 280 conditions mentionnées au § 30. Tous les produits $t_i t_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, 9)$ seront des fonctions linéaires, à coefficients entiers, des t_i et par conséquent contenus dans $[T]$. Il en sera de même de toutes les puissances t_λ^n et dès lors de toutes les sommes ou différences de produits quelconques des t_i. Le module considéré $[T]$ sera donc en même temps un domaine d'intégrité, puisque ses éléments se reproduiront aussi par multiplication. Ce domaine sera *holoïde* puisqu'il renfermera le tritettarion principal. Ce sera enfin le domaine holoïde le plus général, car, en le recherchant, nous n'avons tiré que des conclusions nécessaires.

Tout domaine holoïde du corps $\}R\{$ a donc une base de la forme (C). Inversement, on obtient tous les domaines holoïdes de $\}R\{$ en attribuant, dans la base (C), aux 42 nombres g_λ, δ_6, ..., λ_1 toutes les valeurs compatibles avec les 280 conditions mentionnées au § 30. Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 5. Le domaine holoïde le plus général du corps de tritettarions $\}R\{$ a comme base $[t_1, t_2, \ldots, t_9]$, où

$$t_1 = \begin{Bmatrix} \frac{G_9}{g}, & \frac{g_{34}}{g_2}\psi_2, & \lambda_1 \\ \frac{g_{31}}{g}\varepsilon_5, & \frac{G_{10}}{g g_2}, & \frac{g_{33}}{g}\chi_3 \\ \frac{G_{12}}{g g_2}\delta_9, & \frac{G_{13}}{g g_2}\varphi_4, & \frac{G_{11}}{g g_2} \end{Bmatrix}; \quad t_2 = \begin{Bmatrix} \frac{G_4}{g}, & \psi_2, & 0 \\ \frac{g_{23}}{g}\varepsilon_5, & \frac{G_6}{g g_3}, & \frac{g_{25}}{g}\chi_3 \\ \frac{G_7}{g g_2}\delta_6, & \frac{G_8}{g g_3}\varphi_4, & \frac{G_5}{g g_3} \end{Bmatrix}; \quad t_3 = \begin{Bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ \frac{g_{18}}{g}\varepsilon_5, & \frac{G_2}{g_2}, & \chi_5 \\ \frac{G_3}{g g_2}\delta_8, & \frac{g_{17}}{g_2}\varphi_4, & \frac{g_{15}}{g_2} \end{Bmatrix};$$

$$t_4 = \begin{Bmatrix} g_8, & 0, & 0 \\ \frac{g_{11}}{g}\varepsilon_5, & g_9, & 0 \\ \frac{G_1}{g g_8}\delta_8, & \varphi_4, & 0 \end{Bmatrix}; \quad t_5 = \begin{Bmatrix} g_5, & 0, & 0 \\ \varepsilon_5, & g_5, & 0 \\ \frac{g_7}{g_2}\delta_8, & 0, & 0 \end{Bmatrix}; \quad t_6 = \begin{Bmatrix} g_8, & 0, & 0 \\ 0, & g_4, & 0 \\ \delta_6, & 0, & 0 \end{Bmatrix};$$

$$t_7 = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}; \quad t_8 = \begin{Bmatrix} g_1, & 0, & 0 \\ 0, & g_2, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}; \quad t_9 = \begin{Bmatrix} g, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Bmatrix}.$$

Le nombre des conditions auxquelles les coordonnées des membres de la base sont assujetties est élevé. Il fallait s'y attendre *.

---

* Les 81 produits $t_i t_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, 9)$ devant s'exprimer linéairement en fonction des t_i, (v. § 19) donnent naissance à 81 égalités de la forme $t_i t_k = c_{ik1} e_1 + c_{ik2} e_2 + c_{ik3} e_3 + \ldots + c_{ik9} e_9 = p_{ik1} t_1 + p_{ik2} t_2 + p_{ik3} t_3 + \ldots + p_{ik9} t_9$ où les p_{ikn} représentent des nombres entiers. La détermination des c_{ikn} satisfaisants à ces égalités conduit théoriquement à la résolution de $9 . 81 = 729$ équations.

32. Un domaine holoïde est déterminé par sa base $[t_1, t_2, \ldots, t_9]$ qui est elle-même fixée, lorsque les nombres g, g_i, δ_6, $\ldots$, λ_1 le sont. Supposons ces nombres choisis conformément aux conditions du § 30. L'ensemble de tous les tritettarions

$$t = n_1 t_1 + n_2 t_2 + \ldots + n_9 t_9$$

qu'on obtient alors en faisant parcourir aux n_r ($r = 1, 2, \ldots, 9$), indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, forme un domaine holoïde de tritettarions. Comme g, g_i, δ_6, $\ldots$, λ_1 peuvent être choisis d'une infinité de façons différentes, on a le

Théorème 6. Il existe une infinité de domaines holoïdes dans le corps des tritettarions rationnels.

Pour désigner un domaine holoïde, nous emploierons le symbole $[g_i, \delta_6, \ldots, \lambda_1]$ qui représentera l'ensemble de tous les tritettarions

$$(K_1): \qquad t = \begin{Bmatrix} \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \\ \nu_4, & \nu_5, & \nu_6 \\ \nu_7, & \nu_8, & \nu_9 \end{Bmatrix}, \qquad \text{où}$$

$$\nu_1 \equiv n_1 \frac{G_9}{g} + n_2 \frac{G_4}{g} + n_4 g_6 + n_5 g_5 + n_6 g_3 + n_7 + n_8 g_1 + n_9 g;$$

$$\nu_2 \equiv n_1 \frac{g_{34}}{g_9} \psi_2 + n_3 \psi_2;$$

$$\nu_3 \equiv n_1 \lambda_1;$$

$$\nu_4 \equiv \left(n_1 \frac{g_{31}}{g} + n_2 \frac{g_{28}}{g} + n_3 \frac{g_{18}}{g} + n_4 \frac{g_{11}}{g} + n_5\right) \varepsilon_6;$$

$$\nu_5 \equiv n_1 \frac{G_{10}}{g g_2} + n_2 \frac{G_5}{g g_2} + n_3 \frac{G_2}{g_2} + n_4 g_6 + n_5 g_8 + n_6 g_4 + n_7 + n_9 g_3;$$

$$\nu_6 \equiv \left(n_1 \frac{g_{33}}{g} + n_2 \frac{g_{26}}{g} + n_3\right) \chi_3;$$

$$\nu_7 \equiv \left(n_1 \frac{G_{12}}{g g_2} + n_2 \frac{G_7}{g g_2} + n_3 \frac{G_3}{g g_2} + n_4 \frac{G_1}{g g_9} + n_5 \frac{g_7}{g_9} + n_6\right) \delta_6;$$

$$\nu_8 \equiv \left(n_1 \frac{G_{13}}{g g_2} + n_2 \frac{G_6}{g g_2} + n_3 \frac{g_{17}}{g_9} + n_4\right) \varphi_4;$$

$$\nu_9 \equiv n_1 \frac{G_{11}}{g g_3} + n_2 \frac{G_8}{g g_2} + n_3 \frac{g_{14}}{g_2} + n_7,$$

où g, g_i, δ_6, $\ldots$, λ_1 sont supposés fixes, tandis que les n_r ($r = 1, 2, \ldots, 9$) passent, indépendamment les uns des autres, par toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

CHAPITRE III

Du domaine holoïde maximal.

33. *Permutations de tritettarions.* Nous avons établi, au chapitre précédent, l'existence d'une infinité de domaines holoïdes du corps $\{R\}$ et en avons indiqué la forme générale. Il nous reste à chercher lequel de ces domaines est maximal (v. § 2). Nous baserons cette recherche sur les considérations suivantes :

a) *Substitutions.* Supposons que par une loi déterminée, d'ailleurs arbitraire, on fasse correspondre à chaque tritettarion t du corps $\{R\}$ un tritettarion $\tau = f(t)$, qui peut ne pas être rationnel. Ce τ sera dit *image de* t et l'opération qui l'a donné est une *substitution.* La substitution fait correspondre au corps $\{R\}$, un ensemble déterminé, dit *image de* $\{R\}$, qui peut être un corps de nombres ou non ; cela dépend de la nature de la substitution symbolisée par $[t\,,\; f(t)]$.

b) *Permutations.* La substitution $[t\,,\; f(t)]$ est appelée une *permutation* dans le cas où toute relation algébrique entre les t reste exacte, si l'on remplace chaque t par son image τ. *

On démontre que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont 1° que les tritettarions $\tau = f(t)$ ne soient pas tous nuls ; 2° que les deux équations

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$$
$$f(t_1\;.\;t_2) = f(t_1)\;.\;f(t_2)$$

soient satisfaites à la fois, quels que soient t_1 et t_2.

