



ANTIAUTOMORPHISMES INVOLUTIFS DES FACTEURS DE VON NEUMANN INJECTIFS

THESE

présentée à la Faculté des sciences
pour obtenir le grade de docteur ès sciences
par

T. GIORDANO

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Antiautomorphismes involutifs des facteurs de
von Neumann injectifs

de Monsieur Thierry Giordano

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

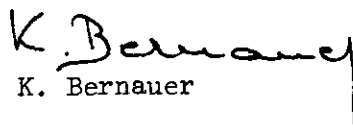
Messieurs R. Bader, P.-L. Aubert,

P. de la Harpe (Genève) et A. Connes (Paris)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 4 août 1981

Le doyen:


K. Bernauer

O. INTRODUCTION .

Soit M , une algèbre de Von Neumann. Rappelons qu'un antiautomorphisme (resp. un automorphisme) α de M est une bijection linéaire de M telle que, pour tout x, y de M ,

$$\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x) \quad (\text{resp. } \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)) \quad \text{et}$$

$$\alpha(x^*) = \alpha(x)^* .$$

Deux antiautomorphismes α et β de M sont conjugués s'il existe un automorphisme θ de M avec $\alpha = \theta \circ \beta \circ \theta^{-1}$.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la classification à conjugaison près, des antiautomorphismes involutifs de M . Ce problème est, d'une part, équivalent à la détermination, à conjugaison près, des involutions antilinéaires, définissant une structure "réelle" sur M , au sens de Kasparov ([13]) et d'autre part, est étroitement lié à la classification, à isomorphisme près, des formes réelles de l'algèbre de Lie involutive, définie par M . ([13]).

Nous obtenons une classification complète pour les facteurs injectifs continus de type II et III_λ , $\lambda \neq 1$, agissant dans un espace de Hilbert séparable, ainsi que pour le facteur d'Araki-Woods de type III_1 .

Rappelons le cas des facteurs discrets . Soient H , un espace de Hilbert séparable ; M , un sous-facteur de type I de $\mathcal{L}(H)$ (i.e. M est isomorphe à $\mathcal{L}(H_n)$, où H_n est un espace de Hilbert de dimension $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) et

$$\{ e_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$$

un système d'unités matricielles (s.u.m.) de M .

La transposition t_n , définie par $t_n(e_{i,j}) = e_{j,i}$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, est un antiautomorphisme involutif (i.e. $t_n^2 = 1$) de M . Si n est impair, tout antiautomorphisme de période deux de M est conjugué à t_n , alors que, si n est pair ou infini, M possède deux classes d'équivalence d'antiautomorphismes involutifs. ([17].[2]).

Soit R , le facteur hyperfini de type II_1 , réalisé comme $\bigotimes_{v \geq 1} (M_{n_v}(\mathbb{C}), \tau_{n_v})$, où $(n_v)_{v \geq 1}$ est une suite d'entiers ≥ 1 et τ_{n_v} est la trace normalisée sur $M_{n_v}(\mathbb{C})$. Le produit tensoriel $t = \bigotimes_v t_{n_v}$ est un exemple d'antiautomorphisme involutif de R .

Soit M , un facteur de Krieger continu (i.e. le produit croisé d'une algèbre de Von Neumann abélienne diffuse $L^\infty(X, \mu)$, par un automorphisme ergodique T). Rappelons que tout élément de M s'écrit de manière unique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n U^n$, où $a_n \in L^\infty(X, \mu)$ et U est un unitaire de M , qui implémente l'action de T sur $L^\infty(X, \mu)$. Nous vérifierons, dans le paragraphe 4, que l'application, qui, à tout $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n U^n$ de M , associe l'élément $\sum_{n \in \mathbb{Z}} U^{-n} a_n$, est un antiautomorphisme involutif de M .

* * * * *

Soit M , une algèbre de Von Neumann, de genre dénombrable; $\text{Aut}(M)$, le groupe de ses automorphismes, muni de la topologie de la convergence simple en norme sur le pré-dual M_* et $\text{Int}(M)$, le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Nous noterons $U(M)$, le groupe des unitaires de M ; ϵ_M , l'homomorphisme canonique de $\text{Aut}(M)$ sur $\text{Out}(M)$, quo-

tient de $\text{Aut}(M)$ par $\text{Int}(M)$; $\text{Ant}(M)$, l'ensemble des antiautomorphismes de M et $A(M)$, le groupe $\text{Aut}(M) \cup \text{Ant}(M)$. Une transposition de M sera un élément involutif de $\text{Ant}(M)$.

Dans le premier paragraphe, nous énonçons et prouvons quelques lemmes préliminaires, qui sont fréquemment utilisés dans la suite de ce travail. En particulier, nous démontrons d'une part, que si α est un antiautomorphisme d'un facteur M , de genre dénombrable, avec $\alpha^2 \in \text{Int}(M)$, il existe une transposition β de M avec $\alpha \cdot \beta \in \text{Int}(M)$ et d'autre part, que si γ est une transposition et u , un unitaire d'une algèbre de Von Neumann, avec $\gamma(u) = u$, $\text{Ad } u \circ \gamma$ et γ sont conjugués par un automorphisme intérieur.

Dans le deuxième paragraphe, nous démontrons pour les antiautomorphismes, un résultat analogue à celui du théorème [7].2.3.1. En effet, si M est un facteur de McDuff (i.e. M est isomorphe à $M \otimes R$, où R est le facteur hyperfini de type II_1), à préduel séparable et $\alpha \in \text{Ant}(M)$, nous construisons un unitaire a de M et un sous-facteur A de M , isomorphe à R , factorisant M en le produit tensoriel de A par son commutant relatif dans M , $A' \cap M$ et tel que

$$\text{Ad } a \circ \alpha|_A = \text{id} .$$

Dans le troisième paragraphe, nous prouvons le théorème ci-dessous, qui est à la base de la classification annoncée :

Théorème 1 : Soient α et β , deux transpositions d'un facteur de McDuff M , à préduel séparable. Alors, il existe $\theta \in \overline{\text{Int}}(M)$, avec $\beta = \theta \circ \alpha \circ \theta^{-1}$ si et seulement si

$$\alpha \cdot \beta \in \overline{\text{Int}}(M) .$$

Le schéma de la preuve, qui est un développement de celle du Théorème 2 de [7], est le suivant : nous construisons deux unitaires a et b de M tels que $\alpha(a) = a$ et $\beta(b) = b$, et une suite de sous-facteurs de type I de M , qui commutent deux à deux, sont laissés globalement fixes par $\text{Ad } a \circ \alpha$ et $\text{Ad } b \circ \beta$ et sont tels que :

a) le sous-facteur K de M , qu'ils engendrent, est isomorphe à R et factorise M en le produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

b) sur $K' \cap M$, $\text{Ad } a \circ \alpha = \text{Ad } b \circ \beta$

Comme $\text{Ad } a \circ \alpha$ et α (resp. $\text{Ad } b \circ \beta$ et β) sont intérieurement conjugués, la démonstration du théorème 1 se réduit à la comparaison de deux transpositions, définies sur K et de type produit tensoriel infini.

dans le quatrième paragraphe, nous généralisons, pour les algèbres de Von Neumann proprement infinies et de genre dénombrable, l'homomorphisme mod , défini dans l'article de A.Connes et M.Takesaki sur le flot des poids, au groupe $A(M)$. Nous montrons, aussi, que, sur tout facteur de Krieger infini, continu, la transposition, définie ci-dessus, est de mod égal à 1.

Dans le cinquième paragraphe, nous établissons une bijection entre les classes d'équivalence de transpositions d'un facteur de Krieger infini, continu M et les classes de conjugaison d'automorphismes involutifs de son flot des poids. Une application du théorème 1 et le fait que le noyau de la restriction de mod à $\text{Aut}(M)$ est égal à $\overline{\text{Int}(M)}$, ([10].Th.15),

démontrent l'injectivité. La surjectivité découle de l'énoncé suivant, que nous prouvons par une méthode proche de celle du théorème 1 : si N est un facteur de McDuff de type III, à préduel séparable et α un antiautomorphisme de N avec $\alpha^2 \in \overline{\text{Int}}(N)$, il existe une transposition β de N avec $\alpha \circ \beta \in \overline{\text{Int}}(N)$. Cela est donc la généralisation aux automorphismes approximativement intérieurs, du résultat démontré dans le premier paragraphe.

Dans le sixième paragraphe, nous appliquons les résultats du cinquième aux facteurs continus, injectifs, "connus" et obtenons la classification annoncée dans [14], à savoir :

(a) Deux transpositions du facteur hyperfini de type II_1 sont conjuguées.

(b) Il en est de même pour le facteur injectif de type II_∞ et pour le facteur d'Araki-Woods de type III_1 .

(c) Pour chaque $\lambda \in]0,1[$, le facteur de Powers, R_λ , possède exactement deux classes d'équivalence de transpositions.

(d) Si M est un facteur injectif de type III_0 , il existe une bijection entre les classes d'équivalence de transpositions de M et les classes de conjugaison d'automorphismes involutifs du flot des poids de M .

L'assertion (a) a été obtenue, en collaboration avec V.F. Jones et a été annoncée dans [15]. Signalons aussi l'existence d'une démonstration de (a), tout à fait différente, due à E. Størmer [29].

Pour chaque $\lambda \in]0,1[$, nous exhibons aussi une transposition de R_λ de module $\sqrt{\lambda}$ modulo $\{\lambda^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et, pour tout n , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, un facteur injectif de type III₀ avec 2^n classes d'équivalence de transpositions.

Enfin, dans l'appendice A, nous rappelons la définition des semi-normes $\| \cdot \|_\phi$ et $\| \cdot \|_\phi^*$ sur une algèbre de Von Neumann M , où $\phi \in M_*^+$ et nous énonçons quelques inégalités, souvent appliquées sans référence dans ce travail.

Dans l'appendice B, nous rappelons la définition du centralisateur asymptotique d'une algèbre de Von Neumann, donnée dans [3]. Nous y démontrons aussi deux lemmes techniques, les lemmes B.4 et B.5, sur les suites ω -centralisantes, que nous utiliserons fréquemment ci-après.

* * * * *

Je remercie très sincèrement M. R. Bader, qui m'a suivi et soutenu tout au long de ce travail. Qu'il reçoive ici le témoignage de ma reconnaissance.

Ma gratitude s'adresse également aux autres membres du jury, MM. P.-L. Aubert, A. Connes et P. de la Harpe. Un merci tout particulier à ce dernier qui m'a suggéré la possibilité de cette recherche, ainsi qu'à MM. O. Besson et V. Jones, pour de fructueuses conversations.

Ce travail a été réalisé grâce au soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique (requêtes no. 2.237 - 0.79 et 2.643 - 0.80).

