

ANNEAUX DES REPRESENTATIONS
ET
ESPACES CLASSIFIANTS
DES
GROUPES DE LIE

THESE

présentée à la faculté des sciences, pour obtenir
le grade de docteur ès sciences, par

Akimou OSSE

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
2007 NEUCHATEL (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Anneaux des représentations et espaces
classifiants des groupes de Lie

de Monsieur Akimou Osse

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel
sur le rapport des membres du jury,

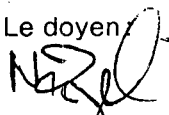
MM. les professeurs U. Suter, F. Sigrist,

A. Valette et G. Mislin (EPF-Zurich)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 19 mai 1994

Le doyen



H.-H. Nägeli

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	iii
Remerciements	vii
1 Préliminaires	1
1.1 Des rappels de topologie algébrique	1
1.2 Les groupes de Lie compacts connexes	4
1.3 Les espaces classifiants	6
2 Anneaux des représentations et λ-structures	11
2.1 Un peu d'algèbre commutative	11
2.2 Représentations des groupes de Lie compacts	13
2.3 Les λ -anneaux	19
3 Les groupes localement unitaires	27
3.1 Anneaux des représentations et revêtements	27
3.2 Les revêtements finis du groupe $U(n)$	29
3.3 Examen du cas général	34
4 Les anneaux de Willisau	51
4.1 Définitions et exemples	52
4.2 Un principe de scindage	55
4.3 Intermède: anneaux de Willisau de rang ≤ 2	62
5 Caractérisations des anneaux $R(G)$	69
5.1 Les γ -opérations de Grothendieck	70
5.2 Filtrations sur les anneaux de Willisau	72
5.3 Quatre caractérisations des anneaux $R(G)$	74
6 Des théorèmes de reconstruction	79
6.1 Les diagrammes radiciels	79
6.2 Le résultat principal	82
6.3 Normalisateurs des tores maximaux	87

7	Le problème de Mislin	91
7.1	Les deux premières preuves	92
7.2	La troisième preuve	95
7.3	Le groupe $Aut(BG)$	99
	Bibliographie	103

Introduction

La théorie des groupes "continus", actuellement connue sous le nom de théorie des groupes de Lie, a été fondée en 1873 par le mathématicien norvégien Sophus Lie; elle restera en grande partie locale jusqu'au milieu des années vingt. Ce sont les travaux de l'allemand H. Weyl et du français E. Cartan qui, entre 1924 et 1927, jetteront les bases d'une théorie globale systématique des groupes de Lie. En particulier, la définition actuelle de ces objets mathématiques nous vient de ces travaux: un groupe de Lie est une variété différentiable munie d'une loi de groupe telle que le produit et le passage à l'inverse soient des applications différentiables. Comme on le voit, un groupe de Lie est à la fois un objet algébrique et un objet géométrique; c'est cette double nature qui en fait un outil fondamental et très maniable pour l'étude de la notion de symétrie en mathématiques et en physique théorique.

En 1956, les américains Montgomery, Zippin et Gleason ont résolu le cinquième problème de Hilbert en montrant que l'on pouvait remplacer "variété différentiable" par "espace localement euclidien" et "applications différentiables" par "applications continues" dans la définition donnée au paragraphe précédent. Conformément à l'idée hilbertienne de "débarrasser la théorie de Lie de ses hypothèses de différentiabilité", on peut naturellement se demander si cette caractérisation topologique des groupes de Lie admet une version homotopique. Si l'on travaille directement avec les groupes de Lie, alors la réponse est négative: Hilton-Roitberg et Stasheff ont construit un groupe topologique qui a le type d'homotopie d'une variété différentiable et qui n'est isomorphe à aucun groupe de Lie (cf [Sta]). C'est à cause de ce genre de phénomène que Rector et Stasheff ont proposé, dans les années soixante-dix, que l'étude homotopique des groupes de Lie soit plutôt menée sur les espaces classifiants de ces derniers. Sans entrer (pour le moment!) dans les détails techniques, disons que le classifiant BG d'un groupe de Lie G est un espace topologique qui permet de classer les G -fibrés principaux (i.e les espaces admettant G comme groupe de "symétrie locale"); la construction de cet espace fait intervenir à la fois la topologie et la structure algébrique de G . Il convient de noter, d'entrée de jeu, que le programme de Rector-Stasheff ne peut être intéressant que pour les groupes compacts: à cause d'un résultat d'Iwasawa, le classifiant d'un groupe de Lie raisonnable (par exemple connexe) a le type d'homotopie du classifiant de "son" sous-groupe de Lie compact maximal.

Le point important de la correspondance $G \rightsquigarrow BG$, c'est que deux groupes de Lie isomorphes admettent des classifiants homotopiquement équivalents. Par conséquent, les invariants homotopiques de l'espace BG sont automatiquement des invariants du groupe de Lie G ; parmi cette famille d'invariants de G , nous travaillerons surtout avec l'anneau de K -théorie complexe $K^0(BG)$ de l'espace BG . D'un autre côté, la théorie des représentations (complexes) des groupes compacts nous fournit aussi un invariant: l'anneau des représentations (complexes). Si G est un groupe de Lie compact, son anneau des représentations $R(G)$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'équivalence des représentations irréductibles de G ; la structure multiplicative étant induite par le produit tensoriel des représentations de G . D'après un résultat de M.F. Atiyah, la connaissance de l'anneau $R(G)$ permet de calculer l'anneau de K -théorie complexe $K^0(BG)$. Les puissances extérieures des représentations dans le cas de $R(G)$ ou des fibrés vectoriels dans le cas de $K^0(BG)$ munissent nos deux invariants d'une structure supplémentaire; celle-ci s'appelle λ -structure et jouera un rôle important dans ce travail. Un autre résultat d'Atiyah peut servir de première justification à l'usage de la notion de λ -anneau: si G est connexe, alors la connaissance de l'anneau $K^0(BG)$ et de sa λ -structure permet de déterminer l'anneau $R(G)$. C'est en exploitant la technique des λ -anneaux que nous obtenons, au chapitre 3, une nouvelle preuve du théorème suivant de Notbohm-Smith:

L'espace classifiant, ou l'anneau des représentations avec sa λ -structure (ou encore la K -théorie de l'espace classifiant et sa λ -structure) permettent de distinguer les groupes de Lie compacts connexes qui sont localement isomorphes à un groupe unitaire.

En général, l'anneau des représentations ne suffit pas pour distinguer les groupes de Lie compacts. Par exemple, pour l entier positif et non nul, les anneaux des représentations de $\mathrm{Sp}(l)$ et $\mathrm{SO}(2l+1)$ sont λ -isomorphes alors que ces deux groupes ne sont pas isomorphes. Après avoir caractérisé les λ -anneaux qui sont anneaux des représentations de groupes de Lie compacts connexes (cf chapitres 4 et 5), nous montrons au chapitre 6 que les contrexemples ci-dessus sont essentiellement les seuls possibles. Il en résulte alors que la connaissance du λ -anneau $R(G)$ et de l'un de ses sous-groupes $RO(G)$ ou $RSp(G)$ permet de reconstituer le groupe G . L'autre extension possible du théorème de Notbohm-Smith se rapporte aux espaces classifiants; le problème a été posé par G. Mislin en 1991:

Est-ce que qu'un groupe de Lie compact connexe est caractérisé par son espace classifiant?

La réponse est affirmative; mieux, la seule connaissance de l'espace BG permet de reconstruire le groupe de Lie compact connexe G . Trois preuves de cette affirmation sont présentées dans le chapitre 7. L'une de ces preuves nous permet aussi de retrouver un résultat de Jackowski, McClure et Oliver sur le groupe $\mathrm{Aut}(BG)$ des classes des équivalences homotopiques de l'espace BG . Signalons aussi que D. Notbohm et J. Møller ont également répondu par l'affirmative au problème de Mislin.

Si l'on se réfère aux importants résultats obtenus ces dernières années sur la topologie des espaces classifiants (voir [Ad-Wi], [DMW], [JMO1], [NS1]), on peut raisonnablement espérer que la question suivante représente une "bonne" version homotopique du cinquième Hilbert:

Trouver des conditions (homotopiques) nécessaires et suffisantes qui forcent un espace topologique X à avoir le type d'homotopie d'un espace classifiant de groupe de Lie.

Pour qu'un espace X ait le type d'homotopie d'un classifiant de groupe de Lie, il faut en tout cas que X soit ce qu'on appelle un "loop fini", c'est-à-dire que l'espace ΩX des lacets sur X soit homotopiquement équivalent à un CW -complexe fini. Dans [Rec], D. Rector a formulé une autre condition nécessaire; celle-ci est une traduction homotopique du fait qu'un groupe de Lie compact possède un tore maximal (voir le chapitre 1 pour les définitions). Les spécialistes espèrent que ces deux conditions constituent une réponse à la question ci-dessus: c'est la conjecture D de la page 68 de [Kane].

Voici, pour terminer, un bref aperçu des contenus des différents chapitres. Les deux premiers chapitres sont consacrés aux rappels des notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail; nous y introduisons les notions de base de la K -théorie topologique, de la théorie des groupes de Lie et des espaces classifiants et aussi de la théorie des λ -anneaux. Les groupes localement unitaires sont étudiés en détail au chapitre 3; ce chapitre contient aussi un programme en Mathematica qui permet de déterminer, pour n petit, une présentation de l'anneau des représentations des quotients du groupe unitaire $U(n)$. Les chapitres 4 et 5 contiennent la définition et la classification des anneaux de Willisau ainsi que des caractérisations des anneaux de représentations des groupes de Lie compacts connexes. Notons qu'en plus de ce qui a été dit plus haut, le chapitre 6 contient aussi la généralisation à tous les groupes de Lie compacts connexe d'un fameux résultat de Curtis, Williams et Wiederhold:

Théorème. *La connaissance du normalisateur d'un tore maximal d'un groupe de Lie compact connexe suffit pour reconstruire ce dernier.*

Le dernier chapitre est consacré au problème de Mislin et à notre preuve du théorème de Jackowski, McClure et Oliver.

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer mon admiration et ma profonde reconnaissance à M. Ueli SUTER, mon directeur de thèse; ses conseils avisés, ses encouragements et sa grande disponibilité ont été déterminants pour l'aboutissement de ce travail.

M.M Guido MISLIN, François SIGRIST et Alain VALETTE m'ont fait l'honneur de faire partie du jury; je les remercie pour leur lecture attentive du manuscrit et leurs précieuses suggestions.

Ma gratitude s'adresse également à mes amis Alain JEANNERET, Bernard JUNOD et Daniel LINES; ils ont guidé mes premiers pas d'apprenti-topologue et m'ont fait bénéficier, tout au long de ce travail et avec beaucoup de patience, de leur expérience et de leur soutien.

Je voudrais aussi remercier les professeurs et assistants de l'Institut de Mathématiques de Neuchâtel, ainsi que les participants du troisième cycle romand de Mathématiques; j'ai tiré un profit certain de leurs conseils et de la stimulante ambiance régnant au sein de ces deux institutions.

Mes remerciements vont également à Eva ROOS, à Antoine AZOKLY, à mes compatriotes de Neuchâtel, à Claude FUHRER, à mes compagnons de voyage Andréas KERLL et Martin MÜLLER, ainsi qu'à tous mes amis de Neuchâtel et La Chaux-de-Fonds.

Enfin, je dédie ce travail à ma famille et à tous les fils de SAKETE (Bénin).

Chapitre 1

Préliminaires

Nous débutons avec des rappels d'homotopie et de K -théorie topologique; nous travaillerons exclusivement avec la K -théorie dite représentable. Dans la deuxième section, nous passons en revue les définitions et principaux résultats de la théorie des groupes de Lie compacts. La notion d'espace classifiant d'un groupe de Lie est présentée dans la dernière section; les principales propriétés de ces espaces sont consignées dans le théorème 1.5. Ce premier chapitre nous permet surtout de préciser la terminologie et les notations qui seront utilisées tout au long de ce travail. Le lecteur qui est bien au fait des notions ci-dessus peut directement passer au chapitre suivant.

1.1 Des rappels de topologie algébrique

Les espaces topologiques seront simplement appelés espaces et nous n'allons considérer que des applications continues entre eux-ci.

Soient X, Y deux espaces et $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ des applications. On dira que f_0 est *homotope* à f_1 , et on notera $f_0 \sim f_1$, s'il existe une application

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y \quad \text{telle que} \quad F(-; 0) = f_0 \quad \text{et} \quad F(-; 1) = f_1.$$

On définit ainsi une relation d'équivalence entre les applications de X dans Y ; les classes d'équivalence de cette relation forment l'ensemble des *classes d'homotopie* d'applications de X dans Y et se note $[X, Y]$.

On dira que deux espaces X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe deux applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $f \circ g \sim Id_Y$ et $g \circ f \sim Id_X$. On dira aussi que X et Y sont *homotopiquement équivalents* et on notera $X \simeq Y$. Par exemple, deux espaces homéomorphes ont le même type d'homotopie.

Un espace est dit *contractile* lorsqu'il a le type d'homotopie d'un point. Par exemple, toute partie convexe de \mathbb{R}^n est contractile.

Soient $(X; x_0)$ et $(Y; y_0)$ deux espaces pointés (i.e. $x_0 \in X, y_0 \in Y$), et

$$\varphi_0, \varphi_1 : (X; x_0) \rightarrow (Y; y_0)$$

deux applications pointées (i.e envoyant x_0 sur y_0). Une *homotopie pointée* entre φ_0 et φ_1 est une application $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ satisfaisant:

$$\Phi(-; 0) = \varphi_0, \quad \Phi(-; 1) = \varphi_1; \quad \Phi(x_0; t) = y_0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ici aussi, on obtient une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications pointées. Les classes d'équivalence forment l'ensemble des *classes d'homotopie pointée* d'applications de X dans Y ; cet ensemble sera noté $[(X; x_0), (Y; y_0)]$, ou simplement $[X, Y]_0$.

Soient $(X; x_0)$ un espace pointé, $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ la sphère de dimension n et $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$\pi_n(X; x_0) = [(S^n; e_1), (X; x_0)]$$

est muni, de façon naturelle, d'une structure de groupe; c'est le *n-ième groupe d'homotopie* de X par rapport au point-base x_0 . Lorsque $n = 1$, $\pi_n(X; x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie (pointée) des lacets basés en x_0 dans X et la loi de groupe est induite par la composition des lacets; $\pi_1(X; x_0)$ s'appelle aussi *groupe de Poincaré* ou encore *groupe fondamental* de X . On montre que $\pi_n(X; x_0)$ est abélien pour tout $n \geq 2$. Si l'espace X est connexe par arcs, la classe d'isomorphie de $\pi_n(X; x_0)$ ne dépend pas du point-base; on notera alors $\pi_n(X; *)$, ou plus simplement $\pi_n(X)$, pour le *n-ième groupe d'homotopie* de X . Si, par exemple, X est contractile, alors $\pi_n(X; *) = 0 \quad \forall n \geq 0$. On dira qu'un espace X est *m-conexe* (pour $m \in \mathbb{N}$) s'il est connexe par arcs et si $\pi_n(X) = 0$ pour tout $n \leq m$. Un espace 1-conexe s'appelle aussi *simplement connexe*; si X est 1-conexe, alors $\pi_n(X; *) = [S^n, X]$ pour tout entier $n \geq 2$.

Soit X un *CW-complexe fini*. Pour définir la *K-théorie* de X , on considère l'ensemble $Vect(X)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes sur X . La somme de Whitney et le produit tensoriel des fibrés vectoriels induisent une structure de semi-anneau sur $Vect(X)$. La *K-théorie (complexe)* de notre espace est l'anneau $K(X)$ obtenu en appliquant la *construction de Grothendieck* au semi-anneau $Vect(X)$. Par exemple, l'anneau de *K-théorie* du point $\{*\}$ est égal à \mathbb{Z} ; en effet, $Vect(\{*\}) = \mathbb{N}$ et la construction de Grothendieck produit \mathbb{Z} lorsqu'on l'applique au semi-anneau \mathbb{N} . Grâce à la notion de "pull-back" d'un fibré vectoriel par une application continue, on peut affirmer que la correspondance $X \rightsquigarrow K(X)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des *CW-complexes finis* dans celle des anneaux commutatifs avec unité. Si l'on s'est aussi donné un point-base $x_0 \in X$, on peut définir la *K-théorie réduite* de l'espace pointé $(X; x_0)$ par:

$$\tilde{K}(X) = Ker(i^* : K(X) \rightarrow K(\{x_0\})),$$

où i désigne l'inclusion de $\{x_0\}$ dans X . On montre, à l'aide de la projection $p : X \rightarrow \{x_0\}$, qu'il y a un scindage naturel

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Exemple (Bott) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\tilde{K}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les espaces qui vont nous intéresser dans la suite ne sont, en général, pas des CW -complexes finis. C'est la raison pour laquelle nous allons étendre le foncteur $K(-)$ à une catégorie plus large d'espaces topologiques. Cette extension, appelée K -théorie représentable, est basée sur le *théorème de classification* des fibrés vectoriels complexes. Avant d'énoncer ce dernier, il nous faut d'abord introduire quelques notations et définitions. Soient n, m deux entiers tels que $1 \leq n \leq m$. L'ensemble $G_{n,m}$ des sous-espaces vectoriels complexes de dimension n de \mathbb{C}^m est une variété différentiable compacte; on l'appelle *grassmannienne* d'indice n, m . On montre que l'application

$$\nu : G_{n,m} \longrightarrow G_{m-n,m}, \quad W \longmapsto W^\perp,$$

W^\perp désignant l'orthogonal de W , est un difféomorphisme. D'un autre côté, l'injection $\mathbb{C}^m \hookrightarrow \mathbb{C}^{m+1}$, $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0)$ induit un plongement de variétés différentiables $i : G_{n,m} \hookrightarrow G_{n,m+1}$. Si $m = 2n$, la composition

$$G_{n,2n} \xrightarrow{i} G_{n,2n+1} \xrightarrow{\nu} G_{n+1,2n+1} \xrightarrow{i} G_{n+1,2n+2}$$

nous permet d'identifier la grassmannienne $G_{n,2n}$ à une sous-variété de $G_{n+1,2n+2}$. Posons

$$BU := \bigcup_{n \geq 1} G_{n,2n}$$

et munissons cet ensemble de la topologie inductive et d'un point-base appartenant à $G_{1,2}$; le lemme II.6.4 de [Mi-To] implique alors que BU est un CW -complexe de type fini (i.e ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension). On montre (voir [B-M1, Supplement]) qu'il existe deux applications

$$\oplus : BU \times BU \longrightarrow BU, \quad \otimes : BU \times BU \longrightarrow BU$$

satisfaisant, à homotopie près, les axiomes définissant les anneaux commutatifs. Il suit que, pour tout espace pointé $(X; x_0)$, l'ensemble $[X, BU]_0$ est naturellement muni d'une structure d'anneau commutatif.

Théorème 1.1 *Soient X un CW -complexe connexe fini et x_0 un point-base de X . Il existe un isomorphisme naturel d'anneaux entre $\tilde{K}(X)$ et $[X, BU]_0$. En d'autres termes, le foncteur $\tilde{K}(-)$ est représenté par l'espace BU .*

Preuve Cf [Huse, Theorem 4.5 (page 107)]. ■

Nous pouvons maintenant définir la K -théorie représentable en posant:

Définition 1.1 Soient X un CW -complexe de type fini (i.e ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension) et x_0 un point-base de X . L'anneau de K -théorie topologique et celui de K -théorie réduite de X sont définis par :

$$K(X) := [X, \mathbb{Z} \times BU] \quad \text{et} \quad \tilde{K}(X) := [X, \mathbb{Z} \times BU]_0.$$

D'après le théorème de classification ci-dessus et pour les CW -complexes finis, ces définitions coïncident avec celles qui ont été données au début de cette section. Il faudrait remarquer que, pour cette extension des foncteurs $K(-)$ et $\tilde{K}(-)$, $\tilde{K}(X)$ est toujours un idéal de l'anneau $K(X)$ et que l'on a aussi un scindage naturel

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

En anticipant un peu sur le thème qui sera abordé à la fin de ce chapitre, notons aussi que BU n'est autre que l'espace classifiant du groupe topologique, appelé *groupe unitaire infini*, obtenu en prenant la limite du système formé par la suite d'inclusions canoniques $\{e\} \subset U(1) \subset U(2) \subset \dots \subset U(n) \subset U(n+1) \subset \dots$

1.2 Les groupes de Lie compacts connexes

Un *groupe de Lie* (réel) G est un ensemble muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété différentiable réelle telles que les applications

$$m : G \times G \longrightarrow G, (g, h) \longmapsto gh,$$

$$\text{inv} : G \longrightarrow G, g \longmapsto g^{-1}$$

sont différentiables. Le groupe de Lie G sera dit *connexe* (respectivement *compact*, *1-connexe*) si l'espace topologique sous-jacent est connexe (respectivement compact, 1-connexe); si $gh = hg$ pour tout $g, h \in G$, on dira que G est un groupe de Lie *abélien*. Un groupe de Lie connexe est dit *simple* s'il n'est pas abélien et s'il ne possède pas de sous-groupe normal fermé de dimension strictement positive. Un *morphisme* de groupes de Lie $\theta : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme de groupes qui est aussi une application différentiable; si θ est bijective et son inverse θ^{-1} un morphisme de groupes de Lie, on dira que θ est un *isomorphisme* de groupes de Lie et on notera $G \cong H$.

Exemples

1. Tout groupe fini est un groupe de Lie.
2. Le *cercle-unité* $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ est un groupe de Lie compact, abélien et connexe.
3. Le *groupe unitaire* $U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}); A \cdot A^* = \mathbb{1}\}$, où $A^* = \bar{A}^t$ désigne la conjuguée transposée de la matrice A , est un groupe de Lie compact et connexe; il n'est abélien que pour $n = 1$ et on a alors $U(1) = S^1$.

4. Le groupe linéaire général $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \det(A) \neq 0\}$ est un groupe de Lie; on se convainc facilement qu'il n'est pas compact et qu'il possède deux composantes connexes.
5. Si G et H sont des groupes de Lie, leur produit cartésien $G \times H$ est aussi un groupe de Lie.

Soient G un groupe de Lie et LG l'espace-tangent, à la variété sous-jacente à G , en l'élément neutre. A l'aide de la loi de groupe sur G , on construit (voir [Ad1, Chap. II]) une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : LG \times LG \longrightarrow LG$ vérifiant les propriétés suivantes:

- i) $\forall v, w \in LG, [v, w] = -[w, v]$ (antisymétrie);
- ii) $\forall u, v, w \in LG, [[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ (identité de Jacobi).

La paire $(LG, [\cdot, \cdot])$ s'appelle l'algèbre de Lie du groupe G . Pour plus de détails sur la construction de cet important invariant de G et surtout ses propriétés, nous renvoyons au chapitre II de [Ad1].

Dans toute la suite, nous ne nous occuperons que des groupes de Lie compacts; nous verrons dans la prochaine section que ce sont les seuls groupes de Lie que le point de vue adopté dans ce travail pourrait permettre de distinguer.

Soit G un groupe de Lie compact. Un sous-groupe abélien, connexe et fermé de G est un tore, c'est-à-dire un produit de cercles S^1 . On dira qu'un tore T de G est maximal s'il n'est pas strictement contenu dans un autre tore de G . On vérifie facilement que G contient au moins un tore maximal. Le théorème suivant justifie, dans le cas connexe, l'intérêt de la notion de tore maximal.

Théorème 1.2 (cf [Br-tD, Theorem 1.6 (page 159)]) Soit G un groupe de Lie compact connexe.

- i) Tout élément de G est contenu dans au moins un tore maximal.
- ii) Si T et T' sont deux tores maximaux de G , alors il existe $g \in G$ tel que $gTg^{-1} = T'$. La dimension d'un tore maximal est donc un invariant de G ; on l'appellera le rang de G et on le notera $\text{rang}(G)$.

Théorème-définition. Soit G un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal de G ; on note $N(T)$ le normalisateur de T . Le groupe-quotient $N(T)/T$ est fini et sa classe d'isomorphie ne dépend pas du choix de T ; on l'appelle groupe de Weyl de G et on le note $W(G)$. Ce groupe agit fidèlement sur T de la façon suivante: $\forall w = [n] \in W(G), \forall t \in T \quad w \cdot t := ntn^{-1}$.

Preuve Voir le chapitre IV de [Br-tD]. ■

Exemple Pour le groupe unitaire $U(n)$, le sous-groupe $T(n)$ formés des matrices diagonales de $U(n)$ est un tore maximal; on l'appelle *tore maximal standard* de $U(n)$. Dans ce cas-ci, le théorème 1.2 n'est autre que le théorème spectral de l'algèbre linéaire. Le groupe de Weyl $W(U(n))$ est le groupe symétrique Σ_n ; son action sur $T(n)$ se déroule comme suit:

$$\forall \sigma \in \Sigma_n, \forall A = \text{Diag}(z_1, \dots, z_n) \in T(n), \quad \sigma \cdot A = \text{Diag}(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}).$$

Grâce aux travaux de W. Killing, E. Cartan et H. Weyl, on connaît la structure des groupes de Lie compacts connexes:

Théorème 1.3 i) Si G est un groupe de Lie compact connexe, alors

$$G \cong (T^r \times H)/K,$$

où T^r est un tore de dimension r , H un groupe de Lie compact et 1-connexe et K un sous-groupe fini central de $T^r \times H$.

ii) Tout groupe de Lie compact et 1-connexe est un produit cartésien de groupes de Lie compacts, 1-connexes et simples.

iii) Soit H un groupe de Lie compact, 1-connexe et simple; alors H fait partie de la liste de groupes compacts, 1-connexes et simples suivante: $A_n = \text{SU}(n+1)$, $B_n = \text{Spin}(2n+1)$, $C_n = \text{Sp}(n)$, $D_n = \text{Spin}(2n)$, G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 avec $n = 1, 2, \dots$

1.3 Les espaces classifiants

Avant d'introduire les espaces classifiants, nous discuterons de la notion d'espace fibré principal; celle-ci formalise l'idée (physique) de symétrie locale, les groupes de Lie jouant le rôle de groupes de symétrie.

Définition 1.2 Soient G un groupe de Lie et B un espace topologique. Un G -fibré principal sur B est une application continue $p: E \rightarrow B$ avec une action à droite

$$E \times G \rightarrow E, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g$$

satisfaisant:

1. pour tout $b \in B$, $E_b = p^{-1}(b)$ est une orbite de l'action de G sur E ;
2. pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert V_b de b et un homéomorphisme $\phi: p^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times G$ tel que

i) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V_b) & \xrightarrow{\phi} & V_b \times G \\ p \searrow & & \swarrow pr_2 \\ & V_b & \end{array}$$

commute;

ii) ϕ est équivariant, c'est-à-dire

$$\phi(x \cdot g) = \phi(x) \cdot g, \quad \forall x \in p^{-1}(V_b), \forall g \in G,$$

avec G agissant trivialement sur V_b et par translation à droite sur lui-même.

L'espace E s'appelle espace total du fibré, B sa base et $E_b = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus du point b .

Commentaires

- a) A cause de la condition 1), l'application p est surjective; et la condition 2) implique qu'elle est ouverte. On conclut que p induit un homéomorphisme entre l'espace des orbites E/G et l'espace B .
- b) Soient $x \in E$ et $g \in G$ tels que $x \cdot g = x$. Il existe $h \in G$ avec $\phi(x) = (p(x); h)$ et on a les égalités

$$(p(x); h) = \phi(x) = \phi(x \cdot g) = (p(x); h) \cdot g = (p(x); hg);$$

d'où $g = e$. On vient ainsi de montrer que l'action de G sur E est forcément libre, ce qui implique que, pour tout $b \in B$ et tout $x \in E_b$, la flèche

$$G \longrightarrow E_b, \quad g \longmapsto x \cdot g$$

est un homéomorphisme.

Définition 1.3 Soit G un groupe de Lie. Un G -fibré principal $p: E \longrightarrow B$ s'appelle universel si son espace total est contractile. On dit alors que sa base est un espace classifiant pour le groupe G .

Afin de justifier la terminologie "espace classifiant" et d'expliquer, par la même occasion, l'intérêt de ces objets, nous devons rappeler les notions de morphisme et d'isomorphisme de fibrés principaux:

Définition 1.4 Soient G un groupe de Lie et $p: E \rightarrow X$, $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow \bar{X}$ deux G -fibrés principaux. Un morphisme entre ces fibrés est une paire d'applications (u, f) faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & \bar{E} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \bar{\rho} \\ X & \xrightarrow{f} & \bar{X} \end{array}$$

et avec u satisfaisant: $u(x \cdot g) = u(x) \cdot g$, $\forall x \in E, \forall g \in G$. On dira que nos deux fibrés sont isomorphes s'il existe un morphisme (u, f) , allant de l'un à l'autre, avec u et f des homéomorphismes. L'ensemble des classes d'isomorphisme de G -fibrés principaux sur un espace X sera noté $k_G(X)$.

Un grand nombre de problèmes géométriques peut se ramener à l'étude de l'ensemble $k_G(X)$ pour un groupe de Lie G et un espace X donnés. Le théorème de classification suivant permet de réduire cette étude à un problème de la théorie de l'homotopie et sert aussi de base à la théorie des classes caractéristiques (voir [Mi-St]):

Théorème 1.4 (c'est un cas particulier [Dold, theorem 7.5]; cf aussi [Huse, pages 54-57])

Soient G un groupe de Lie, $p: E \rightarrow B$ un G -fibré universel et X un espace paracompact. Il existe une bijection naturelle entre les ensembles $k_G(X)$ et $[X, B]$. En d'autres termes, le foncteur $X \mapsto k_G(X)$ est représenté par l'espace B .

Ce théorème entraîne automatiquement l'unicité, à type d'homotopie près, des espaces classifiants des groupes de Lie. On pourra donc parler, avec un léger abus de langage, de l'espace classifiant BG d'un groupe de Lie G .

Le résultat suivant résout la question de l'existence de ces espaces et nous livre aussi leurs principales propriétés:

Théorème 1.5 i) Il existe un foncteur $G \mapsto (p_G: EG \rightarrow BG)$ de la catégorie des groupes de Lie dans celle des fibrés principaux universels.

ii) Si G est un groupe de Lie compact, alors l'espace BG a le type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini; on le supposera toujours (bien) pointé.

iii) Si G et G' sont des groupes de Lie, alors $B(G \times G') \simeq BG \times BG'$.

iv) Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de celui-ci. L'inclusion de H dans G induit une fibration

$$G/H \hookrightarrow BH \xrightarrow{Bi} BG.$$

v) Une suite exacte courte de groupes de Lie

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

fournit une fibration $BH \hookrightarrow BG \longrightarrow BK$.

vi) Si G est un groupe de Lie et g un élément de G , la conjugaison

$$c_g : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto gxg^{-1}$$

induit une application $Bc_g : BG \longrightarrow BG$ qui est homotope à l'identité.

Preuve Toutes ces affirmations sont démontrées soit dans [Dold, §8], soit dans [Mi-To, §II.6]. ■

Remarques

1. Soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes. D'après [Hoch, Theorem XV.3.1], G possède un sous-groupe compact maximal K (unique à conjugaison près) et l'espace homogène G/K est contractile. Le point iv) du théorème ci-dessus entraîne alors que les espaces classifiants BG et BK sont homotopiquement équivalents; nous pouvons donc restreindre notre étude homotopique des espaces classifiants à ceux des groupes de Lie compacts.
2. Les notions de fibré principal et de fibré universel s'étendent à tous les groupes topologiques. La fameuse *construction de Milnor* (voir [Huse, page 53] permet, par exemple d'étendre le point i) du théorème ci-dessus à cette classe plus large de groupes de symétrie.

1212

Chapitre 2

Anneaux des représentations et λ -structures

Dans ce chapitre, nous introduisons les deux outils qui vont jouer un rôle central dans le présent travail. Le premier de ces outils est l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact. Il provient de la théorie des représentations des groupes de Lie compacts; il est surtout important pour le calcul de la K -théorie des espaces classifiants de ces groupes. Le deuxième outil est la théorie des λ -anneaux. Les axiomes définissant ces objets algébriques ont été formulés, d'après les principales propriétés des puissances extérieures d'espaces vectoriels, par A. Grothendieck dans les années cinquante. Nous nous contenterons d'un rapide rappel de ces axiomes, tout en proposant au lecteur d'aller consulter [At-Ta] pour plus de détails. Les puissances extérieures des représentations fournissent une λ -structure sur l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact; cette structure supplémentaire sera d'une importance décisive dans la suite.

2.1 Un peu d'algèbre commutative

Dans cette section, tous les anneaux sont commutatifs avec unité.