Considérons maintenant un tritettarion S soumis à la seule condition de ne pas être diviseur de zéro : $N(S) \neq 0$.

Si à chaque tritettarion

$$t \equiv \begin{Bmatrix} A_1\,, & A_2\,, & A_3 \\ A_4\,, & A_5\,, & A_6 \\ A_7\,, & A_8\,, & A_9 \end{Bmatrix},$$

nous faisons correspondre le tritettarion $\tau = StS^{-1}$, nous définissons par là une permutation du corps $\{R\}$. Les formules suivantes le montrent en effet :

$$S(t_1 + t_2)S^{-1} = St_1S^{-1} + St_2S^{-1}\,,\quad \text{soit } f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$$
$$S(t_1\;.\;t_2)S^{-1} = St_1S^{-1}\;.\;St_2S^{-1}\,,\quad \text{soit } f(t_1\;.\;t_2) = f(t_1)\;.\;f(t_2)$$

34. *Transformation du domaine holoïde.* Le théorème suivant est fondamental :

Théorème 7. Tout domaine holoïde de tritettarions rationnels peut, à l'aide d'une permutation, être transformé en un autre domaine holoïde dont les tritettarions sont tous à coordonnées entières.

* Voir l'ouvrage déjà cité de DIRICHLET-DEDEKIND.

Démonstration. Désignons par

$$t = \begin{Bmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ A_4, & A_5, & A_6 \\ A_7, & A_8, & A_9 \end{Bmatrix}$$

un tritettarion rationnel variable, et par S le tritettarion suivant

$$S \equiv \begin{Bmatrix} \sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & 0, & 0 \\ \dfrac{G_4}{g}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\psi_2^2}{\lambda_1}}, & 0 \\ \dfrac{G_9}{g}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & \dfrac{g_{34}}{g_2}\sqrt[3]{\dfrac{\psi_2^2}{\lambda_1}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\lambda_1^2}{\psi_2}} \end{Bmatrix}$$

Le tritettarion $\tau = StS^{-1}$ est variable avec t, puisque S reste fixe. La substitution (t, τ) est, comme il vient d'être démontré, une permutation du corps $\{R\}$. Calculons cette permutation, en tenant compte de ce que $S^{-1} = \dfrac{S'}{N(S)} = \dfrac{S'}{1} = S'$. On a

$$\tau = \begin{Bmatrix} \sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & 0, & 0 \\ \dfrac{G_4}{g}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\psi_2^2}{\lambda_1}}, & 0 \\ \dfrac{G_9}{g}\sqrt[3]{\dfrac{1}{\lambda_1\psi_2}}, & \dfrac{g_{34}}{g_2}\sqrt[3]{\dfrac{\psi_2^2}{\lambda_1}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\lambda_1^2}{\psi_2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ A_4, & A_5, & A_6 \\ A_7, & A_8, & A_9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1\psi_2}, & 0, & 0 \\ -\dfrac{G_4}{g}\sqrt[3]{\dfrac{\lambda_1}{\psi_2^2}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\lambda_1}{\psi_2^2}}, & 0 \\ \left(\dfrac{g_{34}G_4}{gg_2} - \dfrac{G_9}{g}\right)\sqrt[3]{\dfrac{\psi_2}{\lambda_1^2}}, & -\dfrac{g_{34}}{g_2}\sqrt[3]{\dfrac{\psi_2}{\lambda_1^2}}, & \sqrt[3]{\dfrac{\psi_2}{\lambda_1^2}} \end{Bmatrix}$$

On trouve, en effectuant les calculs,

$$\tau = \begin{Bmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3 \\ \omega_4, & \omega_5, & \omega_6 \\ \omega_7, & \omega_8, & \omega_9 \end{Bmatrix}, \quad \text{où}$$

$$\omega_1 \equiv A_1 - \frac{G_4}{g}\frac{A_2}{\psi_2} + \left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\frac{A_3}{\lambda_1};$$

$$\omega_2 \equiv \frac{A_2}{\psi_2} - \frac{g_{34}}{g_2}\frac{A_3}{\lambda_1};$$

$$\omega_3 \equiv \frac{A_3}{\lambda_1};$$

$$\omega_4 \equiv \frac{G_4}{g}A_1 + A_4\psi_2 - \frac{G_4}{g}\left(\frac{G_4}{g}\frac{A_2}{\psi_2} + A_5\right) + \left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\left(\frac{G_4}{g}\frac{A_3}{\lambda_1} + \frac{A_6\psi_2}{\lambda_1}\right);$$

$$\omega_5 \equiv \frac{G_4}{g}\frac{A_2}{\psi_2} + A_5 - \frac{g_{34}}{g_2}\left(\frac{G_4}{g}\frac{A_3}{\lambda_1} + \frac{A_6\psi_2}{\lambda_1}\right);$$

$$\omega_6 \equiv \frac{G_4}{g}\frac{A_3}{\lambda_1} + \frac{A_6\psi_2}{\lambda_1};$$

$$\omega_7 \equiv \frac{G_9}{g}\mathrm{A}_1 + \frac{g_{34}}{g_3}\mathrm{A}_4\psi_2 + \mathrm{A}_7\lambda_1 - \frac{G_4}{g}\left(\frac{G_9}{g}\frac{\mathrm{A}_2}{\psi_2} + \frac{g_{34}}{g_2}\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_8\frac{\lambda_1}{\psi_9}\right) + \left(\frac{g_{34}G_4}{gg_8} - \frac{G_9}{g}\right)\left(\frac{G_9}{g}\frac{\mathrm{A}_3}{\lambda_1} + \mathrm{A}_8 + \frac{g_{34}}{g_2}\frac{\mathrm{A}_6\psi_2}{\lambda_1}\right);$$

$$\omega_8 \equiv \frac{G_9}{g}\frac{\mathrm{A}_2}{\psi_3} + \frac{\mathrm{A}_3\lambda_1}{\psi_3} + \frac{g_{34}}{g_2}\left(\mathrm{A}_5 - \frac{G_2}{g}\frac{\mathrm{A}_3}{\lambda_1} - \frac{g_{34}}{g_2}\frac{\mathrm{A}_8\psi_2'}{\lambda_1} - \mathrm{A}_9\right);$$

$$\omega_9 \equiv \frac{G_9}{g}\frac{\mathrm{A}_3}{\lambda_1} + \frac{g_{34}}{g_2}\frac{\mathrm{A}_8\psi_2}{\lambda_1} + \mathrm{A}_9 .$$

Le tritettarion t étant variable, nous pouvons le prendre égal successivement à chaque tritettarion d'un domaine holoïde $[g_i, \delta_6, \ldots, \lambda_1]$. Ses coordonnées sont alors celles données au chapitre II (sous la formule K_1, § 32). En introduisant dans l'expression de τ, à la place des A_i, les valeurs de ces coordonnées-là, on trouve ce qui suit:

$$(K_2): \qquad \tau = \begin{Bmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \mu_4, & \mu_5, & \mu_6 \\ \mu_7, & \mu_8, & \mu_9 \end{Bmatrix}, \quad \text{où}$$