I. QUELQUES LEMMES PRELIMINAIRES.

Nous prouvons ici deux résultats que nous utiliserons très souvent dans la suite de ce travail, à savoir la proposition 1.2 et surtout le lemme 1.6.

Ce dernier démontre que si $\psi \in M_*^+$, α est un antiautomorphisme et u , un unitaire d'une algèbre de Von Neumann continue M , avec $\alpha^2 = \text{Ad } u$ et $\alpha(u) = u^*$, il existe alors un unitaire v de M tel que $\text{Ad } v \circ \alpha$ est une transposition de M et tel que $\|v - 1\|_\psi \leq 2 \|u - 1\|_\psi$.

Lemme 1.1 : Soient M , une algèbre de Von Neumann et $\alpha \in A(M)$.

Pour tout unitaire u de M , tel que $\alpha(u) = u$, il existe un unitaire $v \in M$ avec $u = v\alpha(v)$. De plus, si $\psi \in M_*^+$, v peut être choisi tel que $\|v - 1\|_\psi \leq \|u - 1\|_\psi$.

Démonstration : Considérons la décomposition spectrale

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda) \quad \text{et posons} \quad v = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda/2} dE(\lambda).$$

v est un unitaire de l'algèbre de Von Neumann U , engendrée par u . Remarquons aussi que $v^2 = u$ et que, comme α laisse U invariant point par point, $u = v\alpha(v)$. Notons E_ψ , la mesure borélienne, positive, bornée, définie par

$$E_\psi(\omega) = \psi(E(\omega)), \quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{B}(-\pi, \pi]$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \|v - 1\|_\psi^2 &= \psi(2 - v - v^*) = \int_{-\pi}^{\pi} (2 - e^{i\lambda/2} - e^{-i\lambda/2}) dE_\psi(\lambda) \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\lambda/2) dE_\psi(\lambda). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u - 1\|_{\psi}^2 &= \psi(2 - u - u^*) = \int_{-\pi}^{\pi} (2 - e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}) dE_{\psi}(\lambda) \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos\lambda) dE_{\psi}(\lambda) \end{aligned}$$

Or, $1 - \cos\lambda/2 \leq 1 - \cos\lambda$, pour tout $\lambda \in]-\pi, \pi]$ et donc

$$\|v - 1\|_{\psi} \leq \|u - 1\|_{\psi}$$

qed.

Proposition 1.2 : Soient α , une transposition et u , un unitaire d'une algèbre de Von Neumann M . Si $\alpha(u) = u$, alors α et $\text{Ad } u \circ \alpha$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur.

Démonstration : Par le lemme 1.1, u peut s'écrire $v\alpha(v)$.

Donc, $\text{Ad } u \circ \alpha = \text{Ad } (v\alpha(v)) \circ \alpha = \text{Ad } v \circ \alpha \circ \text{Ad } v^*$.

qed.

Lemme 1.3 : Soient M une algèbre de Von Neumann ; $\alpha \in \text{Ant}(M)$

et u un unitaire de M tels que $\alpha^2 = \text{Ad } u$ et $\alpha(u) = u^*$.

Si $-i$ n'est pas une valeur propre de u , il existe un unitaire $v \in M$ avec $u^* = v\alpha(v^*)$.

Si, de plus, $\psi \in M_{*}^{+}$, alors v peut être choisi tel que

$$\|v - 1\|_{\psi} \leq \|u - 1\|_{\psi}.$$

Démonstration : Considérons l'unique résolution E de l'identité telle que

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

Comme, par hypothèse, $\alpha(u) = u^*$, nous avons $\text{Sp}(u) = \overline{\text{Sp}(u)}$

et $\alpha(E(\omega)) = E(-\omega)$ pour tout ensemble borélien ω de $]-\pi, \pi]$.

Comme $E(\{\pi\}) = 0$, nous avons :

$$\int_{|\lambda| \leq \pi} f(\lambda) dE(\lambda) = \int_{|\lambda| < \pi} f(\lambda) dE(\lambda) \quad , \quad \forall f \in L^{\infty}_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$$

Alors,

$$v = \int_{|\lambda| < \pi} e^{-1\lambda/2} dE(\lambda) \quad \text{est un unitaire de } M \text{ avec}$$

$v^2 = u^*$ et $\alpha(v) = v^*$. Ainsi, nous avons bien $u^* = v\alpha(v^*)$.

Par un calcul tout à fait semblable à celui du lemme 1.1, on

vérifie que $\|v - 1\|_{\psi} \leq \|u - 1\|_{\psi}$.

qed.

Lemme 1.4 : Soit M , une algèbre de Von Neumann continue, de genre dénombrable. Deux s.u.m. d'ordre $n < \infty$ sont, alors, unitairement équivalents.

Démonstration : Comme M est isomorphe à une somme directe de deux algèbres continues, l'une finie, l'autre proprement infinie, il suffit de démontrer le lemme dans ces deux cas.

Soient $(e_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ et $(f_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ deux s.u.m. d'une algèbre de Von Neumann M . Pour montrer

qu'ils sont unitairement équivalents, il suffit de vérifier

que $e_{11} \sim f_{11}$. En effet, il existe alors une isométrie parti-

tielle w de M telle que $w^*w = e_{11}$, $ww^* = f_{11}$. Posons

$u = \sum_{j=1}^n f_{j,1} w e_{1,j}$. C'est un unitaire de M tel que

$$\text{Ad } u (e_{a,t}) = f_{a,t} \quad , \quad \forall s,t$$

Si M est finie, continue, nous avons $n(e_{11})^{\natural} = n(f_{11})^{\natural} = 1$

où \natural désigne la trace centrale canonique sur M , donc $e_{11} \sim f_{11}$

Si M est continue, proprement infinie, tant e_{11} , que f_{11}

sont proprement infinis, donc, comme M est de genre dénombra-

ble, par la prop. 4.13 de [30], $e_{11} \sim f_{11}$.

Lemme 1.5 : Soient M une algèbre de Von Neumann continue, de genre dénombrable et α une transposition de M . Il existe alors un unitaire v de M avec $\alpha(v) = -v$.

Démonstration : Soit $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ un s.u.m. de M . Par le lemme 1.4, il existe $w \in U(M)$ tel que $wa(e_{j,1})w^* = e_{1,j}$. Comme α est une transposition,

$$\text{Ad}(wa(w^*)) (e_{i,j}) = (\text{Ad } w \circ \alpha)^2 (e_{i,j}) = e_{i,j}$$

et donc $wa(w^*)$ commute aux $e_{i,j}$ ($1 \leq i,j \leq 2$). Posons u , l'unitaire de M , égal à $e_{1,2}w + e_{2,1}\alpha(w)$, et $\beta = \text{Ad } u \circ \alpha$

Nous avons:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \alpha(w)\alpha(e_{1,2}) + wa(e_{2,1}) = \alpha(w)(w^*e_{2,1}w) + w(w^*e_{1,2}w) \\ &= e_{2,1}(\alpha(w)w^*)w + e_{1,2}w = u \end{aligned}$$

et donc, par la proposition 1.2, β est une transposition, intérieurement conjuguée à α . Comme

$$\begin{aligned} \beta(e_{11}) &= \text{Ad } u \circ \alpha(e_{11}) = \text{Ad } u (\text{Ad } w^* (e_{11})) = \\ &= (e_{1,2} + e_{2,1}\alpha(w)w^*)e_{11}(e_{2,1} + e_{1,2}wa(w^*)) = e_{22}, \end{aligned}$$

l'unitaire $v' = 2e_{11} - 1 = e_{11} - e_{22}$ est tel que $\beta(v') = -v'$.

Comme un conjugué de α satisfait la conclusion de 1.5, il en est de même de la transposition α .

qed.

Remarque 1.5.1 : Une autre démonstration de ce lemme a été donnée par E. Størmer dans [28] (Lemme 2.12).

Lemme 1.6 : Soient M , une algèbre de Von Neumann continue, de genre dénombrable ; $\alpha \in \text{Ant}(M)$ et u un unitaire de M tel que $\alpha^2 = \text{Ad } u$ et $\alpha(u) = u^*$. Il existe alors un unitaire $v \in M$, avec $u^* = va(v^*)$. De plus, si $\psi \in M_*^+$, alors v peut être choisi tel que $\|v - 1\|_\psi \leq 2 \|u - 1\|_\psi$.

Démonstration : Décomposons u en $-p + w$ où p est le projecteur spectral de u , associé à la valeur propre -1 et w un opérateur partiellement isométrique avec $ww^* = w^*w = 1 - p$.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } \|u - 1\|_\psi^2 &= \|-2p + w - (1 - p)\|_\psi^2 \\ &= \|-2p\|_\psi^2 + \|w - (1 - p)\|_\psi^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \|p\|_\psi \leq (1/2) \|u - 1\|_\psi \quad \text{et} \quad \|w - (1 - p)\|_\psi \leq \|u - 1\|_\psi$$

Comme, par hypothèse, $\alpha(u) = u^*$, nous avons $\alpha(p) = p$ et donc, par restriction, α définit un antiautomorphisme de l'algèbre de Von Neumann continue $M_p (= pMp)$. De plus, comme $\alpha^2 = \text{Ad } u$, α est une transposition de M_p . Donc, par le lemme 1.5, il existe un unitaire x de pMp tel que

$$\alpha(x) = -x \quad \text{et} \quad \|x\|_\psi = \psi(x^*x)^{1/2} = \psi(p)^{1/2} = \|p\|_\psi$$

Sur M_{1-p} , α est un antiautomorphisme avec $\alpha^2 = \text{Ad } w$ et $\alpha(w) = w^*$. Par le lemme 1.3, il existe alors $y \in M$ tel que $yy^* = y^*y = 1-p$, $ya(y^*) = w^*$ et $\|y - (1-p)\|_\psi \leq \|w - (1-p)\|_\psi$.

Posons $v = ix + y$. C'est un unitaire de M avec

$$\begin{aligned} va(v^*) &= (ix + y)\alpha(-ix^* + y^*) = (ix + y)(ix^* + \alpha(y^*)) \\ &= -xx^* + ya(y^*) = -p + w^* = u^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v - 1\|_\psi &= \|ix - p + y - (1-p)\|_\psi \leq \|ix - p\|_\psi + \|y - (1-p)\|_\psi \\ &\leq 2 \|p\|_\psi + \|w - (1-p)\|_\psi \leq 2 \|u - 1\|_\psi \end{aligned}$$

ged.

Remarque 1.7. : Soient M un facteur, de genre dénombrable et α un antiautomorphisme de M , dont le carré est intérieur. Il existe alors une transposition β de M avec $\alpha \circ \beta \in \text{Int}(M)$.