Soient B un anneau et A un sous-anneau de B ; on dira aussi que B est une extension de A . Un élément $x \in B$ est dit *entier sur A* s'il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Si tous les éléments de B sont entiers sur A , on dira que B est *entier sur A* ou encore que B est une *extension entière* de A . Plus généralement, un morphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow B$ s'appelle *entier* si B est entier sur l'anneau $\varphi(A)$. L'assertion suivante découle directement des définitions et sera utilisée dans le chapitre 5:

Proposition 2.1 *Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux. Pour tout x appartenant à A , x est inversible dans A si et seulement s'il l'est dans l'anneau B .*

Preuve Soient $x \in A$ et $y \in B$ avec $xy = 1$. Par hypothèse, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n = 0$. En multipliant cette équation par x^{n-1} , on

obtient la relation $y = -a_1 - a_2x - \dots - a_n x^{n-1}$; il en résulte que $y = x^{-1}$ se trouve dans A . L'autre implication est triviale. ■

Le critère qui suit permet de reconnaître facilement certaines extensions entières.

Proposition 2.2 Soit $A \subset B$ une extension d'anneaux; B est alors canoniquement muni d'une structure de A -module. Un élément $x \in B$ est entier sur A si et seulement s'il existe un sous-anneau C de B contenant A et x et qui est un A -module de génération finie. En particulier, B est entier sur A si l'anneau A est noëthérien et B un A -module de génération finie.

Preuve Voir [At-Md, Proposition 5.1] ■

Soit A un anneau. On dira que A est *intégralement clos* s'il est intègre et si, pour tout élément x de son corps des fractions, x entier sur A implique que x se trouve dans A . Par exemple, tout anneau factoriel est intégralement clos.

Proposition 2.3 Soient B un anneau et W un groupe fini d'automorphismes de B . On considère le sous-anneau de B défini par

$$B^W = \{x \in B; w(x) = x \forall w \in W\}.$$

- i) L'extension d'anneaux $B^W \subset B$ est entière.
- ii) Si B est intégralement clos, alors B^W l'est aussi.

Preuve

- i) Si $x \in B$, alors x est une racine du polynôme unitaire

$$p(\xi) = \prod_{w \in W} (\xi - w(x))$$

et les coefficients de ce dernier se trouvent dans B^W .

- ii) Soit x élément du corps des fractions $\text{Frac}(B^W)$ et entier sur B^W . Puisque $\text{Frac}(B^W) \subset \text{Frac}(B)$, x est un élément de $\text{Frac}(B)$ qui est entier sur B ; donc x appartient à B . Mais x est, par hypothèse, invariant sous l'action de W . ■

Soit A un anneau. Une chaîne $\mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \cdots \subsetneq \mathcal{P}_d \subsetneq A$ d'idéaux premiers de A sera dite de *longueur* d . La *dimension de Krull* de l'anneau A est le supremum des longueurs de ses chaînes d'idéaux premiers; on le notera $\dim(A)$. Par exemple, la dimension de Krull d'un corps est 0 et celle de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ vaut $n + 1$.

Proposition 2.4 Soit $A \subset B$ une extension entière d'anneaux, alors

$$\dim(A) = \dim(B).$$

Preuve Voir [Kap, Theorem 48] ■

Nous allons clore cette section avec quelques rappels d'algèbre topologique. Soient A un anneau noëthérien, \mathcal{I} un idéal de A et M un A -module. On introduit une topologie sur M en spécifiant que celle-ci est compatible avec la structure de A -module de M et que les sous-modules $\mathcal{I}^n M$ ($n \in \mathbb{N}$) forment un système fondamental de voisinages de $0 \in M$. Cette topologie s'appelle *topologie \mathcal{I} -adique*. La *complétion \mathcal{I} -adique* de M est, par définition, la limite projective

$$\hat{M} := \varprojlim M/\mathcal{I}^n M;$$

celle-ci est naturellement munie d'une structure de A -module. Les surjections canoniques $M \rightarrow \mathcal{I}^n M$ induisent un homomorphisme de A -modules $\psi : M \rightarrow \hat{M}$; on dira que M est *complet* pour la topologie \mathcal{I} -adique lorsque ψ est un isomorphisme. En considérant le cas particulier $M = A$, on obtient le *complété \mathcal{I} -adique* \hat{A} de A ; celui-ci est canoniquement muni d'une structure d'anneau et la flèche $\psi : A \rightarrow \hat{A}$ est un morphisme d'anneaux. On montre que le complété \mathcal{I} -adique \hat{M} est en réalité un \hat{A} -module et qu'il existe un morphisme canonique de \hat{A} -modules

$$\hat{A} \otimes_A M \rightarrow \hat{M}.$$

Proposition 2.5 *Soient A un anneau noëthérien, \mathcal{I} un idéal de A et M un A -module de génération finie; le morphisme canonique ci-dessus est un isomorphisme de \hat{A} -modules. En particulier, \hat{M} est un \hat{A} -module de génération finie.*

Preuve Voir [At-Md, Proposition 10.13] ■

2.2 Représentations des groupes de Lie compacts

Soit G un groupe de Lie compact.

1. Une *représentation (complexe)* de G est une paire (V, ρ) , où V un espace vectoriel complexe de dimension $n < \infty$ et ρ un morphisme de groupes de Lie $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. On parlera aussi d'*action linéaire* de G sur V et, pour $g \in G$ et $v \in V$, on écrira souvent $g \cdot v$ pour désigner le vecteur $\rho(g)v$. On dira que la représentation (V, ρ) est *fidèle* lorsque l'homomorphisme ρ est injectif. Si l'on fixe une base de V , ce dernier s'identifie à \mathbb{C}^n et ρ fournit un homomorphisme continu $\tilde{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; on parlera alors de *représentation matricielle* du groupe G . L'image de $\tilde{\rho}$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$; il est donc conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{U}(n)$. Cela signifie qu'il existe une base de V dans laquelle toutes les matrices $\tilde{\rho}(g)$ ($g \in G$) sont unitaires.

Exemples

- La *représentation triviale* $(\mathbb{C}, 1)$ avec $1 : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g \mapsto 1$;

- Soit $g \in G$. La conjugaison par g est un difféomorphisme du groupe G ; sa dérivée $Ad(g)$, en l'élément neutre de G , est donc un automorphisme de l'espace vectoriel réel LG . La correspondance

$$Ad : G \longrightarrow \mathbf{GL}(LG), \quad g \longmapsto Ad(g)$$

est un homomorphisme continu de groupes de Lie; on l'appelle *la représentation adjointe* de G . Notons c l'injection canonique $\mathbf{GL}(LG) \hookrightarrow \mathbf{GL}(LG \otimes \mathbb{C})$; alors la paire $(LG \otimes \mathbb{C}, c \circ Ad)$ est une représentation complexe du groupe G .

2. Un *morphisme* entre deux représentations (V, ϱ) et (W, ψ) de G est une application linéaire $f : V \longrightarrow W$ telle que $\forall g \in G, f \circ \varrho(g) = \psi(g) \circ f$. Si f est bijectif, on dira que nos deux représentations sont *équivalentes*.
3. Soient (V, ϱ) une représentation de G et U un sous-espace vectoriel de V . On dira que U est un *sous-espace invariant* de V si $g \cdot u \in U$, pour tout $u \in U$. Dans ce cas, $(U, \varrho|_U)$, avec $\varrho|_U : G \longrightarrow \mathbf{GL}(U)$, est une représentation de G et l'inclusion de U dans V un morphisme de représentations.
4. Une représentation (V, ϱ) de G est dite *irréductible* si elle ne possède pas d'autre sous-espace invariant en dehors de $\{0\}$ et V .
5. A partir de deux représentations (V, ϱ) et (W, ψ) du groupe G , on peut fabriquer de nouvelles représentations de G en effectuant:

la somme directe $(V \oplus W, \varrho \oplus \psi)$, définie par

$$(\varrho \oplus \psi)(g) := \varrho(g) \oplus \psi(g) \quad \forall g \in G;$$

le produit tensoriel $(V \otimes W, \varrho \otimes \psi)$, défini par

$$(\varrho \otimes \psi)(g) := \varrho(g) \otimes \psi(g) \quad \forall g \in G;$$

la contragrédiente (V^*, ϱ^*) de (V, ϱ) , définie par

- $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$,
- $\forall g \in G, \forall f \in V^*, \forall v \in V \quad (\varrho^*(g)f)(v) := f[\varrho^*(g^{-1})v]$;

la k -ième puissance extérieure $(\wedge^k V, \wedge^k \varrho)$ de (V, ϱ) , définie par

$$[(\wedge^k \varrho)(g)](v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := (\varrho(g)v_1) \wedge \cdots \wedge (\varrho(g)v_k),$$

pour tout $g \in G$ et pour tout $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \wedge^k V$ (k étant un entier positif ou nul).

6. Soit (V, ρ) une représentation de G ; le caractère de celle-ci est l'application continue

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g \longmapsto \text{Trace}(\rho(g)).$$

On se convainc facilement que cette application est *centrale* (i.e constante sur les classes de conjugaison de G) et que $\chi_V(e) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$. On vérifie de même que le caractère d'une somme directe (respectivement d'un produit tensoriel) de deux représentations est la somme (respectivement le produit) des caractères de ces dernières.

Les deux premières assertions de la proposition ci-dessous sont démontrées dans le chapitre III de [Ad1]; la troisième affirmation est une conséquence de la deuxième et du théorème 1.2:

Proposition 2.6 *Soit G un groupe de Lie compact.*

- i) *Toute représentation de G est équivalente à une somme directe de représentations irréductibles de G .*
- ii) *Deux représentations de G sont équivalentes si et seulement si elles ont le même caractère.*
- iii) *On suppose que G est aussi connexe et on fixe un tore maximal T de G . La classe d'équivalence d'une représentation (V, ρ) de G est univoquement déterminée par sa restriction $\rho|_T : T \longrightarrow \text{GL}(V)$ au tore maximal T .*

Le corollaire suivant du célèbre théorème de Peter-Weyl sera utilisé dans un instant:

Théorème 2.1 (cf [Br-tD, Theorem III.4.1]) *Tout groupe de Lie compact est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe unitaire $U(N)$ pour un certain N . Autrement dit, tout groupe de Lie compact admet une représentation fidèle.*

Définition 2.1 *Soit G un groupe de Lie compact. Sur l'ensemble $R^+(G)$ des classes d'équivalence des représentations de G , on définit les opérations suivantes: pour tout $\{(V, \rho), (W, \psi)\} \in R^+(G)$,*

$$[(V, \rho) + (W, \psi)] := [(V \oplus W, \rho \oplus \psi)] \quad \text{et} \quad [(V, \rho) \cdot (W, \psi)] := [(V \otimes W, \rho \otimes \psi)].$$

Ces opérations munissent $R^+(G)$ d'une structure de semi-anneau commutatif avec unité.

- i) *L'anneau des représentations de G est l'anneau commutatif avec unité que l'on obtient en appliquant la construction de Grothendieck au semi-anneau $R^+(G)$. Les éléments de $R(G)$ s'appellent représentations virtuelles du groupe G .*

- ii) L'application qui, à une représentation (V, ρ) de G , associe le nombre $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ induit un homomorphisme d'anneaux $\varepsilon : R(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ appelé augmentation; le noyau $I(G)$ de l'augmentation ε est l'idéal d'augmentation de $R(G)$.

Les deux premiers points de la proposition 2.6 permettent de donner une présentation plus pratique de l'anneau $R(G)$:

Proposition 2.7 Soit G un groupe de Lie compact; $R(G)$ est le groupe abélien libre engendré par les classes d'équivalence des représentations irréductibles de G , la structure multiplicative étant toujours induite par le produit tensoriel des représentations. En particulier, les éléments de $R(G)$ sont des différences formelles de classes d'équivalence de représentations de G .

Exemple Si $G = \mathbb{S}^1$, alors toute représentation de G est de la forme

$$\chi_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^m \text{ avec } m \in \mathbb{Z}.$$

Grâce à la relation $\chi_m \otimes \chi_n = \chi_{m+n}$, on voit que $R(\mathbb{S}^1)$ est l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}]$, avec $\alpha = \chi_1$ et $\alpha^{-1} = \chi_{-1}$.

Soit G un groupe de Lie compact; les représentations de G sont complètement "caractérisées" par leur caractère. Cela signifie que $R(G)$ s'identifie à l'anneau des caractères virtuels de G , c'est-à-dire au sous-anneau de

$$C^0(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue}\}$$

engendré par les caractères des représentations irréductibles de G . Nous utiliserons assez souvent cette identification.

On perd évidemment de l'information en passant des représentations de G à l'anneau $R(G)$: il est, en général, impossible de récupérer les caractères irréductibles de G dans l'anneau de ses caractères virtuels. Mais nous verrons tout au long du présent travail que cette construction possède d'agréables propriétés. Commençons tout de suite l'exploration des plus élémentaires d'entre elles. En premier lieu, si G et H sont des groupes de Lie compacts, on a $R(G \times H) = R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} R(H)$. Il suit (par induction) que l'anneau des représentations du tore T^n de dimension n est l'anneau de polynômes de Laurent

$$R(T^n) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}],$$

avec $\alpha_i^{\pm 1} : T^n \rightarrow \mathbb{S}^1, (z_1, \dots, z_n) \mapsto z_i^{\pm 1}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Soit maintenant $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie compacts. Alors f induit un homomorphisme d'anneaux $f^* : R(H) \rightarrow R(G)$ envoyant la classe d'équivalence d'une représentation (V, ρ) de H sur celle de $(V, \rho \circ \varphi)$ dans $R(G)$. On en déduit que la correspondance $G \rightsquigarrow R(G)$ est un foncteur contravariant; en particulier, deux groupes de Lie compacts isomorphes ont des anneaux des représentations isomorphes.

On se donne à présent un groupe de Lie compact connexe G et un tore maximal T de celui-ci; l'inclusion de T dans G sera notée $i: T \hookrightarrow G$. Grâce au point *iii*) de la proposition 2.6, l'homomorphisme induit $i^*: R(G) \rightarrow R(T)$ est injectif; il suit que l'anneau $R(G)$ est intègre. D'un autre côté, l'action du groupe $W(G)$ sur le tore maximal T donne lieu, par functorialité, à une action du même groupe sur $R(T)$; l'anneau des invariants de cette dernière action sera noté $R(T)^{W(G)}$. On vérifie sans difficulté que $i^*(R(G))$ est un sous-anneau de $R(T)^{W(G)}$.

Faisons une petite pause à cet endroit, le temps de calculer un important anneau des représentations et de démontrer aussi une intéressante proposition de M.F. Atiyah.

Proposition 2.8 *Pour le groupe unitaire $U(n)$, on a :*

$$R(U(n)) = \mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^{\pm 1}],$$

où λ_i est la i -ième fonction symétrique élémentaire en les variables $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Preuve $T(n) = \{\text{Diag}(z_1, \dots, z_n); z_i \in \mathbb{S}^1\}$ est un tore maximal de $U(n)$ et le groupe de Weyl $W(U(n)) = \Sigma_n$ agit sur les éléments de $T(n)$ en permutant les indices des z_i . On en déduit que $R(T(n)) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ et que l'action de Σ_n sur cet anneau s'effectue aussi par permutation des indices des α_j . Les fonctions symétriques élémentaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se trouvent dans $R(T(n))^{\Sigma_n}$ et sont algébriquement indépendantes ([Huse, page 177]). Soit $p(\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1})$ un élément de $R(T(n))$; en "chassant" les dénominateurs, on peut écrire

$$p(\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}) = \lambda_n^k \cdot q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un (vrai) polynôme en les variables $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Modulo le théorème fondamental des fonctions symétriques, on voit ainsi que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^{\pm 1}$ forment un système de générateurs de l'anneau $R(T(n))^{\Sigma_n}$. Mais tous ces éléments sont aussi dans l'image de l'homomorphisme $i^*: R(U(n)) \rightarrow R(T(n))$, car λ_i est la restriction à $T(n)$ de la i -ième puissance extérieure de la représentation standard (sur \mathbb{C}^n) du groupe $U(n)$; de plus, λ_n^{-1} est la contragédiente de λ_n . Et on peut conclure. ■

Proposition 2.9 (Atiyah) *Soient G un groupe de Lie compact et H un sous-groupe fermé de G . La restriction $R(G) \rightarrow R(H)$ munit $R(H)$ d'une structure de $R(G)$ -module de type fini.*

Preuve Voir [Seg, Proposition 3.2]. ■

Corollaire 2.2 *Soit G un groupe de Lie compact connexe, alors $R(G)$ est un anneau intègre et de génération finie; sa dimension de Krull est égale à $\text{rang}(G) + 1$.*

Preuve D'après le théorème 2.1, le groupe G est un sous-groupe fermé d'un groupe unitaire $U(N)$; on peut alors dire que la restriction $R(U(N)) \rightarrow R(G)$ munit $R(G)$ d'une structure de $R(U(N))$ -module de génération finie. Mais l'anneau $R(U(N))$ est de génération finie. Grâce aux propositions 2.9 et 2.2, l'extension d'anneaux $i^*(R(G)) \subset R(T)$ est entière. L'injectivité de i^* ainsi que la proposition 2.4 nous permettent de conclure que $\dim(R(G)) = \dim(i^*(R(G))) = \dim(R(T))$; il ne reste plus qu'à observer que $\dim(R(T)) = \text{rang}(G) + 1$ (car $R(T)$ est un anneau de polyômes de Laurent à $\text{rang}(G)$ variables). ■

Pour le calcul et l'étude des anneaux de représentations de groupes de Lie compacts connexes, le meilleur outil est sans aucun doute le remarquable théorème suivant, dû à H. Weyl:

Théorème 2.3 (cf [Ad1, Theorem 6.20]) *Soient G un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal de G . L'image de l'homomorphisme $i^* : R(G) \rightarrow R(T)$ coïncide avec l'anneau des invariants $R(T)^{W(G)}$. En d'autres termes, l'anneau des représentations $R(G)$ s'identifie à l'anneau des invariants pour l'action du groupe de Weyl $W(G)$ sur $R(T)$.*

Nous allons terminer cette section par une justification de l'intérêt des anneaux de représentations en topologie algébrique. Le lecteur aura sans doute remarqué la grande similitude entre la définition des anneaux de représentations et celle des anneaux de K -théorie topologique. M.F. Atiyah a donné un sens précis à cette observation en montrant que, pour un groupe de Lie compact G , la K -théorie (représentable) de son espace classifiant BG peut être calculée à partir de son anneau des représentations $R(G)$. Notons, avant de rappeler la construction d'Atiyah, que la définition 1.1 est valable pour l'espace BG ; en effet, le point ii) du théorème 1.5 nous garantit que cet espace a le type d'homotopie d'un CW -complexe de type fini. Ceci étant, le lien annoncé entre les foncteurs $R(-)$ et $K(-)$ est fourni par la flèche $\alpha : R(G) \rightarrow K(BG)$ définie comme suit: si $\rho : G \rightarrow U(n)$ est une représentation matricielle unitaire de G , α envoie la classe d'équivalence de ρ sur la classe d'homotopie (libre) de la composée

$$BG \xrightarrow{B\rho} BU(n) \subset \{n\} \times BU(n) \hookrightarrow \mathbb{Z} \times BU.$$

On vérifie que l'application α est bien définie et un homomorphisme d'anneaux; on l'appelle *homomorphisme α d'Atiyah*. On vérifie aussi qu'elle envoie l'idéal d'augmentation $I(G)$ dans l'idéal $\tilde{K}(BG)$ de $K(BG)$. Le résultat crucial s'énonce comme suit:

Théorème 2.4 (voir [At-Se], [At-Hi, §4] et aussi [B-M1]) *Soit G est un groupe de Lie compact.*

1. L'anneau $K(BG)$ est complet pour la topologie $\hat{K}(BG)$ -adique. Par conséquent, si $\hat{R}(G)$ désigne la complétion $I(G)$ -adique de $R(G)$ et $j : R(G) \rightarrow \hat{R}(G)$ l'application canonique, il existe un homomorphisme continu

$$\hat{\alpha} : \hat{R}(G) \rightarrow K(BG)$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{R}(G) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & K(BG) \\ j \searrow & & \nearrow \alpha \\ & R(G) & \end{array}$$

2. L'homomorphisme $\hat{\alpha} : \hat{R}(G) \rightarrow K(BG)$ du point 1) est un isomorphisme d'anneaux topologiques.
3. On suppose que le groupe G est connexe et T est un tore maximal de G .
- Les morphismes j et α du point 1) sont injectifs; $R(G)$ s'identifie donc à un sous-anneau dense de $K(BG)$.
 - Le groupe de Weyl $W(G)$ agit aussi sur l'anneau $K(BT)$ et on a

$$K(BG) \cong K(BT)^{W(G)}.$$

Remarque Si T^n est un tore et si l'on identifie $R(T) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ à un sous-anneau de $K(BT)$, alors ce dernier est l'anneau des séries formelles

$$K(BT) = \hat{R}(T) = \mathbb{Z}[[\gamma_1, \dots, \gamma_n]],$$

avec $\gamma_i = \alpha_i - 1$ pour $i = 1, \dots, n$ (voir [At-Hi, §4]).

2.3 Les λ -anneaux

Introduisons d'abord les deux familles de polynômes universels qui interviennent dans la définition des λ -anneaux. Soient n, m deux entiers positifs; on choisit des entiers q, r vérifiant $q \geq n \cdot m, r \geq n$ et aussi des indéterminées $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$. Pour $1 \leq i \leq q$ (respectivement $1 \leq j \leq r$), la i -ième (respectivement j -ième) fonction symétrique élémentaire en les ξ_k (respectivement η_l) sera noté s_i (respectivement σ_j). On désigne par $P_n(s_1, \dots, s_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ le coefficient de t^n dans le produit

$$\prod_{i,j} (1 + \xi_i \eta_j t),$$

et par $P_{n,m}(s_1, s_2, \dots, s_{nm})$ le coefficient de t^n dans le produit

$$\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq q} (1 + \xi_{i_1} \dots \xi_{i_m} t).$$

Le théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques assure que P_n et $P_{n,m}$ sont des polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} en les variables $s_1, \dots, s_n; \sigma_1, \dots, \sigma_n$ et s_1, s_2, \dots, s_{nm} respectivement; les inégalités $q \geq n \cdot m, r \geq n$ impliquent que ces polynômes sont indépendants de q et de r . Notons que P_n et $P_{n,m}$ peuvent être évalués dans n'importe quel anneau commutatif avec unité; c'est pour cette raison qu'ils sont appelés *universels*.

Soit R un anneau commutatif avec unité. On dira que R est un λ -anneau s'il est muni d'une suite d'applications $\{\lambda^n : R \rightarrow R\}_{n \geq 0}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

- i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x \quad \forall x \in R$;
- ii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k(x) \cdot \lambda^{n-k}(y) \quad \forall x, y \in R, \forall n \geq 0$;
- iii) $\lambda^n(1) = 0, \quad \forall n \geq 2$;
- iv) $\lambda^n(x \cdot y) = P_n(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^n(y)) \quad \forall x, y \in R, \forall n \geq 0$;
- v) $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{n \cdot m}(x)) \quad \forall x \in R, \forall n, m \geq 0$.

où P_n et $P_{n,m}$ sont les polynômes universels définis ci-dessus.

Les applications λ^n s'appellent λ -opérations et pour tout $x \in R$, on notera

$$\lambda_t(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n(x) t^n \in R[[t]]$$

Les propriétés ii) et iii) s'écrivent alors respectivement

$$\lambda_t(x+y) = \lambda_t(x) \cdot \lambda_t(y), \quad \forall x, y \in R \quad \text{et} \quad \lambda_t(1) = 1 + t.$$

Remarque Nos λ -anneaux sont les "special λ -rings" de Atiyah et Tall (cf [At-Ta]). Ces auteurs utilisent le terme " λ -ring" lorsque les λ -opérations satisfont seulement les axiomes i) et ii); Grothendieck parle, dans ce cas, de "pré- λ -anneau". L'anneau de Burnside d'un groupe fini et non cyclique est un exemple important de "pré- λ -anneau" ne satisfaisant pas les axiomes iv) et v) (voir [Sieb, page 232]).

Définition 2.2 i) Soit n un entier positif; on dira que $x \in R$ est de λ -dimension n , et on écrira $\lambda\text{-dim}(x) = n$, lorsque $\lambda_t(x)$ est un polynôme de degré n en t . L'ensemble des éléments de λ -dimension n de R sera noté $R(n)$.

ii) Le λ -anneau R est de λ -dimension finie si tout élément de R peut s'écrire comme différence de deux éléments de λ -dimension finie.

Définition 2.3 Si R et S sont deux λ -anneaux, un λ -morphisme est un homomorphisme d'anneaux $f : R \rightarrow S$ qui vérifie la relation:

$$f(\lambda^n(x)) = \lambda^n(f(x)), \quad \forall x \in R \quad \forall n \geq 0.$$

Si f est aussi bijective, on dira que c'est un λ -isomorphisme. L'ensemble des λ -morphisms entre les λ -anneaux R et S sera noté $\text{Hom}_\lambda(R, S)$; si cet ensemble contient un λ -isomorphisme, on dira que R et S sont λ -isomorphes et on notera $R \stackrel{\lambda}{\cong} S$. Les λ -isomorphismes de $\text{Hom}_\lambda(R, R)$ forment le groupe $\text{Aut}_\lambda(R)$ des λ -automorphismes de R .

Exemples

1. Sur $R = \mathbb{Z}$, il y a une unique λ -structure; celle-ci est complètement déterminée par la formule $\lambda_t(1) = 1 + t$.
2. Soit G un groupe de Lie compact connexe. Si $[(V, \rho)]$ est la classe d'équivalence d'une représentation complexe de G et k un entier positif, on pose

$$\lambda^k([(V, \rho)]) = [(\wedge^k V, \wedge^k \rho)].$$

On étend les applications λ^k à $R(G)$ à l'aide d'une propriété bien connue des puissances extérieures: si V_1 et V_2 sont des espaces vectoriels complexes de dimension finie, alors on a un isomorphisme naturel

$$\wedge^k(V_1 \oplus V_2) \cong \bigoplus_{i=0}^k \wedge^i V_1 \otimes \wedge^{k-i} V_2.$$

Il suit immédiatement que les axiomes *i*), *ii*) et *iii*) de la définition sont satisfaits. Pour la vérification des autres axiomes, nous allons tout d'abord nous restreindre au cas d'un tore T^n de dimension n . On sait alors que $R(T^n) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ avec

$$\lambda_t(\alpha_i^{\pm 1}) = 1 + \alpha_i^{\pm 1} \cdot t \quad i = 1, \dots, n,$$

car les $\alpha_i^{\pm 1}$ sont des représentations de dimension 1 de T^n ; le même argument implique que tout monôme en les $\alpha_i^{\pm 1}$ est de λ -dimension 1. Ainsi tout élément de $R(T^n)$ s'écrit de façon unique comme la différence de deux sommes d'éléments de λ -dimension 1; il ne reste plus qu'à reprendre la définition des polynômes universels P_n et $P_{n,m}$ pour se convaincre que les axiomes *iv*) et *v*) sont vérifiés. Ceci étant, on va maintenant supposer que T^n est un tore maximal de G . L'homomorphisme $i^* : R(G) \rightarrow R(T^n)$, induit par l'inclusion de T^n dans G , commute avec les λ -opérations; il est aussi injectif. Ces deux arguments permettent de conclure que $R(G)$, muni des applications induites par les puissances extérieures des représentations, est un λ -anneau qui est de

λ -dimension finie. Plus généralement, on montre (de la même manière, mais en utilisant par exemple les sous-groupes de Cartan et les résultats du §1 de [Seg]) que l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact (i.e pas nécessairement connexe) est un λ -anneau. Notons enfin que la correspondance $G \rightsquigarrow R(G)$ est en réalité un foncteur contravariant de la catégorie des groupes de Lie compacts dans celle des λ -anneaux de λ -dimension finie.

3. Si X est un CW -complexe fini, les puissances extérieures des fibrés vectoriels sur X induisent des applications λ^n définissant une structure de λ -anneau sur $K(X)$. Pour le montrer, on procède comme à l'exemple 2, mais en utilisant cette fois-ci le "Splitting principle" topologique (cf [Kar, Theorem 2.15 (page 193)]).
4. Soit G un groupe de Lie compact. La K -théorie topologique de son espace classifiant BG est aussi un λ -anneau. On peut exploiter la structure d'anneau commutatif (dans la catégorie homotopique) de l'espace $\mathbb{Z} \times BU$ pour définir cette λ -structure; mais nous procéderons autrement. Il existe une suite croissante de CW -complexes finis $* \subset B^1 \subset \dots \subset B^n \subset \dots$ avec $BG = \bigcup_{n \geq 0} B^n$. D'après [B-M2, Theorem 3], on a:

$$K(BG) = \varinjlim K(B^n).$$

Il suffit maintenant d'invoquer l'exemple 3) et d'observer que la limite d'un système projectif de λ -anneaux est canoniquement munie d'une structure de λ -anneau.

A cause des axiomes *iv*) et *v*) ci-dessus, les λ -opérations ne se prêtent pas bien aux calculs; ce n'est (heureusement) pas le cas de la famille de λ -applications que nous allons maintenant introduire. Si R est un λ -anneau, les opérations d'Adams $\Psi^k : R \rightarrow R$ ($k \geq 1$) sont définies par la formule:

$$\sum_{k \geq 1} \Psi^k(x) t^k = -t \cdot \frac{d}{dt} [\log \lambda_{-t}(x)] \quad \forall x \in R.$$

On vérifie alors (cf par exemple [At-Ta, §I.5]) que:

- $\Psi^k(1) = 1 \quad \forall k \geq 1$;
- $\Psi^1(x) = x \quad \forall x \in R$;
- Les Ψ^k sont des λ -morphisms;
- $\Psi^k \circ \Psi^l = \Psi^{k+l} \quad \forall k, l \geq 0$;
- Pour tout $x \in R$ et pour tout nombre premier p , on a $\Psi^p(x) - x^p \in pR$.

Les deux prochains lemmes sont sûrement bien connus, nous les rappelons à cause du rôle qu'ils joueront dans le chapitre 4.

Lemme 2.1 Soit R un λ -anneau; on suppose que R est sans torsion. Pour tout $x \in R \setminus \{0\}$, on a

$$\lambda - \dim(x) = 1 \iff \Psi^k(x) = x^k \quad \forall k \geq 1$$

Preuve

\Rightarrow : $\lambda - \dim(x) = 1$ signifie que $\lambda_t(x) = 1 + x \cdot t$. On calcule alors:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \Psi^k(x) \cdot t^k &= -t \cdot \frac{d}{dt} [\log \lambda_{-t}(x)] \\ &= -t \cdot \frac{-x}{1 - x \cdot t} \\ &= x \cdot t + x^2 \cdot t^2 + \dots \end{aligned}$$

\Leftarrow : Partant de l'hypothèse $\Psi^k(x) = x^k$, pour tout $k \geq 1$, et à l'aide de la formule de Newton

$$(-1)^{k+1} k \cdot \lambda^k(x) = \Psi^k(x) - \lambda^1(x) \cdot \Psi^{k-1}(x) + \dots + (-1)^{k-1} \lambda^{k-1}(x) \cdot x \quad \forall k \geq 0,$$

on raisonne par induction pour avoir $\lambda_t(x) = 1 + x \cdot t$. ■

Lemme 2.2 Soit R un λ -anneau; on suppose que R n'a pas de torsion et on rappelle que $R(1) = \{x \in R \text{ tel que } \lambda - \dim(x) = 1\}$.

1. $R(1)$ est une partie multiplicative de R ; c'est-à-dire

- $0 \notin R(1)$, $1 \in R(1)$;
- $\forall x, y \in R(1)$, $x \cdot y \in R(1)$.

2. Si $x \in R$ est de λ -dimension $n < \infty$, alors $\lambda^n(x) \in R(1)$.

Preuve

1. C'est une conséquence des définitions et du lemme 2.1
2. Il s'agit de montrer que

$$\lambda^k(\lambda^n(x)) = \begin{cases} \lambda^n(x) & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \lambda^k(\lambda^n(x)) &= P_{k,n}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{kn}(x)) \\ &= P_{k,n}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x), 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

où les $P_{k,n}(s_1, \dots, s_{kn})$ sont des polynômes universels déterminés par l'identité:

$$(*) \quad \sum_{k \geq 0} P_{k,n}(s_1, \dots, s_{kn}) t^k = \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} (1 + \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} t),$$

avec $m \geq kn$ et où s_i est la i -ème fonction symétrique élémentaire en les variables ξ_1, \dots, ξ_{kn} . En posant $\xi_j = 0$ pour tous les $j > n$ dans l'identité (*), on trouve qu'un facteur du membre de droite de celle-ci diffère de 1 si et seulement si $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n$. Cette condition n'est vérifiée que dans le cas $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_n = n$. On en déduit que:

$$\sum_{k \geq 0} P_{k,n}(s_1, \dots, s_n, 0, \dots, 0) t^k = 1 + u_1 \cdots u_n t = 1 + s_n t,$$

c'est-à-dire

$$P_{k,n}(s_1, \dots, s_n, 0, \dots, 0) = \begin{cases} s_n & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2; \end{cases}$$

et on a achevé la preuve de l'assertion. ■

Remarque Le deuxième point de ce lemme peut aussi se démontrer à partir du "Splitting Principle" algébrique de [At-Ta, §I.6]; c'est ce qui est d'ailleurs fait dans [Knu].