$$\mu_1 \equiv n_4 g_3 + n_5 g_5 + n_6 g_3 + n_7 + n_8 g_1 + n_9 g;$$

$$\mu_2 \equiv n_3;$$

$$\mu_3 \equiv n_1;$$

$$\begin{aligned}\mu_4 \equiv {} & \left\{\frac{g_{31}}{g}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{g_{33}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right) - \frac{G_4G_{10}}{g^2 g_2}\right\}n_1 + \left\{\frac{g_{23}}{g}\varepsilon_5\psi_2 - \frac{G_4G_5}{g^2 g_2} + \frac{g_{25}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}\left(\frac{g_{54}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\right\}n_2 \\ & + \left\{\frac{g_{19}}{g}\varepsilon_5\psi_2 - \frac{G_2G_4}{gg_2} + \frac{\psi_2\chi_9}{\lambda_1}\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\right\}n_3 + \left\{\frac{g_{11}}{g}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{g_9 - g_8}{g}G_4\right\}n_4 + \left(\varepsilon_5\psi_9 + \frac{(g_5 - g_9)G_4}{g}\right)n_5 \\ & + \frac{(g_3 - g_4)G_4}{g}n_6 + \frac{(g_1 - g_2)G_4}{g}n_8 + G_4 n_9;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_5 \equiv {} & \left(\frac{G_{10}}{gg_2} - \frac{g_{33}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_9}{\lambda_1}\right)n_1 + \left(\frac{G_4}{g} + \frac{G_5}{gg_2} - \frac{g_{25}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_9\chi_3}{\lambda_1}\right)n_2 + \left(\frac{G_2}{g_2} - \frac{g_{54}}{g_2}\frac{\psi_2\chi_2}{\lambda_1}\right)n_3 + n_4 g_2 \\ & + n_5 g_9 + n_6 g_4 + n_7 + n_8 g_2;\end{aligned}$$

$$\mu_6 \equiv \left(\frac{G_4}{g} + \frac{g_{53}}{g}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1}\right)n_1 + \frac{g_{25}\psi_2\chi_3}{g\lambda_1}n_2 + \frac{\psi_2\chi_2}{\lambda_1}n_3;$$

$$\begin{aligned}\mu_7 \equiv {} & \left\{\frac{g_{31}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{G_{12}}{gg_2}\lambda_1\delta_6 - \frac{g_{34}G_4G_{10}}{g^2 g_2^2} - \frac{G_4G_{13}}{g^2 g_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2} + \left(\frac{g_{33}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} + \frac{G_{11}}{gg_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\right\}n_1 \\ & + \left\{\frac{g_{23}g_{34}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{G_7}{gg_2}\lambda_1\delta_6 - \frac{g_{34}G_4G_5}{g^2 g_2^2} - \frac{G_4G_8}{g^2 g_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2} + \left(\frac{g_{25}g_{34}}{gg_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} + \frac{G_8}{gg_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_9}{g}\right)\right\}n_2 \\ & + \left\{\frac{g_{19}g_{54}}{gg_2}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{G_3}{gg_2}\lambda_1\delta_9 - \frac{g_{34}G_2G_4}{gg_2^2} - \frac{g_{17}G_4}{gg_2}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2} + \left(\frac{g_{34}}{g_2}\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} + \frac{g_{14}}{g_2}\right)\left(\frac{g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_2}{g}\right)\right\}n_3 \\ & + \left\{\frac{g_{11}g_{34}}{gg_8}\varepsilon_5\psi_3 + \frac{G_1}{gg_2}\lambda_1\delta_6 - \frac{g_9 g_{34}G_4}{gg_2} - \frac{G_4}{g}\frac{\lambda_1\varphi_4}{\psi_2} + \frac{g_8G_9}{g}\right\}n_4 \\ & + \left\{\frac{g_{34}}{g_2}\varepsilon_5\psi_2 + \frac{g_7}{g_2}\lambda_1\delta_6 - \frac{g_6 g_{34}G_4}{gg_2} + \frac{g_5G_9}{g}\right\}n_5 + \left\{\frac{g_3G_9}{g} + \lambda_1\delta_9 - \frac{g_4 g_{24}G_4}{gg_2}\right\}n_6 \\ & + \frac{g_1G_9 - g_{34}G_4}{g}n_3 + G_2 n_9;\end{aligned}$$

$$\mu_8 \equiv \left\{ \frac{g_{34}(G_{10}-G_{11})}{g g_2^2} + \frac{G_{13}}{g\, g_2} \frac{\lambda_1 \varphi_4}{\psi_2} - \frac{g_{33}\, g_{34}^2}{g g_2^2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} \right\} n_1 + \left\{ \frac{G_6}{g} + \frac{g_{34}(G_5 - G_6)}{g g_2^2} + \frac{G_9 \lambda_1 \varphi_4}{g g_2 \psi_2} - \frac{g_{25}\, g_{34}^2}{g g_2^2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} \right\} n_2$$

$$+ \left\{ \frac{g_{34}(G_2 - g_{14})}{g_2^2} + \frac{g_{17}}{g_2} \frac{\lambda_1 \varphi_4}{\psi_2} - \frac{g_{34}^2}{g_2^2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} \right\} n_3 + \left\{ \frac{g_9\, g_{34}}{g_2} + \frac{\lambda_1 \varphi_4}{\psi_2} \right\} n_4 + \frac{g_6\, g_{34}}{g_2} n_5 + \frac{g_4\, g_{34}}{g_2} n_6 + g_{34} n_8 \,;$$

$$\mu_9 \equiv \left(\frac{G_9}{g} + \frac{g_{33}\, g_{34}}{g g_2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} + \frac{G_{11}}{g\, g_2} \right) n_1 + \left(\frac{G_6}{g g_2} + \frac{g_{25}\, g_{34}}{g g_2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} \right) n_2 + \left(\frac{g_{14}}{g_2} + \frac{g_{34}}{g_2} \frac{\psi_2 \chi_3}{\lambda_1} \right) n_3 + n_7 \,.$$

Nous allons en déduire que les neuf coordonnées de τ, savoir μ_1, μ_2, μ_3, ..., μ_9, sont des nombres entiers.

1° Les g, $g_i (i = 1, 2, \ldots, 35)$ ainsi que les $n_r (r = 1, 2, \ldots, 9)$ étant tous entiers, les trois premières coordonnées de τ sont des nombres entiers.

2° En comparant le coefficient de n_1 dans la 4ième coordonnée, μ_4, avec la condition numéro 26, § 30, on voit que ce coefficient est un nombre entier. De même en comparant le coefficient de n_2 avec la condition numéro 10, § 30, on voit qu'il est aussi entier. Les conditions numéros 7, 4, 3, 2, 1 du dit § 30, montrent que les coefficients de n_3, n_4, n_5, n_6, n_8 sont également des nombres entiers. La 4ième coordonnée de τ est donc un nombre entier.

3° La comparaison des coefficients de n_1, n_2 et n_3 dans la coordonnée μ_5 avec les conditions numéros 25, 9 et 6, § 30, montre que ces coefficients sont entiers. La 5ième coordonnée de τ est donc un nombre entier.

4° La 6ième coordonnée, μ_6, est aussi entière. Les relations numéros 24, 8 et 5 du § 30 établissent en effet que les coefficients de n_1, n_2 et n_3 sont des nombres entiers.

5° En comparant les coefficients de n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 et n_8 dans la 7ième coordonnée, μ_7, avec les relations numéros 29, 23, 20, 17, 15, 13 et 11 du § 30 on s'assure que cette coordonnée est à son tour un nombre entier.

6° Les relations numéros 28, 22, 19, 16, 14 et 12 du § 30 montrent que la 8ième coordonnée, μ_8, est également un nombre entier.

7° Enfin, la 9ième coordonnée, μ_9, est entière. On s'en convainc en comparant les coefficients de n_1, n_2 et n_3 avec les conditions numéros 27, 21 et 18 du § 30.