Démonstration : Si M est un facteur de type I, la remarque est triviale. Nous pouvons donc supposer que M est un facteur continu. Comme $\alpha^2 \in \text{Int}(M)$, il existe un unitaire w de M avec $\alpha^2 = \text{Ad } w$ et donc $w\alpha(w) = \lambda 1 \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, car

$$\text{Ad } w \circ \alpha = \alpha^3 = \alpha \circ \text{Ad } w = \text{Ad } \alpha(w^*) \circ \alpha$$

Posons $u = \lambda^{-1/2} w$. Nous avons alors $\alpha^2 = \text{Ad } u$ et $\alpha(u) = u^*$. Par le lemme 1.6, il existe $v \in U(M)$ tel que $v\alpha(v^*) = u^*$ et donc tel que $\text{Ad } v \circ \alpha$ soit une transposition de M . La remarque est donc vérifiée en posant $\beta = \text{Ad } v \circ \alpha$

qed.

Lemme 1.8 : Soient M une algèbre de Von Neumann continue et α , une transposition de M . Pour tout $1 \leq n < \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, il existe un s.u.m. $(f_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de M avec

$$\alpha(f_{i,j}) = \lambda^{i-j} f_{j,i}, \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n.$$

Démonstration : Soit $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un s.u.m. de M .

Montrons qu'il existe un opérateur partiellement isométrique w de M tel que $w^*w = e_{11}$, $ww^* = \alpha(e_{11})$ et $\alpha(w) = w$.

Posons $e'_{i,j} = \alpha(e_{j,i})$, pour $1 \leq i,j \leq n$. C'est un s.u.m. de M et donc, par le lemme 1.4, $e_{11} \sim e'_{11} = \alpha(e_{11})$. Soit alors v , une isométrie partielle de M avec $vv^* = e_{11}$ et $v^*v = \alpha(e_{11})$. Comme $\alpha^2 = 1$, nous avons aussi

$\alpha(v^*)\alpha(v) = e_{11}$ et $\alpha(v)\alpha(v^*) = \alpha(e_{11})$. Soit $x = \alpha(v^*)v$.
C'est un unitaire de $e_{11}Me_{11}$ tel que

$$(\text{Ad } v^* \circ \alpha)^2 = \text{Ad } (v^*\alpha(v)) = \text{Ad } x^* \quad \text{et}$$

$$\text{Ad } v^* \circ \alpha(x^*) = v^*\alpha(v^*\alpha(v))v = v^*va(v^*)v = e_{11}x = x$$

Donc, par le lemme 1.6, appliqué à $e_{11}Me_{11}$, $\text{Ad } v^* \circ \alpha$ et x^* ,
il existe $y \in e_{11}Me_{11}$ avec $y^*y = yy^* = e_{11}$ et
 $y\text{Ad } v^* \circ \alpha(y^*) = x$. Posons $w = vy^*$. Nous avons :

$$w^*w = yv^*vy^* = ye_{11}y^* = yy^* = e_{11}$$

$$ww^* = vy^*yv^* = ve_{11}v^* = \alpha(e_{11})$$

Vérifions aussi que : $\alpha(w) = w$. En effet, nous avons

$$y\text{Ad } v^* \circ \alpha(y^*) = x = \alpha(v^*)v \implies yv^*\alpha(y^*) = \alpha(v^*) \implies$$

$$yv^* = \alpha(v^*)\alpha(y) = \alpha(yv^*) \implies w^* = \alpha(w^*)$$

Posons $u = \sum_{j=1}^n \lambda^j \alpha(e_{1,j})we_{1,j}$. C'est un unitaire de M tel que

$$\begin{aligned} \text{Ad } u(e_{t,s}) &= \sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} \alpha(e_{1,j})we_{1,j}e_{t,s}e_{1,l}w^*\alpha(e_{1,l}) \\ &= \lambda^{t-s} \alpha(e_{1,t})we_{1,t}e_{t,s}e_{s,l}w^*\alpha(e_{s,l}) \\ &= \lambda^{t-s} \alpha(e_{1,t})\alpha(e_{11})\alpha(e_{s,l}) = \lambda^{t-s} \alpha(e_{s,t}) \end{aligned}$$

pour $1 \leq s, t \leq n$, et

$$\alpha(u) = \sum_{j=1}^n \lambda^j \alpha(e_{1,j})\alpha(w)e_{1,j} = \sum_{j=1}^n \lambda^j \alpha(e_{1,j})we_{1,j} = u$$

Donc, par le lemme 1.1, il existe un unitaire a de M avec
 $u = \alpha(a)a$. Posons $f_{1,j} = ae_{1,j}a^*$, pour $1 \leq i, j \leq n$. Les $f_{i,j}$
forment un s.u.m. qui satisfait les conclusions du lemme, car

$$\begin{aligned} \alpha(f_{1,j}) &= \alpha(a^*)\alpha(e_{1,j})\alpha(a) = \alpha(a^*)u(\lambda^{1-j}e_{j,1})u^*\alpha(a) \\ &= a(a^*\alpha(a^*))u\lambda^{1-j}e_{j,1}u^*(\alpha(a)a)a^* = \lambda^{1-j}ae_{j,1}a^* \\ &= \lambda^{1-j}f_{j,1} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

qed.

2. FACTORISATION DES ANTI-AUTOMORPHISMES PAR DES ANTI-AUTOMORPHISMES DU FACTEUR HYPERFINI DE TYPE II_1

Le principal résultat, démontré ici, est la proposition 2.3. Pour tout antisautomorphisme α d'un facteur de McDuff M , à préduel séparable, nous construisons, pour toute suite $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 , un unitaire a de M et une suite $\{(e_{i,j}^\nu)_{1 \leq i,j \leq n_\nu}\}_{\nu \geq 1}$ de s.u.m. de M , commutant deux à deux, et satisfaisant les conditions suivantes :

(a) Pour tout $\nu \geq 1$, $Ad a \circ \alpha(e_{i,j}^\nu) = e_{j,i}^\nu$ ($1 \leq i,j \leq n_\nu$)

(b) Le sous-facteur K de type II_1 , engendré par les $e_{i,j}^\nu$, factorise M en le produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

Nous montrons, de plus, que si α est une transposition de M , nous pouvons choisir a tel que $\alpha(a) = a$ et donc tel que $Ad a \circ \alpha$ est une transposition.

Commençons ce chapitre par rappeler, pour être complet, un résultat bien connu.

Lemme 2.0 : Soit N , une algèbre de Von Neumann finie.

Si, pour tout $n \geq 1$, il existe une partition de l'unité

$(p_j)_{j=1, \dots, n}$ dans N , alors N est continue.

Démonstration : Remarquons tout d'abord, qu'il suffit de vérifier l'assertion suivante :

(1) Tout projecteur non nul f de N majore un projecteur f_1 avec $c(f_1)c(f-f_1) \neq 0$.

($c(f_1)$ désigne le projecteur central de f_1 dans N)

En effet, soit e , un projecteur abélien de N . Si $e \neq 0$, il existe un projecteur $e_1 \leq e$ tel que $c(e_1)c(e-e_1) \neq 0$. Par conséquent, ([30]. Cor.4.5), il existe deux projecteurs non nuls, équivalents, $f_1 \leq e_1$ et $f_2 \leq e-e_1$. Comme e est abélien et que $f_1 \sim f_2$, $f_1 = ec(f_1) = ec(f_2) = f_2$. Or, cela est impossible, car, par construction, $f_1 f_2 = 0$. N ne possède donc pas de projecteur abélien non nul, ce qui prouve que N est continue.

Démontrons maintenant (1). Soient f , un projecteur non nul de N et f^h , son image dans $Z(N)$, le centre de N , par l'application h canonique de N ([30].7.11). De par les propriétés de h , $f^h > 0$, donc il existe un $\epsilon > 0$ et un projecteur $p \neq 0$ de $Z(N)$ tel que $f^h p > \epsilon p$. Soient alors $m \in \mathbb{N}$, tel que $1/m \leq \epsilon$ et $(e_j)_{1 \leq j \leq m}$ une partition de l'unité dans N . Comme $\sum_{j=1}^m e_j = 1$ et que $e_i \sim e_j$, $e_i^h = 1/m \cdot 1$. $p_1 = p e_1$ est alors un projecteur de N avec

$$p_1^h = p e_1^h = (1/m)p \leq \epsilon p < f^h.$$

Par conséquent, ([30].7.12), $p_1 \prec f$. Soit f_1 , un projecteur de N avec $p_1 \sim f_1$, $f_1 \leq f$. Vérifions que

$$c(f_1)c(f-f_1) \neq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} c(f_1)c(f-f_1) &= p c(e_1)c(f-f_1) \geq p(f-f_1)^h = p(f^h - p_1^h) \\ &= p(f^h - (1/m)p) > 0 \end{aligned}$$

qed.

Lemme 2.1 : Soient M , un facteur de McDuff à préduel séparable ; $\alpha \in \text{Ant}(M)$; p , un entier ≥ 2 ; $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ et ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} . Alors, il existe un a.u.m. $(F_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ dans M_ω tel que

$$\alpha_\omega(F_{i,j}) = \lambda^{1-j} F_{j,i} \quad (1 \leq i, j \leq p)$$

Démonstration : Par le théorème 2.2.1 de [7], M_ω est une algèbre de Von Neumann de type II_1 . Si la période asymptotique de α^2 , $p_\alpha(\alpha^2)$, est nulle, le théorème [7]. 2.1.] implique que α_ω^2 est stable, et donc, par les lemmes 2.0 et [7].2.1.] , $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$ est de type II_1 . Si $p_\alpha(\alpha^2) = n > 0$, α_ω^{2q} est proprement extérieur pour $1 \leq q \leq n-1$ et $\alpha_\omega^{2n} = 1$, par [7].Prop.2.1.2, et donc $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$ est une algèbre de type II_1 ([9].III.2.15).

Pour terminer la preuve, il suffit alors d'appliquer le lemme 1.8 à $(M_\omega)^{\alpha_\omega^2}$ et à α_ω .

qed.

Lemme 2.2 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable ; $\alpha \in \text{Ant}(M)$; p , un entier ≥ 2 et ϕ , un état normal, fidèle de M . Alors, pour $\psi_1, \dots, \psi_q \in M_*$ et $\epsilon > 0$, il existe un unitaire $a \in M$ et un s.u.m. $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ de M , satisfaisant les conditions suivantes :

(a) $\|[\psi_r, e_{i,j}]\| \leq \epsilon$ pour $r = 1, \dots, q$ et $1 \leq i, j \leq p$.

(b) $\text{Ad } a \circ \alpha(e_{i,j}) = e_{j,i}$ pour $1 \leq i, j \leq p$.

(c) $\|a - 1\|_\phi \leq \epsilon$

et si α est une transposition,

(d) $\alpha(a) = a$.

Démonstration : Soit ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} . Par le lemme 2.1, il existe un a.u.m. $(F_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ dans M_ω tel que $\alpha_\omega(F_{i,j}) = F_{j,i}$ ($1 \leq i, j \leq p$). Soit ([7].Prop.1.1.3) $\{(f_{i,j}^k)_{1 \leq i, j \leq p} \mid k \in \mathbb{N}\}$, un système de suites représentatives de $(F_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$, où, pour chaque k , $(f_{i,j}^k)_{1 \leq i, j \leq p}$ est un s.u.m. de M .