Pour les anneaux des représentations des groupes de Lie compacts, on dispose d'une description très pratique des opérations d'Adams. Elle se présente comme suit:

Proposition 2.10 Soient G un groupe de Lie compact, x un élément de $R(G)$ et k un entier positif. Si l'on regarde x et $\Psi^k(x)$ comme des caractères virtuels de G , alors

$$\forall g \in G, \quad [\Psi^k(x)](g) = x(g^k).$$

Preuve Voir [Br-tD, Proposition 7.4 (page 105)]. ■

Corollaire 2.5 Soient G un groupe de Lie compact connexe de rang n et k un entier positif non nul.

1. L'opération d'Adams $\Psi^k : R(G) \longrightarrow R(G)$ est injective.
2. Si $\text{Frac}(G)$ désigne le corps des fractions de l'anneau $R(G)$ et $\text{Frac}_k(G)$ celui du sous-anneau $\Psi^k(R(G))$ de $R(G)$, le degré de l'extension de corps $\text{Frac}_k(G) \subset \text{Frac}(G)$ est égal à k^n .

1212

Chapitre 3

Les groupes localement unitaires

Dans [Sch], H. Scheerer montre que deux groupes de Lie compacts connexes qui sont homotopiquement équivalents ont la même algèbre de Lie. Ce résultat peut servir de motivation (topologique) au problème suivant:

Soit G un groupe de Lie compact connexe. Etudier l'ensemble $\Lambda(G)$ des classes d'isomorphie des groupes de Lie compacts connexes ayant la même algèbre de Lie que G .

P. Baum a examiné la question dans [Baum]; il y montre que l'ensemble $\Lambda(G)$ est toujours fini et explore, pour quelques groupes unitaires, les propriétés de cet ensemble. Ce problème est intervenu tout récemment dans les travaux de D. Notbohm et L. Smith sur les genres topologiques des espaces classifiants. Dans ce cadre et pour les groupes unitaires, ces deux auteurs ont donné une classification des éléments de $\Lambda(G)$ à l'aide de certains des invariants introduits aux chapitres 1 et 2 (voir [NS2, Theorem 4.5]). Dans ce chapitre, nous utiliserons la théorie des λ -anneaux pour donner une nouvelle preuve de leur classification; la différence essentielle avec la preuve de Notbohm-Smith, c'est que notre preuve ne fait pas appel au théorème de W. Plesken sur les représentations intégrales des groupes symétriques.

Un groupe de Lie compact connexe est dit *localement unitaire* s'il a la même algèbre de Lie qu'un groupe $U(n)$ ($n \geq 1$). Comme exemples, nous pouvons citer les revêtements et les quotients finis des groupes $U(n)$ ($n \geq 1$); les anneaux de représentations de ces groupes sont examinés dans les deux premières sections de ce chapitre. L'information obtenue nous permet alors de prouver le théorème de Notbohm-Smith pour les revêtements finis des groupes $U(n)$. Le cas général est étudié en détail dans la dernière section. Jusqu'à la fin de ce chapitre, n désignera un entier positif supérieur ou égal à 2.

3.1 Anneaux des représentations et revêtements

Soit $p : G \rightarrow H$ un homomorphisme surjectif de groupes de Lie compacts connexes. On dira que c'est un *revêtement* (de groupes de Lie) si $\ker(p)$ est un sous-groupe

fini (et donc central) de G . Dans une telle situation, l'homomorphisme induit $p^* : R(H) \rightarrow R(G)$ est injectif et permet d'identifier $R(H)$ à un sous- λ -anneau de $R(G)$. Pour décrire ce sous- λ -anneau, nous disposons de l'extension suivante de [Ad1, §3.68 et suivants]:

Proposition 3.1 *Si $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est un caractère virtuel de G et s'il existe une application $\kappa : H \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\chi = \kappa \circ p$, alors κ est un caractère virtuel de H . Autrement dit, pour $\chi \in R(G)$, on a l'équivalence:*

$$\chi \in \text{Im}(p^*) \iff \chi(gz) = \chi(g) \quad \forall g \in G, \forall z \in \ker(p).$$

Preuve On peut supposer que $\ker(p) \neq \{e\}$. On considère, dans un premier temps, le cas où $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est le caractère d'une représentation irréductible (V, ρ) de G et on fixe $z \in \ker(p) \setminus \{e\}$. D'après le lemme de Schur, $\rho(z) = \zeta^k \cdot \text{Id}_V$ avec $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{m})$, m un entier supérieur à 1 et $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Des égalités

$$\zeta^k \cdot \chi(e) = \chi(z) = \kappa(p(z)) = \kappa(e) = \kappa(p(e)) = \chi(e),$$

on déduit que $\rho(z) = \text{Id}_V$ pour tout $z \in \ker(p)$. Et cela nous permet de conclure que ρ se factorise en

$$\rho : G \xrightarrow{p} H \xrightarrow{\bar{\rho}} GL(V)$$

où $\bar{\rho}$ est une représentation de H ayant κ comme caractère.

Supposons maintenant que $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est un élément quelconque de $R(G)$; on peut alors écrire $\chi = \sum_{\text{finie}} m_\alpha \cdot \chi_\alpha$ où, pour tout α , χ_α est un caractère irréductible et $m_\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Soient $g \in G$ et $z \in \ker(p)$; en utilisant le lemme de Schur et l'hypothèse, on peut écrire:

$$\sum_{\text{finie}} m_\alpha \cdot \chi_\alpha(g) = \chi(g) = \chi(gz) = \sum_{\text{finie}} m_\alpha \cdot \chi_\alpha(gz) = \sum_{\text{finie}} m_\alpha \cdot \frac{\chi_\alpha(z)}{\chi_\alpha(e)} \cdot \chi_\alpha(g).$$

Les relations d'orthogonalité des caractères irréductibles de G impliquent alors:

$$\chi_\alpha(gz) = \chi_\alpha(g) \quad \forall z \in \ker(p), \forall g \in G, \forall \alpha.$$

Par la première étape, on a donc $\chi_\alpha \in \text{Im}(p^*)$ pour tout α . ■

Corollaire 3.1 *(de la preuve) Soit $p : G \rightarrow H$ un revêtement de groupes de Lie compacts connexes; grâce à l'homomorphisme induit p^* , on peut identifier $R(H)$ à un sous-anneau de $R(G)$. Si $\text{Frac}(H)$ (respectivement $\text{Frac}(G)$) désigne le corps des fractions de l'anneau $R(H)$ (respectivement $R(G)$), alors le degré de l'extension de corps $\text{Frac}(H) \subset \text{Frac}(G)$ est égal au cardinal du groupe fini $\text{Ker}(p)$.*

Preuve Le morphisme injectif $p^* \otimes \mathbb{C}$ permet de considérer $R(H) \otimes \mathbb{C}$ comme un sous-anneau de $R(G) \otimes \mathbb{C}$. On identifiera ce dernier au sous-anneau des fonctions centrales sur G que constituent les combinaisons linéaires, à coefficient dans \mathbb{C} , des

caractères irréductibles du groupe G . Grâce au lemme de Schur, le groupe fini $\text{Ker}(p)$ agit sur $R(G) \otimes \mathbb{C}$ de la façon suivante:

$$\forall z \in \text{Ker}(p), \forall x \in R(G) \otimes \mathbb{C} \quad z \cdot x : G \longrightarrow \mathbb{C}, g \longmapsto x(gz).$$

La preuve de la proposition 3.1 permet de conclure que l'anneau des invariants de cette action coïncide avec $R(H) \otimes \mathbb{C}$. On passe alors aux corps des fractions pour avoir:

$$|\text{Ker}(p)| = \text{deg}(\text{Frac}(H) \otimes \mathbb{C} \subset \text{Frac}(G) \otimes \mathbb{C}) = \text{deg}(\text{Frac}(H) \subset \text{Frac}(G)).$$

■

A titre d'exemple, nous allons utiliser la proposition 3.1 pour examiner les anneaux des représentations des quotients du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$. Pour un entier positif r fixé, $\mathbb{Z}/r = \{\zeta \cdot 1; \zeta^r = 1\}$ est l'unique sous-groupe d'ordre r du centre de $\mathbf{U}(n)$ et la projection canonique $p : \mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbf{U}(n)/(\mathbb{Z}/r)$ est un revêtement de groupes de Lie compacts connexes. Grâce à la proposition ci-dessus, on voit facilement que $R(\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r)$ s'identifie au sous- λ -anneau de $R(\mathbf{U}(n))$ engendré par les monômes $\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_n^{m_n}$ dont les exposants m_1, \dots, m_n satisfont les conditions suivantes:

$$(*) \quad \begin{cases} m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}, m_n \in \mathbb{Z} \\ m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n \equiv 0 \pmod{r}. \end{cases}$$

Ainsi $\Psi^r(R(\mathbf{U}(n))) = \mathbb{Z}[\Psi^r(\lambda_1), \dots, \Psi^r(\lambda_n^{\pm 1})]$ est un sous- λ -anneau (propre, en général) de l'anneau $R(\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r)$. D'après un résultat de Hilbert (voir le §97 de [G-Y]), le problème (*) admet un nombre fini de solutions *minimales*; celles-ci fournissent un système minimal de générateurs pour l'anneau $R(\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r)$. A défaut d'une formule générale pour ces générateurs minimaux, nous proposons (en appendice à ce chapitre) un programme Mathematica adapté d'un algorithme de G. Huet (voir [Huet]) et qui permet de trouver les solutions minimales de (*); nous verrons plus loin (cf proposition 3.8) qu'il suffit de considérer les cas où r divise n . Ce programme n'est sûrement pas optimal; il faut par exemple environ quatre heures à un MacIntosh Centris 650 pour trouver les solutions minimales pour $n = 12$ et $r = 4$. Autre problème: la connaissance de ces solutions minimales ne permet pas de résoudre la question des isomorphismes; c'est ce qui se passe pour $n = r = 6$.

3.2 Les revêtements finis du groupe $\mathbf{U}(n)$

On fixe un entier positif m et on pose $d = \text{pgcd}(m, n)$. Puisque $\pi_1(\mathbf{U}(n)) = \mathbb{Z}$ n'admet qu'un unique sous-groupe d'indice m , la théorie des revêtements nous dit qu'il existe un et un seul revêtement de groupes de Lie compacts connexes $p_m : \mathbf{U}_m(n) \longrightarrow \mathbf{U}(n)$ de noyau \mathbb{Z}/m .

Proposition 3.2 *On peut prendre $U_m(n) = \varphi_m(S^1 \times SU(n))$ où φ_m est le morphisme de groupes de Lie*

$$\varphi_m : S^1 \times SU(n) \longrightarrow S^1 \times U(n), (z, A) \mapsto (z^{\frac{1}{m}}; z^{\frac{m}{m}} \cdot A);$$

le revêtement p_m est alors la restriction à $U_m(n)$ de la projection canonique

$$pr_2 : S^1 \times U(n) \longrightarrow U(n), (z, B) \mapsto B.$$

Preuve On vérifie sans problème que le noyau de la restriction à $\varphi_m(S^1 \times SU(n))$ du morphisme pr_2 est le sous-groupe $\{(\zeta; \mathbb{1}); \zeta^m = 1\}$ de $S^1 \times U(n)$. Puisque ce noyau est isomorphe à \mathbb{Z}/m , on peut conclure en invoquant l'unicité de $U_m(n)$. ■

Remarque A l'aide de cette description du groupe $U_m(n)$, on montre facilement que le centre de ce dernier est

$$\mathcal{Z} = \{Diag(z^{\frac{1}{m}}, z^{\frac{2}{m}} \cdot \theta, \dots, z^{\frac{n}{m}} \cdot \theta); \theta, z \in S^1 \text{ avec } \theta^n = 1\} \subset S^1 \times U(n).$$

Le groupe \mathcal{Z} est abélien compact, mais il n'est pas connexe en général. En fait, il se décompose en $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^0 \times F$ avec

$$\mathcal{Z}^0 = \{Diag(z^{\frac{1}{m}}, z^{\frac{2}{m}}, \dots, z^{\frac{n}{m}}); z \in S^1\} \subset \mathcal{Z},$$

$$F = \{Diag(\theta^{-u \cdot \frac{1}{m}}, \theta^{v \cdot \frac{1}{m}}, \dots, \theta^{v \cdot \frac{1}{m}}); \theta^n = 1\} \subset \mathcal{Z};$$

u et v étant des entiers astreints à la relation $u \cdot \frac{m}{d} + v \cdot \frac{n}{d} = 1$. Le groupe \mathcal{Z}^0 est évidemment isomorphe au cercle S^1 alors que F est isomorphe à \mathbb{Z}/d . Par conséquent, le centre du groupe $U_m(n)$ est connexe si et seulement si les entiers m et n sont premiers entre eux.

Rappelons que $T = \{Diag(z_1, z_2, \dots, z_n); z_j \in S^1\}$ est le tore maximal standard de $U(n)$ et que $\tilde{T} = \{A \in T; \det(A) = 1\}$ est celui de $SU(n)$. Puisque le morphisme φ_m est un revêtement sur son image, le groupe T_m défini par

$$T_m = \varphi_m(S^1 \times \tilde{T}) = \{Diag(z_0, z_1, \dots, z_n) \in S^1 \times U(n); \prod_{j=1}^n z_j = z_0^m\}$$

est un tore maximal du groupe $U_m(n)$. L'application p_m envoie T_m sur T dans $U(n)$ et induit, au niveau des anneaux de représentations, un homomorphisme injectif

$$(p_m|_{T_m})^* : R(T) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] \hookrightarrow R(T_m) = \mathbb{Z}[\gamma_0^{\pm 1}, \dots, \gamma_n^{\pm 1}] / \left(\prod_{j=1}^n \gamma_j - \gamma_0^m \right),$$

associant γ_j à α_j pour $j = 1, 2, \dots, n$. Si l'on identifie $R(T)$ à son image par $(p_m|_{T_m})^*$, on peut alors écrire

$$R(T_m) \cong \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}, \tau_m] / (\tau_m^m = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n).$$

Par naturalité, le groupe de Weyl $W(\mathbf{U}_m(n)) \cong \Sigma_n$ agit sur $R(T_m)$ en permutant les indices des α_j . Il est maintenant aisé de voir que l'anneau des invariants de cette action est

$$R(\mathbf{U}_m(n)) = R(T_m)^{\Sigma_n} \cong \mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n^{1/m}, \lambda_n^{-1/m}],$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les variables $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\lambda_n^{1/m} = \tau_m$. Puisque cette description fournit aussi la λ -structure de $R(\mathbf{U}_m(n))$, on a donc la preuve de la

Proposition 3.3 *Soit m un entier positif; l'anneau des représentations du revêtement à m feuilles $\mathbf{U}_m(n)$ du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$ est*

$$\mathbf{R}_m = \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \tau_m^{\pm 1}].$$

Sa λ -structure est complètement déterminée par les deux formules suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda_t(\lambda_1) &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j t^j + \tau_m^m t^n, \\ \lambda_t(\tau_m^{\pm 1}) &= 1 + \tau_m^{\pm 1} t. \end{aligned}$$

Cette description de l'anneau \mathbf{R}_m appelle au moins deux commentaires:

1. Si l'on prend $m = n$, on obtient

$$\mathbf{R}_n = R(\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)) = \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \tau_n^{\pm 1}] \quad \text{avec} \quad \tau_n^n = \lambda^n(\lambda_1).$$

D'habitude, cet anneau est plutôt présenté par

$$R(\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)) = R(\mathbb{S}^1) \otimes R(\mathbf{SU}(n)) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{Z}[\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}],$$

où Λ_1 est la représentation standard de $\mathbf{SU}(n)$ et $\Lambda_j = \lambda^j(\Lambda_1)$. Le passage de cette présentation à la nôtre s'effectue en envoyant t sur τ_n et Λ_j sur $\tau_n^{-j} \cdot \lambda_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n-1$.

2. En posant $\tilde{m} = (mn)/d$, on peut identifier, à l'aide du morphisme induit par le revêtement $\varphi_m : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \rightarrow \mathbf{U}_m(n)$, $\mathbf{R}_m = R(\mathbf{U}_m(n))$ au sous- λ -anneau de $\mathbf{R}_{\tilde{m}}$ engendré par les éléments $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \tau_{\tilde{m}}^{\pm \frac{\tilde{m}}{d}}$. Grâce à la proposition 3.2, le groupe $\mathbf{U}_{\tilde{m}}(n)$ est isomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)$; cela implique que les anneaux $\mathbf{R}_{\tilde{m}}$ et $\mathbf{R}_n = R(\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n))$ sont λ -isomorphes.

Remarque L'inclusion du groupe $\mathbf{U}_m(n)$ dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)$ fournit une suite exacte courte de groupes de Lie

$$1 \longrightarrow \mathbf{U}_m(n) \xrightarrow{i_m} \mathbb{S}^1 \times \mathbf{U}(n) \xrightarrow{j_m} \mathbb{S}^1 \longrightarrow 1,$$

avec $j_m : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1; (z; M) \longmapsto z^{-m} \cdot \det(M)$.

Cette suite exacte induit une fibration

$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbf{BU}_m(n) \xrightarrow{\text{Bim}} \mathbf{BS}^1 \times \mathbf{BU}(n).$$

L'examen de la suite de Gysin (en cohomologie entière) de cette fibration nous permet de conclure que

$$H^*(\mathbf{BU}_m(n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x; c_1, \dots, c_n] / (c_1 - m x),$$

c_1, \dots, c_n étant les classes de Chern universelles et x un générateur de $H^*(\mathbf{BS}^1; \mathbb{Z})$.

La proposition qui va suivre sera très utile pour le reste du présent chapitre; elle nous donne la liste de tous les éléments de λ -dimension n dans l'anneau \mathbf{R}_m des représentations du groupe $\mathbf{U}_m(n)$. Grâce à la proposition 3.1, il aurait suffi de le montrer pour le groupe $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n)$ puisque celui-ci est "universel" pour tous les autres revêtements finis de $\mathbf{U}(n)$. Notons aussi que c'est à ce stade qu'intervient le groupe de Weyl Σ_n .

Proposition 3.4 Soit x un élément de λ -dimension n dans l'anneau \mathbf{R}_m , alors on a

i) ou bien $x = \tau_m^l \cdot \Psi^k(\lambda_1)$,

ii) ou bien $x = \tau_m^l \cdot \Psi^k(\lambda_{n-1})$,

iii) ou encore $x = \sum_{j=1}^n \tau_m^{l_j}$;

avec $l, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Preuve Grâce au λ -plongement

$$\mathbf{R}_m \hookrightarrow R(T_m) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}, (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n)^{1/m}],$$

on peut écrire $x = \tau_m^l \cdot \sum_{j=1}^n a_j$ avec $l \in \mathbb{Z}$ et où les a_j sont des monômes en les α_j . Si tous les a_j sont invariants sous l'action du groupe symétrique Σ_n , alors $x = \sum_{j=1}^n \tau_m^{l_j}$ avec $l_j \in \mathbb{Z}$ et on est dans le cas iii)

Sinon, il existe un monôme $a_i = \alpha_1^{i_1} \cdot \alpha_2^{i_2} \cdots \alpha_n^{i_n}$ ($i_j \in \mathbb{N}$) qui n'est pas Σ_n -invariant. Puisque $\lambda\text{-dim}(x) = n$, le cardinal de l'orbite de a_i sous l'action de Σ_n est inférieur ou égal à n . En utilisant au besoin une permutation adéquate, on peut supposer que a_i est de la forme

$$a_i = (\alpha_1 \cdots \alpha_{k_1})^{s_1} \cdot (\alpha_{k_1+1} \cdots \alpha_{k_1+k_2})^{s_2} \cdots (\alpha_{k_1+\dots+k_{r-1}+1} \cdots \alpha_n)^{s_r}$$

où

- $r \geq 2$ (car a_i n'est pas Σ_n -invariant par hypothèse);

- $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N} \quad s_p \neq s_q \quad \forall p \neq q;$
- $k_p \geq 1 \quad \forall p, \quad k_1 + \dots + k_r = n$ et $n - k_1 \geq k_1.$

On voit alors que le stabilisateur de a_i , sous l'action de Σ_n , est le sous-groupe $\Sigma_{k_1} \times \dots \times \Sigma_{k_r}$; et on en déduit que le cardinal de l'orbite de a_i est le coefficient multinomial

$$N = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Puisque $N \leq n$, on a forcément un indice j avec $k_j = 1$. Sinon, la permutation identité et les transpositions $(1 \ j)$ et $(2 \ j)$, pour $j = k_1 + 1, \dots, n$, fourniraient $1 + 2 \cdot (n - k_1)$ monômes distincts de l'orbite de a_i ; mais ceci est absurde car

$$1 + 2 \cdot (n - k_1) \geq 1 + (n - k_1) + k_1 = 1 + n.$$

Dans la décomposition $N = n \cdot \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_r!}$, le facteur $\tilde{N} = \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_r!}$ est un entier positif puisque $k_1 + \dots + k_r - k_j = n - 1$. Mieux, \tilde{N} est égal à 1 si et seulement s'il existe un autre indice l avec $k_l = n - 1$; il suit alors que $r = 2$, $N = n$ et qu'on peut prendre $a_i = \alpha_1^{s_1} \cdot (\alpha_2 \cdots \alpha_n)^{s_2}$ avec $s_1 \neq s_2$. Si $s_1 > s_2$, on obtient $x = \tau_m^{l+m \cdot s_2} \cdot \Psi^{(s_1 - s_2)}(\lambda_1)$ et sinon x est égal à $\tau_m^{l+m \cdot s_1} \cdot \Psi^{(s_2 - s_1)}(\lambda_{n-1})$. ■

Notons aussi la conséquence suivante de la preuve ci-dessus:

Corollaire 3.2 *Tout élément de λ -dimension strictement inférieure à n dans \mathbf{R}_m est une somme de puissances de τ_m . En particulier, le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_m(1)$ des éléments de λ -dimension 1 est cyclique infini et engendré par τ_m .*

Si on les regarde comme groupes au-dessus de $\mathbf{U}(n)$, les $\mathbf{U}_m(n)$ sont deux à deux distincts. Rien n'empêche, par contre, d'avoir $\mathbf{U}_m(n) \cong \mathbf{U}_{m'}(n)$ (isomorphisme "abstrait" de groupes de Lie) pour des entiers m, m' différents; c'est ce qui se passe par exemple lorsque m et m' sont tous deux multiples de n . La question de la détermination des classes d'isomorphisme des groupes $\mathbf{U}_m(n)$ se règle comme suit:

Théorème 3.3 *Soient m, m' des entiers positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) $BU_m(n) \simeq BU_{m'}(n)$
- ii) $K(BU_m(n)) \stackrel{\lambda}{\cong} K(BU_{m'}(n))$
- iii) $R(\mathbf{U}_m(n)) \stackrel{\lambda}{\cong} R(\mathbf{U}_{m'}(n))$
- iv) $m \equiv \pm m' \pmod{n}$
- v) $\mathbf{U}_m(n) \cong \mathbf{U}_{m'}(n).$

Preuve

i) \Rightarrow ii) : Clair.

ii) \Rightarrow iii) : C'est une conséquence de [AM1, corollary 1.12].

iii) \Rightarrow iv) : Soit $\varphi : \mathbf{R}_m \longrightarrow \mathbf{R}_{m'}$ un λ -isomorphisme. A cause de la proposition 3.4, on doit avoir

$$\varphi(\tau_m) = \tau_{m'}^\varepsilon \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda_1) = \tau_{m'}^l \cdot \Psi^k(\lambda_i),$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $i \in \{1, n-1\}$. Cela implique que $\mathbf{R}_{m'} = \varphi(\mathbf{R}_m)$ est engendré par $\Psi^k(\mathbf{R}_{m'})$ et $\tau_{m'}$. Et puisque $\Psi^k(\tau_{m'}) = \tau_{m'}^k$ se trouve dans $\Psi^k(\mathbf{R}_{m'})$, on en déduit que le degré de l'extension de corps

$$\text{Frac}(\Psi^k(\mathbf{R}_{m'})) \subset \text{Frac}(\varphi(\mathbf{R}_m)) = \text{Frac}(\mathbf{R}_{m'})$$

est égal à k . Mais ce degré a été aussi calculé dans le corollaire 2.5 et vaut k^n ; comme $n \geq 2$, ces deux degrés ne sont égaux que pour $k = 1$.

On calcule maintenant, d'un côté

$$\lambda^n(\varphi(\lambda_1)) = \varphi(\lambda^n(\lambda_1)) = \varphi(\tau_m^n) = \tau_{m'}^{\varepsilon \cdot n},$$

et de l'autre

$$\lambda^n(\varphi(\lambda_1)) = \lambda_n(\tau_{m'}^l \cdot \lambda_i) = \tau_{m'}^{nl} \cdot \lambda^n(\lambda_i) = \tau_{m'}^{n(l+i)m'}.$$

Comme $i = 1$ ou $n-1$, on peut finalement conclure que $\varepsilon n \equiv \pm m' \pmod{n}$ et c'est ce qu'il fallait démontrer.

iv) \Rightarrow v) : Nous utiliserons les notations de la proposition 3.2. L'hypothèse implique qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$ et $l \in \mathbb{Z}$ tels que $m + \varepsilon \cdot m' = l \cdot n$; d'où $d = \text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(m', n) = d'$. On en déduit que l'isomorphisme

$$F : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathbf{S}^1 \times \mathbf{SU}(n), \quad (z, A) \longmapsto (z^\varepsilon, A)$$

envoie le noyau de φ_m sur celui de $\varphi_{m'}$, ce qui signifie que F induit un isomorphisme $\bar{F} : \mathbf{U}_m(n) \longrightarrow \mathbf{U}_{m'}(n)$.

v) \Rightarrow i) : Clair. ■

3.3 Examen du cas général

Il s'agit maintenant d'étendre le théorème de la section précédente à tous les groupes localement unitaires. La méthode adoptée est très semblable à celle de ladite section; mais elle utilise des résultats, dûs à P. Baum, que nous rappelons en tout premier lieu.

Soit G un groupe de Lie compact connexe; il existe un revêtement fini

$$p : T^r \times G_0 \longrightarrow G ,$$

où G_0 est un groupe de Lie 1-connexe et T^r un tore de dimension $r = \dim(\mathcal{Z}(G))$. Le groupe $\tilde{G} = T^r \times G_0$ est unique à isomorphisme près tandis que la projection p ne l'est pas forcément. C'est pour pallier à cet inconvénient que P. Baum a introduit la notion suivante:

Définition 3.1 *Un sous-groupe spécial (K, φ) de $\tilde{G} = T^r \times G_0$ est un sous-groupe central qui peut s'écrire sous la forme*

$$(K, \varphi) = \{(\varphi(g), g); \quad g \in K\} \subset \tilde{G}$$

avec K un sous-groupe fini du centre de G_0 et $\varphi : K \longrightarrow T^r$ un homomorphisme de groupes.

A l'aide de cette notion, il peut alors démontrer le

Théorème 3.4 (*Proposition 2 et Corollaire 6 de [Baum]*)

1. Si H est un groupe de Lie compact, connexe et localement isomorphe à G , il existe un sous-groupe spécial (K, φ) de \tilde{G} tel que le groupe-quotient $\tilde{G}/(K, \varphi)$ soit isomorphe à H . On dira que $\tilde{G}/(K, \varphi)$ est une forme spéciale de H .
2. Soient (K_1, φ_1) et (K_2, φ_2) deux sous-groupes spéciaux de \tilde{G} . Alors $\tilde{G}/(K_1, \varphi_1)$ est un revêtement de (respectivement isomorphe à) $\tilde{G}/(K_2, \varphi_2)$ si et seulement s'il existe un automorphisme extérieur α de G_0 et un revêtement $\beta : T^r \longrightarrow T^r$ (respectivement un automorphisme β de T^r) tels que $\alpha(K_1) \subset K_2$ (respectivement $\alpha(K_1) = K_2$) et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & T^r \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ K_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & T^r \end{array}$$

soit commutatif.

Dans le cas qui nous intéresse, on a évidemment $G_0 = \text{SU}(n)$. Ce groupe admet, pour $n > 2$, un unique automorphisme extérieur non trivial (représenté par la conjugaison complexe $(a_{ij}) \longmapsto (\bar{a}_{ij})$) alors que tous les automorphismes de $\text{SU}(2)$ sont intérieurs. En combinant ces faits à quelques manipulations de théorie élémentaire des nombres, on arrive à la conséquence suivante du théorème 3.4:

Proposition 3.5 *i) Tout groupe localement unitaire est de la forme*

$$\text{FU}_{s,k}(n) = (\mathbb{S}^1 \times \text{SU}(n))/N_{s,k}$$

avec $s|n$, $k \in \mathbb{N}$, et

$$N_{s,k} = \{(\exp(-\frac{2\pi i}{s} k j); \exp(\frac{2\pi i}{s} j) \cdot \mathbb{1}); \quad j = 0, \dots, s-1\} .$$

- ii) Pour des entiers s, s' divisant n et pour $k, k' \in \mathbb{N}$, les groupes $\text{FU}_{s,k}(n)$ et $\text{FU}_{s',k'}(n)$ sont isomorphes si et seulement si $s = s'$ et $k' \equiv \pm k \pmod{s}$. Autrement dit, la classe d'isomorphisme d'un groupe $\text{FU}_{s,k}(n)$ est complètement déterminée par l'entier s (qui divise n) et la classe du nombre k dans l'ensemble-quotient $(\mathbb{Z}/s)/\{\pm 1\}$.
- iii) Soient s, s' des diviseurs de n et $k, k' \in \mathbb{N}$. Le groupe $\text{FU}_{s,k}(n)$ est un revêtement de $\text{FU}_{s',k'}(n)$ si et seulement si $s|s'$ et $\text{pgcd}(s, k) | \text{pgcd}(s', k')$. En particulier le "surprising result" de [Baum], c'est-à-dire des groupes qui sont revêtements l'un de l'autre sans être isomorphes, se produit chaque fois que l'on prend un diviseur s de n ainsi que deux entiers $k, k' \in \mathbb{N}$ avec $\text{pgcd}(s, k) = \text{pgcd}(s', k')$ et tels que $k \not\equiv \pm k' \pmod{s}$.

Corollaire 3.5 Si $\Lambda(\mathbf{U}(n))$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme ("abstrait") des groupes de Lie compacts connexes qui sont localement isomorphes à $\mathbf{U}(n)$, alors

$$\text{card}(\Lambda(\mathbf{U}(n))) = \sum_{s|n} \left(\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Remarque P. Baum s'est aussi intéressé à la relation transitive qui est définie sur l'ensemble $\Lambda(\mathbf{U}(n))$ de la façon suivante:

Pour $[H_1], [H_2] \in \Lambda(\mathbf{U}(n))$, $[H_1] \geq [H_2]$ si et seulement s'il existe un revêtement (fini) $p: H_1 \rightarrow H_2$.

La proposition ci-dessus dit qu'il y a un isomorphisme d'ensembles quasi-ordonnés (cf [Baum, définitions 6 et 7] pour la terminologie) entre $\Lambda(\mathbf{U}(n))$, muni de la relation définie ci-dessus, et l'ensemble $L(n) = \{(s, \alpha); s|n \text{ et } \alpha \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})/\{\pm 1\}\}$ muni de la relation

$$(s, \alpha) \geq (s', \alpha') \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} s | s' \\ \text{pgcd}(s, \alpha) | \text{pgcd}(s', \alpha') \end{cases}$$

Cette deuxième formulation devrait permettre d'écrire un programme permettant de dessiner (à la Baum) le graphe de l'ensemble quasi-ordonné $\Lambda(\mathbf{U}(n))$...

Pour établir le lien avec le thème de la section précédente, nous allons tout de suite donner les formes spéciales des revêtements du groupe $\mathbf{U}(n)$. Fixons, pour ce faire, un entier positif m et posons (comme avant) $d = \text{pgcd}(m, n)$. Choisissons ensuite $u, v \in \mathbb{Z}$ avec $u > 0$ tels que $u \cdot \frac{m}{d} + v \cdot \frac{n}{d} = 1$. La proposition 3.2 dit que nous pouvons prendre $\mathbf{U}_m(n) = (\mathbb{S}^1 \times \text{SU}(n))/E_m$ avec

$$E_m = \{(\exp(\frac{2\pi i}{n} d j); \exp(-\frac{2\pi i}{n} m j) \cdot \mathbb{1}); \quad j = 0, 1, \dots, \frac{n}{d} - 1\} \subset \mathbb{S}^1 \times \text{SU}(n).$$

A l'aide de l'automorphisme $E_m \rightarrow E_m$, $x \mapsto x^u$, on peut écrire le groupe E_m sous la forme

$$E_m = \left\{ \left(\exp\left(-\frac{2\pi i d}{n} u j\right); \exp\left(\frac{2\pi i d}{n} j\right) \cdot \mathbb{1} \right); \quad j = 0, \dots, \frac{n}{d} - 1 \right\}.$$

Il suit alors que E_m est un sous-groupe spécial de $S^1 \times \text{SU}(n)$ et que la forme spéciale promise est:

$$U_m(n) = \text{FU}_{\frac{n}{d}, u}(n).$$

Réciproquement, si s divise n et k est un entier positif et premier à s , alors

$$\text{FU}_{s,k}(n) = U_{n, \tilde{m}}(n),$$

où \tilde{m} est un entier positif vérifiant $k \cdot \tilde{m} \equiv 1 \pmod{s}$.