Il découle donc bien de cette analyse que toutes les coordonnées de τ sont des nombres entiers. On peut mettre τ sous la forme

$$(K_3): \quad \tau = \begin{pmatrix} \begin{matrix} n_4 g_8 + n_5 g_5 + n_6 g_3 \\ + n_7 + n_8 g_1 + n_9 g \end{matrix}, & n_2, & n_1 \\ \begin{matrix} n_1 m_{26} + n_2 m_{10} + n_3 m_7 \\ + n_4 m_4 + n_5 m_3 + n_6 m_2 \\ + n_8 m_1 + n_9 G_4 \end{matrix}, & \begin{matrix} n_1 m_{25} + n_2 m_9 + n_3 m_6 \\ + n_4 g_9 + n_5 g_6 + n_6 g_4 \\ + n_7 + n_8 g_2 \end{matrix}, & \begin{matrix} n_1 m_{24} + n_2 m_8 \\ + n_3 m_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 m_{29} + n_2 m_{23} + n_3 m_{20} \\ + n_4 m_{17} + n_5 m_{15} + n_6 m_{13} \\ + n_8 m_{11} + n_9 G_3 \end{matrix}, & \begin{matrix} n_1 m_{28} + n_2 m_{22} + n_3 m_{19} \\ + n_4 m_{16} + n_5 m_{14} + n_6 m_{12} \\ + n_8 g_{34} \end{matrix}, & \begin{matrix} n_1 m_{27} + n_2 m_{21} \\ + n_3 m_{18} + n_7 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Nous avons représenté dans cette expression par m_λ le nombre entier défini par la condition numéro λ du tableau du § 30, par exemple,

$$m_1 = \frac{(g_1 - g_2)G_4}{g} \ ; \quad m_2 = \frac{(g_3 - g_4)G_4}{g} \ ; \quad \text{etc.}$$

Si l'on fait parcourir à t tous les tritettarions d'un domaine holoïde $[F]$, l'ensemble de tous les τ correspondants formera de nouveau un domaine holoïde $[\Phi]$, puisqu'il s'agit d'une permutation (§ 33). Chaque élément de ce nouveau domaine $[\Phi]$ aura des coordonnées entières. Le théorème fondamental 7 énoncé au début de ce paragraphe est donc établi.

Du domaine holoïde maximal.

35. *Théorème 8.* Tout domaine déduit d'un domaine holoïde maximal de tritettarions rationnels par une permutation $(t\,,\ StS^{-1})$ est lui-même maximal.

Commençons par démontrer le *lemme* suivant : Les permutations $(t\,,\ StS^{-1})$ établissent entre un ensemble et son image une relation uni-univoque, c'est-à-dire à chaque t correspond toujours un et un seul τ et vice-versa.

En effet, deux tritettarions t_1 et t_2 auxquels on applique la même permutation ne peuvent donner la même image τ que s'ils sont égaux. Les égalités

$$St_1S^{-1} = \tau \ ; \quad St_2S^{-1} = \tau$$

entraînent bien $t_1 = t_2$. Cette relation est réciproque, car à chaque τ, la permutation inverse fait correspondre un seul $t = S^{-1}\tau S$.

Démonstration du théorème 8. Soit S le tritettarion défini au commencement du § 34. L'application de la permutation $(t,\ StS^{-1})$ aux tritettarions d'un domaine holoïde $H \equiv [g_i\,,\ \delta_8\,,\ \ldots,\ \lambda_1]$ produit un nouveau domaine $S(H)$ du corps $\}R\{$. A chaque tritettarion de H correspond donc un tritettarion bien déterminé de $S(H)$ et inversement. Si le domaine H n'est pas maximal, on peut l'élargir en lui adjoignant certains tritettarions t_k du corps $\}R\{$. L'application de la permutation au domaine élargi donne un nouveau domaine qui renferme tous les tritettarions de $S(H)$ et, en outre, d'autres tritettarions rationnels, savoir les tritettarions St_kS^{-1}. Donc, si le domaine original H n'est pas maximal, son image $S(H)$, ne l'est pas non plus. Un raisonnement analogue montrerait que si l'image $S(H)$ n'est pas maximale, le domaine original H ne l'est pas non plus. Dès lors, si le domaine original est supposé maximal, son image l'est aussi.

36. *Théorème 9. Le domaine holoïde* $[g]$ *composé de tous les tritettarions à coordonnées entières est maximal.*

Si ce n'était pas le cas, il existerait un domaine $[J]$ renfermant tous les tritettarions à coordonnées entières et, en plus, d'autres tritettarions rationnels. Par une permutation convenablement choisie $(t\,,\ StS^{-1})$, on pourrait alors transformer ce nouveau domaine $[J]$ en un autre dont tous les tritettarions auraient leurs coordonnées entières (§ 34). Il faudrait donc qu'au moins deux tritettarions t_1 et t_2 de $[J]$, différents l'un de l'autre, fournissent le même τ par application de la même permutation. Ceci est impossible en vertu du lemme précédent (§ 35).

Théorème 10. Il existe une infinité de domaines holoïdes maximaux. Chacun d'eux est une permutation du domaine $[g]$ constitué par tous les tritettarions à coordonnées entières.

Ce théorème découle de ceux établis ci-dessus.

37. En vertu des théorèmes précédents on trouvera tous les domaines holoïdes maximaux du corps $\}R\{$, en appliquant au domaine $[g]$ toutes les permutations S, telles que les tritettarions transformés, τ, fassent encore partie du corps $\}R\{$. Ceci conduit au problème suivant : A quelles restrictions doivent être soumis les 9 nombres réels $p, q, r, s, u, v, x, y, z$, pour que le tritettarion $\tau \equiv StS^{-1}$ soit rationnel, t étant un tritettarion rationnel quelconque et S le tritettarion

$$S \equiv \left\{ \begin{matrix} p, & q, & r \\ s, & u, & v \\ x, & y, & z \end{matrix} \right\}$$

Soient $n_1, n_2, \dots, n_9$ les coordonnées, par hypothèse rationnelles de t ; la permutation $\tau = StS^{-1}$ devient

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} p, & q, & r \\ s, & u, & v \\ x, & y, & z \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n_1, & n_2, & n_3 \\ n_4, & n_5, & n_6 \\ n_7, & n_8, & n_9 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} uz - vy, & yr - qz, & qv - ur \\ xv - sz, & pz - xr, & sr - pv \\ sy - xu, & xq - py, & pu - sq \end{matrix} \right\} \cdot \frac{1}{\Delta},$$

où Δ représente le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Le développement de τ donne

$$(K_4): \qquad \tau = \left\{ \begin{matrix} p_1, & p_2, & p_3 \\ p_4, & p_5, & p_6 \\ p_7, & p_8, & p_9 \end{matrix} \right\} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

où

$$p_1 \equiv (pn_1 + qn_4 + rn_7)(uz - vy) + (pn_2 + qn_5 + rn_8)(xv - sz) + (pn_3 + qn_6 + rn_9)(sy - xu) ;$$
$$p_2 \equiv (pn_1 + qn_4 + rn_7)(yr - qz) + (pn_2 + qn_5 + rn_8)(pz - xr) + (pn_3 + qn_6 + rn_9)(xq - py) ;$$
$$p_3 \equiv (pn_1 + qn_4 + rn_7)(qv - ur) + (pn_2 + qn_5 + rn_8)(sr - pv) + (pn_3 + qn_6 + rn_9)(pu - sq) ;$$
$$p_4 \equiv (sn_1 + un_4 + vn_7)(uz - vy) + (sn_2 + un_5 + vn_8)(xv - sz) + (sn_3 + un_6 + vn_9)(sy - xu) ;$$
$$p_5 \equiv (sn_1 + un_4 + vn_7)(yr - qz) + (sn_2 + un_5 + vn_9)(pz - xr) + (sn_3 + un_6 + vn_9)(xq - py) ;$$
$$p_6 \equiv (sn_1 + un_4 + vn_7)(qv - ur) + (sn_2 + un_5 + vn_8)(sr - pv) + (sn_3 + un_6 + vn_9)(pu - sq) ;$$
$$p_7 \equiv (xn_1 + yn_4 + zn_7)(uz - vy) + (xn_2 + yn_5 + zn_8)(xv - sz) + (xn_3 + yn_6 + zn_9)(sy - xu) ;$$
$$p_6 \equiv (xn_1 + yn_4 + zn_7)(yr - qz) + (xn_2 + yn_5 + zn_8)(pz - xr) + (xn_3 + yn_6 + zn_9)(xq - py) ;$$
$$p_9 \equiv (xn_1 + yn_4 + zn_7)(qv - ur) +)xn_2 + yn_5 + zn_8)(sr - pv) + (xn_3 + yn_6 + zn_9)(pu - sq) ;$$

On voit que Δ ne doit pas être nul, d'où la première condition :

$$N_{\lambda}(S) = \Delta \neq 0.$$

Examinons de plus près les coordonnées de τ. Pour qu'elles deviennent rationnelles quelles que soient les valeurs rationnelles attribuées aux $n_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$, il faut que le produit de l'un quelconque des nombres $p, q, r, \ldots, z$ par l'un quelconque des quotients $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$ soit rationnel (Δ_{ik} représente le mineur du déterminant Δ correspondant à l'élément qui figure dans la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne). Ainsi,

$$p \cdot \frac{uz - vy}{\Delta} = \text{nombre rationnel, soit } a_1\,;$$

$$q \cdot \frac{uz - vy}{\Delta} = \quad \text{»} \qquad \text{»} \quad, \text{ soit } a_2\,; \text{ etc.}$$