Pour chaque k , $f_{1,1}^k$ est équivalent à $\alpha(f_{1,1}^k)$ (Lemme 1.4) et comme $\alpha_\omega(F_{1,1}) = F_{1,1}$, il existe ([7]. 1.1.4) une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs partiellement isométriques telle que $u_k u_k^* = \alpha(f_{1,1}^k)$, $u_k^* u_k = f_{1,1}^k$ et telle que

$$(u_k - f_{1,1}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 0, \quad * \text{- fortement.}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \sum_{j=1}^p \alpha(f_{1,j}^k) u_k f_{1,j}^k \in U(M)$

La suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est ω -centralisante. En effet, pour $1 \leq j \leq p$, tant $(\alpha(f_{1,j}^k))_{k \in \mathbb{N}}$, que $(f_{1,j}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ le sont. De plus, comme $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée telle que

$$(u_k - f_{1,1}^k) \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 0, \quad * \text{- fortement,}$$

$(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi ω -centralisante. Par ailleurs, $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ représente $\sum_{j=1}^p \alpha_\omega(F_{1,j}) F_{1,1} F_{1,j} = 1$ et donc

$$(v_k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 0, \quad * \text{- fortement.}$$

Comme $u_k^* \alpha(f_{1,1}^k) u_k = f_{1,1}^k$, nous avons, pour $1 \leq s, t \leq p$,

$$\begin{aligned} \text{Ad } v_k^* \circ \alpha(f_{s,t}^k) &= \sum_{j=1}^p f_{j,1}^k u_k^* \alpha(f_{j,1}^k) \alpha(f_{s,t}^k) \alpha(f_{1,1}^k) u_k f_{1,1}^k \\ &= f_{t,1}^k u_k^* \alpha(f_{1,1}^k) u_k f_{1,s}^k = f_{t,s}^k. \end{aligned}$$

Comme chaque suite $(f_{i,j}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est ω -centralisante et que

$$(v_k^* - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 0 \quad * \text{- fortement,}$$

il existe k tel que (a), (b) et (c) sont vérifiés, avec $a = v_k^*$

Supposons maintenant, que α est une transposition.

Posons $y_k = v_k^* \alpha(v_k)$ et notons F_k , le sous-facteur de M , engendré par les $f_{1,j}^k$. Par construction,

$$\text{Ad } v_k^* \circ \alpha \in \text{Ant}(F_k' \cap M) \quad \text{et} \quad \text{Ad } y_k \Big|_{F_k} = (\text{Ad } v_k^* \circ \alpha)^2 \Big|_{F_k} = 1,$$

donc $y_k \in F_k' \cap M$. De plus,

$$\text{Ad } v_k^* \circ \alpha(y_k) = v_k^* \alpha(v_k^* \alpha(v_k)) v_k = \alpha(v_k^*) v_k = y_k^*.$$

Comme $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite ω -centralsisante et que

$$v_k \xrightarrow[k \rightarrow \omega]{} 1, \quad * \text{-fortement},$$

il en est de même pour $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En appliquant, pour chaque k ,

le lemme 1.6 à $F_k' \cap M$, $\text{Ad } v_k^* \circ \alpha$ et y_k , nous obtenons une

suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que $\alpha(z_k v_k^*) = z_k v_k^*$,

$$\text{Ad } (z_k v_k^*) \circ \alpha(f_{1,j}^k) = f_{j,i}^k \quad \text{et} \quad z_k v_k^* \rightarrow 1, \quad * \text{-fortement}.$$

La démonstration se termine alors comme ci-dessus.

qed.

Proposition 2.3 : Soient M un facteur de McDuff, à prédual

séparable et $\alpha \in \text{Ant}(M)$. Pour toute suite $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$ d'entiers

$n_\nu \geq 2$, il existe un unitaire $a \in M$ et une suite de s.u.m.

$(e_{1,j}^\nu)_{1 \leq i, j \leq n_\nu}$ dans M , commutant deux à deux et satisfaisant les conditions suivantes :

$$(a) \quad \text{Pour tout } \nu, \quad \text{Ad } a \circ \alpha(e_{1,j}^\nu) = e_{j,i}^\nu \quad (1 \leq i, j \leq n_\nu)$$

Posons A_ν , le sous-facteur de M , engendré par les $e_{1,j}^\nu$.

(b) Les A_ν engendrent un sous-facteur A de type II_1 de M , qui factorise M en le produit tensoriel de A par $A' \cap M$.

De plus, si α est une transposition,

$$(c) \quad \alpha(a) = s.$$

Démonstration : Soient ϕ , un état normal, fidèle sur M et $(\psi_j)_{j \geq 1}$, une suite dense dans M_* . Nous construisons par induction sur v , une suite $(a_v)_{v \geq 1}$, d'unitaires de M et une suite $\{(e_{i,j}^v)_{1 \leq i, j \leq n_v}\}_{v \geq 1}$ de s.u.m. de M , satisfaisant, pour chaque v , les conditions suivantes :

(α) Le facteur A_v , engendré par les $e_{i,j}^v$, commute avec A_1, A_2, \dots, A_{v-1} .

$$(\beta) \quad \|[e_{i,j}^v, \psi_k]\| \leq \frac{2^{-v}}{n_v} \quad \text{pour } k \leq v, 1 \leq i, j \leq n_v$$

$$(\gamma) \quad a_v \in (A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{v-1})'$$
 pour $v > 1$.

$$(\delta) \quad \|(a_v \dots a_1) - (a_{v-1} \dots a_1)\|_{\phi} < 2^{-v} \quad \text{pour } v > 1$$

(ϵ) $\alpha_v = \text{Ad}(a_v \dots a_1) \cdot \alpha$ satisfait $\alpha_v(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k$ pour $k \leq v$.

De plus, si α est une transposition, $\alpha(a_v \dots a_1) = a_v \dots a_1$ pour $v \geq 1$.

Pour $v = 1$, les conditions (α), (γ) et (δ) sont vides et la démonstration de (β) et (ϵ) provient d'une application directe du lemme 2.2 à M , α , n_1 et ψ_1 . Supposons $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_v, a_v)$ construits et déterminons A_{v+1} et a_{v+1} . Soient A^v , le sous-facteur de M , engendré par A_1, \dots, A_v et \tilde{A} , son commutant relatif dans M . Comme M est identique à $A^v \otimes \tilde{A}$, il existe un nombre fini d'éléments $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_r$ de \tilde{A}_* et un $\epsilon > 0$ tels que :

$$(*) \quad [x \in \tilde{A}, \|x\| \leq 1, \|\tilde{\psi}_j, x\| < \epsilon, 1 \leq j \leq r] \implies$$

$$\implies \quad \left[\|\psi_k, x\| \leq \frac{2^{-(v+1)}}{n_{v+1}}, \text{ pour } 1 \leq k \leq v+1 \right]$$

Comme la restriction de ϕ à \tilde{A} est fidèle, il existe $\eta > 0$ avec

$$(*) \quad [a \in U(\tilde{A}) ; \|a - 1\|_{\phi} < \eta] \Rightarrow [\|(a - 1)a_v \dots a_1\|_{\phi}^* < \frac{1}{2^{v+1}}]$$

Posons $\tilde{\alpha}$, la restriction de α_v à \tilde{A} . Si α est une transposition, par hypothèse d'induction,

$$\alpha_v^2 = (\text{Ad } (a_v \dots a_1) \cdot \alpha)^2 = \text{Ad } [(a_v \dots a_1)\alpha(a_v \dots a_1)^*] = 1.$$

Par le lemme 2.2, il existe un a.u.m. $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n_{v+1}}$ et un unitaire \tilde{a} de \tilde{A} tels que :

$$(a) \quad \|[\tilde{\psi}_k, e_{i,j}]\| < \varepsilon \quad \text{pour } 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq i, j \leq n_{v+1}.$$

$$(b) \quad \text{Ad } \tilde{a} \cdot \tilde{\alpha}(e_{i,j}) = e_{j,i}, \quad 1 \leq i, j \leq n_{v+1}$$

$$(c) \quad \|\tilde{a} - 1\|_{\phi} < \eta$$

$$(d) \quad \tilde{\alpha}(\tilde{a}) = \tilde{a}, \quad \text{si } \tilde{a} \text{ est une transposition.}$$

Posons $e_{i,j}^{v+1} = e_{i,j}$ et $a_{v+1} = \tilde{a}$. Nous obtenons (B), par (*) et (a), et (δ), par (*) et (c). La vérification des conditions (α) et (γ) est immédiate. Par (b), nous avons :

$$\alpha_{v+1}(e_{i,j}^{v+1}) = \text{Ad } a_{v+1} \cdot \alpha_v(e_{i,j}^{v+1}) = e_{j,i}^{v+1} \quad (1 \leq i, j \leq n_{v+1})$$

et pour $k \leq v$

$$\alpha_{v+1}(e_{i,j}^k) = \text{Ad } a_{v+1} \cdot \alpha_v(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k \quad (1 \leq i, j \leq n_k)$$

car, par construction, a_{v+1} commute avec $\alpha_v(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k$

De plus, si α est une transposition, nous avons par (d),

$\alpha_v(a_{v+1}) = a_{v+1}$ et donc, en utilisant l'hypothèse d'induction,

$$\begin{aligned} \alpha(a_{v+1} \dots a_1) &= \alpha(a_v \dots a_1) \alpha(a_{v+1}) = \\ &= (a_v \dots a_1) \alpha(a_{v+1}) (a_v \dots a_1)^* (a_v \dots a_1) \\ &= \alpha_v(a_{v+1}) (a_v \dots a_1) = (a_{v+1} \dots a_1). \end{aligned}$$

La vérification de (ε) est donc terminée.

Fin de la démonstration : Comme ϕ est fidèle et par (δ) ,
 $(a_\nu \dots a_1)_{\nu \geq 1}$ converge *-fortement vers un unitaire $a \in M$, qui
satisfait, si α est une transposition, $\alpha(a) = a$ (par (ϵ)),
ce qui démontre (c) . De plus, nous avons, pour tout $k \geq 1$,
 $\text{Ad } a \cdot \alpha(e_{i,j}^k) = e_{j,i}^k$ ($1 \leq i, j \leq n_k$), ce qui prouve (a).
Par (β) et les lemmes 2.3.5 et 2.3.6 de [7], les A_ν engen-
drent un sous-facteur A de type II_1 , qui factorise M en
 $A \otimes (A' \cap M)$, ce qui démontre (b) .

qed.