On vient ainsi de montrer qu'un groupe localement unitaire $\text{FU}_{s,k}(n)$ est un revêtement de $U(n)$ si et seulement si les entiers s et k sont premiers entre eux. Par ailleurs, Notbohm et Smith ([NS1, §2]) ont observé que le groupe fondamental de $\text{FU}_{s,k}(n)$ est égal à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/r$, où $r = \text{pgcd}(s, k)$. Ce dernier fait complète la preuve de la

Proposition 3.6 *Pour un groupe de Lie localement unitaire $\text{FU}_{s,k}(n)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

- i) $\text{FU}_{s,k}(n)$ est isomorphe à un revêtement de $U(n)$;
- ii) Le groupe fondamental de $\text{FU}_{s,k}(n)$ est isomorphe à \mathbb{Z} ;
- iii) les entiers s et k sont premiers entre eux.

Comme le lecteur l'a sans doute remarqué, les calculs et résultats de la section précédente ont été grandement facilités par la réalisation des groupes $U_m(n)$ comme sous-groupes de Lie de $S^1 \times U(n)$. Pour traiter de l'extension de ces résultats au cas général, nous proposons la réalisation (non optimale mais suffisante pour nos besoins) donnée comme suit

Proposition 3.7 *Soient $\text{FU}_{s,k}(n)$ un groupe localement unitaire, $r = \text{pgcd}(s, k)$ et $N = 1 + n^2 + \binom{n}{r}$. Il existe un homomorphisme injectif de groupes de Lie*

$$\varrho_{s,k} : \text{FU}_{s,k}(n) \hookrightarrow U(N).$$

Preuve Le morphisme de groupes de Lie

$$\varphi : S^1 \times \text{SU}(n) \rightarrow S^1 \times \text{SU}(n); \quad (z; A) \mapsto (z^r; A)$$

induit un revêtement $\bar{\varphi} : \mathbf{FU}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}}(n) \longrightarrow \mathbf{FU}_{s,k}(n)$. Puisque les entiers $\frac{s}{r}$ et $\frac{k}{r}$ sont premiers entre eux, il existe $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ avec $\mu > 0$ tels que $\mu \cdot \frac{k}{r} + \nu \cdot \frac{s}{r} = 1$ et le groupe de Lie $\mathbf{FU}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}}(n)$ peut être identifié à l'image de l'homomorphisme

$$q_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}} : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbf{U}(n); \quad (z; A) \longmapsto (z^{\frac{k}{r}}; z^{\frac{s}{r}} \cdot A).$$

Le noyau du revêtement $\bar{\varphi}$ est alors le groupe

$$\Gamma_{s,k} = \left\{ \left(\exp\left(-\frac{2\pi i}{r}\left(\frac{k}{r}j - \frac{s}{r}l\right)\right); \exp\left(\frac{2\pi i}{r}(\nu j + \mu l)\right) \cdot \mathbb{1} \right); \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, s-1 \\ l = 0, 1, \dots, r-1 \end{array} \right\}.$$

Grâce à la relation $\mu \cdot \frac{k}{r} + \nu \cdot \frac{s}{r} = 1$, ce dernier peut aussi s'écrire sous la forme

$$\Gamma_{s,k} = \left\{ \left(\exp\left(-\frac{2\pi i}{r}j\right); \exp\left(\frac{2\pi i}{r}l\right) \cdot \mathbb{1} \right); \quad j, l = 0, 1, \dots, r-1 \right\} \cong \mathbb{Z}/r \oplus \mathbb{Z}/r.$$

On en déduit que $\mathbf{FU}_{s,k}(n)$ est isomorphe à un sous-groupe de Lie du produit direct $\mathbb{S}^1 \times (\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r)$; il suffit donc de trouver un plongement du groupe $\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r = \mathbf{FU}_{n,r}(n)$ dans un groupe unitaire. Pour y arriver, nous allons considérer la représentation standard du groupe $\mathbf{U}(n)$ dans $V = \mathbb{C}^n$, le dual V^* de celle-ci, ainsi que son r -ième produit extérieur $\wedge^r V$. La base canonique de V sera notée $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ sera son dual dans V^* ; les vecteurs $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$) forment ainsi une base de $\wedge^r V$. La représentation $\mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbf{GL}(V \otimes V^*)$ n'est autre que la complexifiée de la représentation adjointe; donc son noyau coïncide avec le centre de $\mathbf{U}(n)$. Sous l'action de la matrice $\text{Diag}(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{U}(n)$, le vecteur $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ de $\wedge^r V$ est multiplié par le nombre complexe $z_{i_1} \cdots z_{i_r}$. Au total, le $\mathbf{U}(n)$ -espace $W = V \otimes V^* \oplus \wedge^r V$ fournit un homomorphisme

$$\varrho : \mathbf{U}(n) \longrightarrow \mathbf{U}(n^2 + \binom{n}{r})$$

de noyau $\mathbb{Z}/r = \{\theta \cdot \mathbb{1}; \theta^r = 1\} \subset \mathbf{U}(n)$. On prendra $\varrho_{s,k}$ égale à la composition

$$\mathbf{FU}_{s,k}(n) \cong \mathbf{FU}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}}(n)/\Gamma_{s,k} \hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r) \xrightarrow{\text{Id} \times \varrho} \mathbb{S}^1 \times \text{Im}(\varrho) \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbf{U}(n^2 + \binom{n}{r}),$$

où $\bar{\varrho}$ est l'isomorphisme canonique entre $\mathbf{U}(n)/\mathbb{Z}/r$ et l'image de l'application ϱ . ■

Soit $\mathbf{FU}_{s,k}(n)$ un groupe localement unitaire; posons $r = \text{pgcd}(s, k)$ et choisissons $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ avec $\mu > 0$ et $\mu \cdot \frac{k}{r} + \nu \cdot \frac{s}{r} = 1$. Dans la proposition 3.2, nous avons construit un revêtement de groupes de Lie $\varphi_\mu : \mathbf{FU}_{1,\mu}(n) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathbf{FU}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}}(n)$. L'image du tore maximal standard $T_{1,\mu}$ de $\mathbf{FU}_{1,\mu}(n)$ par la composée de ce revêtement et du revêtement $\bar{\varphi}$ construit dans la preuve ci-dessus est un tore maximal $T_{s,k}$ du groupe $\mathbf{FU}_{s,k}(n)$. Grâce à la proposition 3.7, on peut considérer $T_{s,k}$ comme un sous-groupe du tore maximal standard $T(N)$ dans le groupe unitaire $\mathbf{U}(N)$. L'inclusion

$T_{s,k} \subset T(N)$ induit un homomorphisme surjectif $R(T(N)) \rightarrow R(T_{s,k})$; ceci permet d'identifier $R(T_{s,k})$ au sous-anneau de

$$R(T_{1,\mu}) = \mathbf{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}, \tau_\mu] / (\tau_\mu^{n\mu} - \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

engendré par les monômes

$$\tau_\mu^{\pm s}, \quad \alpha_i \alpha_j^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$$

et leurs inverses.

En considérant le cas particulier $s = n$ et $k = r$, on trouve que l'anneau de représentations du tore maximal $T_{n,r}$ de $\mathbf{FU}_{n,r}(n) = \mathbf{U}(n)/\mathbf{Z}/r$ est le sous-anneau de $R(T_{1,\mu})$ engendré par les monômes

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n, \quad \alpha_i \alpha_j^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n)$$

et leurs inverses. Cela nous permet d'écrire:

$$R(T_{s,k}) = \bigoplus_{j=0}^{\frac{n}{s}\mu-1} R(T_{n,r}) \cdot \tau_\mu^{sj}.$$

L'action du groupe de Weyl Σ_n sur $R(T_{s,k})$ préserve évidemment la décomposition ci-dessus. En prenant les invariants de ladite action, on obtient une décomposition qui, combinée aux résultats du début de ce chapitre, permet le calcul des anneaux de représentations des groupes localement unitaires. Elle se résume comme suit:

Proposition 3.8 *Soit $\mathbf{FU}_{s,k}(n)$ un groupe localement unitaire. On pose $r = \text{pgcd}(s, k)$ et on choisit un entier strictement positif μ satisfaisant $\mu \frac{k}{r} \equiv 1 \pmod{\frac{s}{r}}$. Si l'on identifie $\mathbf{R}_{s,k} := R(\mathbf{FU}_{s,k}(n))$ et $\mathbf{R}_{n,r} := R(\mathbf{FU}_{n,r}(n))$ à des sous- λ -anneaux de $\mathbf{R}_{1,\mu} := R(\mathbf{FU}_{1,\mu}(n))$, alors*

$$\mathbf{R}_{s,k} = \bigoplus_{j=0}^{\frac{n}{s}\mu-1} \mathbf{R}_{n,r} \cdot \tau_\mu^{sj} \subset \mathbf{R}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}} = \bigoplus_{j=0}^{\frac{n}{s}\mu r-1} \mathbf{R}_{n,1} \cdot \tau_\mu^{\frac{k}{r}j}.$$

En particulier, $\mathbf{R}_{s,k}(1)$ est isomorphe au groupe multiplicatif engendré par $\tau_\mu^{\frac{k}{r}}$.

En invoquant aussi le corollaire 3.4, nous pouvons déduire le

Corollaire 3.6 *Soit $x \in \mathbf{R}_{s,k} \subset \mathbf{R}_{1,\mu}$ tel que $\lambda\text{-dim}(x) = n$, alors*

i) ou bien $x = \sum_{j=1}^n \tau_\mu^{s l_j}$ avec $l_1, \dots, l_n \in \mathbf{Z}$;

ii) ou bien $x = \tau_\mu^{s l} \cdot \Psi^{r k}(\lambda_i)$ avec $l \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $i \in \{1, n-1\}$.

Tout est maintenant en place pour notre preuve du

Théorème 3.7 (Notbohm & Smith) *Soient n un entier supérieur ou égal à 3, s, s' des diviseurs de n et k, k' des entiers positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

$$i) \text{FU}_{s,k}(n) \cong \text{FU}_{s',k'}(n);$$

$$ii) \text{BFU}_{s,k}(n) \simeq \text{BFU}_{s',k'}(n);$$

$$iii) K(\text{BFU}_{s,k}(n)) \stackrel{\lambda}{\cong} K(\text{BFU}_{s',k'}(n));$$

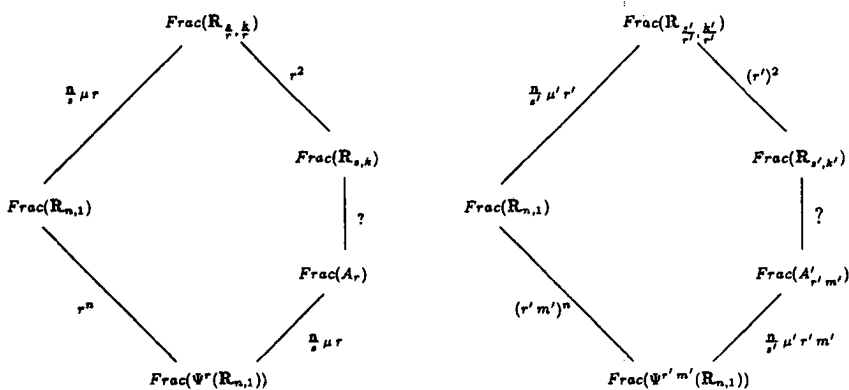
$$iv) R(\text{FU}_{s,k}(n)) \stackrel{\lambda}{\cong} R(\text{FU}_{s',k'}(n));$$

$$v) s = s' \text{ et } k \equiv \pm k' \pmod{s}.$$

Preuve Les implications $i) \implies ii) \implies iii)$ sont évidentes, la partie $iii) \implies iv)$ est une conséquence de [AM1, Corollary 1.12] et l'équivalence $i) \iff v)$ provient de la proposition 3.5. Nous aurons terminé si nous arrivons à montrer que l'assertion $iv)$ implique la $v)$. Posons $r = \text{pgcd}(s, k)$ et $r' = \text{pgcd}(s', k')$ et choisissons μ, μ' entiers positifs tels que $\mu \frac{k}{r} \equiv 1 \pmod{\frac{s}{r}}$ et $\mu' \frac{k'}{r'} \equiv 1 \pmod{\frac{s'}{r'}}$. Nous travaillerons avec la présentation des anneaux $\mathbf{R}_{s,k}$ et $\mathbf{R}_{s',k'}$ qui a été donnée dans la proposition 3.8. Soit $\varphi: \mathbf{R}_{s,k} \rightarrow \mathbf{R}_{s',k'}$ un λ -isomorphisme; celui-ci enverra $\tau_{\mu}^{\pm s}$ sur $\tau_{\mu'}^{\pm s'}$ avec $\epsilon = \pm 1$. Le corollaire 3.6 nous autorise à écrire

$$(*) \quad \varphi(\Psi^r(\lambda_1)) = \tau_{\mu'}^{s'} \cdot \Psi^{r'm'}(\lambda_i),$$

avec $i' \in \mathbb{Z}$, $m' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $i \in \{1, n-1\}$. Le sous-anneau de $\mathbf{R}_{s,k}$ (respectivement $\mathbf{R}_{s',k'}$) engendré par les éléments $\Psi^r(\lambda_1), \dots, \Psi^r(\lambda_{n-1}), \tau_{\mu}^{\pm s}$ (respectivement $\Psi^{r'm'}(\lambda_1), \dots, \Psi^{r'm'}(\lambda_{n-1}), \tau_{\mu'}^{\pm s'}$) sera noté A_r (respectivement $A_{r',m'}$). L'anneau A_r est envoyé sur $A_{r',m'}$ par l'application φ . Comme dans la section précédente, nous allons passer aux corps de fractions et consigner les degrés des différentes extensions de corps dans les diagrammes suivants:



Puisque φ est un isomorphisme d'anneaux, on aura

$$\begin{aligned} r^{n-2} &= \deg(\text{Frac}(A_r) \subset \text{Frac}(\mathbf{R}_{s,k})) \\ &= \deg(\text{Frac}(A'_{r',m'}) \subset \text{Frac}(\mathbf{R}_{s',k'})) \\ &= (r')^{n-2} \cdot (m')^{n-1}. \end{aligned}$$

En procédant de manière analogue avec φ^{-1} , on trouve un entier positif m tel que $(r')^{n-2} = r^{n-2} \cdot m^{n-1}$. Mis bout à bout, ces égalités donnent $r^{n-2} = (m m')^{n-1} \cdot r^{n-2}$; d'où $m = m' = 1$. Puisqu'on a supposé $n \geq 3$, on obtient aussi $r = r'$; cette dernière nous permet d'étendre φ en un λ -isomorphisme $\tilde{\varphi}: \mathbf{R}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}} \longrightarrow \mathbf{R}_{\frac{s'}{r'}, \frac{k'}{r'}}$ en posant:

$$\tilde{\varphi}(\tau_{\mu}^{\frac{k}{r}}) = \tau_{\mu}^{\frac{k'}{r'}}; \quad \tilde{\varphi}(\lambda_i) = \tau_{\mu'}^{\frac{k'}{r'}} \cdot \lambda_i.$$

Une première application du théorème 3.3 conduit à la congruence suivante:

$$(**) \quad \frac{n}{s} \mu r \equiv \frac{n}{s'} \mu' r' \pmod{n}.$$

La partie iv) \implies v) de la preuve dudit théorème montre alors qu'il existe un λ -isomorphisme

$$\sigma: \mathbf{R}_{1,\mu} \longrightarrow \mathbf{R}_{1,\mu'} \quad \text{tel que} \quad \sigma(\mathbf{R}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}}) = \mathbf{R}_{\frac{s'}{r'}, \frac{k'}{r'}}.$$

On passe à nouveau aux corps des fractions pour se retrouver avec les égalités:

$$\begin{aligned} \frac{s}{r} &= \deg(\mathbf{R}_{\frac{s}{r}, \frac{k}{r}} \subset \text{Frac}(\mathbf{R}_{1,\mu})) \\ &= \deg(\mathbf{R}_{\frac{s'}{r'}, \frac{k'}{r'}} \subset \text{Frac}(\mathbf{R}_{1,\mu'})) \\ &= \frac{s'}{r'}; \end{aligned}$$

et il suit que s est égal à s' , ce qui réduit la congruence (***) à

$$\mu \equiv \mu' \pmod{\frac{s}{r}}.$$

On multiplie cette dernière congruence par $\frac{k}{r} \frac{k'}{r'}$ et on chasse les dénominateurs pour enfin obtenir $k \equiv \pm k' \pmod{s}$. ■

Remarque C'est à cause des groupes $\text{SO}(3)$ et $\text{SU}(2)$ que le théorème n'est pas valable pour $n = 2$. Par ailleurs, la combinaison de la proposition 3.5 et du corollaire 6.3 du chapitre 6 fournit une preuve moins laborieuse de ce théorème. En fait, ce corollaire 6.3 peut être considéré comme une généralisation du théorème ci-dessus à d'autres groupes de Lie compacts connexes.

Appendice Le programme Mathematica

```
(* Titre: Solutions Minimales du problème de la section 3.1 *)
(* Auteur: Akimou DSSE *)
(* Résumé: La fonction SolutionsMinimales[n,r] détermine les
solutions minimales du problème diophantien de la section 3.1.
Ces solutions minimales fournissent un système minimal de
générateurs pour l'anneau des représentations du quotient
du groupe unitaire  $U(n)$  par son sous-groupe central d'ordre  $r$  *)
```

```
ClearAll;
```

```
(* ancrage de la récursion *)
```

```
SolutionsMinimales[n_Integer, r_Integer]:=
    SolutionsMinimales[n, r, Table[0, {n}], n];
```

```
(* enlève la solution nulle et les solutions minimales
évidentes à celles qui sont fournies par la procédure
"SolutionsProvisoires" *)
```

```
SolutionsMinimales[n_, r_, depart_, position_] :=
Module[{resultat, autre = Table[0, {n}]},
    resultat = SolutionsProvisoires[n, r, depart, position];
    Do[ autre[[i]] = LCM[i, r]/i;
        resultat = Append[resultat, autre];
        autre[[i]] = 0
        , {i, n}
    ];
    resultat = Rest[resultat];
    ColumnForm[Union[resultat]]
];
```

```
(* détermine les solutions minimales par "induction" sur la
variable "position" *)
```

```

SolutionsProvisoires[n_, r_, depart_List, position_Integer]:=
Module[{resultat={},
cestBon = SolutionPartielle[n , r, depart, position],
indice0=depart, somme, nouveau, intermediaire},
While[cestBon && (indice0[[position]]< r),
If[position>1,
intermediaire =
SolutionsProvisoires[n,r, indice0, position - 1];
If[intermediaire != {},
resultat = Ajoute[resultat, intermediaire]
],
somme = Sum[i*indice0[[i]], {i,n}];
nouveau = (Mod[somme,r] == 0) &&
MinimalQ[indice0, resultat];
If[nouveau,
resultat = Append[resultat, indice0]
]
];
indice0[[position]]++;
cestBon = SolutionPartielle[n,r, indice0, position]
];
Return[resultat]
];

```

(* teste si un vecteur donné est susceptible d'être une solution minimale; les conditions utilisées proviennent de l'article de G. Huet *)

```

SolutionPartielle[n_, r_, candidat_List, niveau_Integer]:=
Module[{d=r, e=1 ,k=1, maxy, sommapart, ok},
If[candidat[[k]] >= d,
maxy = e,
maxy = n
];
While[{k < niveau},
k++;
d = LCM[k,r]/k;
e = r/LCM[k,r];
If[candidat[[k]] >= d,
If[maxy == n,
maxy = e,

```

```

        maxy = Min[maxy, e]
    ]
]
];
sommepart = Sum[i*candidat[[i]], {i,niveau}];
ok = (sommepart <= r*maxy);
Return[ok]
];

```

(* ajoute les éléments de la liste "tableau2" qui sont minimaux par rapport à ceux de la liste "tableau1" à ce dernier *)

```

Ajoute[tableau1_List, tableau2_List]:=
Module[ {longueur = Length[tableau2],
        vecteur, envoi = {}},
Do[ vecteur = tableau2[[i]];
    If[MinimalQ[vecteur, tableau1],
        envoi = Append[envoi,vecteur]
    ]
, {i,longueur}
];
envoi = Union[tableau1, envoi];
Return[envoi]
];

```

(* teste s'il n'y a pas un élément "x" de la liste "leReste" tel que la différence "x - vecteur" ait toutes ses coordonnées négatives *)

```

MinimalQ[vecteur_List,leReste_List]:=
Module[{l = Length[leReste], k=2, oui = True},
While[oui && (k<=l),
    oui = PasInferieur[leReste[[k]],vecteur];
    k++
];
Return[oui]
];

```

(* Cette procédure retourne "False" si la différence vect1 - vect2 n'a que des coordonnées négatives ou nulles et "True" sinon.*)

```
PasInferieur[vect1_List, vect2_List]:=
  Module[{dim=Length[vect2],vecteur, j=1, test = True},
    vecteur = vect1 - vect2;
    While[test && (j<=dim),
      test = (vecteur[[j]] <= 0);
      j++;
    ];
    Return[!test]
  ];
```

(* Quelques essais...*)

SolutionsMinimales[5,2]

```
{0, 0, 0, 0, 2}
{0, 0, 0, 1, 0}
{0, 0, 1, 0, 1}
{0, 0, 2, 0, 0}
{0, 1, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1}
{1, 0, 1, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 0}
```

SolutionsMinimales[6,3]

```
{0, 0, 0, 0, 0, 1}
{0, 0, 0, 0, 3, 0}
{0, 0, 0, 1, 1, 0}
{0, 0, 0, 3, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0}
{0, 1, 0, 0, 2, 0}
{0, 1, 0, 1, 0, 0}
{0, 2, 0, 0, 1, 0}
{0, 3, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1, 0}
{1, 0, 0, 2, 0, 0}
```

{1, 1, 0, 0, 0, 0}
 {2, 0, 0, 1, 0, 0}
 {3, 0, 0, 0, 0, 0}

SolutionsMinimales[6,6]

{0, 0, 0, 0, 0, 1}
 {0, 0, 0, 0, 6, 0}
 {0, 0, 0, 1, 4, 0}
 {0, 0, 0, 2, 2, 0}
 {0, 0, 0, 3, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 3, 0}
 {0, 0, 1, 1, 1, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 0}
 {0, 1, 0, 0, 2, 0}
 {0, 1, 0, 1, 0, 0}
 {0, 2, 1, 0, 1, 0}
 {0, 3, 0, 0, 0, 0}
 {1, 0, 0, 0, 1, 0}
 {1, 0, 1, 2, 0, 0}
 {1, 1, 1, 0, 0, 0}
 {2, 0, 0, 1, 0, 0}
 {2, 2, 0, 0, 0, 0}
 {3, 0, 1, 0, 0, 0}
 {4, 1, 0, 0, 0, 0}
 {6, 0, 0, 0, 0, 0}

SolutionsMinimales[12,4]

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0}

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0}
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0}
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}
 {0, 1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0}

```

{0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
{0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

```

Solutions Minimales[16,2]

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
{2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

Chapitre 4

Les anneaux de Willisau

Dans ce chapitre et aussi dans le prochain, nous allons nous consacrer à l'examen du problème suivant:

Trouver des propriétés *algébriques* permettant de caractériser les λ -anneaux qui sont anneaux de représentations de groupes de Lie compacts connexes.

Les considérations du chapitre 2 et surtout l'important théorème 2.3 nous fournissent plusieurs propriétés algébriques des anneaux $R(G)$. Nous en avons sélectionné quelques-unes pour définir, dans la section 4.1, la notion d'*anneau de Willisau*. Le résultat le plus important de ce chapitre affirme que ces propriétés caractérisent les λ -anneaux qui sont anneaux d'invariants de groupes finis de λ -automorphismes d'anneaux de polynômes de Laurent. La preuve de ce résultat s'inspire de la méthode utilisée par Atiyah et Tall dans [At-Ta, §I.6] et fait appel à quelques résultats de la théorie de Galois. Un argument facile montre que \mathbb{Z} est l'unique anneau de dimension de Krull 1. Et comme première application de notre résultat, nous donnons la liste complète des anneaux de Willisau de dimension de Krull 2 ou 3. Nous allons terminer cette introduction par deux assertions; celles-ci vont servir de motivation pour le point 3) de la définition des anneaux de Willisau.

Proposition. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ muni de la λ -structure définie par $\lambda_t(\alpha_j^{\pm 1}) = 1 + \alpha_j^{\pm 1} \cdot t$ ($j = 1, \dots, n$); alors

$$\mathcal{A}_n(1) = \{\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_n^{m_n}; (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Le monoïde $\mathcal{A}_n(1)$ est donc un sous-groupe du groupe multiplicatif des unités $U(\mathcal{A}_n)$ de l'anneau \mathcal{A}_n .

Preuve

▷: Découle de la définition de la λ -structure de \mathcal{A}_n .

◁: Soit $P(\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1})$ un élément de $\mathcal{A}_n(1)$; on écrit $P = P_+ - P_-$ avec:

$$P_+ = \sum_{\text{finie}} c_r \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n} \quad \text{et} \quad P_- = \sum_{\text{finie}} c_s \alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_n^{s_n};$$

et où c_r et c_s sont des entiers positifs et $r, s \in \mathbb{Z}^n$. On a alors

$$\lambda_t(P_-) \cdot \lambda_t(P) = \lambda_t(P_+);$$

c'est-à-dire:

$$(**) \quad \prod_{\text{fini}} (1 + \alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_n^{r_n} \cdot t)^{c_r} \cdot (1 + P \cdot t) = \prod_{\text{fini}} (1 + \alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_n^{s_n} \cdot t)^{c_s}.$$

Comme l'anneau \mathcal{A}_n est factoriel et les différents facteurs des produits de l'identité (**) irréductibles dans $\mathcal{A}_n[t]$, on peut dire qu'il existe un multi-entier $s \in \mathbb{Z}^n$ avec $1 + P \cdot t = 1 + \alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_n^{s_n} \cdot t$; ce qui montre l'autre inclusion. ■

Corollaire. Soit R un λ -anneau de λ -dimension finie. S'il existe un λ -morphisme injectif $i : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ munissant \mathcal{A}_n d'une structure de R -module de type fini, alors $R(1)$ est un groupe abélien libre de type fini.

Preuve Si $i : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n$ est un λ -morphisme, alors $i(R(1)) \subset \mathcal{A}_n(1)$. Par la proposition ci-dessus, $i(x)$ est inversible dans \mathcal{A}_n pour tout x se trouvant dans $R(1)$. Puisqu'on a affaire à une extension entière d'anneaux, la proposition 2.1 nous garantit qu'un tel x est aussi inversible dans R . Il suit que $R(1)$ est un sous-groupe du groupe des unités de R ; et il est de type fini parce-qu'il est isomorphe à un sous-groupe du groupe abélien libre de type fini $\mathcal{A}_n(1)$. ■

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1 On dira que R est un anneau de Willisau¹ s'il satisfait les propriétés suivantes:

1. l'anneau R est intègre, intégralement clos et de génération finie;
2. R est un λ -anneau de λ -dimension finie;
3. $R(1)$ est un sous-groupe du groupe $U(R)$ des unités de l'anneau R .

L'entier $\dim(R) - 1$ sera appelé le rang de l'anneau de Willisau R ; on le notera $\text{rang}(R)$.

Remarques

- i) Si R est un anneau de génération finie, son groupe des unités $U(R)$ est abélien de type fini d'après [Bass, Appendix 1; page 36]. On en déduit que $R(1)$ est un groupe abélien de type fini lorsque R est un anneau de Willisau.

¹Cette terminologie s'inspire d'une recette se trouvant dans Les Friandises de BETTY BOSSI (page 29) Editions Betty Bossi SA, Zurich (1978).

- ii) Si R est de Willisau, alors $\lambda_t(x)$ est une fraction rationnelle en t , pour tout x appartenant à R .

Exemples

1. L'anneau \mathbb{Z} des entiers admet une unique λ -structure et on vérifie aisément qu'on obtient ainsi un anneau de Willisau de rang 0.
2. Pour tout $n \geq 1$, le λ -anneau $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ est aussi un anneau de Willisau; il est de rang n .
3. On fixe $n \geq 1$ et on considère un sous-groupe fini W de $GL_n(\mathbb{Z})$. Alors W agit sur l'anneau \mathcal{A}_n ; les invariants de cette action forment un sous- λ -anneau \mathcal{A}_n^W de \mathcal{A}_n qui est un anneau de Willisau. Le rang de \mathcal{A}_n^W est aussi égal à n . Grâce au théorème 2.3, on peut donc affirmer que l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact connexe est un anneau de Willisau.
4. Soit p un nombre premier. L'anneau local $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q}; (p, b) = 1\}$ n'est pas un anneau de Willisau puisqu'il n'est pas de génération finie. Pour la même raison, l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques n'est pas de Willisau.
5. Soit N un entier positif. L'anneau $\mathbb{Z}[1/N]$ est de Willisau si et seulement si $N = 1$. En effet, la série $\lambda_t(1/N) = (1+t)^{1/N}$ n'est rationnelle en t que si $N = 1$; on s'en convainc facilement en évaluant celle-ci en $t = 1$.
6. La λ -structure définie sur $R = \mathbb{Z}[x]$ par la formule $\lambda_t(x) = 1 + x \cdot t$ ne fournit pas un anneau de Willisau; en effet, $R(1) = \{x^k; k = 0, 1, 2, \dots\}$ n'est pas un sous-groupe de $U(R) = \{\pm 1\}$.
7. L'anneau des représentations d'un groupe fini n'est de Willisau que si ce dernier est réduit à l'élément neutre; c'est seulement dans ce cas que l'on obtient un anneau intègre.

Proposition 4.1 *Soit R un anneau de Willisau. Il existe un unique λ -morphisme $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$; celui-ci est surjectif et défini par:*

$$(\square) \quad \text{Si } x \in R \text{ et } \lambda - \dim(x) = k < \infty, \quad \varepsilon(x) = k.$$

Le noyau $\ker(\varepsilon)$ sera l'idéal d'augmentation de R ; on le notera $I(R)$.

Preuve (d'après le lemme 1.5 de [Ad2]) Soit $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$ un λ -morphisme. On choisit un élément $x \in R$ avec $\lambda - \dim(x) = k < \infty$. Pour tout $i > 0$,

$$\varepsilon(\lambda^i(x)) = \lambda^i(\varepsilon(x)) = \binom{\varepsilon(x)}{i} ;$$

l'hypothèse $\lambda^i(x) = 0$ si $i > k$ implique la relation $\varepsilon(x) \in \{0, 1, \dots, k\}$. Comme $\varepsilon(\lambda^k(x)) \in U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$, on trouve $\varepsilon(x) = k$. Il ne reste plus qu'à voir que la relation (\square) définit un λ -morphisme $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$; mais cela est une conséquence du "Splitting Principle" de [At-Ta] puisque R est de λ -dimension finie. ■

Corollaire 4.1 *Si R est un anneau de Willisau de rang 0, alors R est isomorphe au λ -anneau \mathbb{Z} .*

Preuve L'idéal d'augmentation $I(R)$ est un idéal premier de R ; il ne peut pas être maximal (car \mathbb{Z} n'est pas un corps). R étant de dimension de Krull 1 et intègre, on aura $I(R) = \{0\}$; d'où le résultat. ■

Le cadre ayant été posé, nous allons maintenant nous donner un anneau de Willisau R de rang n ($n \in \mathbb{N}$). Soient x_1, x_2, \dots, x_r des éléments de R tels que:

$$\lambda\text{-dim}(x_i) = n_i < \infty \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r.$$

Notons K le corps des fractions de R et L le corps de décomposition (sur K) des polynômes

$$Q_i(\xi) = \xi^{n_i} - \lambda^1(x_i) \cdot \xi^{n_i-1} + \dots + (-1)^{n_i} \cdot \lambda^{n_i}(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Le corps L est évidemment une extension galoisienne finie du corps K ; le groupe de Galois de cette extension sera noté $W(x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Lemme 4.1 *Les racines des polynômes $Q_i(\xi)$ et leurs inverses sont entiers sur l'anneau R .*

Preuve

- Fixons un entier $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; le polynôme $Q_i(\xi)$ est unitaire et à coefficients dans R . Ses racines $\xi_{i,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n_i$) sont donc entiers sur l'anneau R .
- Les inverses $\xi_{i,j}^{-1}$ des racines des $Q_i(\xi)$ sont les zéros des polynômes:

$$\tilde{Q}_i(\xi) = \xi^{n_i} \cdot Q_i\left(\frac{1}{\xi}\right) = 1 - \lambda^1(x_i) \cdot \xi + \dots + (-1)^{n_i} \cdot \lambda^{n_i}(x_i) \cdot \xi^{n_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

Mais les $\lambda^{n_i}(x_i)$ sont dans $R(1) \subset U(R)$ d'après la définition 4.1 et le point 2) du lemme 2.2; on en déduit que les $\xi_{i,j}^{-1}$ sont aussi entiers sur R . ■

Lemme 4.2 Soit $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ le sous-anneau de L engendré par R et les racines $\xi_{i,j}$ des polynômes $Q_i(\xi)$. Il existe, sur $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$, une structure de λ -anneau prolongeant celle de R et pour laquelle chaque x_i s'écrit comme somme d'éléments de λ -dimension 1.