Il est dès lors possible de trouver un nombre rationnel k tel que $ka_1 = a_2$, de sorte que

$$kp \cdot \frac{uz - vy}{\Delta} = ka_1 = a_2$$

$$q \cdot \frac{uz - vy}{\Delta} = a_2$$

Il ressort de ces deux égalités que q ne diffère de p que par un facteur rationnel k. Nous avons supposé dans cette déduction $uz - vy \neq 0$ et $p \neq 0$. On peut toujours faire cette supposition, car Δ n'étant pas nul, ni ses neuf coordonnées, ni ses neuf mineurs ne sont tous nuls à la fois. On montrerait de même que r, s, u, v, x, y, z ne diffèrent de p que par des facteurs rationnels k_i, dont certains peuvent être nuls, de sorte que $p = k_1\theta$, $q = k_2\theta$, $r = k_3\theta$, etc., où les k_λ sont rationnels et θ un nombre réel quelconque. Alors

$$S = \theta \cdot \begin{Bmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ k_4, & k_5, & k_6 \\ k_7, & k_8, & k_9 \end{Bmatrix} = \theta S'$$

La permutation devient

$$\tau = \theta S' t S'^{-1} \theta^{-1} = S' t S'^{-1}.$$

L'effet du facteur θ étant nul dans la permutation, on pourra choisir pour θ un nombre réel quelconque mais non nul, d'où le

Théorème 11. On obtient la permutation la plus générale de la forme (t, StS^{-1}), qui transforme un domaine holoïde de tritettarions rationnels en un domaine appartenant de nouveau au corps $\{R\}$, en prenant pour S le tritettarion

$$S = \theta \cdot \begin{Bmatrix} k_1, & k_2, & k_3 \\ k_4, & k_5, & k_6 \\ k_7, & k_8, & k_9 \end{Bmatrix}$$

où θ est un nombre réel arbitraire et les k_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ des nombres rationnels soumis à la seule condition $N(S) \neq 0$.

38. Ces résultats permettent de déterminer le domaine holoïde maximal le plus général du corps $\}R\{$. La forme d'un domaine holoïde quelconque est donnée par la formule (K_1) du § 32. Par une permutation, on peut transformer ce domaine en un autre ne contenant que des tritettarions à coordonnées entières. Si on suppose le domaine primitif maximal, le domaine transformé sera donc le domaine $[g]$ (§ 36). Réciproquement, il sera possible de remonter, par la permutation inverse, du domaine $[g]$ qui est maximal, au domaine original qui le sera aussi ; d'où le

Théorème 12. Un domaine holoïde maximal de tritettarions du corps $\}R\{$ renferme l'ensemble de tous les tritettarions τ définis par la formule (K_4) du § 37, quand on fait parcourir aux n_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, $p, q, r, s, u, v, x, y, z$ étant neuf nombres rationnels fixes, arbitrairement choisis, mais tels que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix} \text{ ne soit pas nul.}$$

La formule (K_4) qui caractérise un domaine holoïde de tritettarions présente des avantages sur la formule (K_1). D'abord il n'y a plus entre les grandeurs données qu'une seule équation de condition : $\Delta \neq 0$. Ensuite (K_4) ne donne que des domaines holoïdes maximaux, si les n_i prennent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

39. Nous allons exprimer le résultat précédent sous une autre forme, en recherchant à quelles conditions un domaine holoïde défini par la formule (K_1) doit satisfaire pour être maximal.

Nous avons démontré (§ 34) que tout domaine défini par (K_1), peut être transformé en un autre $[\tau]$ ne renfermant plus que des tritettarions à coordonnées entières. Le domaine $[\tau]$ est identique à l'ensemble des tritettarions que donne (K_3), quand les n_λ y parcourent, indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$. Pour être maximal, le domaine $[\tau]$ doit renfermer *tous* les tritettarions à coordonnées entières. Cela n'est évidemment possible que si chaque coordonnée de τ peut prendre, indépendamment des autres coordonnées, toute valeur entière donnée d'avance. On est dès lors, conduit à la résolution des neuf équations simultanées :

$$\begin{aligned}
&n_1 = C_1\\
&n_2 = C_2\\
&n_1 m_{27} + n_2 m_{21} + n'_7 = C_3\\
&n_1 m_{24} + n_2 m_8 + n_3 m_5 = C_4\\
&n_1 m_{28} + n_2 m_{22} + n_3 m_{18} + n_4 m_{16} + n_5 m_{14} + n_8 m_{12} + n_8 g_{34} = C_5\\
&n_1 m_{26} + n_2 m_{10} + n_3 m_7 + n_4 m_4 + n_5 m_3 + n_6 m_2 + n_8 m_1 + n_8 G_4 = C_6\\
&n_1 m_{29} + n_2 m_{23} + n_3 m_{20} + n_4 m_{17} + n_5 m_{15} + n_6 m_{13} + n_8 m_{11} + n_9 G_9 = C_7\\
&n_1 m_{25} + n_2 m_9 + n_3 m_6 + n_4 g_8 + n_5 g_6 + n_6 g_4 + n'_7 + n_8 g_2 - n_3 m_{18} = C_8\\
&- n_3 m_{18} + n_4 g_8 + n_5 g_5 + n_6 g_3 + n'_7 + n_8 g_1 + n_8 g = C_9
\end{aligned}$$

ou n'_7 remplace $n_7 + n_8 m_{18}$.

Les C_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) sont des nombres entiers que l'on peut prescrire arbitrairement ; les n_i doivent toujours être entiers.

40. Quelles que soient les valeurs entières attribuées à C_1, C_2 et C_3 on pourra toujours choisir pour n_1, n_2 et n_7' (donc aussi pour n_7) des nombres entiers satisfaisant aux trois premières équations. Les autres conditions ne seront remplies que si les six équations simultanées

$$\begin{aligned}
&n_3 m_5 = k_4 \\
&n_3 m_{19} + n_4 m_{18} + n_5 m_{14} + n_6 m_{12} + n_8 g_{34} = k_5 \\
&n_3 m_7 + n_4 m_4 + n_5 m_3 + n_6 m_2 + n_8 m_1 + n_9 G_4 = k_6 . \\
&n_3 m_{20} + n_4 m_{17} + n_5 m_{15} + n_6 m_{13} + n_8 m_{11} + n_9 G_9 = k_7 \\
&n_3 (m_8 - m_{18}) + n_4 g_9 + n_5 g_6 + n_6 g_4 + n_8 g_2 = k_8 \\
&- n_3 m_{18} + n_4 g_8 + n_5 g_5 + n_6 g_3 + n_8 g_1 + n_9 g = k_9 ,
\end{aligned}$$

où les k_λ ($\lambda = 4, 5, \ldots, 9$) sont des nombres entiers arbitraires, peuvent être satisfaites par des valeurs entières des n_i ($i = 3, 4, 5, 6, 8, 9$). Résolvons ce système d'équations par rapport aux n_i. Il vient, par exemple,

$$n_3 = \frac{\begin{vmatrix} k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_5 & m_{18} & m_{14} & m_{12} & g_{34} & 0 \\ k_6 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & G_4 \\ k_7 & m_{17} & m_{15} & m_{13} & m_{11} & G_9 \\ k_8 & g_9 & g_6 & g_4 & g_2 & 0 \\ k_9 & g_8 & g_5 & g_3 & g_1 & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{19} & m_{18} & m_{14} & m_{12} & g_{34} & 0 \\ m_7 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & G_4 \\ m_{20} & m_{17} & m_{15} & m_{13} & m_{11} & G_9 \\ m_8 - m_{18} & g_9 & g_6 & g_4 & g_2 & 0 \\ - m_{18} & g_8 & g_5 & g_3 & g_1 & g \end{vmatrix}}$$