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Rappelons l'énoncé du théorème 1 , mais auparavant, donnons la définition suivante :

Définition : Soient M , une algèbre de Von Neumann et H , un sous-groupe de $A(M)$. Deux éléments de $A(M)$ α et β sont dits H - équivalents s'il existe $\theta \in H$ tel que

$$\beta = \theta \circ \alpha \circ \theta^{-1} .$$

Théorème 1 : Soient α et β deux transpositions d'un facteur de McDuff M , à préduel séparable. Alors, α et β sont $\overline{\text{Int}}(M)$ - équivalentes si et seulement si $\alpha \circ \beta \in \overline{\text{Int}}(M)$.

Comme $\overline{\text{Int}}(M)$ est un sous-groupe normal de $A(M)$, la nécessité de la condition est évidente.

La démonstration de la suffisance de la condition se divise en trois parties. La première, composée du lemme 3.1, nous permet de supposer que α et β sont telles que:

(a) la période asymptotique ([7].Déf.2.1.1) de $\alpha \circ \beta$ est nulle.

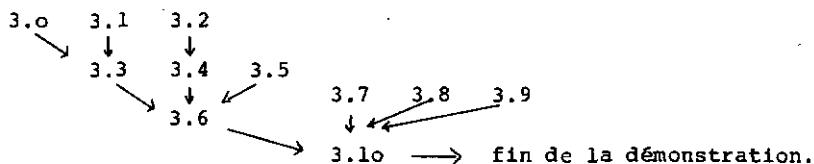
(b) si ω est un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} , alors, pour tout entier $p \geq 2$, il existe une partition de l'unité

$(P_j)_{0 \leq j \leq p-1}$, dans M_ω telle que, pour $0 \leq j \leq p-1$,

$$\alpha_\omega(P_j) = P_{-j+1} \quad \text{et} \quad \beta_\omega(P_j) = P_{-j} .$$

Le point principal de la deuxième partie est la preuve du lemme 3.6 , qui sera appliqué, de manière récursive, dans la démonstration du lemme 3.10 , qui est le coeur de la troisième partie.

Plus précisément, le schéma logique de la preuve du théorème 1 est le suivant :



Le lemme 3.0 est certainement bien connu, mais nous en donnons une démonstration afin d'être complet .

Lemme 3.0 : Soient M , une algèbre de Von Neumann continue et $n \in \mathbb{N}$. Si $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une partition de l'unité dans M , alors le commutant relatif dans M des $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une algèbre continue .

Démonstration : Comme, pour $1 \leq j \leq n$, p_j et p_{j+1} sont équivalents ($p_{n+1} = p_1$) , il existe des opérateurs partiellement isométriques u_j de M avec $u_j^* u_j = p_j$, $u_j u_j^* = p_{j+1}$. Posons u , l'unitaire $\sum_{j=1}^n u_j$ et soit P , le sous-facteur de type I de M , engendré par le s.u.m. $\{ e_{i,j} = u^{i-j} p_j \mid 1 \leq i, j \leq n \}$. Le commutant relatif dans M des $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n \otimes (P' \cap M)$ et donc est continue. En effet, comme tout $x \in M$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j=1}^n x_{i,j} e_{i,j}$ avec $x_{i,j} \in (P' \cap M)$, si $y \in \{ (p_j)_{1 \leq j \leq n} \}' \cap M$, $y = \sum_{i=1}^n y_{i,i} e_{i,i}$.

qed.

Lemme 3.1 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable ; α , β des transpositions de M et ω , un ultra-filtre libre sur \mathbb{N} . Il existe alors deux transpositions $\tilde{\alpha}$, $\overline{\text{Int}}(M)$ - équivalente à α et $\tilde{\beta}$, $\overline{\text{Int}}(M)$ - équivalente à β , satisfaisant les conditions suivantes :

(a) $p_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}) = 0$.

(b) Pour tout entier $p \geq 2$, il existe une partition de l'unité $(P_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ dans M_{ω} telle que :

$$\tilde{\alpha}_{\omega}(P_1) = P_{-1+1} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_{\omega}(P_1) = P_{-1} \quad (0 \leq i \leq p-1).$$

Remarque : Les indices sont calculés modulo p .

Démonstration : Soit $(\psi_j)_{j \geq 1}$, une suite dense dans M_* .

Commençons par démontrer l'assertion suivante :

Assertion : Pour toute suite $(n_v)_{v \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 , il existe une suite $\{(e_{1,j}^v)_{0 \leq i, j \leq n_v}\}_{v \geq 1}$ de s.u.m. de M , commutant deux à deux et deux transpositions α_1 , $\overline{\text{Int}}(M)$ - équivalente à α et β_1 , $\overline{\text{Int}}(M)$ - équivalente à β , telles que, pour tout $v \geq 1$,

(1) $\|[\psi_r, e_{1,j}^v]\| \leq \frac{2^{-v}}{(n_v+1)^2}$ pour $r \leq v$, $0 \leq i, j \leq n_v$.

(2) $\alpha_1(e_{1,j}^v) = \beta_1(e_{1,j}^v) = e_{j,1}^v \quad (0 \leq i, j \leq n_v)$.

Démonstration de l'assertion : Soit $(m_k)_{k \geq 1}$, la suite d'entiers dont les premiers termes sont :

$$n_1, n_1, n_2, n_1, n_2, n_3, n_1, n_2, n_3, n_4, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_1, \dots$$

Par la proposition 2.3 et sa démonstration, appliquée à α

(resp. β) et à la suite $(m_k)_{k \geq 1}$, il existe un unitaire a (resp. b), une suite $\{(f_{i,j}^k)_{0 \leq i, j \leq m_k}\}$ (resp. $\{(g_{i,j}^k)_{0 \leq i, j \leq m_k}\}$) de s.u.m. de M , commutant deux à deux et tels que, pour tout $k \geq 1$,

(a) $\text{Ad } a \circ \alpha(f_{i,j}^k) = f_{j,i}^k$ (resp. $\text{Ad } b \circ \beta(g_{i,j}^k) = g_{j,i}^k$)
pour $0 \leq i, j \leq m_k$.

(b) $\alpha(a) = a$ (resp. $\beta(b) = b$).

(c) $\|[\psi_r, f_{i,j}^k]\| \leq 2^{-k} / (m_k + 1)^2$

(resp. $\|[\psi_r, g_{i,j}^k]\| \leq 2^{-k} / (m_k + 1)^2$) pour $0 \leq i, j \leq m_k$

et $r \leq k$.

Construisons, par induction, une sous-suite $(m_p)_{p \geq 1}$ de $(m_k)_{k \geq 1}$ et une suite $(u_p)_{p \geq 1}$ d'unitaires de M telles que :

(o) $m_p = n_p$.

(i) u_p commute avec les $g_{i,j}^r$, $0 \leq i, j \leq m_{k_r}$, $1 \leq r \leq p-1$.

Pour tout $p \geq 1$, posons $v_p = u_p u_{p-1} \dots u_1$.

(ii) $v_p^k f_{i,j}^r v_p^* = g_{i,j}^r$ pour $0 \leq i, j \leq m_{k_r}$ et $r = 1, \dots, p$

(iii) $\|\psi_j \circ \text{Ad } v_p - \psi_j \circ \text{Ad } v_{p-1}\| \leq 2^{-(p-1)}$

pour $1 \leq j \leq p-1$.

$\|\psi_j \circ \text{Ad } v_p^{-1} - \psi_j \circ \text{Ad } v_{p-1}^{-1}\| \leq 2^{-(p-1)}$

Comme les conditions (i) et (iii) sont vides pour $p = 1$, le premier pas de l'induction découle directement du lemme 1.4. Supposons m_{k_q} , u_q construits pour $q < p$ et déterminons m_{k_p} et u_p .

Soit $P = \{g_{i,j}^r, 0 \leq i, j \leq m_{k_r}; r = 1, \dots, p-1\} \cap M$

Par construction, $g_{i,j}^k \in P$, pour $k > k_{p-1}$ et par (ii),

$v_{p-1}^{f_{i,j}^k} v_{p-1}^* \in P$ pour $k > k_{p-1}$. Soit ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} et posons $K_p = \{ k \in \mathbb{N} \mid k > k_{p-1} \text{ et } m_k = n_p \}$. Par définition de la suite $(m_k)_{k \geq 1}$, K_p est un ensemble infini. Soient $(F_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n_p}$ (resp. $(G_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n_p}$) les s.u.m. dans P_ω , correspondants aux suites ω -centralisantes $(v_{p-1}^{f_{i,j}^k} v_{p-1}^*)_{0 \leq i, j \leq n_p}$ (resp. $(g_{i,j}^k)_{0 \leq i, j \leq n_p}$) $k \in K_p$

Comme $F_{1,1}$ est équivalent à $G_{1,1}$ dans P_ω , il existe un opérateur partiellement isométrique $U \in P_\omega$ tel que

$$F_{1,1} = U^* U \quad \text{et} \quad G_{1,1} = U U^* .$$

Par le lemme [7].1.1.3 (b), il existe une suite ω -centralisante $(w_k)_{k \in K_p}$ d'unitaires de P tels que

$$w_k v_{p-1}^{f_{i,j}^k} v_{p-1}^* w_k^* = g_{i,j}^k \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq n_k \text{ et } k \in K_p .$$

Il est clair, alors, que pour un couple (k, w_k) convenable les conditions (i), (ii) et (iii) sont bien remplies. Posons alors $k_p = k$ et $u_p = w_k$. Comme $k \in K_p$, la condition (o) est évidente.

Posons $\sigma = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{Ad } v_p$. Par (iii), $\sigma \in \overline{\text{Int}(M)}$

et par (ii), $\sigma(f_{i,j}^k) = g_{i,j}^k$ pour $p \geq 1$ et $0 \leq i, j \leq m_{k_p}$.

Pour terminer la démonstration de l'assertion, posons, d'une part, $e_{1,j}^v = g_{i,j}^k$, pour tout $v \geq 1$ et $0 \leq i, j \leq n_v$ et d'autre part,

$$\alpha_1 = \sigma \circ \text{Ad } a \circ \alpha \circ \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \text{Ad } b \circ \beta .$$

Par (b) et la proposition 1.2, α_1 (resp. β_1) est $\overline{\text{Int}(M)}$ -équivalente à α (resp. β) et par (a) et la définition de σ , α_1 et β_1 satisfont le point (2) de l'assertion.

Fin de la démonstration : Soit $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$, la suite d'entiers dont les premiers termes sont donnés par :

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \dots$$

Soient $\{(e_{1,j}^\nu)_{0 \leq i, j \leq n_\nu}\}_{\nu \geq 1}$, une suite de s.u.m. de M et α_1, β_1 satisfaisant les conclusions de l'assertion relativement à la suite $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$ ci-dessus.