Preuve On choisit un entier $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. En utilisant les formules de Viète pour la factorisation

$$Q_i(\xi) = \sum_{k=0}^{n_i} (-1)^k \cdot \lambda^k(x_i) \cdot \xi^{n_i-k} = \prod_{j=1}^{n_i} (\xi - \xi_{i,j}),$$

on trouve:

$$\lambda^k(x_i) = \sigma_k(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,n_i}) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n_i$$

où $\sigma_k(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \dots, \xi_{i,n_i})$ est la k -ième fonction symétrique élémentaire en les $\xi_{i,j}$.

Si on pose maintenant $\lambda_t(\xi_{i,j}) = 1 + \xi_{i,j} \cdot t$ pour $j = 1, 2, \dots, n_i$, on voit que les égalités ci-dessus sont respectées; c'est-à-dire que l'on a:

$$\lambda_t(x_i) = \prod_{j=1}^{n_i} (1 + \xi_{i,j} \cdot t) = \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_t(\xi_{i,j}).$$

Cette relation suffit pour assurer la véracité de notre assertion. ■

4.2 Un principe de scindage

Nous conservons ici les hypothèses et notations du paragraphe précédent; mais cette fois-ci, nous allons supposer que les éléments x_1, x_2, \dots, x_r engendrent l'anneau R . Effectivement, les conditions 1) et 2) de la définition 4.1 nous autorisent à choisir un système fini de générateurs de λ -dimension finie pour l'anneau R . Dans cette situation, $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ est un λ -anneau intègre, de génération finie, de λ -dimension finie et dans lequel tout élément de λ -dimension finie de R s'écrit comme somme d'éléments de λ -dimension 1. C'est cette dernière propriété qui justifie le titre de cette partie. Nous allons maintenant nous atteler à deux tâches essentielles:

- déterminer la structure de l'anneau $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$;
- montrer que celui-ci ne dépend pas - dans un sens à préciser - du système de générateurs x_1, x_2, \dots, x_r choisi.

Il est tout à fait clair que les racines $\xi_{i,j}$ engendrent l'anneau $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Ce fait justifie l'intérêt du résultat suivant:

Proposition 4.2 Soit $\Gamma = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_r)$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $L \setminus \{0\}$ engendré par les racines $\xi_{i,j}$ des polynômes $Q_i(\xi)$. Tous les éléments de Γ sont de λ -dimension 1 et de plus:

1. le groupe Γ est abélien libre de type fini;

2. soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ des éléments deux à deux distincts de Γ , et a_1, a_2, \dots, a_s des nombres entiers, alors:

$$\sum_{k=1}^s a_k \cdot \gamma_k = 0 \implies a_k = 0 \quad \forall k.$$

Par conséquent, l'anneau $R\langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$ n'est autre que l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\Gamma]$.

Preuve

- Γ est abélien de type fini par définition et tous ses éléments sont de λ -dimension 1 puisque les $\xi_{i,j}$ le sont;
 - Soit F un sous-groupe fini d'ordre m de Γ . On pose:

$$z = \sum_{x \in F} x \in R\langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle \subset L$$

On vérifie que $z^2 = m \cdot z$ dans L ; c'est-à-dire que $z \cdot (z - m) = 0$. Puisque L n'a pas de diviseur de zéro et que $\lambda_t(z) = \prod_{x \in F} (1 + x \cdot t)$ est un polynôme de degré $m > 0$, on a forcément $z = m$. Il suit alors que

$$\lambda_t(z) = \prod_{x \in F} (1 + x \cdot t) = (1 + t)^m.$$

L'anneau $L[t]$ est factoriel, on doit donc avoir, pour tout x appartenant à F , $1 + x \cdot t = 1 + t$. Cela signifie que F est réduit au singleton $\{1\}$; on peut donc conclure que Γ n'a pas de torsion.

- On applique successivement les opérations d'Adams $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^s$ à la relation $\sum_{k=1}^s a_k \cdot \gamma_k = 0$ et on observe que les γ_k sont de λ -dimension 1 pour obtenir le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \gamma_1 + a_2 \cdot \gamma_2 + \dots + a_s \cdot \gamma_s = 0 \\ a_1 \cdot \gamma_1^2 + a_2 \cdot \gamma_2^2 + \dots + a_s \cdot \gamma_s^2 = 0 \\ \vdots \\ a_1 \cdot \gamma_1^s + a_2 \cdot \gamma_2^s + \dots + a_s \cdot \gamma_s^s = 0 \end{cases}$$

La matrice de ce système est régulière car $\gamma_i \neq \gamma_j$ pour tout $i \neq j$; il en résulte que tous les a_k sont nuls. ■

Proposition 4.3 1. Le rang du groupe abélien libre Γ vaut $n = \text{rang}(R)$. Il existe donc une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{\xi_{i,j}\}$ de Γ telle que:

$$R(x_1, x_2, \dots, x_r) = \mathbb{Z}[\Gamma] = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}].$$

En particulier l'anneau $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ est intégralement clos.

2. Le groupe de Galois $W(x_1, x_2, \dots, x_r)$ de l'extension de corps L/K agit aussi sur l'anneau $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ et l'anneau des invariants de cette action est R .
3. Soit $f : \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ un morphisme d'anneaux faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] & \\ & \uparrow & \searrow f \\ R & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] \end{array},$$

alors il existe $w \in W(x_1, x_2, \dots, x_r)$ tel que $f = w$.

Preuve Pour simplifier les notations, nous allons poser ici

$$A := R(x_1, x_2, \dots, x_r) = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}], \quad W := W(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

1. On met les résultats précédents bout à bout et on observe ensuite qu'une extension entière laisse la dimension de Krull invariante (proposition 2.4) et que l'anneau de polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ est intégralement clos.
2. Les éléments du groupe de Galois W permutent les racines $\xi_{i,j}$ des polynômes $Q_i(\xi)$; il suit que l'anneau A est stable sous l'action du groupe fini W . Pour l'autre partie de l'assertion, observons que L est le corps des fractions de A et considérons le diagramme d'inclusions d'anneaux suivant:

$$\begin{array}{ccc} A & \subset & L \\ \cup & & \cup \\ R & \subset & K. \end{array}$$

Soit $x \in A$ tel que $w \cdot x = x$ pour tout $w \in W$; comme x se trouve dans le corps L , la théorie de Galois nous dit que x est en fait un élément de K . Puisque l'anneau A est entier sur R , on peut aussi affirmer que x est entier sur R . L'anneau R étant intégralement clos, on peut conclure que x se trouve dans R .

3. Un tel homomorphisme est forcément injectif. En effet, si $x \in A$ est tel que $f(x) = 0$, alors $f(\prod_{w \in W} w \cdot x) = 0$; l'hypothèse sur f implique

$$f\left(\prod_{w \in W} w \cdot x\right) = \prod_{w \in W} w \cdot x$$

et on peut conclure que $x = 0$. Ainsi f s'étend en un homomorphisme de corps $\tilde{f}: L \rightarrow L$ fixant K . Comme l'extension L/K est finie, \tilde{f} est bijective et donc un élément du groupe $W = \text{Gal}(L/K)$; et on peut conclure que f se trouve aussi dans $W \subset \text{Aut}(A)$. ■

Remarque Le point 3) de la proposition ci-dessus résulte aussi du lemme 7.1 de [Not1] appliqué à $R[x_1, x_2, \dots, x_r] \otimes \mathbb{Q}$ et à $R \otimes \mathbb{Q}$, en regardant $W(x_1, x_2, \dots, x_r)$ comme un groupe fini de \mathbb{Q} -automorphismes du premier anneau.

Lemme 4.3 (Wilkerson) Soient A, B, C des anneaux intègres. On suppose que A est un sous-anneau de B et que l'extension d'anneaux $A \hookrightarrow B$ est entière. Soit $\Phi: A \rightarrow C$ un morphisme satisfaisant les propriétés suivantes:

1. il existe un sous-ensemble $\{y_i\}$ de B tel que, pour tout y_i , il y a un polynôme unitaire $f_i(\xi) \in A[\xi]$ avec $f_i(y_i) = 0$;
2. B est engendré comme A -module par des polynômes en les éléments de $\{y_i\}$;
3. pour tout i , le polynôme $\Phi_* f_i(\xi) \in C[\xi]$, obtenu en appliquant Φ aux coefficients de $f_i(\xi)$, se décompose en produit de facteurs linéaires dans $C[\xi]$.

Alors il existe un morphisme d'anneaux $\tilde{\Phi}: B \rightarrow C$ de Φ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \uparrow & \searrow \tilde{\Phi} \\ A & & C \\ & \xrightarrow{\Phi} & \end{array}$$

Preuve Elle se trouve à la page 326 de [Wilk]; notons que ce lemme est plus connu dans le cas particulier où C est un corps algébriquement clos. ■

Grâce à ce dernier résultat, nous pouvons maintenant nous attaquer au premier théorème important du présent travail:

Théorème 4.2 Soit R un anneau de Noetherien de rang n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Il existe un λ -morphisme injectif $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ et un sous-groupe fini W_φ de $\text{Aut}_\lambda(\mathcal{A}_n) = \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ tels que: $\varphi(R) = \mathcal{A}_n^{W_\varphi}$.
Si $f : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n$ est un morphisme d'anneaux faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}_n & \\ \uparrow \varphi & \searrow f & \\ R & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A}_n \end{array} ,$$

alors $f \in W_\varphi \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. On dira que φ est une λ -extension galoisienne de l'anneau R .

2. Soient m un entier positif et $\theta : R \rightarrow \mathcal{A}_m$ un λ -morphisme. Il existe un λ -morphisme $g : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_m$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}_n & \\ \uparrow \varphi & \searrow g & \\ R & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{A}_m \end{array} .$$

3. Si $\psi : R \hookrightarrow \mathbb{Z}[\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}]$ est une autre λ -extension galoisienne de R , alors il existe un λ -isomorphisme $h : \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}]$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}] & \\ \uparrow \psi & \searrow h & \\ R & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}[\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}] \end{array} .$$

Par conséquent, la λ -extension φ du point 1) ne dépend pas (à λ -isomorphisme près) du système de générateurs choisi.

Preuve:

1. C'est une reformulation de la proposition 4.3 .
2. On utilise le lemme de Wilkerson en prenant:
 - $R = A$, $\mathcal{A}_n = B$, $\mathcal{A}_m = C$;

- $\theta = \Phi$;
- $\{y_i\} =$ ensemble des $\xi_{i,j}^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, n_i$) avec

$$f_{i,j}(\xi) = \tilde{Q}_i(\xi) = \lambda_{-\xi}(x_i) .$$

La condition 2) du lemme est vérifiée puisque:

$$\xi_{i,j} = \lambda^1(x_i) - \lambda^2(x_i) \cdot \xi_{i,j}^{-1} + \dots + (-1)^{n_i-1} \cdot \lambda^{n_i}(x_i) \cdot \xi_{i,j}^{-n_i+1} .$$

L'application θ étant un λ -morphisme, on calcule pour i, j fixés:

$$\begin{aligned} \theta_* f_{i,j}(\xi) &= \sum_{k=0}^{n_i} \theta \left(\lambda^k(x_i) \right) \cdot (-\xi)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n_i} \lambda^k(\theta(x_i)) \cdot (-\xi)^k \\ &= \lambda_{-\xi}(\theta(x_i)) . \end{aligned}$$

Il suit que pour $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ fixé, $\theta(x_i)$ est de λ -dimension n_i dans \mathcal{A}_m ; on peut donc écrire $\theta(x_i)$ sous la forme

$$\theta(x_i) = \gamma_1 + \dots + \gamma_{n_i} \quad \text{avec} \quad \lambda - \dim(\gamma_s) = 1 \quad \forall s .$$

Le polynôme $\theta_* f_{i,j}(\xi) = \lambda_{-\xi}(\theta(x_i))$ se décompose alors en produit de facteurs linéaires dans $\mathcal{A}_m[\xi]$ et la condition 3) du lemme est ainsi satisfaite.

Si g est le morphisme d'anneaux fourni par le lemme de Wilkerson, alors $g(\xi_{i,j})$ sera l'un des γ_s . Ce fait nous permet de conclure que l'application g est un λ -morphisme.

3. φ et ψ étant des λ -morphisms, on peut utiliser le point 2) pour produire deux λ -morphisms:

$$F : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}'_n = \mathbb{Z}[\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}] \quad \text{et} \quad G : \mathcal{A}'_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$$

tels que $F \circ \varphi = \psi$ et $G \circ \psi = \varphi$. Comme $(G \circ F) \circ \varphi = \varphi$, le point 1) nous dit que $G \circ F \in W_\varphi$. De façon analogue, la composée $F \circ G$ est dans le groupe de Galois W_ψ . Et on peut conclure que F est un λ -isomorphisme. ■

Corollaire 4.3 *Pour un entier positif n fixé, il n'y a, à λ -isomorphisme près, qu'un nombre fini d'anneaux de Willisau de rang n .*

Preuve On peut supposer $n > 0$. D'après [Bieb], il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$. ■

Corollaire 4.4 Soit R un anneau de Willissau. Pour tout $k \geq 1$, l'opération d'Adams $\Psi^k : R \longrightarrow R$ est une application injective.

Preuve On peut supposer, sans perte de généralité, que le rang de R est non nul. Grâce au théorème précédent, on dispose d'une λ -extension galoisienne $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \xrightarrow{\Psi^k} & \mathcal{A}_n \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ R & \xrightarrow{\Psi^k} & R \end{array}$$

commute et $\Psi^k : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ est injectif pour tout $k \geq 1$, d'où le résultat. ■

Corollaire 4.5 Soient R un anneau de Willissau de rang $n \geq 1$ et k un entier supérieur ou égal à 1. L'opération d'Adams $\Psi^k : R \longrightarrow R$ n'est surjective que si k est égal à 1.

Preuve On choisit une λ -extension galoisienne $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$. Si l'application $\Psi^k : R \longrightarrow R$ est surjective, alors c'est un λ -automorphisme de R . Par conséquent, $\varphi \circ \Psi^k$ est aussi une λ -extension galoisienne de R . Grâce au point 3) du théorème, il existe un λ -isomorphisme $F : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \xrightarrow{F} & \mathcal{A}_n \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ R & \xrightarrow{\Psi^k} & R. \end{array}$$

De son côté, l'application $\Psi^k : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \xrightarrow{\Psi^k} & \mathcal{A}_n \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ R & \xrightarrow{\Psi^k} & R. \end{array}$$

On calcule

$$\begin{aligned} (\Psi^k|_{\mathcal{A}_n} \circ F^{-1}) \circ \varphi &= \Psi^k|_{\mathcal{A}_n} \circ (F^{-1} \circ \varphi) \\ &= \Psi^k|_{\mathcal{A}_n} \circ (\varphi \circ (\Psi^k)^{-1}) \\ &= (\Psi^k|_{\mathcal{A}_n} \circ \varphi) \circ (\Psi^k)^{-1} \\ &= (\varphi \circ \Psi^k) \circ (\Psi^k)^{-1} \\ &= \varphi \circ (\Psi^k \circ (\Psi^k)^{-1}) = \varphi. \end{aligned}$$

Grâce au point 1) du théorème 4.2, on peut affirmer qu'il existe $w \in W_\varphi$ avec $\Psi^k|_{\mathcal{A}_n} = w \circ F$. On restreint $\Psi^k|_{\mathcal{A}_n}$ et $w \circ F$ au groupe $\mathcal{A}_n(1)$ et on calcule les déterminants de deux applications linéaires ainsi obtenues; cela nous donne les égalités

$$k^n = \det(\Psi^k|_{\mathcal{A}_n(1)}) = \det(w) \cdot \det(F|_{\mathcal{A}_n(1)}) = (\pm 1) \cdot (\pm 1).$$

Et puisque k est un entier positif et non nul, on a forcément $k = 1$. ■

4.3 Intermède: anneaux de Willisau de rang ≤ 2

On détermine facilement les anneaux de Willisau de rang 1 parce-que $\mathbf{GL}_1(\mathbf{Z}) = \mathbf{U}(\mathbf{Z}) = \{\pm 1\}$. Il existe donc, à isomorphisme près, deux anneaux de Willisau de rang 1; ce sont:

- $\mathcal{A}_1 = \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}] = R(\mathbf{S}^1)$,
- $\mathbf{Z}[x] = R(\mathbf{SU}(2)) = R(\mathbf{SO}(3))$ avec $\lambda_t(x) = 1 + x \cdot t + t^2$.

Pour le rang 2, la clef se trouve par exemple à la page 180 de [New]. C'est en effet à cet endroit que nous sommes allés chercher la liste de représentants des 13 classes de conjugaison des sous-groupes finis de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z})$. Ces groupes sont consignés dans le tableau ci-dessous, avec les notations suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

C_i désigne le groupe cyclique d'ordre i et D_i est le groupe diédral d'ordre $2i$.

Nom	Classe d'isomorphisme	Générateurs
W_1	C_1	I
W_2	C_2	$-I$
W_3	C_3	U
W_4	C_4	V
W_5	C_6	$-U$
W_6	$D_1 = \mathbb{Z}/2$	W
W_7	$D_1 = \mathbb{Z}/2$	Z
W_8	$D_2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$W, -I$
W_9	$D_2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$	$Z, -I$
W_{10}	D_3	Z, U
W_{11}	D_3	Z, U'
W_{12}	D_4	Z, V
W_{13}	D_6	Z, U'

Pour chacun de ces groupes finis, nous avons déterminé les générateurs, l'anneau des invariants de leur action sur $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}]$ ainsi que les λ -opérations de ces générateurs.

- Action de W_1 : triviale
 - Générateurs de $R_1 = \mathcal{A}^{W_1} = \mathcal{A}$: ceux de l'anneau \mathcal{A}
 - Les λ -opérations

$$\lambda_t(\alpha^{\pm 1}) = 1 + \alpha^{\pm 1} \cdot t$$

$$\lambda_t(\beta^{\pm 1}) = 1 + \beta^{\pm 1} \cdot t$$

- Observation: $R_1 = R(S^1 \times S^1)$

- Action du générateur de W_2

$$\alpha \mapsto \alpha^{-1} \quad \beta \mapsto \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_2 = \mathcal{A}^{W_2} \subset \mathcal{A}$

$$a_2 = \alpha + \alpha^{-1}$$

$$b_2 = \beta + \beta^{-1}$$

$$c_2 = \alpha \cdot \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_2) = 1 + a_2 \cdot t + t^2$$

$$\lambda_t(b_2) = 1 + b_2 \cdot t + t^2$$

$$\lambda_t(c_2) = 1 + c_2 \cdot t + t^2$$

3. • Action du générateur de W_3

$$\alpha \mapsto \beta^{-1} \quad \beta \mapsto \alpha \cdot \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_3 = \mathcal{A}^{W_3} \subset \mathcal{A}$

$$a_3 = \alpha + \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta$$

$$b_3 = \alpha^{-1} + \beta + \alpha \cdot \beta^{-1}$$

$$c_3 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^{-2} + \alpha^{-2} \cdot \beta$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_3) = 1 + a_3 \cdot t + b_3 \cdot t^2 + t^3$$

$$\lambda_t(b_3) = 1 + b_3 \cdot t + a_3 \cdot t^2 + t^3$$

$$\lambda_t(c_3) = 1 + c_3 \cdot t + (a_3 \cdot b_3 - c_3 - 3) \cdot t^2 + t^3$$

4. • Action du générateur de W_4

$$\alpha \mapsto \beta^{-1} \quad \beta \mapsto \alpha$$

- Générateurs de $R_4 = \mathcal{A}^{W_4} \subset \mathcal{A}$:

$$a_4 = \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1}$$

$$b_4 = (\alpha + \alpha^{-1}) \cdot (\beta + \beta^{-1})$$

$$c_4 = \alpha \cdot \beta^2 + \alpha^2 \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-2} + \alpha^{-2} \cdot \beta$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_4) = 1 + a_4 \cdot t + (2 + b_4) \cdot t^2 + a_4 \cdot t^3 + t^4$$

$$\lambda_t(b_4) = 1 + b_4 \cdot t + (a_4^2 - 2b_4 - 2) \cdot t^2 + b_4 \cdot t^3 + t^4$$

$$\lambda_t(c_4) = 1 + c_4 \cdot t + (a_4^2(b_4 - 1) - b_4^2 - 3b_4 - a_4c_4) \cdot t^2 + c_4 \cdot t^3 + t^4$$

5. • Action du générateur de W_5

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha^{-1} \cdot \beta$$

- Générateurs de $R_5 = \mathcal{A}^{W_5} \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} a_5 &= \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^{-1} \\ b_5 &= \alpha \cdot \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} + \alpha \cdot \beta^{-2} + \alpha^{-1} \cdot \beta^2 + \alpha^2 \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-2} \cdot \beta \\ c_5 &= \alpha^2 \cdot \beta + \alpha^{-2} \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta^3 + \alpha \cdot \beta^{-3} + \alpha^{-3} \cdot \beta^2 + \alpha^3 \cdot \beta^{-2} \\ d_5 &= \alpha \cdot \beta^4 + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-4} + \alpha^4 \cdot \beta^{-5} + \alpha^{-4} \cdot \beta^5 + \alpha^5 \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-5} \cdot \beta \end{aligned}$$

- Les λ -opérations

$$\begin{aligned} \lambda_t(a_5) &= 1 + a_5 \cdot t + (3 + a_5 + b_5) \cdot t^2 \\ &\quad + (a_5^2 - 2b_5 - 4) \cdot t^3 \\ &\quad + (3 + a_5 + b_5) \cdot t^4 + a_5 \cdot t^5 + t^6 \\ \lambda_t(b_5) &= 1 + b_5 \cdot t + (a_5^3 - 3a_5b_5 - 9a_5 - 5b_5 - 9) \cdot t^2 \\ &\quad + (-2a_5^3 + b_5^2 + 6a_5b_5 + 18a_5 + 12b_5 + 20) \cdot t^3 \\ &\quad + (a_5^3 - 3a_5b_5 - 9a_5 - 5b_5 - 9) \cdot t^4 + b_5 \cdot t^5 + t^6 \\ \lambda_t(c_5) &= 1 + c_5 \cdot t + (3 + c_5 + d_5) \cdot t^2 + (c_5^2 - 2d_5 - 4) \cdot t^3 \\ &\quad + (3 + c_5 + d_5) \cdot t^4 + c_5 \cdot t^5 + t^6 \\ \lambda_t(d_5) &= 1 + d_5 \cdot t + (c_5^3 - 3c_5d_5 - 9c_5 - 5d_5 - 9) \cdot t^2 \\ &\quad + (-2c_5^3 + d_5^2 + 6c_5d_5 + 18c_5 + 12d_5 + 20) \cdot t^3 \\ &\quad + (c_5^3 - 3c_5d_5 - 9c_5 - 5d_5 - 9) \cdot t^4 + d_5 \cdot t^5 + t^6 \end{aligned}$$

6. • Action du générateur de W_6

$$\alpha \mapsto \alpha \quad \beta \mapsto \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_6 = \mathcal{A}^{W_6} \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} a_6 &= \alpha \\ b_6 &= \alpha^{-1} \\ c_6 &= \beta + \beta^{-1} \end{aligned}$$

- Les λ -opérations

$$\begin{aligned} \lambda_t(a_6) &= 1 + a_6 \cdot t \\ \lambda_t(b_6) &= 1 + b_6 \cdot t \\ \lambda_t(c_6) &= 1 + c_6 \cdot t + t^2 \end{aligned}$$

- Observation: $R_6 = R(S^1 \times \text{SU}(2))$

7. • Action du générateur de W_7

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha$$

- Générateurs de $R_7 = \mathcal{A}^{W_7} \subset \mathcal{A}$

$$a_7 = \alpha + \beta$$

$$b_7 = \alpha \cdot \beta$$

$$c_7 = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_7) = 1 + a_7 \cdot t + b_7 \cdot t^2$$

$$\lambda_t(b_7) = 1 + b_7 \cdot t$$

$$\lambda_t(c_7) = 1 + c_7 \cdot t$$

- Observation: $R_7 = R(\mathbf{U}(2))$

8. • Action des générateurs de W_8

$$\alpha \mapsto \alpha \quad \beta \mapsto \beta^{-1}$$

$$\alpha \mapsto \alpha^{-1} \quad \beta \mapsto \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_8 = \mathcal{A}^{W_8} \subset \mathcal{A}$

$$a_8 = \alpha + \alpha^{-1}$$

$$b_8 = \beta + \beta^{-1}$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_8) = 1 + a_8 \cdot t + t^2$$

$$\lambda_t(b_8) = 1 + b_8 \cdot t + t^2$$

- Observation: $R_8 = R(\mathbf{SU}(2)) \times R(\mathbf{SU}(2))$

9. • Action des générateurs de W_9

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha$$

$$\alpha \mapsto \alpha^{-1} \quad \beta \mapsto \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_9 = \mathcal{A}^{W_9} \subset \mathcal{A}$

$$a_9 = \alpha \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta$$

$$b_9 = \alpha \cdot \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

$$c_9 = \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1}$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_9) = 1 + a_9 \cdot t + t^2$$

$$\lambda_t(b_9) = 1 + b_9 \cdot t + t^2$$

$$\lambda_t(c_9) = 1 + c_9 \cdot t + (2 + a_9 + b_9) \cdot t^2 + c_9 \cdot t^3 + t^4$$

- Observation: $R_9 = R(\text{SO}(4))$

10. • Action des générateurs de W_{10}

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha$$

$$\alpha \mapsto \beta^{-1} \quad \beta \mapsto \alpha \cdot \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_{10} = \mathcal{A}^{W_{10}} \subset \mathcal{A}$

$$a_{10} = \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^{-1}$$

$$b_{10} = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^{-2} + \alpha^{-2} \cdot \beta$$

$$c_{10} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta^2 + \alpha^2 \cdot \beta^{-1}$$

- Les λ -opérations

$$\begin{aligned} \lambda_t(a_{10}) &= 1 + a_{10} \cdot t + (3 + a_{10} + b_{10} + c_{10}) \cdot t^2 \\ &\quad + (a_{10}^2 - 2b_{10} - 2c_{10} - 4) \cdot t^3 \\ &\quad + (3 + a_{10} + b_{10} + c_{10}) \cdot t^4 \\ &\quad + a_{10} \cdot t^5 + t^6 \end{aligned}$$

$$\lambda_t(b_{10}) = 1 + b_{10} \cdot t + c_{10} \cdot t^2 + t^3$$

$$\lambda_t(c_{10}) = 1 + c_{10} \cdot t + b_{10} \cdot t^2 + t^3$$

- Observation: $R_{10} = R(\text{PU}(3))$

11. • Action des générateurs de W_{11}

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha$$

$$\alpha \mapsto \beta \quad \beta \mapsto \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

- Générateurs de $R_{11} = \mathcal{A}^{W_{11}} \subset \mathcal{A}$

$$a_{11} = \alpha + \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$$

$$b_{11} = \alpha^{-1} + \beta^{-1} + \alpha \cdot \beta$$

- Les λ -opérations

$$\lambda_t(a_{11}) = 1 + a_{11} \cdot t + b_{11} \cdot t^2 + t^3$$

$$\lambda_t(b_{11}) = 1 + b_{11} \cdot t + a_{11} \cdot t^2 + t^3$$

- Observation: $R_{11} = R(\text{SU}(3))$

12. • Action des générateurs de W_{12}

$$\begin{aligned}\alpha &\mapsto \beta & \beta &\mapsto \alpha \\ \alpha &\mapsto \beta^{-1} & \beta &\mapsto \alpha\end{aligned}$$

- Générateurs de $R_{12} = \mathcal{A}^{W_{12}} \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}a_{12} &= \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1} \\ b_{12} &= \alpha \cdot \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} + \alpha \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta\end{aligned}$$

- Les λ -opérations

$$\begin{aligned}\lambda_t(a_{12}) &= 1 + a_{12} \cdot t + (2 + b_{12}) \cdot t^2 + a_{12} \cdot t^3 + t^4 \\ \lambda_t(b_{12}) &= 1 + b_{12} \cdot t + (a_{12}^2 - 2b_{12} - 2) \cdot t^2 + b_{12} \cdot t^3 + t^4\end{aligned}$$

- Observation: $R_{12} = R(\text{Sp}(2)) = R(\text{Spin}(5)) = R(\text{SO}(5))$

13. • Action des générateurs de W_{13}

$$\begin{aligned}\alpha &\mapsto \beta & \beta &\mapsto \alpha \\ \alpha &\mapsto \beta^{-1} & \beta &\mapsto \alpha \cdot \beta\end{aligned}$$

- Générateurs de $R_{13} = \mathcal{A}^{W_{13}} \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}a_{13} &= \alpha + \alpha^{-1} + \beta + \beta^{-1} + \alpha \cdot \beta + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1} \\ b_{13} &= \alpha \cdot \beta^{-1} + \alpha^{-1} \cdot \beta + \alpha \cdot \beta^2 + \alpha^{-1} \cdot \beta^{-2} + \alpha^2 \cdot \beta + \alpha^{-2} \cdot \beta^{-1}\end{aligned}$$

- Les λ -opérations

$$\begin{aligned}\lambda_t(a_{13}) &= 1 + a_{13} \cdot t + (3 + a_{13} + b_{13}) \cdot t^2 \\ &\quad (a_{13}^2 - 2b_{13} - 4) \cdot t^3 + (3 + a_{13} + b_{13}) \cdot t^4 \\ &\quad + a_{13} \cdot t^5 + t^6 \\ \lambda_t(b_{13}) &= 1 + b_{13} \cdot t + (a_{13}^3 - 3a_{13}b_{13} - 9a_{13} - 5b_{13} - 9) \cdot t^2 \\ &\quad + (-2a_{13}^3 + b_{13}^2 + 6a_{13}b_{13} + 18a_{13} + 12b_{13} + 20) \cdot t^3 \\ &\quad + (a_{13}^3 - 3a_{13}b_{13} - 9a_{13} - 5b_{13} - 9) \cdot t^4 + b_{13} \cdot t^5 + t^6\end{aligned}$$

- Observation: $R_{13} = R(\text{G}_2)$, où G_2 est le groupe de Lie exceptionnel de rang 2; sa représentation adjointe est alors $2 + a_{13} + b_{13}$.

Chapitre 5

Caractérisations des anneaux $R(G)$

Grâce au théorème 4.2, nous disposons d'une méthode permettant de savoir si un λ -anneau est l'anneau des invariants de l'action d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur \mathcal{A}_n . Pour répondre à la question du début du chapitre précédent et à cause du théorème 2.3, il nous faudra caractériser les cas où ce groupe fini est un groupe de Weyl. Une première observation s'impose: il suffit de caractériser les cas où le groupe fini mentionné ci-dessus est engendré par des réflexions; en effet, un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ qui est engendré par des réflexions est nécessairement un groupe de Weyl. Comme le lecteur topologue s'en doute, nous allons "linéariser" le problème en considérant certaines filtrations des anneaux de Willisau ainsi que les anneaux gradués associés à ces filtrations. Après avoir remplacé l'anneau de base \mathbb{Z} par \mathbb{Q} , nous pouvons alors faire appel aux théorèmes bien connus de Chevalley-Sheppard-Todd et de Serre sur les anneaux d'invariants. La réponse qui nous semble la plus naturelle à la question posée s'énonce comme suit (voir le théorème 5.3):

Théorème. Soit R un λ -anneau; les deux assertions suivantes sont équivalentes:

1. R est l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact connexe;
2. R est un anneau de Willisau d'idéal d'augmentation I et le complété $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$ de l'anneau $R \otimes \mathbb{Q}$ par rapport à la filtration $I \otimes \mathbb{Q}$ -adique est une \mathbb{Q} -algèbre de séries formelles.

Soit R un anneau de Willisau. Une première filtration de R est examinée dans la première section: il s'agit de la γ -filtration de Grothendieck. Deux autres filtrations de R sont considérées dans la deuxième section: la I -adique (I désignant l'idéal d'augmentation de R) et celle déduite d'une λ -extension galoisienne finie de R . La majeure partie de cette section est consacrée à l'étude des relations entre les trois filtrations ci-dessus; nous montrons par exemple que les "rationalisées" de ces trois filtrations induisent la même topologie sur l'anneau $R \otimes \mathbb{Q}$. C'est enfin dans la dernière section que nous démontrons nos différentes caractérisations.