Désignant par D le déterminant du 6ième ordre qui figure au dénominateur et par Δ_{ik} le mineur du 5ième ordre correspondant à l'élément qui est à l'intersection de la $i$ième ligne et de la $k$ième colonne de D, nous pouvons écrire

$$n_3 = \frac{k_4 \Delta_{11}}{D} + \frac{k_5 \Delta_{21}}{D} + \frac{k_6 \Delta_{31}}{D} + \ldots + \frac{k_9 \Delta_{61}}{D} \qquad (\text{ici } \Delta_{21} = \Delta_{31} = \ldots = \Delta_{61} = 0).$$

De même on a

$$n_4 = \frac{\sum\limits_{i}^{1\ldots 6} k_{3+i} \Delta_{i2}}{D} \; ; \quad \text{etc.} \; ; \quad n_9 = \frac{\sum\limits_{i}^{1\ldots 6} k_{3+i} \Delta_{i6}}{D} .$$

Si donc n_3, n_4, n_5, n_8, n_6, n_9 doivent être entiers quelles que soient les valeurs entières des k_λ, il faut que chacun des mineurs Δ_{ik} soit divisible par D : *

$$\frac{\Delta_{ik}}{D} = \text{nombre entier, soit } m_{ik}.$$

Considérons maintenant le déterminant $|\Delta_{ik}|$ dont les éléments sont les mineurs de D. On sait que la valeur de $|\Delta_{ik}|$ est égale à la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de D, n étant l'ordre du déterminant D. Donc, dans notre cas particulier,

$$|\Delta_{ik}| = D^5.$$

Or, $\Delta_{ik} = m_{ik} \,.\, D$, de sorte qu'il vient

$$|\Delta_{ik}| = \begin{vmatrix} m_{11}D \ldots\ldots m_{16}D \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{61}D \ldots\ldots m_{66}D \end{vmatrix} = |m_{ik}|\, D^6$$

d'où $|m_{ik}|\, D^6 = D^5$ et finalement

$$|m_{ik}|\, D = 1$$

Comme le déterminant $|m_{ik}|$ est entier (puisque tous ses éléments le sont) et qu'il en est de même de D, la dernière égalité entraîne

$$|m_{ik}| = D = \pm 1$$

La condition $D = \pm 1$ est donc nécessaire pour que les n_i soient entiers. On voit de suite qu'elle est aussi suffisante.

41. Pour calculer la valeur de

$$D = \begin{vmatrix} m_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{19} & m_{14} & m_{14} & m_{12} & g_{34} & 0 \\ m_7 & m_4 & m_3 & m_2 & m_1 & G_4 \\ m_{20} & m_{17} & m_{15} & m_{13} & m_{11} & G_9 \\ m_6-m_{18} & g_9 & g_8 & g_4 & g_2 & 0 \\ -m_{18} & g_6 & g_5 & g_3 & g_1 & g \end{vmatrix}$$

il est avantageux de faire quelques transformations.

1° Rappelons que

$$m_{18} \equiv \frac{g_9 g_{34}}{g_2} + \frac{\lambda_1 \varphi_4}{\psi_2}; \quad m_{14} \equiv \frac{g_6 g_{34}}{g_2}; \quad m_{12} \equiv \frac{g_4 g_{34}}{g_2}.$$

En soustrayant des éléments de la $2^{\text{ième}}$ ligne ceux de la $5^{\text{ième}}$ multipliés par $\frac{g_{34}}{g_2}$, on obtient comme éléments de cette $2^{\text{ième}}$ ligne

$$a_1, \ \frac{\lambda_1 \varphi_4}{\psi_2}, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0$$

où, pour abréger, nous avons désigné par a_1 le premier élément.

* En effet, dans l'expression de n_3 par exemple, on peut supposer $k_4 = 1$ et tous les autres k_λ nuls. Alors Δ_{11} doit être divisible par D. Il en est de même des autres Δ_{ik}.

2° En tenant compte des égalités

$$m_3 \equiv \frac{(g_5 - g_6)G_4}{g} + \varepsilon_5\psi_8\,; \quad m_2 \equiv \frac{(g_8 - g_4)G_4}{g}\,; \quad m_1 \equiv \frac{(g_1 - g_2)G_4}{g},$$

on peut transformer la 3ième ligne : on fera les différences des éléments correspondants des 5ième et 6ième lignes. Ajoutant ensuite ces différences multipliées par $\frac{G_4}{g}$ aux éléments de la 3ième ligne, on trouvera

$$a_2\,,\; a_3\,,\; \varepsilon_5\psi_8\,,\; 0,\; 0,\; 0.$$

a_2 et a_3 sont des signes abréviatifs pour les deux premiers éléments.

3° Pour transformer la 4ième ligne, rappelons que

$$m_{18} \equiv \lambda_1\delta_8 + \frac{g_3 G_8}{g} - \frac{g_6 g_{34} G_4}{g g_2}\,; \quad m_{11} \equiv \frac{g_1 G_8 - g_{84} G_4}{g}.$$

Soustrayons des éléments de la 4ième ligne les éléments correspondants de la dernière ligne multipliés par $\frac{G_8}{g}$, puis ajoutons aux nombres obtenus le produit par $\frac{g_{84}G_4}{g g_2}$ des éléments correspondants de la 5ième ligne. En désignant par a_4, a_5, a_6 les trois premiers éléments, on obtient

$$a_4\,,\; a_5\,,\; a_6\,,\; \lambda_1\delta_8\,,\; 0,\; 0.$$

Dès lors, le déterminant D peut s'écrire en remarquant que $m_3 = \frac{\psi_2\chi_2}{\lambda_1}$ (§ 30),

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \frac{\lambda_1\varphi_6}{\psi_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & \varepsilon_5\psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_5 & \lambda_1\delta_8 & 0 & 0 \\ m_8 - m_{18} & g_9 & g_6 & g_6 & g_2 & 0 \\ -m_{18} & g_3 & g_5 & g_3 & g_1 & g \end{vmatrix}$$

Ce déterminant a pour valeur le produit des éléments de la diagonale principale, produit qui n'est jamais nul, les facteurs étant tous différents de zèro (§ 18, théorème 3). Or, pour que les n_i soient entiers, il faut que $D = \pm 1$ (§ 40). Le domaine est donc maximal quand

$$g g_2 \delta_8 \varepsilon_5 \varphi_4 \chi_3 \psi_2 \lambda_1 = \pm 1 \quad \text{et en même temps}$$

$$\frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} = \text{nombre entier.}$$

Théorème 13. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine holoïde de tritettarions rationnels $[g_i\,,\ \delta_8\,,\ \ldots,\ \lambda_1]$ *soit maximal sont*

$$g g_2 \delta_8 \varepsilon_5 \varphi_4 \chi_3 \psi_2 \lambda_1 = \pm 1 \quad \textit{et} \quad \frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} = \textit{nombre entier.}$$

Domaines holoïdes maximaux de dénominateur donné.

42. Le domaine holoïde le plus général de tritettarions a la base (C), (§ 29). Supposons les coordonnées fractionnaires qui figurent dans les membres de cette base réduites au même dénominateur. Attribuons à ce dénominateur commun une valeur fixe $P \neq 0$. Le nombre des domaines holoïdes maximaux de dénominateur donné P est-il alors fini ou infini ?

Dans les conditions de maximalité exprimées par les formules du théorème 13, posons

$$\delta_6 = \frac{a}{m}\,;\ \varepsilon_5 = \frac{b}{n};\ \varphi_4 = \frac{c}{p}\,;\ \lambda_1 = \frac{d}{q};\ \frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} = g',\ \text{d'où}\ \psi_2\chi_3 = g'\,\frac{d}{q}\,.$$

La première condition devient

$$gg_2g'\,\frac{abcd^2}{mnpq^2} = \pm 1\,.$$

Le théorème 4, (§ 18), permet de supposer g positif, puis de remplacer $t_8 = g_1e_1 + g_2e_5$ par $t'_8 = t_8 + m_9t_9 = (g_1 + m_9g)e_1 + g_2e_5 = g'_1e_1 + g_2e_5$, où $0 \leqq g'_1 < g$, puisque l'entier m_9 peut être choisi tel que $g_1 + m_9 g$ soit compris entre zéro et g.