Pour chaque $\nu \geq 1$, posons $c_\nu = \sum_{i=0}^{n_\nu} e_{-i+1,1}^\nu$ et $d_\nu = \sum_{i=0}^{n_\nu} e_{-1,1}^\nu$

Soient K_ν , le sous-facteur engendré par les $e_{1,j}^\nu$ et t_ν , la transposition de K_ν , définie par

$$t_\nu(e_{1,j}^\nu) = e_{j,1}^\nu.$$

Comme c_ν et d_ν sont des unitaires de K_ν , satisfaisant

$$c_\nu t_\nu(c_\nu^*) = d_\nu t_\nu(d_\nu^*) = 1,$$

il existe, par le lemme 1.1, deux unitaires x_ν et y_ν de K_ν tels que $x_\nu t_\nu(x_\nu) = c_\nu$ et $y_\nu t_\nu(y_\nu) = d_\nu$.

Rappelons que si $x \in K_\nu$, $\|x\| \leq 1$,

$$x = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_{i,j}^\nu \quad \text{où } \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}, |\lambda_{i,j}| \leq 1.$$

De plus, par l'assertion,

$$\|[\psi_r, e_{i,j}^\nu]\| \leq \frac{2^{-\nu}}{(n_\nu+1)^2} \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq n_\nu \quad \text{et } r \leq \nu$$

Donc, nous avons, pour $\nu \geq 2$ et $r \leq \nu$,

$$\begin{aligned} & \| \psi_r \circ \text{Ad}(x_\nu x_{\nu-1} \dots x_1) - \psi_r \circ \text{Ad}(x_{\nu-1} \dots x_1) \| = \\ (*) \quad & = \| \psi_r \circ \text{Ad} x_\nu - \psi_r \| = \| [\psi_r, x_\nu] \| \leq 1/2^\nu \end{aligned}$$

$$\| \psi_r \circ \text{Ad}(x_\nu \dots x_1)^* - \psi_r \circ \text{Ad}(x_{\nu-1} \dots x_1)^* \| \leq 1/2^\nu$$

Posons $\chi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Ad}(x_\nu x_{\nu-1} \dots x_1)$. Par (*), $\chi \in \overline{\text{Int}(M)}$

et par construction, nous avons :

$$\begin{aligned} \chi \circ \alpha_1 \circ \chi^{-1} (e_{1,j}^v) &= \text{Ad } (x_v t_v(x_v)) (e_{j,1}^v) = \text{Ad } c_v (e_{j,1}^v) \\ &= e_{-j+1, -1+1}^v \end{aligned}$$

Posons, de même $\psi = \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Ad } (y_v y_{v-1} \dots y_1)$. Par un calcul semblable, nous avons : $\psi \in \overline{\text{Int}(M)}$ et

$$\begin{aligned} \psi \circ \beta_1 \circ \psi^{-1} (e_{1,j}^v) &= \text{Ad } (y_v t_v(y_v)) (e_{j,1}^v) = \text{Ad } d_v (e_{j,1}^v) \\ &= e_{-j, -1}^v \end{aligned}$$

Posons $\tilde{\alpha} = \chi \circ \alpha_1 \circ \chi^{-1}$ et $\tilde{\beta} = \psi \circ \beta_1 \circ \psi^{-1}$.

Vérifions que $p_a(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) = 0$. Comme, pour tout $v \geq 1$,

$$\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} (e_{1,j}^v) = e_{1+1, j+1}^v$$

et que, par définition de la suite $(n_v)_{v \geq 1}$, tous les entiers y apparaissent une infinité de fois, $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$ est extérieurement conjugué à $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} \otimes s_p^1$, pour tout $p \geq 2$, par définition des e_p^1 ([8]. Prop. 1.6). Par le théorème 1 de [7], cela démontre que $p_a(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) = 0$.

Prouvons 3.1 (b). Soit p , un entier ≥ 2 et posons

$P = \{ v \in \mathbb{N} \mid n_v = p-1 \}$. Par définition de la suite $(n_v)_{v \geq 1}$,

P est un ensemble infini. Pour $v \in P$, soit $p_j^v = e_{jj}^v$.

Les $(p_j^v)_{0 \leq j \leq p-1}$ forment une partition de l'unité dans M

avec $\tilde{\alpha}(p_j^v) = p_{-j+1}^v$ et $\tilde{\beta}(p_j^v) = p_{-j}^v$.

$\{ (p_j^v)_{0 \leq j \leq p-1} \}_{v \in P}$ est clairement une suite ω -centralisante

et donc représente une partition $(P_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ de l'unité

dans M_ω . Comme $\tilde{\alpha}_\omega(P_j) = P_{-j+1}$ et $\tilde{\beta}_\omega(P_j) = P_{-j}$, le

lemme est bien démontré.

qed.

Lemme 3.2 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable et α, β deux transpositions de M , avec $\alpha \circ \beta \in \overline{\text{Int}}(M)$ et $p_\alpha(\alpha \circ \beta) = 0$.

Alors, il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \rightarrow \infty$,

(a) $\text{Ad } z_p \longrightarrow \alpha \circ \beta$ dans $\text{Aut}(M)$.

(b) $(\alpha(z_p^k) - z_p^k) \rightarrow 0$, $*$ -fortement et

$(\beta(z_p^k) - z_p^k) \rightarrow 0$, $*$ -fortement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Par le lemme 3.1.1 de [7], il existe une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \rightarrow \infty$,

(i) $\text{Ad } y_p \longrightarrow \alpha \circ \beta$ dans $\text{Aut}(M)$.

(ii) $(\alpha \circ \beta(y_p^k) - y_p^k) \rightarrow 0$ $*$ -fortement, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $w_p = y_p \alpha(y_p^*)$. C'est un unitaire de M . Comme par (i), $\text{Ad } y_p \circ \alpha \rightarrow \alpha \circ \beta \circ \alpha$ dans $\text{Aut}(M)$, nous avons

$$\text{Ad } (y_p \alpha(y_p^*)) = \text{Ad } w_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} (\alpha \circ \beta \circ \alpha)^2 = 1 \text{ dans } \text{Aut}(M).$$

Par conséquent, $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite centralisante.

Soient ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} et W , l'unitaire de M_ω , représenté par $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Il appartient à $(M_\omega)^{\alpha_\omega \circ \beta_\omega}$ la sous-algèbre des points fixes de M_ω sous $\alpha_\omega \circ \beta_\omega$.

En effet, la suite $(\alpha \circ \beta(w_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$, car, comme, par (ii),

$$(\alpha \circ \beta(w_p) - w_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ et } (\alpha \circ \beta \circ \alpha(w_p^*) - \alpha(w_p^*)) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, *$$

et que, par (i), $\text{Ad } \alpha(y_p^*) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \beta \circ \alpha$ dans $\text{Aut}(M)$, nous obtenons, par le lemme B.4.2), que :

$$(\alpha \circ \beta(y_p) \alpha \circ \beta \circ \alpha(y_p^*) - y_p \alpha(y_p^*)) = (\alpha \circ \beta(w_p) - w_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \text{ *-fortement .}$$

Si $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite ω - centralisante, il en est de même de la suite $(\text{Ad } y_p \circ \alpha(x_p))_{p \in \mathbb{N}}$, par (i) et le lemme B.4.1).

Ceci nous permet d'énoncer l'assertion suivante :

Assertion : L'application, qui, à toute suite représentative $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $X \in M_\omega$, associe l'élément de M_ω , représenté par la suite $(\text{Ad } y_p \circ \alpha(x_p))_{p \in \mathbb{N}}$, induit un antiautomorphisme γ de M_ω ayant les propriétés suivantes:

- (1) γ laisse $(M_\omega)^{\alpha \circ \beta \omega}$ globalement invariant et donc définit, par restriction, un élément $\tilde{\gamma} \in \text{Ant}((M_\omega)^{\alpha \circ \beta \omega})$.
- (2) $\gamma^2 = \text{Ad } W$ et donc, $\tilde{\gamma}^2 = \text{Ad } W \in \text{Int}((M_\omega)^{\alpha \circ \beta \omega})$.
- (3) $\tilde{\gamma}(W) = W$.

Démonstration de l'assertion : γ est bien défini, car, si $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite ω - centralisante de M , qui tend vers 0, *-fortement, il en est de même, par le lemme B.4.2) de la suite $(\text{Ad } y_p \circ \alpha(x_p))_{p \in \mathbb{N}}$.

Il est clair que γ est un antiautomorphisme de M_ω , car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{Ad } y_p \circ \alpha \in \text{Ant}(M)$.

Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une suite représentative de $X \in (M_\omega)^{\alpha \circ \beta \omega}$. Pour démontrer (1), il suffit de vérifier que les deux suites ω - centralisantes

$$(\text{Ad } (\alpha \circ \beta(y_p)) (\alpha(x_p)))_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\text{Ad } y_p (\alpha(x_p)))_{p \in \mathbb{N}}$$

sont équivalentes, car par le lemme B.4.2),

$$(\alpha \circ \beta(\text{Ad } y_p \circ \alpha(x_p)) - \text{Ad } (\alpha \circ \beta(y_p)) \circ \alpha(x_p)) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \text{ *-fortement .}$$

Comme $\alpha_\omega(X) \in M_\omega$ et que, par (i), $(\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite ω -centralisante, qui tend vers 0, \ast -fortement, $((\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)\alpha(x_p)) \xrightarrow{p \rightarrow \omega} 0$, \ast -fortement.

Par le lemme B.4.2), nous obtenons :

$$(\alpha \circ \beta(y_p) - y_p)\alpha(x_p)\alpha \circ \beta(y_p^*) \xrightarrow{p \rightarrow \omega} 0, \ast\text{-fortement.}$$

On montre de la même manière, que :

$$y_p\alpha(x_p)(\alpha \circ \beta(y_p^*) - y_p^*) \xrightarrow{p \rightarrow \omega} 0, \ast\text{-fortement}$$

ce qui termine la démonstration de (1).

Comme $(w_p)_{p \in \mathbb{N}} = (y_p\alpha(y_p^*))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite représentative de W , (2) est clair.

$\tilde{\gamma}(W)$ est représenté par

$$(\text{Ad } y_p \circ \alpha(w_p))_{p \in \mathbb{N}} = (\alpha(y_p)y_p^*)_{p \in \mathbb{N}} = (w_p^*)_{p \in \mathbb{N}}$$

ce qui prouve (3) et termine la démonstration de l'assertion.

Fin de la démonstration du lemme : Comme, par hypothèse,

$p_\alpha(\alpha \circ \beta) = 0$, le théorème [7].2.1.3 implique que $\alpha_\omega \circ \beta_\omega$ est stable et donc, par les lemmes [7].2.3.3 et 2.0,

$(M_\omega)_{\omega \circ \omega}^{\alpha \circ \beta}$ est une algèbre de type II_1 . Par le lemme 1.6,

il existe un unitaire V de $(M_\omega)_{\omega \circ \omega}^{\alpha \circ \beta}$ avec $W^* = V\tilde{\gamma}(V^*)$.