5.1 Les γ -opérations de Grothendieck

Soit R un λ -anneau; les γ -opérations sur R sont les applications $\{\gamma^k : R \rightarrow R\}$ ($k \geq 0$) définies par:

$$\gamma_t(x) = \sum_{k \geq 0} \gamma^k(x) \cdot t^k = \lambda_{t/(1-t)}(x).$$

On vérifie que, pour tout $x, y \in R$, $\gamma^0(x) = 1$, $\gamma^1(x) = x$ et $\gamma_t(x+y) = \gamma_t(x) \cdot \gamma_t(y)$; on a aussi les propriétés suivantes:

Lemme 5.1 1. Pour tout $x \in R$ et pour tout $k \geq 0$, on a

$$\gamma^k(x) = \lambda^k(x + k - 1).$$

En particulier, si x est de λ -dimension 1, alors

$$\gamma_t(x-1) = 1 + (x-1) \cdot t \quad \text{et} \quad \gamma_t(1-x) = \sum_{j \geq 0} (1-x)^j \cdot t^j.$$

2. Si $x \in R$ est de λ -dimension n , alors $x - n$ est de γ -dimension inférieure ou égale à n ; autrement dit $\gamma_t(x - n)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

3. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe un polynôme universel $\tilde{P}_k(s_1, \dots, s_k; \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de poids k en les variables s_i et aussi en les variables σ_j tel que

$$\gamma^k(xy) = \tilde{P}_k(\gamma^1(x), \dots, \gamma^k(x); \gamma^1(y), \dots, \gamma^k(y)), \quad \forall x, y \in R.$$

Preuve voir [At-Ta, §I.4] ou [tomD, §3.3] ■

Lorsque R est un λ -anneau augmenté, on peut utiliser les γ -opérations pour munir R d'une filtration décroissante de λ -idéaux; c'est justement dans cette optique que A. Grothendieck a introduit ces opérations. La filtration ainsi obtenue s'appelle γ -filtration et se définit comme suit:

- $F^0 = F^0 R = R$;
- $F^1 = F^1 R = \text{Ker}(\varepsilon)$ où $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'augmentation de R ;
- pour tout $k \geq 1$, $F^k = F^k R$ est le \mathbb{Z} -module engendré par les éléments $\gamma^{r_1}(x_1) \cdot \gamma^{r_2}(x_2) \cdots \gamma^{r_j}(x_j)$, avec $x_1, \dots, x_j \in F^1 R$ et $\sum_i r_i \geq k$.

La proposition 4.1 de [At-Ta] garantit que l'on obtient effectivement une filtration de R par des λ -idéaux; l'anneau gradué associé à la γ -filtration de R sera noté:

$$\text{Gr}_\gamma(R) = \bigoplus_{k \geq 0} \text{Gr}_\gamma^k(R) = \bigoplus_{k \geq 0} F^k / F^{k+1}.$$

A partir de maintenant, R est un anneau de Willisau. D'après la proposition 4.1, il dispose d'une unique augmentation $\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{Z}$; la surjectivité de cette application ε entraîne l'isomorphisme:

$$Gr_{\gamma}^0(R) = F^0/F^1 = R/Ker(\varepsilon) = \mathbb{Z}.$$

Proposition 5.1 Soit R un anneau de Willisau. L'application

$$R(1) \rightarrow R, \quad x \mapsto x - 1$$

induit un isomorphisme du groupe multiplicatif $R(1)$ sur le groupe additif $Gr_{\gamma}^1(R) = F^1 R/F^2 R$.

Preuve C'est une conséquence du Théorème 1.7 de [Fu-La, page 53] ■

Les deux propositions suivantes nous donnent la structure du gradué associé à la γ -filtration de l'anneau des polynômes de Laurent $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$.

Proposition 5.2 Soit n un entier ≥ 1 . Sur $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ muni de sa λ -structure canonique, l'idéal $F^1 \mathcal{A}_n$ est engendré comme groupe abélien par les éléments de la forme $u - 1$ avec $u \in \mathcal{A}_n(1)$ et on a

$$F^k \mathcal{A}_n = (F^1 \mathcal{A}_n)^k \quad \forall k \geq 0.$$

Preuve Elle se trouve à la page 49 de [Fu-La]; elle utilise le point 1) du lemme 5.1 ainsi que le fait que tout élément de \mathcal{A}_n est une différence de sommes d'éléments de λ -dimension 1. ■

Proposition 5.3 Soit n un entier ≥ 1 ; on note toujours $\mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ avec sa λ -structure habituelle. Alors, le gradué $Gr_{\gamma}(\mathcal{A}_n)$ est l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ où, pour $i = 1, 2, \dots, n$, $t_i \in Gr_{\gamma}^1(\mathcal{A}_n)$ est l'image de α_i par l'isomorphisme de la proposition 5.1.

Preuve Grâce à la proposition précédente, t_1, \dots, t_n engendrent l'anneau gradué $Gr_{\gamma}(\mathcal{A}_n)$. On peut vérifier à la main que nos t_i sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Z} ou alors faire appel au théorème de Micali qui est mentionné dans [Fu-La, page 72]. ■

Exemple Les notations étant celles de la section 4.3, on considère l'anneau de Willisau $R = R_{10} = R(\text{PU}(3))$ et on note

$$x = a_{10} - 6, \quad y = b_{10} - 3 \quad \text{et } z = c_{10} - 3.$$

Ces éléments engendrent l'idéal d'augmentation de R ; en posant $t = 3x - y - z$, on vérifie que x, y et z sont liés par l'équation

$$(*) \quad x^3 + 9x^2 + 3xt - yz + 27t = 0.$$

On calcule

$$\begin{aligned}\gamma_t(x) &= 1 + x \cdot t + (x - t) \cdot t^2 + (x^2 + 6t) \cdot t^3 - (3x^2 + 13t) \cdot t^4 \\ &\quad + (3x^2 + 12t) \cdot t^5 - (x^2 + 4t) \cdot t^6; \\ \gamma_t(y) &= 1 + y \cdot t + (z - 2y) \cdot t^2 + (y - z) \cdot t^3; \\ \gamma_t(z) &= 1 + z \cdot t + (y - 2z) \cdot t^2 + (z - y) \cdot t^3.\end{aligned}$$

De ces formules, on tire facilement que

$$x = \gamma^2(x) - \gamma^4(x) - \gamma^5(x), \quad y = -\gamma^2(y) - \gamma^3(y) \quad \text{et} \quad z = -\gamma^2(z) - \gamma^3(z);$$

il suit que l'idéal $F^2(R)$ est égal à $F^1(R)$. Notons que l'élément $t = -\gamma^4(x) - \gamma^5(x)$ se trouve dans $F^4(R)$ et aussi que la relation (*) implique que $15t - yz$ appartient à l'idéal $F^6(R)$.

5.2 Filtrations sur les anneaux de Willissau

Dans cette section et aussi dans la prochaine, tous les produits tensoriels se feront sur l'anneau \mathbb{Z} des entiers. Soient R un anneau de Willissau de rang $n > 0$ et I son idéal d'augmentation. D'après le théorème principal du chapitre 4, il existe une λ -extension galoisienne finie $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n = \mathbb{Z}[\alpha_1^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}]$ de groupe de Galois $W \subset \text{Aut}_\lambda(\mathcal{A}_n)$. Dans la suite, nous identifierons R à l'anneau des invariants de l'action de W sur \mathcal{A}_n et l'idéal d'augmentation de \mathcal{A}_n sera noté J .

Sur l'anneau R , nous disposons des trois filtrations suivantes:

1. la filtration I -adique

$$R \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$$

2. la trace de la filtration J -adique de \mathcal{A}_n , donnée par

$$R \supset J \cap R = I \supset J^2 \cap R \supset J^3 \cap R \supset \dots$$

3. la γ -filtration

$$R \supset F^1 = I \supset F^2 \supset F^3 \supset \dots$$

Pour l'anneau de Willissau \mathcal{A}_n , ces trois filtrations coïncident (cf proposition 5.2); mais ce n'est, en général, pas le cas pour les autres anneaux de Willissau. Par exemple, on a $F^1 = F^2$ pour la γ -filtration de $R(\text{SU}(2))$ alors que l'idéal d'augmentation I de cet anneau est strictement contenu dans I^2 . L'autre contreexemple découle d'une observation faite par J.F. Adams dans [Ad3, page 4]: pour le groupe de Lie exceptionnel \mathbb{F}_4 , l'anneau gradué $\text{Gr}_\gamma(R(\mathbb{F}_4))$ possède de la 3-torsion en degré 4. Mais nous verrons dans un instant que le gradué associé à la deuxième filtration de notre liste est un anneau intègre; il suit que la deuxième et la troisième filtrations ne coïncident pas pour l'anneau de Willissau $R(\mathbb{F}_4)$.

Le groupe de Galois W agit par λ -automorphismes sur l'anneau \mathcal{A}_n , les éléments de W préservent la γ -filtration de \mathcal{A}_n et on hérite ainsi d'une action du groupe W sur l'anneau gradué $Gr_\gamma(\mathcal{A}_n) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$. Autrement dit, le passage au gradué associé permet de "linéariser" l'action du groupe de Galois W .

Proposition 5.4 Soit $Gr_\varphi(R)$ l'anneau gradué associé à la filtration

$$R \supset J \cap R = I \supset J^2 \cap R \supset \dots$$

de l'anneau de Willisau R . La λ -extension galoisienne $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n$ induit un morphisme injectif d'anneaux gradués $\bar{\varphi} : Gr_\varphi(R) \hookrightarrow Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)$; en particulier, l'anneau gradué $Gr_\varphi(R)$ est intègre. De plus, on a:

$$Im(\bar{\varphi}) \subset Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)^W \quad \text{et} \quad \forall \bar{x} \in Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)^W, |W| \cdot \bar{x} \in Im(\bar{\varphi}).$$

Cette dernière propriété permet de conclure que $\bar{\varphi}$ induit l'isomorphisme

$$Gr_\varphi(R) \otimes \mathbb{Q} \cong Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)^W \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n]^W.$$

Preuve Le morphisme $\bar{\varphi}$ est bien défini et injectif par la construction même de la deuxième filtration; il est aussi clair que l'image de $\bar{\varphi}$ est contenue dans $Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)^W$. Soit maintenant \bar{x} appartenant à $Gr_\gamma(\mathcal{A}_n)^W$ et homogène de degré k ; on choisit un représentant $x \in J^k$ de \bar{x} . Pour tout $w \in W$, il existe (par hypothèse) $y_w \in J^{k+1}$ avec $w \cdot x = x + y_w$. La somme, sur W , de ces égalités donne alors

$$\underbrace{\sum_{w \in W} w \cdot x}_{\in J^k \cap R} = |W| \cdot x + \underbrace{\sum_{w \in W} y_w}_{\in J^{k+1}};$$

et on peut donc représenter $|W| \cdot \bar{x}$ par l'élément $\sum_{w \in W} w \cdot x$ de $J^k \cap R$. ■

Les deux derniers résultats de cette section seront consacrés aux relations existant entre nos filtrations. Pour ce faire et parce que le deuxième de nos résultats n'est valable que si l'anneau de base est le corps \mathbb{Q} des nombres rationels, nous allons poser

$$R_{\mathbb{Q}} := R \otimes \mathbb{Q}, \quad I_{\mathbb{Q}} := I \otimes \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad J_{\mathbb{Q}} := J \otimes \mathbb{Q}.$$

Il est clair que $I_{\mathbb{Q}}$ (respectivement $J_{\mathbb{Q}}$) est un idéal maximal de $R_{\mathbb{Q}}$ (respectivement $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q}$). Notons au passage que la nécessité de cette "rationalisation" se faisait déjà sentir dans la proposition 5.4.

Proposition 5.5 1. Il existe un entier positif m tel que

$$\forall k \geq 0, \quad F^{m+k} \subset I^k \subset F^k.$$

2. Il existe un entier positif s tel que,

$$J^{s+k} \cap R_{\mathbb{Q}} \subset I_{\mathbb{Q}}^k \subset J^k \cap R_{\mathbb{Q}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Preuve

1. (d'après Atiyah) Fixons k entier positif et non nul; puisque l'inclusion de I^k dans F^k est évidente, il nous suffira d'établir l'autre inclusion. Pour ce faire, nous allons choisir un système de générateurs $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ de l'anneau R tel que $\lambda\text{-dim}(x_i) = n_i < \infty$ pour $i = 1, 2, \dots, r$. Les éléments $x_1 - n_1, x_2 - n_2, \dots, x_r - n_r$ engendrent évidemment l'idéal d'augmentation I et le point 2) du lemme 5.1 nous assure que ces éléments sont tous de γ -dimension finie. Posons $m = \max(n_i)$ et notons, pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, n_i$,

$$\sigma_{i,j} = \gamma^j(x_i - n_i);$$

convenons (avec Atiyah) que $\sigma_{i,j}$ est de poids i et de degré 1. Grâce point 3) du lemme 5.1, on montre facilement que l'idéal F^{mk} est engendré (en tant que groupe abélien) par les monômes de poids supérieur ou égal à mk en les $\sigma_{i,j}$. Choisissons un de ces monômes et notons-le z . Puisque i est plus petit que m , le degré du monôme z doit être supérieur ou égal à $(mk)/m = k$; cela signifie que z se trouve dans I^k et on obtient bien l'inclusion recherchée.

2. Voir, en prenant \mathbb{Q} au lieu du corps \mathbb{C} des complexes, celle du lemme 9 de [Far]. ■

5.3 Quatre caractérisations des anneaux $R(G)$

Nous conserverons les notations des deux sections précédentes. Soit R un anneau de Willisau de rang $n > 0$; sur son "rationalisé" $R_{\mathbb{Q}} := R \otimes \mathbb{Q}$, nous disposons des trois filtrations induites par celles de R . Il s'agit de

1. la filtration $I_{\mathbb{Q}}$ -adique avec $I_{\mathbb{Q}} := I \otimes \mathbb{Q}$;
2. la trace de la filtration $J_{\mathbb{Q}}$ -adique de $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q}$, donnée par

$$R_{\mathbb{Q}} \supset J_{\mathbb{Q}} \cap R_{\mathbb{Q}} = I_{\mathbb{Q}} \supset J_{\mathbb{Q}}^2 \cap R_{\mathbb{Q}} \supset J_{\mathbb{Q}}^3 \cap R_{\mathbb{Q}} \supset \dots$$

3. la "rationalisée" de la γ -filtration de R , donnée par

$$R_{\mathbb{Q}} \supset F^1 \otimes \mathbb{Q} \supset F^2 \otimes \mathbb{Q} \supset F^k \otimes \mathbb{Q} \supset \dots$$

Grâce à la proposition 5.5, ces trois filtrations induisent la même topologie sur $R_{\mathbb{Q}}$. Par conséquent, les complétions de $R_{\mathbb{Q}}$ par rapport à ces filtrations donnent le même anneau $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$; celui-ci est noëthérien d'après le théorème 10.26 de [At-Md]. D'un autre côté, le groupe fini W agit aussi sur le complété $\widehat{S}_{\mathbb{Q}}$, pour la topologie $J_{\mathbb{Q}}$ -adique, de l'anneau $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q}$; et on a, grâce au lemme 10 de [Far]:

$$(t) \quad \widehat{R}_{\mathbb{Q}} = (\widehat{S}_{\mathbb{Q}})^W$$

Lemme 5.2 On munit l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]$ de la filtration \mathcal{I} -adique où \mathcal{I} est l'idéal engendré par z_1, \dots, z_n et on considère l'homomorphisme d'anneaux

$$\phi : \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n] \longrightarrow \mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q}, \quad z_j \mapsto \alpha_j - 1.$$

Cet homomorphisme est compatible avec les filtrations \mathcal{I} -adique et $J_{\mathbb{Q}}$ -adique et son complété

$$\widehat{\phi} : \mathbb{Q}[[z_1, \dots, z_n]] \longrightarrow \widehat{S}_{\mathbb{Q}}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Preuve Celle de la proposition du §4.3 de [At-Hi] s'adapte bien à notre situation. ■

Rappel Soit A un anneau noëthérien local, d'idéal maximal \mathcal{M} , de corps résiduel k et de dimension de Krull d . D'après le théorème 11.22 de [At-Md], l'anneau A est régulier si et seulement si le gradué associé à la filtration \mathcal{M} -adique de A est isomorphe à un anneau de polynômes à d variables sur k .

Dans le cas qui va nous intéresser, on dispose de la caractérisation suivante des anneaux locaux réguliers:

Théorème 5.1 Soit k un corps et A une k -algèbre locale noëthérienne, dont le corps résiduel est égal à k . Pour que A soit régulière, il faut et il suffit que son complété \widehat{A} soit isomorphe à une k -algèbre de séries formelles $k[[z_1, \dots, z_n]]$.

Preuve Voir le corollaire 3 de la page VIII.54 de [Bour3]. ■

Le lemme 5.2 et les rappels ci-dessus impliquent que l'anneau $\widehat{S}_{\mathbb{Q}}$ est local et régulier; notons aussi que cet anneau est aussi intègre et intégralement clos. Puisque \mathcal{A}_n est un R -module de type fini, on peut faire appel à la proposition 2.5 pour affirmer que $\widehat{S}_{\mathbb{Q}}$ est un $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$ -module de type fini. En observant enfin que les anneaux locaux $\widehat{S}_{\mathbb{Q}}$ et $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$ admettent tous deux \mathbb{Q} comme corps résiduel, on vient de s'assurer que le triple $(\widehat{S}_{\mathbb{Q}}, \widehat{R}_{\mathbb{Q}}, W)$ satisfait les hypothèses du théorème suivant:

Théorème 5.2 (Serre) Soit A un anneau local régulier, d'idéal maximal \mathcal{M} et de corps résiduel k . Soient G un groupe fini d'automorphismes de A et $B = A^G$ le sous-anneau des invariants. B est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap B$. On fait les hypothèses suivantes:

- i) B est noëthérien et A est un B -module de type fini
- ii) Le composé $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow k$ est surjectif.

On suppose aussi que l'ordre de G est premier à la caractéristique de k . Alors B est régulier si et seulement si le groupe G est engendré par des pseudo-réflexions.

Preuve Voir [Ser] ou aussi [Bour1, exercice 7, page 138] ■

Nous pouvons maintenant énoncer le deuxième résultat important de ce travail; celui-ci généralise, entre autres, les théorèmes 8 et 8* de [Far]:

Théorème 5.3 *Soit R un anneau de Willisau de rang $n > 0$ et d'idéal d'augmentation I ; les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. R est l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact connexe.
2. Le complété $I_{\mathbb{Q}}$ -adique $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ de $R \otimes \mathbb{Q}$ est un anneau de séries formelles sur \mathbb{Q} , $I_{\mathbb{Q}}$ étant l'idéal $I \otimes \mathbb{Q}$ de $R \otimes \mathbb{Q}$.
3. L'anneau $Gr_I(R) \otimes \mathbb{Q}$ un anneau de polynômes à n variables sur \mathbb{Q} ; $Gr_I(R)$ désignant le gradué associé à la filtration I -adique de R .
4. Pour toute λ -extension finie $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n$, l'anneau gradué $Gr_{\varphi}(R) \otimes \mathbb{Q}$ est une \mathbb{Q} -algèbre de polynômes.
5. L'anneau $Gr_{\gamma}(R) \otimes \mathbb{Q}$ est une \mathbb{Q} -algèbre de polynômes.

Preuve Choisissons, une fois pour toutes, une λ -extension galoisienne finie $\varphi : R \hookrightarrow \mathcal{A}_n$ de groupe de Galois $W \subset Aut_{\lambda}(\mathcal{A}_n) \cong GL_n(\mathbb{Z})$. Grâce au théorème de Serre rappelé ci-dessus, on peut affirmer que le groupe W est engendré par des réflexions si et seulement si le complété $I_{\mathbb{Q}}$ -adique $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ de l'anneau $R_{\mathbb{Q}}$ est régulier. Soit $\widehat{I_{\mathbb{Q}}}$ l'idéal de $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ engendré par $I_{\mathbb{Q}}$; les propositions 10.16 et 10.15 de [At-Md] montrent que $\widehat{I_{\mathbb{Q}}}$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ et que les anneaux gradués $Gr_{\widehat{I_{\mathbb{Q}}}}(\widehat{R_{\mathbb{Q}}})$ et $Gr_{I_{\mathbb{Q}}}(R_{\mathbb{Q}})$ sont isomorphes. D'un autre côté, l'exactitude du foncteur $-\otimes \mathbb{Q}$ implique que l'anneau $Gr_{I_{\mathbb{Q}}}(R_{\mathbb{Q}})$ est isomorphe à $Gr_I(R) \otimes \mathbb{Q}$. Par conséquent, les caractérisations des anneaux locaux réguliers donnés montrent que les assertions suivantes sont équivalentes:

- i) $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ est un anneau régulier;
- ii) $\widehat{R_{\mathbb{Q}}}$ est un anneau de séries formelles sur \mathbb{Q} ;
- iii) $Gr_I(R) \otimes \mathbb{Q}$ est un anneau de polynômes à n variables sur \mathbb{Q} .

Par construction, W est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$; mais la proposition 9 (page 180) de [Bour1] nous assure que tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ qui est engendré par des réflexions est un groupe de Weyl. Il ne reste plus, pour achever la preuve de l'équivalence des trois premières assertions, qu'à invoquer le théorème 2.3.

L'équivalence de la première et de la quatrième assertions provient de proposition 5.4, du théorème de Chevalley-Sheppard-Todd (voir, par exemple, [Bour1, Théorème 4 (page 180)]) et de la proposition 9 (page 180) de [Bour1] déjà mentionnée.

Pour montrer que la deuxième et la cinquième assertions sont équivalentes, nous allons d'abord fixer un entier $k \geq 1$ et considérer le k -ième terme F^k de la γ -filtration de R . Ce dernier est un λ -idéal; on peut donc affirmer que le quotient R/F^k est

un λ -anneau et que la projection canonique $R \rightarrow R/F^k$ est un λ -morphisme. On montre facilement que la γ -filtration de R/F^k est donnée par $R/F^k \supset F^1/F^k \supset F^2/F^k \supset \dots \supset F^k/F^k = 0$, d'où

$$Gr_\gamma(R/F^k) = \bigoplus_{i=0}^k Gr_\gamma^i(R).$$

En appliquant maintenant le théorème 3.5 (page 61) de [Fu-La], on voit que le caractère de Chern induit un isomorphisme d'anneaux

$$R/F^k \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} Gr_\gamma(R/F^k) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=0}^k Gr_\gamma^i(R) \otimes \mathbb{Q}.$$

A cause de la naturalité du caractère de Chern, on obtiendra à la limite (c'est-à-dire en faisant tendre k vers l'infini):

$$(\heartsuit) \quad \widehat{R}_{\mathbb{Q}} := \varinjlim (R/F^k \otimes \mathbb{Q}) \cong \varinjlim (\bigoplus_{i=0}^k Gr_\gamma^i(R) \otimes \mathbb{Q}) =: Gr_\gamma(\widehat{R}) \otimes \mathbb{Q},$$

où le membre de droite n'est autre que le complété de $Gr_\gamma(R) \otimes \mathbb{Q}$ par rapport à la filtration déduite de la graduation.

Si $Gr_\gamma(R) \otimes \mathbb{Q}$ est un anneau de polynômes, son complété est alors un anneau de séries formelles et la relation (\heartsuit) nous montre qu'il en est de même pour l'anneau $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$. Réciproquement, si $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}$ est un anneau de séries formelles, alors le "decompletion lemma" de [Far, §4] implique que $Gr_\gamma(R) \otimes \mathbb{Q}$ est un anneau de polynômes. ■

Remarque Les anneaux gradués $Gr_1(R) \otimes \mathbb{Q}$ et $Gr_\gamma(R) \otimes \mathbb{Q}$ ne sont, en général, pas isomorphes. Mais il est probable que les anneaux gradués $Gr_\gamma(R) \otimes \mathbb{Q}$ et $Gr_\varphi(R) \otimes \mathbb{Q}$ le soient toujours; on peut montrer, à l'aide des théorèmes de A. Borel sur la cohomologie rationnelle des espaces classifiants, que ces deux anneaux sont effectivement les mêmes lorsque R est un anneau de représentations...

1212

Chapitre 6

Des théorèmes de reconstruction

Nous avons déjà eu l'occasion d'observer que, même avec sa λ -structure, l'anneau des représentations d'un groupe de Lie compact ne caractérise pas ce dernier; nous avons alors cité le cas des groupes $SO(3)$ et $SU(2)$. Un exemple encore plus dramatique est fourni par les groupes $SO(2l+1)$ et $Sp(l)$, pour $l \geq 3$ (voir [CWW, Appendix 1]). Mais, compte-tenu de l'importance de cet invariant des groupes de Lie compacts, il est intéressant d'aller à la quête de l'information supplémentaire qui permettra de caractériser nos groupes. C'est à cette recherche que nous allons consacrer cette partie. Le résultat principal de ce chapitre (théorème 6.2) implique que les exemples ci-dessus sont essentiellement les seuls cas où le λ -anneau $R(G)$ ne caractérise pas le groupe G . En particulier, si l'on sait qu'un groupe de Lie compact connexe G ne contient pas de facteur simple de type B_l ou C_l ($l \geq 1$), alors on peut reconstruire G à partir de l'anneau de Willisau $R(G)$ (cf corollaire 6.3). A l'aide du théorème 6.2, nous montrons aussi que la connaissance de l'anneau de Willisau $R(G)$ et de l'un des sous-groupes additifs de $R(G)$ que sont $RO(G)$ et $RSp(G)$ permet de reconstruire le groupe de Lie compact connexe G . Dans la dernière partie de ce chapitre, nous adaptons la preuve du résultat principal pour montrer que le fameux théorème de Curtis, Wiederhold et Williams s'étend à *tous* les groupes de Lie compacts connexes. Toutes nos preuves sont basées sur la classification des groupes de Lie compacts connexes par des *diagrammes radiciels*. La notion de diagramme radiciel généralise celle de *système de racines* et permet de traiter aussi des groupes compacts non semi-simples. Nous renvoyons à [Bour1, chapitre VI] pour la théorie des systèmes de racines tout en observant que la plupart des résultats de cette théorie restent valables pour les diagrammes radiciels.

6.1 Les diagrammes radiciels

Définition 6.1 ([Bour2, §4.8]) *On appelle diagramme radiciel un triplet $D = (M, M_0; \Phi)$ où*

DR1: M est un \mathbb{Z} -module libre de type fini et M_0 un sous-module facteur direct de M ;

DR2: Φ est une partie finie de M ; $\Phi \cup M_0$ engendre le \mathbb{R} -espace vectoriel $M \otimes \mathbb{R}$;

DR3: pour tout $\alpha \in \Phi$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha \in \Phi$ si et seulement si $k = \pm 1$;

DR4: pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un élément α^\vee de $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ tel que

$$i) \alpha^\vee(M_0) = 0 \text{ et } \alpha^\vee(\alpha) = 2;$$

ii) l'endomorphisme

$$s_\alpha : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto s_\alpha(x) = x - \alpha^\vee(x) \cdot \alpha,$$

appelé symétrie de vecteur α , laisse l'ensemble Φ globalement invariant.

On vérifie que l'élément α^\vee de M^* est uniquement déterminé pour tout $\alpha \in \Phi$ et que le \mathbb{R} -espace vectoriel $V = M \otimes \mathbb{R}$ est somme directe de $M_0 \otimes \mathbb{R}$ et du sous-espace vectoriel $V(\Phi)$ engendré par Φ . On vérifie aussi que l'ensemble Φ est un système réduit de racines dans l'espace vectoriel $V(\Phi)$; c'est pour cette raison que les éléments de Φ sont appelés racines du diagramme radiciel D . Le groupe des transformations de M engendré par les symétries s_α est le groupe de Weyl de D ; on le note $W(D)$.

Si l'on munit l'espace vectoriel $V = M \otimes \mathbb{R}$ d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) qui est $W(D)$ -invariant, les symétries s_α ($\alpha \in \Phi$), prolongées à $M \otimes \mathbb{R}$, s'écrivent sous la forme:

$$s_\alpha : x \longmapsto x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha,$$

(d'où $\alpha^\vee(x) = \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall x \in V$) et la condition (DR4) de la définition devient:

$$\forall \alpha \in \Phi,$$

- $(x, \alpha) = 0, \quad \forall x \in M_0 \otimes \mathbb{R};$
- $s_\alpha(\Phi) = \Phi;$
- $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \quad \forall \beta \in \Phi.$

Exemple ([Bour2, §4.9]) Soient G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de G et $\mathcal{Z}(G)_0$ la composante du neutre du centre de G . On note $\Gamma(T)$ (respectivement $\Gamma(\mathcal{Z}(G)_0)$) le noyau de l'application exponentielle de T (respectivement $\mathcal{Z}(G)_0$); $\Phi^\vee(G)$ désigne l'ensemble des coracines de G . Bourbaki (cf [Bour2, page 32]) appelle ces derniers vecteurs nodaux et désigne leur ensemble par $R^\vee(G)$; nous avons choisi une autre notation parce-que le symbole $R(G)$ est déjà affecté à l'anneau des représentations de G . Le triple $D(G) = (\Gamma(T), \Gamma(\mathcal{Z}(G)_0); \Phi^\vee(G))$

est un diagramme radiciel; c'est ce que [Bour2] a baptisé *diagramme radiciel covariant* de G . Notons que la donnée du diagramme radiciel covariant de G équivaut à celle de son *diagramme de Stiefel* (voir [Br-tD, page 223] pour la définition du diagramme de Stiefel). Le groupe de Weyl de ce diagramme est canoniquement isomorphe au groupe-quotient $W(G) = N(T)/T$, où $N(T)$ désigne le normalisateur de T dans G . On montre aussi que le groupe fondamental $\pi_1(G)$ est isomorphe au quotient $\Gamma(T)/\langle \Phi^\vee(G) \rangle$; $\langle \Phi^\vee(G) \rangle$ étant le sous-groupe de $\Gamma(T)$ engendré par les coracines de G . Par un théorème de H. Weyl ([Br-tD, page 229], $\Gamma(\mathcal{Z}(G)_0) = \{0\}$) si et seulement si le groupe G est semi-simple. Si G' est un autre groupe de Lie compact connexe et T' un tore maximal de celui-ci, alors le diagramme covariant du produit cartésien $G \times G'$ est:

$$D(G \times G') = (\Gamma(T) \oplus \Gamma(T'), \Gamma(C(G)_0) \oplus \Gamma(C(G')_0); \Phi^\vee(G) \sqcup \Phi^\vee(G')).$$

Remarque importante. Nous avons choisi de travailler avec les coracines au lieu des racines des groupes de Lie. Il convient donc d'avoir toujours présent à l'esprit que le passage du groupe au diagramme radiciel covariant transforme les systèmes de racines des groupes en leurs duaux (ou inverses). Pour aider le lecteur dans cette gymnastique, nous rappelons que tous les systèmes irréductibles de racines sont autoduaux sauf les types B et C , qui sont inverses l'un de l'autre. En clair, une composante de type B_l dans le diagramme covariant correspond à une composante de type C_l dans le groupe et réciproquement; mais les autres types restent inchangés.

Le lemme suivant sera utilisé assez souvent et implicitement dans la suite; il implique, par exemple, que les seules symétries du groupe $W(D)$ sont les s_α pour α parcourant l'ensemble Φ (voir [Hum1, Proposition 1.14 (page 24)]).

Lemme 6.1 Soient $D = (M, M_0, \Phi)$ un diagramme radiciel et soit f un automorphisme de M ; on suppose que f fixe M_0 point par point et laisse Φ stable. Alors

$$i) \forall \alpha \in \Phi, \quad f \circ s_\alpha \circ f^{-1} = s_{f(\alpha)};$$

$$ii) \forall \alpha, \beta \in \Phi, \quad [f(\alpha)^\vee](f(\beta)) = \alpha^\vee(\beta).$$

Preuve Pour montrer le premier point, on commence par prolonger, en conservant les mêmes notations, toutes les applications en vue au \mathbb{R} -espace vectoriel $V = M \otimes \mathbb{R}$. On fixe ensuite $\alpha \in \Phi$; l'endomorphisme $s_\alpha : V \rightarrow V$ est une symétrie puisqu'elle envoie α sur $-\alpha$ et fixe tous les vecteurs de l'hyperplan $P_\alpha = \text{Ker}(\alpha^\vee)$ de V . On vérifie aussi que l'application linéaire $f \circ s_\alpha \circ f^{-1}$ est une symétrie de vecteur $f(\alpha)$ et d'hyperplan fixe $f(P_\alpha)$. Grâce au lemme 1 de [Bour1, chapitre VI], on déduit que $f \circ s_\alpha \circ f^{-1} = s_{f(\alpha)}$. La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première. ■

Définition 6.2 Soient $D_1 = (M_1, (M_1)_0, \Phi_1)$ et $D_2 = (M_2, (M_2)_0, \Phi_2)$ deux diagrammes radiciels. Un isomorphisme de D_1 sur D_2 est un isomorphisme de groupes abéliens $f : M_1 \rightarrow M_2$ qui envoie Φ_1 sur Φ_2 , $(M_1)_0$ sur $(M_2)_0$ et qui satisfait la condition suivante : $\forall \alpha, \beta \in \Phi_1, [f(\alpha)^\vee](f(\beta)) = \alpha^\vee(\beta)$.

En utilisant le lemme précédent, on s'assure que f induit alors un isomorphisme

$$f_\# : W(D_1) \rightarrow W(D_2), \quad w \mapsto f \circ w \circ f^{-1},$$

au niveau des groupes de Weyl. Le groupe des automorphismes d'un diagramme radiciel D sera noté $\text{Aut}(D)$; on vérifie, toujours à l'aide du lemme précédent, que le groupe de Weyl $W(D)$ est un sous-groupe normal de $\text{Aut}(D)$.