Par des tranformations analogues, les membres de la base (C) peuvent toujours être mis sous la forme suivante :

$$(C'):\quad \begin{aligned}
t_1 &= \frac{G'_9}{g}\,e_1 + \frac{G'_{10}}{gg_2}\,e_5 + \frac{G'_{11}}{gg_2}\,e_3 + \frac{G'_{12}}{gg_2}\,\delta_6e_7 + \frac{g'_{31}}{g}\,\varepsilon_5e_4 + \frac{G'_{13}}{gg_2}\,\varphi_4e_8 + \frac{g'_{33}}{g}\,\chi_3e_6 + \frac{g'_{34}}{g_2}\,\psi_2e_2 + \lambda_1e_3\\
t_2 &= \frac{G'_4}{g}\,e_1 + \frac{G'_5}{gg_2}\,e_5 + \frac{G'_6}{gg_2}\,e_2 + \frac{G'_7}{gg_2}\,\delta_6e_7 + \frac{g'_{23}}{g}\,\varepsilon_5e_4 + \frac{G'_8}{gg_2}\,\varphi_4e_8 + \frac{g'_{25}}{g}\,\chi_3e_6 + \psi_2e_2\\
t_3 &= \ \frac{G'_2}{g_2}\,e_5 + \frac{g'_{14}}{g_2}\,e_2 + \frac{G'_3}{gg_2}\,\delta_6e_7 + \frac{g'_{16}}{g}\,\varepsilon_5e_4 + \frac{g'_{17}}{g_2}\,\varphi_4e_8 + \chi_2e_6\\
t_4 &= g'_8e_1 + g'_9e_5 \qquad\qquad + \frac{G'_1}{gg_2}\,\delta_6e_7 + \frac{g'_{11}}{g}\,\varepsilon_5e_4 + \varphi_4e_8\\
t_5 &= g'_5e_1 + g'_8e_5 \qquad\qquad + \frac{g'_7}{g_2}\,\delta_6e_7 + \varepsilon_5e_4\\
t_6 &= g'_3e_1 + g'_4e_5 \qquad\qquad + \delta_5e_7\\
t_7 &= e_1 + e_5 + e_6\\
t_8 &= g'_1e_1 + g_2e_5\\
t_9 &= ge_1
\end{aligned}$$

où $g'_1,\ g'_3,\ g'_5,\ g'_8,\ \dfrac{G'_4}{g},\ \dfrac{G'_9}{g}$ sont compris entre 0 et $g > 0$; les valeurs absolues de $g'_4,\ g'_8,\ g'_9,\ \dfrac{G'_2}{g_2},\ \dfrac{G'_5}{gg_2},\ \dfrac{G'_{10}}{gg_6}$ sont inférieures à la valeur absolue de g_2 ; les valeurs de

$$\frac{g_7'}{g_2}, \frac{g_{11}'}{g}, \frac{g_{14}'}{g_2}, \frac{g_{16}'}{g}, \frac{g_{17}'}{g_2}, \frac{g_{23}'}{g}, \frac{g_{25}'}{g}, \frac{g_{31}'}{g}, \frac{g_{33}'}{g}, \frac{g_{34}'}{g_2}, \frac{G_1'}{gg_2}, \frac{G_3'}{gg_2}, \frac{G_6'}{gg_2}, \frac{G_7'}{gg_2}, \frac{G_8'}{gg_2}, \frac{G_{11}'}{gg_2}, \frac{G_{12}'}{gg_2}, \frac{G_{13}'}{gg_2}$$

sont comprises entre -1 et $+1$, limites exclues.

La base (C) étant ramenée à la forme (C'), la condition exprimant que le domaine envisagé est maximal est encore

$$gg_2g' \frac{abcd^2}{mnpq^2} = \pm 1.$$

On voit alors que les dénominateurs m, n, p, q qui figurent dans (C') doivent être des diviseurs de P et ne sont, par conséquent, susceptibles que d'un nombre fini de valeurs différentes. Partant de ce résultat on arrive facilement au

Théorème 14. Il n'existe dans le corps $\}R\{$ qu'un nombre fini de domaines holoïdes maximaux ayant le dénominateur donné P, c'est-à-dire tels qu'aucune coordonnée des tritettarions contenus dans ces domaines, réduite à sa plus simple expression, n'ait un dénominateur supérieur à P.

Le nombre de ces domaines augmente très rapidement avec P, suivant une loi assez compliquée.

CHAPITRE IV

Des tritettarions entiers.

43. Nous avons démontré qu'il y a une infinité de domaines holoïdes maximaux dans le corps $\}R\{$ des tritettarions rationnels. On les obtient en choisissant les coordonnées des tritettarions t_1, t_2, t_3, ..., t_9 du théorème 5, § 31, telles que

$$gg_2\delta_8\varepsilon_8\varphi_4\chi_3\psi_2\lambda_1 = \pm 1 \text{ et } \frac{\psi_2\chi_3}{\lambda_1} = \text{nombre entier}.$$

Si l'on maintient fixes t_1, t_2, ..., t_9, l'ensemble des tritettarions

$$t = m_1t_1 + m_2t_2 + \ldots + m_9t_9$$

qu'on obtient en faisant varier les m_i, indépendamment les uns des autres, par toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, forme un domaine holoïde maximal. Un tel domaine constitue un système de tritettarions « entiers », parce que ses éléments jouissent de toutes les propriétés qui caractérisent les nombres entiers. Ce sont donc les éléments d'un tel domaine qu'on appellera des *tritettarions entiers*. Or, il se trouve que certains tritettarions rationnels peuvent appartenir à la fois à un domaine holoïde maximal $\}M\{$ et à un domaine holoïde non maximal $\}H\{$. Ils ne pourront être dits *entiers* que par rapport aux domaines holoïdes maximaux auxquels ils appartiennent. Nous donnerons donc, en suivant la terminologie de M. L.-G. Du Pasquier *, la définition suivante du tritettarion entier :

Définition. Un tritettarion rationnel t sera dit *entier par rapport au domaine* $[g_i, \delta_6, \ldots, \lambda_1]$, s'il fait partie de ce domaine et que celui-ci soit en même temps holoïde maximal.

44. Certains tritettarions rationnels sont contenus dans *tous* les domaines holoïdes maximaux ; tels les nombres entiers ordinaires envisagés comme tritettarions réels ; ceux-là sont donc toujours des tritettarions entiers ; on pourrait les nommer « absolument entiers ». D'autres tritettarions rationnels ne sont contenus dans *aucun* domaine holoïde maximal ; ceux-là sont donc toujours des tritettarions non entiers ; on pourrait les dénommer « absolument non entiers » ou « absolument fractionnaires ». Enfin, il y a une catégorie de tritettarions rationnels contenus dans tel domaine holoïde maximal $[J_p]$, mais pas dans les autres ; ceux-là peuvent être tantôt entiers, tantôt non entiers, suivant la manière dont on sépare en deux le corps des tritettarions rationnels. On pourrait nommer « conditionnellement entiers » les tritettarions de cette 3ième catégorie.

Au point de vue de l'arithnomie, le corps des nombres rationnels ordinaires et celui des complexes rationnels de Gauss se partagent chacun en deux groupes seulement, dont l'un contient tous les « nombres entiers » et l'autre tous les « nombres non entiers ». Par contre le corps des tritettarions rationnels devrait plutôt se partager en trois groupes : celui des nombres « absolument entiers », celui des nombres « absolument fractionnaires », et enfin celui des nombres « conditionnellement entiers »**.

45. On entend par *coordonnées diagonales* d'un tritettarion les coefficients des unités relatives e_1, e_5 et e_9. On pourrait appeler *trace d'un tritettarion* la somme de ses coordonnées diagonales. Cette trace qui joue un rôle dans certaines recherches jouit d'une propriété remarquable quand le tritettarion fait partie d'un domaine holoïde. En additionnant les égalités 9 et 21, § 30, on voit que $\frac{G_4}{g} + \frac{G_5}{gg_2} + \frac{G_6}{gg_2}$ = nombre entier. De même, les relations 25 et 27, § 30, montrent que $\frac{G_9}{g} + \frac{G_{10}}{gg_2} + \frac{G_{11}}{gg_2}$ = nombre entier. Enfin, $\frac{g_{14}}{g_2} + \frac{g_9 g_{17}}{g_2}$ = nombre entier [relations 6 et 18 § 30]. Nous avons ainsi établi le

Théorème 15. La trace d'un tritettarion appartenant à un domaine holoïde du corps $\}R\{$ est un nombre entier.