Soit $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une suite d'unitaires de M , représentant

V (existence par la prop. [7].1.1.3) et posons $z_p = v_p y_p$,

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Comme $\text{Ad } v_p \rightarrow 1$ dans $\text{Aut}(M)$, $\text{Ad } z_p \rightarrow \alpha \circ \beta$ dans $\text{Aut}(M)$, quand $p \rightarrow \omega$. Vérifions que les suites

$$(\alpha(z_p) - z_p)_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\beta(z_p) - z_p)_{p \in \mathbb{N}}$$

tendent vers 0, \ast -fortement, lorsque $p \rightarrow \omega$. Par cons-

truction de la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$, nous avons :

$$(v_p y_p \alpha(v_p^*) y_p^* - w_p^*) = [(v_p y_p \alpha(v_p^*) - \alpha(y_p)) y_p^*]_{p \rightarrow \omega} + o, \text{*-fort.}$$

et donc, par (i) et le lemme B.4.2),

$$(v_p y_p - \alpha(v_p y_p)) = (z_p - \alpha(z_p)) \xrightarrow{p \rightarrow \omega} o, \text{*-fortement}$$

car

$$\text{Ad } \alpha(v_p^*) \longrightarrow 1 \text{ dans } \text{Aut}(M).$$

Comme $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite représentative de $V \in (M_\omega)^{\alpha \circ \beta \omega}$

les deux suites ω -centralisantes $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha \circ \beta(v_p))_{p \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes. Donc,

$$(\alpha \circ \beta(v_p) - v_p) \longrightarrow o, \text{*-fortement, quand } p \rightarrow \omega$$

et par conséquent, $(\alpha \circ \beta(z_p) - z_p) = (\alpha \circ \beta(v_p y_p) - v_p y_p)$ aussi,

car, par (ii) et le lemme B.4.2), tant $(\alpha \circ \beta(v_p) (\alpha \circ \beta(y_p) - y_p))_{p \in \mathbb{N}}$ que $((\alpha \circ \beta(v_p) - v_p) y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent *-fortement vers o.

Comme α est involutif, $(\alpha(z_p) - \beta(z_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et donc

$(\beta(z_p) - z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tendent vers o *-fortement.

Nous avons ainsi montré comment construire une suite d'unitaires $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$, vérifiant 3.2(a) et $(\alpha(z_p) - z_p) \rightarrow o$, *-fortement, $(\beta(z_p) - z_p) \longrightarrow o$, *-fortement, quand $p \rightarrow \infty$

Soit $r \in \mathbb{N}$ et supposons que $(\alpha(z_p^r) - z_p^r) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} o$, *-fort.

Comme $((\alpha(z_p^r) - z_p^r) \alpha(z_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z_p^r (\alpha(z_p) - z_p))_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers o *-fortement et que

$$\alpha(z_p^{r+1}) - z_p^{r+1} = (\alpha(z_p^r) - z_p^r) \alpha(z_p) + z_p^r (\alpha(z_p) - z_p),$$

$$(\alpha(z_p^{r+1}) - z_p^{r+1}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} o, \text{*-fortement.}$$

La condition 3.2 (b) se démontre alors par induction.

qed.

Lemme 3.3 : Soient M , comme ci-dessus et α, β deux transpositions de M , satisfaisant les conclusions de 3.1.1.1.

Alors, pour tout $n \geq 2$, il existe une suite de partitions de l'unité $\{(p_j^k)_{0 \leq j \leq n-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et deux suites d'unitaires de M , $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que :

(i) $\|[\psi, p_j^k]\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ pour $0 \leq j \leq n-1$ et tout $\psi \in M_*$

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ad } c_k \circ \alpha$ et $\text{Ad } d_k \circ \beta$ sont des transpositions de M , satisfaisant :

a) $\text{Ad } c_k \circ \alpha(p_j^k) = p_{-j+1}^k$ et $\text{Ad } d_k \circ \beta(p_j^k) = p_{-j}^k$ ($0 \leq j \leq n-1$)

b) $\alpha(c_k) = c_k$ et $\beta(d_k) = d_k$.

(iii) $(c_k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, *-fortement

$(d_k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, *-fortement

Démonstration : Par 3.1 et la prop. [7].1.1.3 (c), il existe une suite de partitions de l'unité dans M

$\{(p_j^k)_{0 \leq j \leq n-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, quand $k \rightarrow \infty$,

(a) $(\alpha(p_j^k) - p_{-j+1}^k) \rightarrow 0$, *-fortement

(b) $(\beta(p_j^k) - p_{-j}^k) \rightarrow 0$, *-fortement

(c) $\|[\psi, p_j^k]\| \rightarrow 0$, pour tout $\psi \in M_*$

Par (c), la vérification de (i) est triviale.

Pour tout $0 \leq j \leq n-1$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha(p_j^k)$ et p_{-j+1}^k sont des projecteurs équivalents. Par (a) et le lemme [7].1.1.4,

il existe, alors, n suites d'opérateurs partiellement isométriques $\{(z_j^k)_{k \in \mathbb{N}}\}_{0 \leq j \leq n-1}$ de M avec $z_j^k (z_j^k)^* = \alpha(p_j^k)$,

$(z_j^k)^* z_j^k = p_{-j+1}^k$ et $(z_j^k - \alpha(p_j^k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, *-fortement.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $c_1^k = \sum_{j=0}^{k-1} (z_j^k)^*$. C'est un unitaire de M tel que, pour $0 \leq j \leq n-1$,

$$\text{Ad } c_1^k \circ \alpha(p_j^k) = p_{-j+1}^k.$$

De plus, la suite d'unitaires $(c_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, *-fortement, quand $k \rightarrow \infty$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'antisomorphisme $\text{Ad } c_1^k \circ \alpha$ laisse globalement fixe le commutant relatif dans M des p_j^k , $0 \leq j \leq n-1$, et définit donc, par restriction, un antisomorphisme de

$\{p_j^k, 0 \leq j \leq n-1\}' \cap M$, qui est une algèbre continue, par le lemme 3.0. De plus, $(\text{Ad } c_1^k \circ \alpha)^2 = \text{Ad } (c_1^k \alpha(c_1^k)^*)$ est un automorphisme intérieur de $\{p_j^k, 0 \leq j \leq n-1\}' \cap M$, car, comme

$$\begin{aligned} c_1^k \alpha(c_1^k)^* p_j^k \alpha(c_1^k) (c_1^k)^* &= c_1^k \alpha(c_1^k \alpha(p_j^k) (c_1^k)^*) (c_1^k)^* \\ &= c_1^k \alpha(p_{-j+1}^k) (c_1^k)^* = p_j^k \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

$$c_1^k \alpha(c_1^k)^* \in \{p_j^k, 0 \leq j \leq n-1\}' \cap M.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ad } c_1^k \circ \alpha(c_1^k \alpha(c_1^k)^*) = (c_1^k \alpha(c_1^k)^*)^*$ et $(c_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, *-fortement, quand $k \rightarrow \infty$. Il existe, donc, par le lemme 1.6, une suite d'unitaires $(c_2^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de M telle que :

(o). $(c_2^k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, *-fortement.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_2^k \in \{p_j^k, 0 \leq j \leq n-1\}' \cap M$ et

$$(c_1^k \alpha(c_1^k)^*)^* = c_2^k \text{Ad } c_1^k \circ \alpha((c_2^k)^*).$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = c_2^k c_1^k$. Par construction, la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M satisfait la première partie de (ii) et (iii). La démonstration de la deuxième partie se fait de la même manière.

qed.

Lemme 3.4 : Soient M comme ci-dessus et α, β deux transformations de M satisfaisant les conditions de 3.2. Soient de plus, n un entier ≥ 2 et $(p_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, une partition de l'unité dans M telle que :

$$\alpha(p_j) = p_{-j+1} \quad \text{et} \quad \beta(p_j) = p_{-j}, \quad \forall 0 \leq j \leq n-1.$$

Alors, il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $k \rightarrow \infty$,

(a) $\text{Ad } u_k \longrightarrow \alpha \circ \beta$ dans $\text{Aut}(M)$.

(b) $(\alpha(u_k^r) - u_k^r) \longrightarrow 0$ *-fortement et

$(\beta(u_k^r) - u_k^r) \longrightarrow 0$ *-fortement, pour tout $r \in \mathbb{Z}$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k p_j u_k^* = p_{j+1}$, pour $0 \leq j \leq n-1$

Démonstration : Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite d'unitaires de M , satisfaisant les conclusions du lemme 3.2. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{j+1} = \alpha(p_j)$ et $z_k p_j z_k^*$ sont des projecteurs de M , équivalents et que, par 3.2 (a),

$$(\text{Ad } z_k (p_j) - p_{j+1}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \text{*}-\text{fortement},$$

il existe, par le lemme [7].1.1.4 (b), une suite d'opérateurs partiellement isométriques $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(x_j^k)^* x_j^k = z_k p_j z_k^*, \quad x_j^k (x_j^k)^* = p_{j+1} \quad \text{et} \quad (x_j^k - p_{j+1}) \longrightarrow 0, \quad \text{*}-\text{fort.}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j^k$ est un unitaire de M ,

tel que : (1) $x_k z_k p_j z_k^* x_k^* = p_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$.

(2) $(x_k - 1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, *-fortement.

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = x_k z_k$. Par (2), la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M , satisfait (a) et par (1), l'affirmation (c) est vérifiée, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour vérifier (b), remarquons, tout d'abord, que, pour $r \in \mathbb{Z}$

$$(3) \quad ((x_k z_k)^r - z_k^r) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ *-fortement.}$$

Soit $r \in \mathbb{N}$ et supposons que

$$((x_k z_k)^r - z_k^r) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ *-fortement}$$

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(x_k z_k)^{r+1} - z_k^{r+1} = (x_k - 1) z_k^{r+1} + x_k z_k ((x_k z_k)^r - z_k^r),$$

nous obtenons, par le lemme B.4.2), que

$$((x_k z_k)^{r+1} - z_k^{r+1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ *-fortement.}$$

L'assertion (3) se démontre alors par induction.

Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\gamma \in A(M)$,

$$\begin{aligned} \gamma((x_k z_k)^r) - (x_k z_k)^r &= \gamma((x_k z_k)^r - z_k^r) + \gamma(z_k^r) - z_k^r + \\ &\quad z_k^r - (x_k z_k)^r, \end{aligned}$$

nous obtenons (b), par 3.2 (b) et (3).

qed.

Rappelons l'énoncé du lemme 3.1.3 de [7], que nous utiliserons dans la démonstration du lemme 3.6.

Lemme 3.5 : Soient M , une algèbre de Von Neumann ; ϕ , un état sur M et $u \in M$, un unitaire, dont la mesure spectrale à valeur projecteur est dénotée par $J \longmapsto e(J)$ (J sous-ensemble borélien de \mathbb{T}).