Théorème 6.1 ([Bour2, pages 40 et 42])

- i) Pour tout diagramme radiciel D , il existe un groupe de Lie compact connexe G tel que $D(G)$ soit isomorphe à D ;
- ii) Pour que les groupes de Lie compacts connexes G_1 et G_2 soient isomorphes, il faut et il suffit que les diagrammes $D(G_1)$ et $D(G_2)$ soient isomorphes.
- iii) Soit $D(G)$ le diagramme radiciel covariant d'un groupe de Lie compact connexe G ; on a une suite exacte courte et scindée

$$1 \rightarrow \text{Int}(G) \xrightarrow{i} \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(D(G))/W(D(G)) \rightarrow 1,$$

le symbole i désignant l'inclusion des automorphismes intérieurs de G dans le groupe $\text{Aut}(G)$ de tous les automorphismes de G .

6.2 Le résultat principal

Pour cette partie, on conviendra que $\text{SO}(1) = \text{Sp}(0) = \{e\}$.

Théorème 6.2 Le λ -anneau $R(G)$ d'un groupe de Lie compact connexe G détermine univoquement un groupe de Lie compact connexe \tilde{G} tel que:

- i) le groupe \tilde{G} ne contient aucun facteur direct isomorphe à $\text{SO}(2l+1)$ ou $\text{Sp}(l)$ pour tout entier l supérieur ou égal à 1;
- ii) le groupe G est isomorphe à un produit cartésien $\tilde{G} \times H$ avec H égal à un produit cartésien de groupes $\text{SO}(2l+1)$ et $\text{Sp}(l)$.

En particulier, si G_1 et G_2 sont deux groupes de Lie compacts connexes tels que $R(G_1) \stackrel{\lambda}{\cong} R(G_2)$, alors il existe un unique groupe de Lie compact connexe \tilde{G} vérifiant la condition i) et des produits H_1, H_2 (uniques) de groupes $\text{SO}(2l+1)$ ou $\text{Sp}(l)$ tels que

$$G_1 = \tilde{G} \times H_1 \quad \text{et} \quad G_2 = \tilde{G} \times H_2.$$

Preuve Par hypothèse, on connaît l'anneau des représentations $R(G)$ du groupe G , ainsi que la λ -structure de $R(G)$. Nous allons montrer qu'avec ces informations, on peut décomposer (de façon essentiellement unique) le diagramme radiciel covariant $D(G)$ en la somme d'un diagramme radiciel \tilde{D} sans facteur de type B_l ou C_l et d'un diagramme radiciel \bar{D} qui est somme de diagramme de type B_l et C_l ; le point crucial consistera à s'assurer que le diagramme \tilde{D} est complètement déterminé par le λ -anneau $R(G)$. Pour conclure, Il n'y aura plus qu'à invoquer le théorème 6.1. La démonstration que nous proposons se déroulera en plusieurs étapes.

- **Etape 1** On part de l'anneau de Willisau $R(G)$ et on construit, à l'aide du point 1) du théorème 4.2, une λ -extension galoisienne

$$\varphi : R(G) \hookrightarrow R(T) = \mathcal{A}_n,$$

de groupe de Galois $W \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, avec $T = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (n facteurs) et $n+1 = \dim(R(G)) = \mathrm{rang}(G) + 1$. Soient T_G un tore maximal de G et $W(G)$ son groupe de Weyl par rapport à T_G . D'après le théorème 2.3, l'inclusion de T_G dans G induit aussi une λ -extension galoisienne

$$i^* : R(G) \hookrightarrow R(T_G),$$

de groupe de Galois $W(G) \subset \mathrm{Aut}_\lambda(R(T_G))$. Le point 3) du théorème 4.2 nous fournit alors un λ -isomorphisme $\theta : R(T_G) \longrightarrow R(T)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & R(T_G) & \\ & \uparrow & \searrow \theta \\ i^* & R(G) & \xrightarrow{\varphi} R(T) \end{array}$$

Grâce encore au théorème 4.2, la correspondance

$$h : W \longrightarrow W(G), \quad w \longmapsto \theta^{-1} \circ w \circ \theta$$

est bien définie et bijective; c'est donc un isomorphisme de groupes. Cela démontre que les groupes W et $W(G)$ sont conjugués dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. En passant à la contragédente, il suit que l'action de W sur le groupe abélien $\Gamma(T) := \mathrm{Hom}_\lambda(R(T), R(\mathbb{S}^1)) = \pi_1(T)$ est *conjuguée* (via la transposée de θ) à celle de $W(G)$ sur $\Gamma(T_G) := \mathrm{Hom}_\lambda(R(T_G), R(\mathbb{S}^1))$. En faisant agir W sur $\Gamma(T_G)$ (via l'isomorphisme h), on voit ainsi que les W -modules $\Gamma(T)$ et $\Gamma(T_G)$ sont isomorphes.

Si $W = \{1\}$, alors $R(G) = R(T) = \mathcal{A}_n$; cela implique toutes les représentations irréductibles de G sont de dimension 1 et donc que notre groupe est isomorphe au tore T . A partir de maintenant, on supposera que le groupe de Galois W n'est pas réduit à matrice-unité.

- **Etape 2** Posons $V = \Gamma(T) \otimes \mathbb{R}$ et étendons l'action de W à V par \mathbb{R} -linéarité. A cause de l'étape précédente, on peut dire que le groupe de Galois W est engendré par les symétries de V correspondant aux racines inverses du groupe de Lie G . Choisissons, pour simplifier, un produit scalaire W -invariant (\cdot, \cdot) sur l'espace vectoriel V . Soit s une symétrie de W ; l'ensemble

$$\delta_s = \{x \in V; \quad s(x) = -x\} \cap \Gamma(T)$$

est un sous-groupe cyclique infini de $\Gamma(T)$; ses deux générateurs seront notés $\pm a_s$. Si l'on pose

$$\Gamma(T)^W = \{x \in \Gamma(T); \quad w \cdot x = x \quad \forall w \in W\}$$

et

$$\Phi_{max} = \{\pm a_s; \quad s \text{ symétrie de } W\},$$

alors $D_{max} = (\Gamma(T), \Gamma(T)^W; \Phi_{max})$ est un diagramme radiciel de groupe de Weyl W . En effet, $\Gamma(T)^W$ est un sous-module facteur direct de $\Gamma(T)$ grâce au théorème des facteurs invariants et aussi parce-que $\Gamma(T)$ est sans torsion; en fait $\Gamma(T)^W$ s'identifie au réseau entier de la composante du neutre de $\mathcal{Z}(G)$. La condition (DR2) est également satisfaite puisque les coracines de G sont des multiples non-nuls des a_s . La véracité de condition (DR3) provient de la construction même de D_{max} . Soient maintenant $\alpha = \pm a_s \in \Phi_{max}$ et $x \in \Gamma(T)$, alors

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha = s(x) \in \Gamma(T);$$

on en déduit que $\frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que α^\vee se trouve effectivement dans $Hom_{\mathbb{Z}}(\Gamma(T), \mathbb{Z})$. Si $x \in \Gamma(T)^W$, alors $s(x) = x$, d'où $\alpha^\vee(\Gamma(T)^W) = 0$. Enfin, si β est un autre élément de Φ_{max} , alors $s \circ s_\beta \circ s^{-1}$ est une autre symétrie de W et elle est forcément égale à $s_{s(\beta)}$ par le lemme 6.1. Par conséquent, $s_\alpha(\beta) = s(\beta)$ est un élément de Φ_{max} et la condition (DR4) est ainsi vérifiée.

Pour la suite, on notera $\Phi_{max} = \Phi_1 \amalg \dots \amalg \Phi_k$ la décomposition du système de racines $(V(\Phi_{max}), \Phi_{max})$ en ses composantes irréductibles et on choisira, pour $j = 1, \dots, k$, une base \mathcal{B}_j dans la composante irréductible Φ_j ; alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \dots \amalg \mathcal{B}_k$ est une base de $(V(\Phi_{max}), \Phi_{max})$. L'image de $M = \Gamma(T)$ par la projection orthogonale de V sur $V(\Phi_j)$ sera notée Γ_j ; il faudrait observer ici que, pour j fixé, Γ_j ne coïncide pas forcément avec le sous-groupe engendré par les racines de Φ_j .

- **Etape 3** En général, le diagramme D_{max} de l'étape 2 n'est pas le diagramme covariant de G (prendre, par exemple, $G = \text{SO}(3)$). On peut néanmoins affirmer que, si s est une symétrie de W et $\{\pm \theta_s\}$ la paire de racines inverses

de G associée, alors il existe un entier non-nul $n_{\mathfrak{a}}$ tel que $\theta_{\mathfrak{a}} = n_{\mathfrak{a}} \cdot a_{\mathfrak{a}}$. De plus, pour toute symétrie $r \in W$,

$$\frac{2(a_r, \theta_{\mathfrak{a}})}{(\theta_{\mathfrak{a}}, \theta_{\mathfrak{a}})} = \frac{1}{n_{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{2(a_r, a_{\mathfrak{a}})}{(a_{\mathfrak{a}}, a_{\mathfrak{a}})} \in \mathbb{Z},$$

car a_r appartient à $\Gamma(T)$ et la symétrie associée à la coracine $\theta_{\mathfrak{a}}$ laisse $\Gamma(T)$ stable. En particulier, si $a_{\mathfrak{a}}$ est dans la base \mathcal{B}_j ($1 \leq j \leq k$), l'entier $n_{\mathfrak{a}}$ devra diviser tous les coefficients d'une colonne de la matrice de Cartan de la composante irréductible Φ_j . Une inspection des matrices de Cartan des systèmes irréductibles de racines (voir par exemple [Bour1, planches]) donne $n_{\mathfrak{a}} = \pm 1$ sauf si Φ_j est de type $A_1 = B_1$ ou B_l ($l \geq 2$) et $a_{\mathfrak{a}}$ la plus petite racine de B_j ; et dans ces cas-là, ou bien $n_{\mathfrak{a}} = \pm 1$, ou bien $n_{\mathfrak{a}} = \pm 2$. Cela signifie qu'on obtiendra les coracines de G en doublant un certain nombre de racines de la base \mathcal{B} du système $(V(\Phi_{max}), \Phi_{max})$. Tout le problème est d'identifier les racines à doubler; on a, en particulier, terminé s'il n'y a pas de racine "doublable" dans Φ_{max} .

Puisque le "doublement" de la plus petite racine d'un B_j de type B_l transforme le Φ_j correspondant en une composante irréductible de type C_l , une condition nécessaire et suffisante pour la bonne marche de l'opération est que \mathcal{B}_j engendre la projection orthogonale Γ_j de $M = \Gamma(T)$ sur le sous-espace $V(\Phi_j)$. En clair, une composante Φ_j est "doublable" si et seulement si elle est de type B_l (avec $B_1 = A_1$) et le sous-groupe engendré par les racines de Φ_j est un facteur direct de $\Gamma(T)$. Voici les raisons de ce fait:

- i) il y a tout d'abord l'inclusion $\Gamma(T) \subset \Gamma(T)^W \oplus (\oplus_{j=1}^k \Gamma_j)$.
- ii) Pour tout j , Γ_j est un groupe de poids du système irréductible Φ_j . Si $y_j \in \Gamma_j$, on choisit un $y \in \Gamma(T)$ qui se projète sur y_j , et on voit que, pour tout $\alpha \in \Phi_j$,

$$\frac{2(y_j, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(y, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Mais la condition (DR4) de la définition 6.1 nous dit que le membre de droite de la relation ci-dessus est un entier.

- iii) L'indice de connexion, c'est-à-dire le quotient du groupe des poids par celui qui est engendré par les racines, pour les types B_l et C_l vaut 2 (cf [Bour1, planches II et III]).

Soient $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, k\}$ l'ensemble des indices des composantes irréductibles "doublables" du système de racines $(V(\Phi_{max}), \Phi_{max})$ et $\mathcal{J} = \{j_1, \dots, j_{k-r}\} = \{1, \dots, k\} \setminus \mathcal{I}$. A cause du critère ci-dessus, le sous-groupe Γ_d de $\Gamma(T)$ engendré par les racines des composantes irréductibles "doublables" est facteur direct; il existe donc un unique sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ dans $\Gamma(T)$ tel que

$\Gamma(T) = \tilde{\Gamma} \oplus \Gamma_d$. On voit maintenant que le diagramme radiciel D_{\max} est la somme directe des diagrammes

$$\tilde{D} = (\tilde{\Gamma}, \Gamma(T)^W; \Phi_{j_1} \cup \dots \cup \Phi_{j_{k-r}}) \quad \text{et} \quad D_d = (\Gamma_d, \{0\}; \Phi_{i_1} \cup \dots \cup \Phi_{i_r}).$$

Le diagramme \tilde{D} est univoquement déterminé par $R(G)$ et sa λ -structure; le groupe de Lie compact connexe associé sera le groupe \tilde{G} de l'énoncé. Le diagramme D_d est évidemment celui d'un produit cartésien H_{\max} de groupes $\mathbf{Sp}(l)$; et doubler une composante irréductible Φ_i , de rang l équivaut à remplacer un facteur $\mathbf{Sp}(l)$ du groupe H_{\max} par un facteur $\mathbf{SO}(2l+1)$. On voit ainsi que le groupe G admet bien la décomposition annoncée et il suffirait de connaître, pour chaque rang $l \geq 1$, le nombre de composantes irréductibles de type B_l à doubler pour retrouver le groupe H de décomposition annoncée. ■

Comme première conséquence de ce résultat, nous obtenons une généralisation de la proposition A.2.c) de [CWW]:

Corollaire 6.3 *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Le λ -anneau $R(G)$ détermine G lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- i) G n'admet aucun des groupes $\mathbf{Sp}(l)$ ou $\mathbf{SO}(2l+1)$ ($l \geq 1$) comme facteur direct.
- ii) $\pi_1(G)$ n'a pas de 2-torsion;
- iii) $\pi_4(G) = 0$;

La deuxième conséquence répond à une question qui m'a aussi été posée par D. Notbohm:

Théorème 6.4 *La connaissance de l'anneau des représentations $R(G)$ d'un groupe de Lie compact connexe G , de la λ -structure de $R(G)$ et du sous-groupe $RO(G) \subset R(G)$ (respectivement $RSp(G) \subset R(G)$) engendré par les représentations réelles (respectivement symplectiques) de G permet de reconstruire le groupe G . Autrement dit, le λ -anneau $R(G)$ et son sous-groupe $RO(G)$ (respectivement $RSp(G)$) caractérisent le groupe de Lie G .*

Preuve Nous allons conserver les notations de la preuve ci-dessus. Dans cette preuve, nous étions parti du λ -anneau $R(G)$ et nous avons pu construire un diagramme radiciel $D_{\max} = \tilde{D} \oplus D_d$ avec \tilde{D} univoquement déterminé par $R(G)$ et D_d la somme directe des composantes irréductibles "doublables" de D_{\max} . Nous avons alors observé qu'il fallait, pour retrouver le diagramme de G , "doubler" un certain nombre de composantes irréductibles de D_d . Il s'agit maintenant de montrer que la donnée de $RO(G) \subset R(G)$ (respectivement $RSp(G) \subset R(G)$) permet de déterminer

les composantes irréductibles à "doubler". Considérons, pour ce faire, une composante irréductible Φ_l de D_d et choisissons une base $\mathcal{B}_l = \{a_1, \dots, a_l\}$ de celle-ci; nous pouvons supposer que les éléments de \mathcal{B}_l sont indexés de manière à ce que la matrice de Cartan $\begin{pmatrix} 2(a_i, a_i) \\ (a_j, a_j) \end{pmatrix}$ soit égale à la matrice canonique du système irréductible de type B_l . A notre composante irréductible Φ_l , il correspondra un facteur H_l (isomorphe à $\mathrm{Sp}(l)$ ou à $\mathrm{SO}(2l+1)$) du groupe G . Soit ω l'élément de $R(T)(1)$ qui est envoyé sur la forme \mathbb{Z} -linéaire

$$\Gamma(T) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \longmapsto \sum_{i=1}^l (x, a_i)$$

par l'isomorphisme canonique $R(T)(1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma(T), \mathbb{Z})$. Grâce aux sections VI.5 et V.6 de [Br-tD], nous pouvons affirmer que ω est un poids de la représentation standard du groupe H_l . Cette dernière est irréductible et son caractère est égal à la somme symétrique $S(\omega) \in R(T)^W = R(G)$ lorsque $H_l = \mathrm{Sp}(l)$ et à $S(\omega) + 1$ lorsque $H_l = \mathrm{SO}(2l+1)$; $S(\omega)$ étant la somme des éléments de l'orbite de ω pour l'action de W sur $R(T)(1)$. On vérifie aussi que l'élément de Dynkin (voir [AM2] pour cette notion) de H_l est l'exponentielle de $\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l i(2l-i)a_i$ lorsque $H_l = \mathrm{Sp}(l)$ et qu'il coïncide avec le neutre si $H_l = \mathrm{SO}(2l+1)$. Le lemme 1.2 de [AM2] nous fournit les deux assertions suivantes:

- i) $S(\omega) \in \mathrm{RO}(G) \subset R(G)$ si et seulement si $H_l = \mathrm{SO}(2l+1)$;
- ii) $S(\omega) \in \mathrm{RSp}(G) \subset R(G)$ si et seulement si $H_l = \mathrm{Sp}(l)$.

Par conséquent, la composante Φ_l doit être doublée lorsque $S(\omega) \in \mathrm{RO}(G)$, ce qui équivaut à la relation $S(\omega) \notin \mathrm{RSp}(G)$. ■

6.3 Normalisateurs des tores maximaux

Pour terminer ce chapitre, nous allons montrer que la méthode de la section précédente permet aussi d'étendre un résultat bien connu de Curtis, Wiederhold et Williams ([CWW]) à tous les groupes de Lie compacts connexes:

Théorème 6.5 *Soit G un groupe de Lie compact connexe. Si l'on connaît le normalisateur d'un tore maximal de G , alors on peut reconstituer le groupe G . Par conséquent, deux groupes de Lie compacts connexes sont isomorphes si et seulement si les normalisateurs de leurs tores maximaux le sont.*

Preuve Nous allons conserver les notations de la preuve du théorème 6.2 et nous identifierons $\mathrm{SU}(2)$ au groupe \mathbb{S}^3 des quaternions de norme 1; le groupe

$$\mathbb{S}^1 = \{\cos x + i \sin x; \quad x \in \mathbb{R}\}$$

sera alors un tore maximal de \mathbb{S}^3 et son normalisateur est $\bar{N} = \mathbb{S}^1 \cup j \cdot \mathbb{S}^1$.

Fixons un groupe de Lie compact connexe G et un tore maximal T de G . Soient N le normalisateur de T et $W = N/T$ le groupe de Weyl de G (par rapport à T); le groupe W est fini car T est la composante du neutre de N . On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 1.$$

Celle-ci nous fournit une action effective de W sur T . On relève cette action à l'algèbre de Lie $LT \cong \mathbb{R}^n$ de T en utilisant l'application exponentielle $\exp: LT \rightarrow T$. On a évidemment $LT = \Gamma(T) \otimes \mathbb{R}$ avec $\Gamma(T) = \exp^{-1}(e) \cong \pi_1(T)$. On procède maintenant de la même façon qu'à l'étape 2 de la preuve du théorème 6.2 pour attraper le diagramme radiciel $D_{max} = (\Gamma(T), \Gamma(T)^W; \Phi_{max})$. Comme avant, ce diagramme n'est pas nécessairement celui de G . Pour retrouver ce dernier, on décompose le système de racines $(V(\Phi_{max}); \Phi_{max})$ en ses composantes irréductibles et on identifie celles qui sont "doublables": ce sont les composantes irréductibles Φ_j de type B_l ($l \geq 1$) dont les racines engendrent un sous-groupe Γ_j qui est un facteur direct de $\Gamma(T)$. Soit $s \in W$ la symétrie correspondant à une petite racine d'une telle composante; on note $\{\pm\theta_s\}$ la paire de coracines de G associée à s . Alors $\theta_s = n_s \cdot a_s$ avec $n_s \in \{\pm 1, \pm 2\}$; toute la question est de savoir quand est-ce que $n_s = \pm 2$. Pour y répondre, nous allons considérer les ensembles $F = F(s)$, $Q = Q(s)$ et $K = K(s)$ définis par:

$$F := \{t \in T; s \cdot t = t\}, \quad Q := \{t \in T; s \cdot t = t^{-1}\}, \quad K := \{n^2; n \in \pi^{-1}(s)\}.$$

Il est évident que F (resp. Q) est un sous-groupe fermé de dimension $n - 1$ (resp. 1) de T ; on notera F_0 (resp. Q_0) la composante du neutre de F (resp. Q). On vérifie que K est une partie de T ; d'après [CWW], K est une composante connexe du groupe F . Par le corollaire de la page 31 de [Bour2], il existe un homomorphisme de groupes de Lie $\nu: \mathbb{S}^3 \rightarrow G$ tel que:

- i) $\nu(\mathbb{S}^1) \subset T$;
- ii) $\nu(j \cdot \mathbb{S}^1) \subset \pi^{-1}(s)$;
- iii) $\nu(-1) = \exp(\frac{\theta_s}{2})$.

Comme $\theta_s \in \Gamma(T)$, on peut affirmer que $\exp(\frac{\theta_s}{2})$ se trouve dans $F \cap Q_0 = \{1, t_s\}$, t_s étant l'autre racine carrée de 1 dans le cercle Q_0 . On peut écrire $t_s = \exp(\frac{q_s}{2})$ parce-que $Q_0 = \exp(\mathbb{R} a_s)$, $t_s^2 = 1$ et $a_s \in \Gamma(T)$. Soit $q \in j \cdot \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$, alors $q^2 = -1$ et on peut écrire $[\nu(q)]^2 = \nu(q^2) = \nu(-1)$. Avec les propriétés ii) et iii) ci-dessus, cela signifie que

$$(**) \quad \exp(\frac{\theta_s}{2}) = \exp(\frac{n_s \cdot a_s}{2}) = t_s^{n_s} \in K.$$

Assertion. $n_s = \pm 2$ si et seulement si $t_s \notin K$.

Preuve

\Leftarrow Si $n_s = \pm 1$, alors $t_s \in K$ par la relation (**) et on conclut par contraposition.

\Rightarrow Si $n_s = \pm 2$, la relation (**) nous dit que le neutre e se trouve dans K . Comme K est une composante de F , on devra avoir $K = F_0 = H_s$, où H_s est l'hyperplan fixe de la symétrie s . Supposons, par l'absurde, que t_s se trouve aussi dans K . Il existerait alors un vecteur X de l'hyperplan H_s avec $t_s = \exp(\frac{\alpha s}{2}) = \exp(-X)$; par conséquent, le vecteur $\frac{\alpha s}{2} + X$ se trouverait dans $\Gamma(T)$. Puisque α_s et X sont perpendiculaires, le projeté orthogonal, sur la composante irréductible Φ_j de la racine α_s , sera de la forme $\frac{\alpha s}{2} + X_j$ avec $X_j \in \Gamma_j$ et α_s est orthogonal à X_j . On voit immédiatement ce projeté orthogonal ne pourra jamais s'écrire comme combinaison linéaire, à coefficients dans \mathbb{Z} , de racines de Φ_j ; c'est la contradiction recherchée car la composante irréductible Φ_j est "doublable" par hypothèse. ■

En résumé, voici l'algorithme qui permet de récupérer le diagramme de G à partir de Φ_{max} :

1. Décomposer Φ_{max} en ses composantes irréductibles Φ_1, \dots, Φ_k .
2. Pour $j = 1, \dots, k$
 - ▷ Si Φ_j n'est pas de type B_l , on ne fait rien.
 - ▷ Sinon, on regarde la projection orthogonale Γ_j de $\Gamma(T)$ sur $V(\Phi_j)$
 - ▷▷ Si Γ_j n'est pas engendré par Φ_j , on ne fait rien.
 - ▷▷ Sinon, on prend une petite racine α de Φ_j et on calcule $K = K(s_\alpha)$ et $t_\alpha = \exp(\frac{\alpha}{2})$.
 - ▷▷▷ Si $t_s \in K$, on ne fait rien.
 - ▷▷▷ sinon, on "double" la composante Φ_j . ■

Remarque En fait, la preuve donnée par Curtis, Williams & Wiederhold s'applique sans problème au cas général, pour autant que l'on remplace leur lemme 1 par le théorème de classification 6.1. Notons aussi qu'une autre preuve du théorème 6.5 a été donnée par D. Notbohm dans [Not2].

1212

Chapitre 7

Le problème de Mislin

La question suivante a été posée dans [Smith] par G. Mislin:

Soient G et H deux groupes de Lie compacts connexes. Si les classifiants BG et BH ont le même type d'homotopie, peut-on conclure que G et H sont isomorphes en tant que groupes de Lie ?

Pour ce problème, le premier réflexe consisterait à prendre les espaces des lacets et à observer que l'hypothèse implique que les groupes de Lie G et H ont le même type d'homotopie. Si l'un de ces groupes est 1-connexe ou simple, les résultats de Baum et Browder ([Ba-Br]) et Scheerer ([Sch]) nous autorisent à conclure que nos deux groupes sont isomorphes. Pour le cas général, le contre-exemple suivant nous oblige à essayer d'autres méthodes d'attaque: les groupes $SO(4)$ et $SO(3) \times SU(2)$ sont homéomorphes sans être isomorphes (les anneaux des représentations de ces deux groupes ont été calculés dans l'appendice au chapitre 4; l'un est polynomial alors que l'autre ne l'est pas).

Dans ce chapitre, nous allons présenter trois différentes preuves de l'assertion suivante:

Théorème. *Le type d'homotopie de l'espace classifiant d'un groupe de Lie compact connexe détermine la classe d'isomorphisme de ce dernier.*

Le principe des trois preuves est le même: on montre que certains invariants homotopiques du classifiant BG d'un groupe de Lie compact connexe G permettent de reconstruire le diagramme radiciel covariant de G et on conclut en observant que ce diagramme caractérise la classe d'isomorphisme du groupe G (Théorème 6.1). Deux des preuves présentées utilisent le théorème principal du chapitre précédent. La troisième a été esquissée dans [Osse] et nécessite des résultats de D. Notbohm et L. Smith sur les applications entre espaces classifiants; elle est suffisamment fonctorielle pour nous permettre de retrouver le résultat de [JMO2] sur le groupe des classes des équivalences homotopiques des espaces BG .

Grâce au théorème ci-dessus, on peut affirmer que la réponse à la question de Mislin est positive. De plus, la combinaison de ce théorème et d'un résultat de A. Dold conduit à l'amusante proposition qui suit:

Corollaire. Soient G et H deux groupes de Lie compacts connexes. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes:

1. il existe un isomorphisme de groupes de Lie $\varphi : G \longrightarrow H$;
2. il existe un homomorphisme de groupes de Lie $\psi : G \longrightarrow H$ qui est aussi une équivalence d'homotopie.

Preuve D'après [Dold, Theorem 9.1], l'homomorphisme de groupes de Lie $\psi : G \longrightarrow H$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si l'application classifiante $B\psi : BG \longrightarrow BH$ est aussi une équivalence d'homotopie. ■

Signalons que ce problème de Mislin a aussi été résolu (affirmativement!) par D. Notbohm ([Not2]) et J. Møller ([Mø]). D. Notbohm montre d'ailleurs que la réponse est encore positive si l'on enlève l'hypothèse de connexité. Notons enfin que J. Harper résoud le même problème dans [Zab, §8] pour les groupes de Lie semi-simples, compacts et connexes. Sa preuve utilise un résultat de A. Zabrodsky et ne nécessite l'hypothèse de semi-simplicité qu'au moment où intervient le fameux théorème de Curtis, Wiederhold et Williams. Puisque ce dernier s'étend à tous les groupes de Lie compacts connexes (théorème 6.5), ladite preuve fournit aussi une réponse positive et générale à notre problème.

7.1 Les deux premières preuves

On se donne le classifiant BG d'un groupe de Lie compact connexe G . L'espace BG détermine le λ -anneau $K(BG)$ ainsi que les sous-groupes additifs de $K(BG)$ que constituent sa K -théorie réelle $KO(BG) := KO^0(BG)$ et sa K -théorie symplectique $KSp(BG) := KSp^0(BG)$. D'après [AM1, Corollary 1.12] (ou plus explicitement [Ad2, Theorem 1.8]), le λ -anneau $R(G)$ coïncide avec le sous- λ -anneau de $K(BG)$ engendré par les éléments de λ -dimension finie. On procède maintenant comme dans la preuve du théorème 6.4 avec la légère modification suivante: pour savoir si une composante irréductible de D_d doit être doublée, il suffira de s'assurer que l'élément $S(\omega) \in R(G)$ qui lui est associé (voir la preuve du théorème 6.4 pour la définition de $S(\omega)$) se trouve dans $KO(BG)$ (observer que cela revient à s'assurer que $S(\omega)$ ne se trouve pas dans $KSp(BG)$). Et on peut alors conclure la première preuve.

La deuxième découle immédiatement du résultat suivant:

Théorème 7.1 Si l'on connaît le λ -anneau $K(BG)$ de l'espace classifiant d'un groupe de Lie compact connexe G ainsi que la série de Poincaré $P_*(BG; \mathbb{Z}/2)$ de la cohomologie modulo 2 de BG , alors on peut reconstruire le groupe G .

Preuve Comme nous venons de l'observer, la K -théorie de BG détermine l'anneau des représentations $R(G)$ du groupe G . Grâce au résultat principal du chapitre

précèdent (théorème 6.2), la connaissance du λ -anneau $R(G)$ détermine univoquement un groupe de Lie compact connexe \tilde{G} tel que $G = \tilde{G} \times H$ avec H produit cartésien de groupes $\mathrm{SO}(2l+1)$ ou $\mathrm{Sp}(l)$ ($l \geq 0$). Pour un entier $l \geq 1$ fixé, le nombre des facteurs irréductibles de rang l dans H sera noté n_l ; et x_l désignera le nombre de ceux qui sont isomorphes au groupe $\mathrm{SO}(2l+1)$. Pour tout $l \geq 1$, l'entier n_l est égal au nombre de composantes irréductibles "doublables" et de rang l dans le diagramme D_{\max} construit dans la preuve du théorème 6.2; il est donc déterminé par le λ -anneau $R(G)$. Le nombre x_l n'est autre que celui des composantes irréductibles de rang l de D_{\max} qui doivent être "doublées", si l'on désire retrouver le groupe G . Les entiers n_l sont évidemment presque tous nuls et on a forcément $x_l \leq n_l$, pour tout $l \geq 1$. La série de Poincaré de $H^*(BH; \mathbb{Z}/2)$ vérifie la relation

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_i(BH; \mathbb{Z}/2)} &= \prod_{l \geq 1} [(1-t^2)(1-t^3) \cdots (1-t^{2l+1})]^{x_l} \cdot [(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})]^{n_l - x_l} \\ &= \prod_{l \geq 1} [(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})]^{n_l} \cdot \prod_{l \geq 1} \left[\frac{(1-t^2)(1-t^3) \cdots (1-t^{2l+1})}{(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})} \right]^{x_l} \\ &= \prod_{l \geq 1} [(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})]^{n_l} \cdot \prod_{l \geq 1} \left[\frac{(1-t^3)(1-t^5) \cdots (1-t^{2l+1})}{(1+t^2)(1+t^4) \cdots (1+t^{2l})} \right]^{x_l} \end{aligned}$$

d'où l'égalité:

$$(*) \quad P_i(BH; \mathbb{Z}/2) \cdot \prod_{l \geq 1} [(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})]^{n_l} = \prod_{l \geq 1} \left[\frac{(1+t^2)(1+t^4) \cdots (1+t^{2l})}{(1-t^3)(1-t^5) \cdots (1-t^{2l+1})} \right]^{x_l}$$

Le membre de gauche de (*) est déterminé par les données de notre énoncé puisqu'il est égal à

$$\frac{P_i(BG; \mathbb{Z}/2)}{P_i(B\tilde{G}; \mathbb{Z}/2)} \cdot \prod_{l \geq 1} [(1-t^4)(1-t^6) \cdots (1-t^{4l})]^{n_l};$$

on l'écrit sous la forme $c \cdot \frac{A(t)}{B(t)}$ avec $c \in \mathbb{Q}$ et $A(t), B(t) \in \mathbb{Z}[t]$ des polynômes primitifs (i.e le pgcd des coefficients est 1) tels que $\mathrm{pgcd}(A(t), B(t)) = 1$. D'un autre côté, le numérateur $N(t)$ et le dénominateur $D(t)$ du membre de droite de (*) sont premiers entre eux. En effet, pour tout entier $j \geq 1$, la factorisation en produits d'irréductibles de $\mathbb{Z}[t]$ des polynômes $1+t^{2j}$ et $1-t^{2j+1}$ est donnée par

$$1+t^{2j} = \prod_{d|4j, d \neq 2j} \Phi_d(t), \quad 1-t^{2j+1} = \prod_{d|2j+1} \Phi_d(t);$$

$\Phi_d(t)$ désignant le d -ième polynôme cyclotomique.