46. En choisissant d'une manière appropriée le tritettarion S, (§ 34), nous avons pu transformer tout tritettarion rationnel t appartenant à un domaine holoïde en un

---

* L. C. *Über holoide Systeme von Düotettarionen,* Zürich 1909.

** Voir L.-G. Du Pasquier, dans L'Enseignement mathématique, t. 18, 1916, p. 232-238.

autre tritettarion $\tau = StS^{-1}$ dont toutes les coordonnées sont entières. La norme d'un produit de tritettarions étant égale au produit des normes de ses facteurs on a

$$N(S)N(t) \,.\, N(S^{-1}) = N(\tau) = p = \text{nombre entier},$$

puisque toutes les coordonnées de τ sont entières. D'autre part $N(S) = N(S^{-1}) = 1$, en vertu de l'expression de S, (§ 34). Il s'en suit le

Théorème 16. La norme d'un tritettarion contenu dans un domaine holoïde du corps $\{R\}$ est un nombre entier.

47. Une question qui se présente d'elle-même à l'esprit est celle de savoir si, et éventuellement jusqu'où, les notions et méthodes utilisées dans la théorie des corps de nombres algébriques sont applicables au système de nombres hypercomplexes à multiplication non commutative.

Nous basant sur les résultats qui précèdent, nous pouvons répondre à cette question de la manière suivante : Tous les tritettarions « entiers par rapport au même domaine » constituent un groupe additif et multiplicatif où règnent les mêmes lois arithnomiques que dans le domaine $[g]$ formé par tous les tritettarions à coordonnées entières. On peut dès lors définir : Un tritettarion est dit *entier*, si ses neuf coordonnées sont des nombres entiers ordinaires. L'arithnomie basée sur cette définition est régulière.

48. Après avoir introduit la notion de divisibilité des tritettarions entiers, on voit qu'il y a deux théories parallèles : une *arithnomie à gauche* et une *arithnomie à droite.* Elles s'entrecroisent d'ailleurs en plusieurs points. Dans l'une et dans l'autre, on peut établir l'analogue de l'algorithme d'Euclide et déterminer par un nombre fini d'opérations rationnelles le plus grand commun diviseur à droite [ou à gauche] de deux ou plusieurs tritettarions donnés. Cependant, ce procédé euclidien est généralement inapplicable quand il s'agit de diviseurs de zéro.

49. On réussit à surmonter les difficultés, en basant la théorie du plus grand commun diviseur sur la théorie des idéaux de tritettarions. On peut en effet démontrer que *dans le corps* $\{R\}$, *tout idéal est idéal principal*, même s'il est composé exclusivement de diviseurs de zéro. Enfin, en tenant compte de ce qu'il y a dans le domaine $[g]$ une infinité d'*unités* (ce sont les tritettarions ε dont la norme $= \pm 1$; ils sont à la fois diviseur à droite et diviseur à gauche de tout tritettarion entier), on définit les tritettarions « premiers » ou « irréductibles » comme suit : Un tritettarion π qui n'est ni diviseur de zéro, ni tritettarion unité ε, est dit *premier* ou *irréductible*, si dans toutes les décompositions possibles de π en deux facteurs, l'un de ceux-ci est toujours une unité ε. Il s'en suit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tritettarion π soit premier est que sa norme, $N(\pi)$, soit un nombre premier ordinaire. Cela établi, on arrive à démontrer ce théorème fondamental : tout tritettarion t non premier et non diviseur de zéro est décomposable en un produit de tritettarions premiers, et cela d'une seule manière, une fois qu'on a arrêté l'ordre de succession des facteurs de la norme de t.

Avec des modifications appropriées, on peut ensuite ériger la théorie des congruences de tritettarions, etc. Les principaux théorèmes de cette arithnomie sont développés dans le mémoire déjà cité de M. Du Pasquier, *Zahlentheorie der Tettarionen*, Zürich 1906.

Sur les nonions de Sylvester.

50. J.-J. Sylvester * a construit un système de nombres complexes qu'il appelle *nonions*. Il introduit dans ce système, comme unités relatives, outre l'unité principale 1, les huit quantités m, m^2, n, n^2, m^2n, mn^2, mn et m^2n^2. Les deux entités mathématiques ** m et n satisfont à l'équation

$$nm = \rho mn,$$

où ρ représente l'une des deux racines cubiques imaginaires conjuguées de l'unité, par exemple $\rho = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Pour simplifier, désignons les unités relatives de ce système de nombres ennéacomplexes par $i_1, i_2, \ldots, i_9$, de sorte que

$$i_1 \equiv 1\,;\ i_2 \equiv m\,;\ i_3 \equiv m^2\,;\ i_4 \equiv n\,;\ i_5 \equiv n^2\,;\ i_6 \equiv m^2n\,;\ i_7 \equiv mn^2\,;\ i_8 \equiv mn\,;\ i_9 \equiv m^2n^2.$$

Tout nonion peut alors se mettre sous la forme

$$\alpha_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 + \alpha_4 i_4 + \alpha_5 i_5 + \alpha_6 i_6 + \alpha_7 i_7 + \alpha_8 i_8 + \alpha_9 i_9,$$

où les $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, 9)$ sont des nombres réels ou complexes gaussiens.

51. Cela posé, envisageons les substitutions suivantes :

$$(a):\quad \begin{array}{ll} i_1 = e_1 + e_5 + e_9\,; & i_5 = \rho e_3 + e_4 + \rho^2 e_8\,; \\ i_2 = e_1 + \rho e_5 + \rho^2 e_9\,; & i_6 = e_2 + e_6 + e_7\,; \\ i_3 = e_1 + \rho^2 e_5 + \rho e_9\,; & i_7 = \rho e_3 + \rho e_4 + \rho e_8\,; \\ i_4 = e_2 + \rho e_6 + \rho^2 e_7\,; & i_8 = e_2 + \rho^2 e_6 + \rho e_7\,; \end{array}$$
$$i_9 = \rho e_3 + \rho^2 e_4 + e_8.$$

Il est clair qu'à chaque nonion donné, ces substitutions font correspondre un tritettarion bien déterminé (on admettra ici comme coordonnées les nombres complexes gaussiens). D'autre part, les substitutions inverses, savoir

$$(b):\quad \begin{array}{lll} e_1 = \dfrac{i_1 + i_2 + i_3}{3}\,; & e_4 = \dfrac{i_5 + \rho^2 i_7 + \rho i_9}{3}\,; & e_7 = \dfrac{\rho i_4 + i_6 + \rho^2 i_8}{3}\,; \\ e_2 = \dfrac{i_4 + i_5 + i_6}{3}\,; & e_5 = \dfrac{i_1 + \rho^2 i_2 + \rho i_3}{3}\,; & e_8 = \dfrac{\rho i_5 + \rho^2 i_7 + i_9}{3}\,; \\ e_3 = \dfrac{\rho^2 i_5 + \rho^2 i_7 + \rho^2 i_9}{3}\,; & e_6 = \dfrac{\rho^2 i_4 + i_6 + \rho i_8}{3}\,; & e_9 = \dfrac{i_1 + \rho i_2 + \rho^2 i_3}{3}\,; \end{array}$$

* Comptes-rendus de l'Académie des sciences, Paris 1883, t. 97, p. 1336.

** Dans la terminologie de Cauchy, m et n sont deux *clefs anastrophiques*, c'est-à-dire des symboles dont le calcul est soumis à des règles plus ou moins arbitrairement fixées.

font correspondre à tout tritettarion donné, $\sum_{\lambda}^{1\ldots 9} n_\lambda e_\lambda$, un nonion bien déterminé. Il s'en suit qu'à tout système de nonions, on peut faire correspondre un système de tritettarions, et inversement, de telle sorte que cette correspondance soit univoque et réciproque.

Par un calcul simple et en appliquant le théorème de Dirichlet (§ 33) on démontre que la substitution sus-indiquée est une permutation du système des tritettarions. On peut donc énoncer le

Théorème 17. Tout système de nonions est une permutation d'un système de tritettarions.

Le système des nonions de Sylvester est donc, en un certain sens, équivalent à un système de *tritettarions complexes*, c'est-à-dire de tritettarions dont les coordonnées, au lieu d'être toutes réelles, sont tirées du corps de nombres $R(\sqrt{-3})$.

LAUSANNE. — IMPRIMERIE LA CONCORDE.