Puisque l'anneau $\mathbb{Z}[t]$ est factoriel et $N(0) = D(0) = 1$, on a le droit d'affirmer que $c = 1$, $A(t) = N(t)$ et surtout que:

$$B(t) = D(t) = \prod_{l \geq 1} [(1-t^3)(1-t^5) \cdots (1-t^{2l+1})]^{x_l}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{l \geq 1} \prod_{j=1}^l (1 - t^{2j+1})^{x_l} \\
 &= \prod_{l \geq 1} (1 - t^{2l+1})^{\sum_{j \geq l} x_j} \\
 &= \pm \prod_{l \geq 1} \left(\prod_{d|2l+1} \Phi_d(t) \right)^{\sum_{j \geq l} x_j} .
 \end{aligned}$$

Pour des entiers positifs l, m avec $l \geq 1$, on pose

$$y_l = \sum_{j \geq l} x_j \quad \text{et} \quad a_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } 2m + 1 \mid 2l + 1 \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

La factorisation du polynôme $B(t)$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Z}[t]$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \pm \prod_{l \geq 1} \left(\prod_{m=0}^{2l+1} [\Phi_{2m+1}(t)]^{a_{m,l} y_l} \right) \\
 &= (1 - t)^{\sum_{l \geq 1} y_l} \cdot \prod_{m \geq 1} [\Phi_{2m+1}(t)]^{\sum_{l \geq m} a_{m,l} y_l} .
 \end{aligned}$$

La factorialité de l'anneau $\mathbb{Z}[t]$ nous autorise à dire que les polynômes cyclotomiques $\Phi_{2m+1}(t)$ ($m \leq l$) sont les seuls diviseurs irréductibles de $B(t)$; et, à partir de $P_i(BG; \mathbb{Z}/2)$ et du λ -anneau $R(G)$, on peut déterminer les entiers $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ tels que

$$B(t) = \pm \prod_{m \geq 0} [\Phi_{2m+1}(t)]^{\alpha_m} .$$

Les inconnues x_1, x_2, \dots sont alors solutions du système d'équations linéaires

$$(S) \quad \begin{cases} \sum_{l=1}^L y_l &= \sum_{j=1}^L j x_j \\ \sum_{l=m}^L a_{m,l} y_l &= \alpha_m \quad m = 1, 2, \dots, L \quad (1) \\ \sum_{j=1}^L x_j &= y_l \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (2) \end{cases}$$

où L est le maximum des rangs des facteurs simples de H .

L'existence du groupe G fait partie de nos hypothèse et signifie donc que le système (S) admet au moins une solution. Comme les matrices des sous-systèmes (1) et (2) sont triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale, on peut conclure que (S) admet une solution unique. Il suffit de résoudre les sous-systèmes (1) et (2) pour connaître les entiers x_1, x_2, \dots, x_L et mettre ainsi la main sur le facteur H de la décomposition du groupe G . ■

7.2 La troisième preuve

L'ingrédient topologique est fourni par le

Théorème 7.2 (Notbohm & Smith) Soient T un tore quelconque et G un groupe de Lie compact connexe. Les applications canoniques

$$\begin{aligned} K_{T,G} : [BT, BG] &\longrightarrow \text{Hom}_\lambda(K(BG), K(BT)), \\ B_{T,G} : \text{Rep}(T, G) &\longrightarrow [BT, BG]. \end{aligned}$$

sont des bijections; comme d'habitude, le symbole $\text{Rep}(T, G)$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison des homomorphismes de groupes de Lie de T dans G .

Preuve Voir [NS1, Theorem 5.2] et [Not1, Proposition 1.3]. ■

Pour la suite, nous aurons aussi besoin de la

Proposition 7.1 Soient G et H deux groupes de Lie compacts connexes. L'application

$$\rho : \text{Hom}_\lambda(K(BH), K(BG)) \longrightarrow \text{Hom}_\lambda(R(H), R(G)), \quad \phi \longmapsto \phi|_{R(H)}$$

est une bijection.

Preuve La flèche est bien définie car $R(G)$ (respectivement $R(H)$) est l'ensemble des combinaisons \mathbb{Z} -linéaires des éléments de λ -dimension finie de $K(BG)$ (respectivement $K(BH)$). La proposition 4.1, le théorème 2.4 ainsi que la propriété universelle de la complétion I -adique impliquent que les éléments de $\text{Hom}_\lambda(R(H), R(G))$ et de $\text{Hom}_\lambda(K(BH), K(BG))$ sont continus par rapport aux topologies définies par les idéaux d'augmentation. Comme ces topologies sont séparées, on peut conclure que ρ est bijective. ■

Fixons, pour le moment, un groupe de Lie compact connexe G , un tore maximal T_G de G et notons $W(G)$ le groupe de Weyl de G par rapport à T_G . L'inclusion $i : T_G \hookrightarrow G$ induit une application $Bi : BT_G \longrightarrow BG$ entre les espaces classifiants, un λ -morphisme injectif $i^* : R(G) \rightarrow R(T_G)$ et aussi un homomorphisme surjectif de groupes $i_* : \pi_1(T_G) \rightarrow \pi_1(G)$. Tout en conservant les notations ci-dessus, nous allons poser

$$\begin{aligned} \text{Res} : \text{Hom}_\lambda(K(BT_G), K(BS^1)) &\longrightarrow \text{Hom}_\lambda(K(BG), K(BS^1)), \\ \phi &\longmapsto \phi \circ K(Bi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^\# : \text{Hom}_\lambda(R(T_G), R(S^1)) &\longrightarrow \text{Hom}_\lambda(R(G), R(S^1)), \\ \phi &\longmapsto \phi \circ i^*; \end{aligned}$$

et aussi $\pi_1(-) : \text{Rep}(S^1, G) \longrightarrow \pi_1(G)$, $f \longmapsto [f]$.

Toutes ces flèches interviennent dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & [BS^1, BG] & & \xrightarrow{(B\alpha)^{-1}} & Rep(S^1, G) \\
 & \downarrow K_G^{-1} \uparrow & & & \downarrow \pi_1(-) \\
 Hom_\lambda(R(G), R(S^1)) & \xleftarrow{\rho_G} & Hom_\lambda(K(BG), K(BS^1)) & & \pi_1(G) \\
 \uparrow i^\# & & \uparrow Res & & \uparrow i_* \\
 Hom_\lambda(R(T_G), R(S^1)) & \xleftarrow{\rho_{T_G}} & Hom_\lambda(K(BT_G), K(BS^1)) & & \pi_1(T_G) \\
 & \downarrow K_{T_G} \uparrow & & & \downarrow = \\
 & [BS^1, B(T_G)] & & \xrightarrow{B_{T_G}} & Rep(S^1, T_G)
 \end{array}$$

Soit $x \in \pi_1(T_G)$, il existe un unique $\alpha \in Hom(S^1, T_G) = Rep(S^1, T_G)$ tel que $[\alpha] = x$; en parcourant, dans le sens des aiguilles d'une montre, la partie de droite de ce diagramme, on trouve successivement

$$x \mapsto \alpha \mapsto [B\alpha] \mapsto K(B\alpha) \mapsto K(B\alpha) \circ K(Bi) = K(B(i\alpha)) \mapsto [i\alpha] \mapsto [i\alpha] = i_*(x).$$

Comme sa partie de gauche ne pose aucun problème, nous pouvons conclure que notre diagramme commute.

Pour la suite, nous considérerons surtout les applications η_{T_G} et η_G définies par

$$\begin{aligned}
 \eta_{T_G} &:= (B_{T_G})^{-1} \circ (K_{T_G})^{-1} \circ (\rho_{T_G})^{-1}, \\
 \eta_G &:= \pi_1(-) \circ (B_G)^{-1} \circ (K_G)^{-1} \circ (\rho_G)^{-1}.
 \end{aligned}$$

La flèche η_G est surjective, les groupes abéliens $\Gamma(T_G) := Hom_\lambda(R(T_G), R(S^1))$ et $\pi_1(T_G)$ sont des $W(G)$ -modules et η_G est un isomorphisme de $W(G)$ -modules. La commutativité du diagramme ci-dessus entraîne la relation $\eta_G \circ i^\# = i_* \circ \eta_{T_G}$. Par conséquent, $\eta_G \circ i^\#$ est un homomorphisme (surjectif) de groupes abéliens et son noyau est $W(G)$ -isomorphe à $\Gamma_0(T_G) = \ker(i_*)$.

Maintenant que tous les ingrédients sont en place, nous allons repartir -comme dans la section précédente- avec l'espace classifiant BG d'un groupe de Lie compact connexe G ; sans nuire à la généralité, nous supposons que BG n'a pas le type d'homotopie d'un produit de BS^1 . De la K -théorie (complexe) de l'espace BG nous pouvons extraire le λ -anneau $R(G)$. L'observation cruciale, c'est que la flèche η_G de tout à l'heure est complètement déterminée par BG . Pour le prouver, nous allons considérer l'application $\nu_G : [BS^1, BG]_0 \rightarrow [BS^1, BG]$ obtenue en "oubliant" les points-base et l'application

$$\Omega(-) : [BS^1, BG]_0 \rightarrow [\Omega(BS^1), \Omega(BG)]_0 \cong \pi_1(G), \quad [f] \mapsto [\Omega f].$$

La flèche ν_G est bijective car BG est 1-connexe; et on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [BS^1, BG] & \xrightarrow{B_G^{-1}} & \text{Rep}(S^1, G) \\ \nu_G^{-1} \downarrow & & \downarrow \pi_1(-) \\ [BS^1, BG]_0 & \xrightarrow{\Omega(-)} & \pi_1(G) \end{array}$$

commute; d'où l'égalité

$$\eta_G = \Omega(-) \circ \nu_G^{-1} \circ K_G^{-1} \circ \rho_G^{-1}.$$

Il suffit maintenant d'observer que le membre de droite de cette égalité est déterminé par l'espace BG .

Par ailleurs, le λ -anneau $R(G)$ est un anneau de Willisau; nous pouvons donc invoquer le théorème 4.2 pour produire une λ -extension galoisienne

$$\varphi : R(G) \hookrightarrow R(T) = \mathcal{A}_n,$$

de groupe de Galois $W \subset \text{Aut}_\lambda(\mathcal{A}_n) = GL_n(\mathbb{Z})$, avec $T = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n facteurs) et $n + 1 = \dim(R(G)) = \text{rang}(G) + 1$.

D'après le théorème 2.3, l'inclusion d'un tore maximal T_G dans G induit aussi une λ -extension galoisienne $i^* : R(G) \hookrightarrow R(T_G)$ de groupe de Galois $W(G)$. Le point 3) du théorème 4.2 nous dit alors qu'il existe un λ -isomorphisme $\theta : R(T_G) \rightarrow R(T)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R(T_G) & & \\ \uparrow i^* & \searrow \theta & \\ R(G) & \xrightarrow{\varphi} & R(T) \end{array}$$

Lemme 7.1 i) *La correspondance*

$$h : W \rightarrow W(G), \quad w \mapsto \theta^{-1} \circ w \circ \theta$$

est bien définie et un isomorphisme de groupes.

ii) *Posons*

$$\Gamma(T) := \text{Hom}_\lambda(R(T), R(S^1)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R(T)(1), R(S^1)(1)),$$

$$\Gamma(T_G) := \text{Hom}_\lambda(R(T_G), R(S^1)) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R(T_G)(1), R(S^1)(1)).$$

Rappelons que le groupe W (respectivement $W(G)$) agit sur $\Gamma(T)$ (respectivement $\Gamma(T_G)$) via la contragédiente. L'application

$$\theta^\# : \Gamma(T) \longrightarrow \Gamma(T_G), \quad f \longmapsto f \circ \theta$$

est un isomorphisme de groupes abéliens et elle satisfait la propriété suivante:

$$\forall w \in W, \forall f \in \Gamma(T), \quad \theta^\#(w \cdot f) = h(w) \cdot \theta^\#(f).$$

En particulier, W est un groupe engendré par des symétries de l'espace vectoriel réel $V = \Gamma(T) \otimes \mathbb{R}$.

Preuve

i) Pour $w \in W$, on calcule

$$(\theta^{-1} \circ w \circ \theta) \circ i^* = \theta^{-1} \circ w \circ \varphi = \theta^{-1} \circ \varphi = \theta^{-1} \circ (\theta \circ i^*) = i^* ;$$

le point 1) du théorème 4.2 permet de conclure que $\theta^{-1} \circ w \circ \theta \in W(G)$. On montre de façon analogue que $\theta \circ w_G \circ \theta^{-1} \in W(G)$, pour tout $w_G \in W(G)$. Il suit que h est bien un isomorphisme car son inverse est la flèche

$$W(G) \longrightarrow W, \quad w_G \longmapsto \theta \circ w_G \circ \theta^{-1}.$$

ii) L'inverse de $\theta^\#$ envoie $g \in \Gamma(T_G)$ sur $g \circ \theta^{-1}$. Pour montrer que $\theta^\#$ est équivariant, on fixe $w \in W$, $f \in \Gamma(T)$, $x \in R(T_G)$ et on calcule

– d'une part

$$\begin{aligned} [\theta^\#(w \cdot f)](x) &= [(w \cdot f) \circ \theta](x) \\ &= (w \cdot f)(\theta(x)) \\ &= f(w^{-1} \cdot \theta(x)), \end{aligned}$$

– et d'autre part

$$\begin{aligned} [h(w) \cdot \theta^\#(f)](x) &= [h(w) \cdot (f \circ \theta)](x) \\ &= (f \circ \theta)((\theta^{-1} \circ w^{-1} \circ \theta)(x)) \\ &= f(w^{-1} \cdot \theta(x)), \end{aligned}$$

d'où la relation annoncée. La dernière assertion provient du fait que $W(G)$ est engendré par des symétries de $\Gamma(T_G) \otimes \mathbb{R}$; en effet, si σ est une symétrie de l'espace vectoriel $\Gamma(T_G) \otimes \mathbb{R}$, alors $\theta \circ \sigma \circ \theta^{-1}$ est une symétrie de $V = \Gamma(T) \otimes \mathbb{R}$ (c'est, par exemple, une conséquence de [Bour1, Prop. 2 (page 67)]). ■

Soit

$$\varphi^\# : \Gamma(T) \longrightarrow \text{Hom}_\lambda(R(G), R(S^1)), \quad f \longmapsto f \circ \varphi,$$

le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_\lambda(R(G), R(S^1)) & = & \text{Hom}_\lambda(R(G), R(S^1)) & \xrightarrow{\eta_G} & \pi_1(G) \\ \varphi^\# \uparrow & & i^\# \uparrow & & \uparrow i_* \\ \Gamma(T) & \xrightarrow{\theta^\#} & \Gamma(T_G) & \xrightarrow{\eta_{T_G}} & \pi_1(T_G). \end{array}$$

Nous pouvons donc affirmer que le noyau $\Gamma_0(T)$ de l'homomorphisme $\eta_G \circ \varphi^\#$ est stable pour l'action de W sur $\Gamma(T)$ et envoyé par $\eta_{T_G} \circ \theta^\#$ sur le sous-groupe $\Gamma_0(T_G) = \ker(i_*)$ de $\pi_1(T_G)$. D'après un résultat classique (cf [Br-tD, Theorem 7.1 (page 223)]), le groupe abélien $\Gamma_0(T_G)$ est engendré par les coracines de G . Pour récupérer ces coracines dans $\Gamma_0(T)$ (et donc le diagramme radiciel covariant du groupe G), nous allons procéder comme dans la preuve de la proposition 9 (page 181) de [Bour1] (voir aussi [Far, Proposition 12]). Pour ce faire, nous allons poser $V = \Gamma(T) \otimes \mathbb{R}$, regarder $\Gamma(T)$ comme un réseau de V et prolonger l'action de W sur $\Gamma(T)$ en une action \mathbb{R} -linéaire sur l'espace vectoriel réel V . Soit s une symétrie de W ; cela revient à demander que $h(s)$ soit une symétrie de $\Gamma(T_G) \otimes \mathbb{R}$. On sait que $h(s)$ est associée à une unique paire de coracines (opposées) de G ; les éléments de $\Gamma_0(T)$ qui sont envoyés, par $\theta^\#$, sur ces coracines seront notés $\pm\tau_s$. Puisque $\Gamma_0(T_G)$ et $\Gamma_0(T)$ sont isomorphes, les vecteurs $\pm\tau_s$ sont les deux générateurs du sous-groupe cyclique infini

$$C_s := \{v \in V; \quad s(v) = -v\} \cap \Gamma_0(T).$$

Posons

$$\Gamma(T)^W := \{v \in V; \quad w \cdot v = v, \forall w \in W\} \quad \text{et} \quad \Phi := \{\pm\tau_s; \quad s \text{ symétrie de } W\}.$$

Par un raisonnement analogue à celui de l'étape 2 dans la preuve du théorème 6.2 et qui utilise l'invariance de $\Gamma_0(T)$ sous l'action du groupe W , on montre que

$$D = (\Gamma(T), \Gamma(T)^W; \Phi)$$

est un diagramme radiciel et que ce dernier est isomorphe (via $\theta^\#$) au diagramme radiciel covariant du groupe G . Il ne reste plus qu'à observer que la construction de D ne fait intervenir que des invariants homotopiques de l'espace BG et à faire appel au théorème 6.1 pour achever notre troisième preuve.

7.3 Le groupe $\text{Aut}(BG)$

Tout au long de cette section, G est un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de G et W le groupe de Weyl de G relativement à T . Par définition,

$Aut(BG)$ est le groupe des classes des équivalences homotopiques de l'espace classifiant du groupe G ; en d'autres termes, $Aut(BG)$ est le groupe des classes $[f] \in [BG, BG]$ telles qu'il existe $g : BG \rightarrow BG$ avec $g \circ f \sim Id_{BG}$ et $f \circ g \sim Id_{BG}$. Ce groupe est un invariant du type d'homotopie de BG et peut être considéré comme le groupe des symétries homotopiques de notre espace classifiant. Dans ce qui va suivre, nous nous proposons d'utiliser les constructions de la section d'avant ainsi que le théorème 4.3 de [JMO1] pour donner une nouvelle démonstration du remarquable résultat suivant (voir [JMO2]):

Théorème 7.3 (Jackowski, McClure & Oliver) *Le groupe $Aut(BG)$ est isomorphe au groupe $Out(G)$ des automorphismes extérieurs du groupe de Lie G .*

Preuve Le groupe des automorphismes de G sera noté $Aut(G)$; sa composante du neutre est le sous-groupe $Int(G)$ des automorphismes intérieurs de G , d'où $\pi_0(Aut(G)) = Out(G)$. Le symbole D désignera le diagramme radiciel covariant de G relativement au tore maximal T ; on identifiera les groupes abéliens $\Gamma(T)$ et $\pi_1(T)$. Posons maintenant

$$Aut(G, T) = \{ \alpha \in Aut(G); \alpha(T) = T \};$$

c'est un sous-groupe fermé de $Aut(G)$ et on a

$$Out(G) \cong Aut(G, T) / (Aut(G, T) \cap Int(G)).$$

Soit $\alpha \in Aut(G, T)$; l'application $\pi_1(\alpha) : \Gamma(T) \rightarrow \Gamma(T)$, qui est induite par la restriction de α à T , est un automorphisme du diagramme radiciel D . D'après [Bour2, Proposition 17 (page 41)], la correspondance $\alpha \mapsto \pi_1(\alpha)$ fournit un isomorphisme de groupes

$$\bar{\pi}_1 : Aut(G, T) / (Aut(G, T) \cap Int(G)) \xrightarrow{\cong} Aut(D) / W.$$

D'un autre côté, le foncteur "espace classifiant" induit une flèche

$$B(-) : Aut(G, T) \rightarrow Aut(BG), \quad \alpha \mapsto [B\alpha].$$

A cause du point v) du théorème 1.5, cette flèche envoie $Aut(G, T) \cap Int(G)$ sur la classe de Id_{BG} et on obtient ainsi un homomorphisme de groupes

$$\bar{B} : Out(G) \rightarrow Aut(BG), \quad [\alpha] \mapsto [B\alpha].$$

Afin d'introduire le troisième protagoniste de notre histoire, nous allons nous fixer une classe $[f] \in Aut(BG)$. A cette classe $[f]$, nous pouvons associer le λ -isomorphisme $K(f) : K(BG) \rightarrow K(BG)$; par restriction, ce dernier fournit un λ -automorphisme, que nous noterons aussi $K(f)$, de l'anneau de Willissau $R(G)$. La composée de $K(f)$ avec la λ -extension galoisienne $i^* : R(G) \hookrightarrow R(T)$ donne une

autre λ -extension galoisienne $\varphi = i^* \circ K(f) : R(G) \hookrightarrow R(T)$ de groupe de Galois W . A l'aide du point 3) du théorème 4.2, on construit un λ -isomorphisme $\theta(f) : R(T) \xrightarrow{\sim} R(T)$ faisant commuter le diagramme

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} R(T) & \xrightarrow{\theta(f)} & R(T) \\ i^* \uparrow & & \uparrow i^* \\ R(G) & \xrightarrow{K(f)} & R(G) \end{array}$$

Grâce à la naturalité des constructions de la section précédente, on en déduit la commutativité du diagramme suivant (les notations sont celles de ladite section):

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(T) & \xrightarrow{i^*} & Hom_\lambda(R(G), R(S^1)) & \xrightarrow{\eta_G} & \pi_1(G) \\ \theta(f)^* \downarrow & & K(f)^* \downarrow & & \cong \downarrow f \\ \Gamma(T) & \xrightarrow{i^*} & Hom_\lambda(R(G), R(S^1)) & \xrightarrow{\eta_G} & \pi_1(G) \end{array}$$

Par conséquent, $\theta(f)^\#$ envoie $\Gamma_0(T) = Ker(\eta_G \circ i^*)$ sur lui-même. Par ailleurs, le point 1) du lemme 7.1 nous dit que l'application

$$h(f) : W \longrightarrow W, \quad w \longmapsto \theta(f)^{-1} \circ w \circ \theta(f)$$

est un isomorphisme de groupes; on peut donc affirmer que $h(f)$ laisse l'ensemble des symétries de W globalement invariant. En se référant à la façon dont les coracines ont été récupérées dans la section précédente, on se convainc facilement que $\theta(f)^\#$ est un élément de $Aut(\Gamma(T))$ qui laisse invariant l'ensemble des coracines de G (relativement à T). Le lemme 9.2 (page 43) de [Hum2] nous autorise maintenant à dire que $\theta(f)^\#$ est un automorphisme du diagramme radiciel D . A ce stade, il convient d'observer que, pour tout $w \in W$, la flèche $\theta(f) \circ w : R(T) \longrightarrow R(T)$ fait aussi commuter le diagramme $(*)$; et le point 1) du théorème 4.2 nous garantit que ces flèches sont les seules à vérifier cette condition. Ainsi, la classe de $\theta(f)^\#$ dans le groupe $Aut(D)/W$ est univoquement déterminée par $[f] \in Aut(BG)$; cette correspondance nous définit un homomorphisme de groupes

$$\theta^\# : Aut(BG) \longrightarrow Aut(D)/W, \quad [f] \longmapsto [\theta(f)^\#].$$

Assertion. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & Aut(D)/W \\ & \nearrow \bar{\pi}_1 & \uparrow \theta^\# \\ Out(G) & \xrightarrow{\bar{B}} & Aut(BG) \end{array}$$

est commutatif.

Preuve Soit $[\alpha] \in \text{Out}(G)$ avec $\alpha \in \text{Aut}(G, T)$; dans le diagramme (*), on peut prendre $\theta(B\alpha) = (\alpha|_T)^*$. Notons $X(\alpha)$ la restriction de $(\alpha|_T)^*$ au groupe abélien $R(T)(1)$; alors $\theta^{\#}(B\alpha)$ n'est autre que la transposée de $X(\alpha) : R(T)(1) \rightarrow R(T)(1)$. Mais, d'après [Bour2, page 26], la transposée de $X(\alpha)$ est égale à $\pi_1(\alpha)$; d'où le résultat. ■

Cette assertion implique immédiatement que l'homomorphisme \bar{B} est injectif. Pour montrer sa surjectivité, nous allons choisir une classe $[f] \in \text{Aut}(BG)$ et écrire $\bar{\pi}_1^{-1}(\theta^{\#}[f]) = [\alpha]$ avec $\alpha \in \text{Aut}(G, T)$; grâce à l'assertion ci-dessus, on a l'égalité $\theta^{\#}(B\alpha) = \theta^{\#}(f)$. En passant à la transposée et en utilisant le point 2) du lemme 7.1, on en déduit que $B\alpha$ et f induisent le même homomorphisme en K -théorie; cela revient à dire que l'application $B(\alpha^{-1}) \circ f$ induit l'identité en K -théorie. Un argument de caractère de Chern permet alors d'affirmer que $B(\alpha^{-1}) \circ f$ induit aussi l'application identité en cohomologie rationnelle; $B(\alpha^{-1}) \circ f$ est donc une *opération d'Adams instable* de degré 1. Par le théorème 4.3 de [JMO1], l'application $B(\alpha^{-1}) \circ f$ est homotope à l'identité de BG c'est-à-dire $[B\alpha] = [f]$ dans $\text{Aut}(BG)$. ■

Bibliographie

- [Ad1] J.F. ADAMS, Lectures on Lie Groups, *W. A. Benjamin Inc.*, (1969).
- [Ad2] J.F. ADAMS, Maps Between Classifying Spaces II, *Invent. Math* 49 (1978), 79-85.
- [Ad3] J.F. ADAMS, Finite H-spaces and Lie Groups, *J. Pure Appl. Math.* 19 (1980), 1-8.
- [AM1] J.F. ADAMS & Z. MAHMUD, Maps Between Classifying Spaces, *Invent. Math.* 35 (1976), 1-41.
- [AM2] J.F. ADAMS & Z. MAHMUD, Maps Between Classifying Spaces III, *London Math. Soc. LNM* 86 (1986), 136-153.
- [Ad-Wi] J.F. ADAMS & C. WILKERSON, Finite H-spaces and Algebras over the Steenrod Algebra, *Ann. Math* 111 (1980), 95-143.
- [At-Hi] M.F. ATIYAH & F. HIRZEBRUCH, Vector Bundles and Homogeneous Spaces, *Proc. Symp. Pure Math. III, AMS* (1961), 7-38.
- [At-Md] M.F. ATIYAH & I.G. MACDONALD, Introduction to Commutative Algebra, *Addison-Wesley*, (1969).
- [At-Se] M.F. ATIYAH & G. SEGAL, Equivariant K -theory and Completion, *Jour. Diff. Geom.* 3 (1969), 1-18.
- [At-Ta] M.F. ATIYAH & D.O. TALL, Groups Representations, λ -Rings and the J -homomorphism, *Topology* 8 (1969), 213-297.
- [Bass] H. BASS, Introduction to Some Methods of algebraic K -theory, *AMS Regional Conference Series in Mathematics* 20 (1973).
- [Baum] P.F. BAUM, Local Isomorphism of Compact Connected Lie Groups, *Pac. J. Math.* 22 (1967), 197-204.
- [Ba-Br] P. BAUM & W. BROWDER, The Cohomology of Quotients of Classical Groups, *Topology* 3 (1965), 305-336.

- [Bieb] L. BIEBERBACH, Ueber die Minkowskische Reduktion der Positiven Quadratischen Formen und die Endlichen Gruppen Linear Ganzzahliger Substitutionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* (1912), 207-216.
- [Bour1] N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie (chapitres IV, V et VI), *Hermann, Paris* (1968).
- [Bour2] N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres de Lie (chapitre IX), *Masson, Paris* (1982).
- [Bour3] N. BOURBAKI, Algèbre Commutative (Chapitres 8 et 9), *Masson, Paris* (1983).
- [B-M1] V.M. BURSTABER & A.S. MISCENKO, K -theory on the Category of Infinite Cell Complexes, *Math. USSR-Izvestja* 2 (1968) no 3, 515-556.
- [B-M2] V.M. BURSTABER & A.S. MISCENKO, Elements of Infinite filtration in K -Theory, *Soviet Math. Dokl.* 9 (1968) no 1, 256-259.
- [Br-tD] Th. BRÖCKER & T. tomDIECK, Representations of Compact Lie Groups, *Springer Verlag, Berlin* (1985).
- [CWW] M. CURTIS, A. WIEDERHOLD & B. WILLIAMS, Normalizers of Maximal Tori, *Springer Lecture Notes in Math.*, No 418 (1974), 31-47.
- [tomD] T. tom DIECK, Transformation Groups and Representation Theory, *Springer Lecture Notes in Math.*, No 766 (1979).
- [Dold] A. DOLD, Partitions of Unity in the Theory of Fibrations, *Ann. of Math.* 78 (1963), 223-255.
- [DMW] W.G. DWYER, H.R. MILLER & C.W. WILKERSON, Homotopical Uniqueness of classifying Spaces, *Topology* 31 (1992), 29-45.
- [Far] D. FARKAS, Multiplicative Invariants, *Enseign. Math* 30 (1984), 141-157.
- [Fu-La] W. FULTON & S. LANG, Riemann-Roch Algebra, *Springer Verlag* (1985).
- [G-Y] J. GRACE & A. YOUNG, The Algebra of Invariants, *Cambridge University Press, Cambridge* (1903) [Reprinted by *Strechert, NY* (1941)]
- [Hoch] G. HOCHSCHILD, The Structure of Lie Groups, *Holden-Day, Inc.* (1965).
- [Huet] G. HUET, An Algorithm to Generate the Basis of Solutions to Homogeneous Linear Diophantine Equations, *Information Processing Letters* 7 (1978), 144-147.
- [Hum1] J.E. HUMPHREYS, Reflections Groups and Coxeter Groups, *Cambridge University Press* (1992).

- [Hum2] J.E. HUMPHREYS, Introduction to Lie Algebra and Representation Theory, *Springer-Verlag*, Graduate Texts in Math. #9 (1972).
- [Huse] D. HUSEMOLLER, Fibre Bundles, *Springer-Verlag* (1966) [Second Edition].
- [JMO1] S. JACKOWSKI, J.E. McCLURE & B. OLIVER, Homotopy Classification of Self-Maps of BG via G -actions, Part I, *Ann. of Math.* 135 (1992), 183-226.
- [JMO2] S. JACKOWSKI, J.E. McCLURE & B. OLIVER, Self-Homotopy Equivalences of BG , *preprint*.
- [Kane] R.M. KANE, The Homology of Hopf Spaces, *North-Holland* (1988).
- [Kap] I. KAPLANSKY, Commutative rings, *Allyn & Bacon Inc.* (1970).
- [Kar] M. KAROUBI, K -theory - An Introduction, *Springer Verlag* (1978).
- [Knu] D. KNUTSON, Binomial λ -Rings and a Topological Corollary, *Proc. AMS* 50 (1975), 83-84.
- [Mi-To] M. MIMURA & H. TODA, Topology of Lie Groups I and II, *American Mathematical Society*, Translations of Mathematical Monographs #20 (1991).
- [Mø] J. MØLLER, Rational Equivalences Between Classifying Spaces, *preprint* (1992).
- [Mi-St] J.W. MILNOR & J. STASHEFF, Characteristic Classes, *Princeton University Press, Princeton* (1974).
- [New] M. NEWMAN, Integral Matrices, *Academic Press, New-York & London* (1972).
- [Not1] D. NOTBOHM, Maps Between Classifying Spaces, *Math. Zeit* 207 (1991), 153-168.
- [Not2] D. NOTBOHM, On the Functor 'Classifying Space' for Compact Lie Groups, *preprint* (1992).
- [NS1] D. NOTBOHM & L. SMITH, Fake Lie Groups and Maximal Tori I, *Math. Ann.* 288 (1990), 637-661.
- [NS2] D. NOTBOHM & L. SMITH, Fake Lie Groups and Maximal Tori III, *Math. Ann.* 290 (1991), 629-642.
- [Osse] A. OSSE, Sur le Classifiant d'un Groupe de Lie Compact Connexe, *Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris* 315 Série I (1992), 833-838.

- [Rec] D.L. RECTOR, Subgroups of Finite Dimensional Topological Groups, *J. Pure and Applied Alg* 1 (1971), 253-273.
- [Sch] H. SCHEERER, Homotopieäquivalente Kompakte Liesche Gruppen, *Topology* 7 (1968)
- [Seg] G.B. SEGAL, The Representation Ring of a Compact Lie group, *Publ. Math. IHES* 34 (1968), 113-128.
- [Ser] J.P. SERRE, Groupes Finis d'Automorphismes d'Anneaux Locaux Réguliers, *Colloque d'Algèbre, E.N.S.J.F., Paris* (1968).
- [Sieb] C. SIEBENNEICHER, λ -ringstrukturen auf dem Burnsidering der Permutationsdarstellungen einer endlichen Gruppe, *Math. Zeit* 146 (1976), 223-238.
- [Smith] L. SMITH (ed.), Classifying Spaces of Compact Lie Groups and Finite Loop Spaces; Problem Session, *Mathematica Gottingensis* Heft 41 (Sept 1991).
- [Sta] J. STASHEFF, Manifolds of the Homotopy type of (non-Lie) Groups, *Bull. AMS* 75 (1969), 998-1000.
- [Wilk] C. WILKERSON, λ -Rings, Binomial Domains & Vector Bundles over $\mathbb{C}P^\infty$, *Comm. Algebra* 10 (3) (1982), 311-328.
- [Zab] A. ZABRODSKY, On Spaces of Functions Between Classifying Spaces, *Israel J. Math.* 76 (1991), 1-26.