Alors, $\Lambda(\phi, u) = \{ \lambda \in \mathbb{T} \mid \phi(e(J_{\lambda, q})) \leq 2^{-q}, \forall q \in \mathbb{N}, q > 2 \}$ est non vide, où $J_{\lambda, q}$ est l'intervalle de \mathbb{T} , de centre λ et de mesure de Haar 2^{-2q} .

Comme dans [7], nous dénoterons par f_n , pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction borélienne de \mathbb{T} dans \mathbb{T} , définie par :

$$f_n(e^{i\theta}) = e^{i\theta/n}, \quad \forall \theta \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Le lemme suivant est l'aboutissement de la deuxième partie de la preuve du théorème 1.

Lemme 3.6 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable et α, β deux transpositions de M , satisfaisant les conclusions de 3.1. Soient ϕ , un état normal, fidèle sur M et ψ_1, \dots, ψ_q , q éléments de M_*^+ . Alors, pour tout $n \geq 2$, $0 < \epsilon < 1$, il existe une partition $(p_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ de l'unité dans M et trois unitaires a, b et u de M tels que :

(0) $-1 \in \Lambda(\phi, u^n)$.

(1) $\|[\psi_s, p_j]\| \leq \epsilon$ pour $s = 1, \dots, q$ et $0 \leq j \leq n-1$.

$$(2) \quad \left\| \psi_\varepsilon \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_\varepsilon \circ \text{Ad } u^{-1} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{pour } s = 1, \dots, q.$$

$$(3) \quad \alpha(a) = a \quad \text{et} \quad \beta(b) = b.$$

$$(4) \quad \left\| a - 1 \right\|_\phi \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\| b - 1 \right\|_\phi \leq \varepsilon.$$

Posons $P = f_n(u^n)^*$ et $\tilde{u} = uP$.

(5) $\{ e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leq i, j \leq n-1 \}$ est un s.u.m. du sous-facteur K , engendré par les p_j et \tilde{u} , tel que, pour $0 \leq i, j \leq n-1$,

$$(a) \text{Ad } a \circ \alpha(e_{i,j}) = e_{-j+1, -i+1} \quad (b) \text{Ad } b \circ \beta(e_{i,j}) = e_{-j, -i}$$

$$(6) \quad \left\| P \text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - 1 \right\|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \leq \varepsilon$$

Démonstration : Soient $0 < \varepsilon \leq 1$ et $n \geq 2$ fixés. Choisis-

sons $\varepsilon_1 > 0$ avec $16 \varepsilon_1^{1/2} \leq \varepsilon$. Comme ϕ est fidèle, il existe $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ tels que si $x \in M_3 = \{ x \in M \mid \|x\| \leq 3 \}$ nous ayons d'une part,

$$\|x\|_\phi \leq \frac{\varepsilon_3}{4n} \implies \|x\|_{\phi \circ \alpha} \leq \frac{\varepsilon_2}{4n} \quad \text{et} \quad \|x\|_{\phi \circ \beta} \leq \frac{\varepsilon_2}{4n}$$

et d'autre part,

$$\|x\|_\phi \leq 5 \varepsilon_2 \implies \|x\|_{\phi \circ \alpha \circ \beta} \leq \varepsilon_1.$$

Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $3(2^{-m})^{1/2} \leq \frac{\varepsilon_3}{8n}$. Alors,

pour $p = 1, \dots, n$, choisissons des polynômes (en z et z^{-1})

$R_p(z) = \sum_{|t| \leq k} a_{p,t} z^t$ tels que :

$$(1) \quad \left[\begin{array}{l} \left| R_p(z) - (z f_n(z^n)^{-1})^p \right| \leq \frac{\varepsilon_3}{8n}, \quad \forall z \in \mathbb{T}, \quad z^n \notin J_{-1,m} \\ \left| R_p(z) \right| \leq 2 \quad \forall z \in \mathbb{T} \end{array} \right.$$

Soient $A = \sum_{p,t} |a_{p,t}|$ et prenons $\delta > 0$, tel que :

$$3\sqrt{2} \delta^{1/2} + A\delta + \frac{\epsilon_2}{2n} \leq \frac{\epsilon_2}{n}$$

Par 3.3, il existe une partition $(p_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ de l'unité dans M et deux unitaires c et d de M tels que, si nous posons $\alpha_1 = Ad \cdot c \cdot \alpha$ et $\beta_1 = Ad \cdot d \cdot \beta$,

(a) $\| [\psi_s, p_j] \| \leq \epsilon$ pour $s = 1, \dots, q$ et $0 \leq j \leq n-1$.

(b) $\alpha_1(p_j) = p_{j+1}$ et $\beta_1(p_j) = p_j$, pour $0 \leq j \leq n-1$.

(c) $\| c - 1 \|_\phi \leq \delta$ et $\| d - 1 \|_\phi \leq \delta$

(d) $\alpha(c) = c$ et $\beta(d) = d$.

(e) $\| \psi_s \circ (\alpha_1 \beta_1)^{-1} - \psi_s \circ (\alpha \beta)^{-1} \| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour $1 \leq s \leq q$.

(f) $\| \phi \circ (\alpha_1 \beta_1) - \phi \circ (\alpha \beta) \| \leq \frac{\delta}{2}$.

Comme $\epsilon_M(\alpha_1 \beta_1) = \epsilon_M(\alpha \beta)$, nous avons $\alpha_1 \beta_1 \in \overline{\text{Int}(M)}$ et $p_a(\alpha_1 \beta_1) = p_a(\alpha \beta)$ et donc α_1 et β_1 , ainsi que la partition de l'unité $(p_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, satisfont les hypothèses du lemme 3.4. Par conséquent, il existe un unitaire $u \in M$, avec

(1) $u p_j u^* = p_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$.

(2) $\| \alpha_1(u^r) - u^r \|_\phi \leq \delta$ et $\| \beta_1(u^r) - u^r \|_\phi \leq \delta$ ($|r| \leq k$)

(3) $\| \psi_s \circ (\alpha_1 \beta_1)^{-1} - \psi_s \circ Ad u^{-1} \| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour $1 \leq s \leq q$.

(4) $\| \phi \circ \alpha_1 \beta_1 - \phi \circ Ad u \| \leq \frac{\delta}{2}$ et donc, par (f),

$$\| \phi \circ \alpha \beta - \phi \circ Ad u \| \leq \delta$$

Par 3.5, nous pouvons supposer que $-1 \in A(\phi, u^n)$ et donc,

comme

$$\begin{aligned} \|\psi_S \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_S \circ \text{Ad } u^{-1}\| &\leq \|\psi_S \circ (\alpha \circ \beta)^{-1} - \psi_S \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1}\| + \\ &\quad \|\psi_S \circ (\alpha_1 \circ \beta_1)^{-1} - \psi_S \circ \text{Ad } u^{-1}\| \end{aligned}$$

les points (o), (1) et (2) de 3.6 sont vérifiés.

Soit e , le projecteur spectral de u^n pour $J_{-1,m}$.

Comme $\phi(e) \leq 2^{-m}$, nous avons, par (i), en posant $\tilde{u} = u^n(u^n)^*$

$$(11) \quad \|\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p\|_{\phi} \leq \frac{\epsilon_3}{4n} \quad \text{pour } p = 1, \dots, n.$$

Comme $\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p$ est un opérateur normal, nous avons aussi

$$(111) \quad \|(\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_{\phi} \leq \frac{\epsilon_3}{4n} \quad \text{pour } p = 1, \dots, n.$$

Evaluons $\|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \tilde{u}^p\|_{\phi}$.

Par (111) et comme $\|\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p\| \leq 3$, nous avons :

$$\begin{aligned} (iv) \quad \|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \alpha_1(\mathbb{R}_p(u))\|_{\phi} &\leq \\ &\leq 3 \|\phi \circ \alpha_1 - \phi \circ \alpha\|^{1/2} + \|(\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_{\phi \circ \alpha} \\ &\leq 3/2 \|\phi - 1\|_{\phi}^{1/2} + \|(\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p)^*\|_{\phi \circ \alpha} \\ &\leq 3/2 \delta^{1/2} + \frac{\epsilon_2}{4n}. \end{aligned}$$

De plus, par (2), $\|\alpha_1(u^x) - u^x\|_{\phi} \leq \delta$, $|x| \leq k$ et donc, par le choix de A ,

$$(v) \quad \|\mathbb{R}_p(\alpha_1(u)) - \mathbb{R}_p(u)\|_{\phi} \leq A\delta$$

Par (ii), (iv) et (v), nous obtenons, pour $p = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (vi) \quad \|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \tilde{u}^p\|_{\phi} &\leq \|\alpha_1(\tilde{u}^p) - \alpha_1(\mathbb{R}_p(u))\|_{\phi} + \\ &\quad + \|\mathbb{R}_p(\alpha_1(u)) - \mathbb{R}_p(u)\|_{\phi} + \|\mathbb{R}_p(u) - \tilde{u}^p\|_{\phi} \\ &\leq 3/2 \delta^{1/2} + \frac{\epsilon_2}{4n} + A\delta + \frac{\epsilon_2}{4n} \leq \frac{\epsilon_2}{n} \end{aligned}$$

On montre de même, que :

$$(vii) \quad \|\beta_1(\tilde{u}^P) - \tilde{u}^P\|_{\phi} \leq \frac{\epsilon_2}{n}$$

Démontrons, maintenant, (3), (4) et (5). Par construction,

$\tilde{u}^n = 1$ et comme u^n commute aux p_j , $0 \leq j \leq n-1$, il en est de même de $P = f_n(u^n)^*$, d'où $\tilde{u}^j \tilde{u}^* = p_{j+1}$, $0 \leq j \leq n-1$.

On vérifie immédiatement que $\{e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leq i, j \leq n-1\}$ est un s.u.m. de K , le sous-facteur de type I_n , engendré par \tilde{u} et les p_j .

Posons $a_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{-j+1,1} \alpha_1(e_{j,0})$. C'est un unitaire de M , qui, par construction, satisfait :

$$\text{Ad } a_1 \circ \alpha_1(e_{s,t}) = e_{-t+1, -s+1}, \quad \forall s, t, \quad 0 \leq s, t \leq n-1.$$

De plus, nous avons :

$$(viii) \quad \|a_1 - 1\|_{\chi} \leq \epsilon_2 \quad \text{pour } \chi = \phi \text{ et } \chi = \phi \circ \alpha_1.$$

En effet, par (vi), comme

$$\begin{aligned} \|a_1 - 1\|_{\chi} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|e_{-j+1,1} \alpha_1(e_{j,0}) - e_{-j+1, -j+1}\|_{\chi} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|e_{-j+1,1} (\alpha_1(e_{j,0}) - e_{1, -j+1})\|_{\chi} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|p_1 (\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^j)\|_{\chi} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^j\|_{\chi} \end{aligned}$$

Nous obtenons (viii), car, pour $0 \leq j \leq n-1$,

$$\|\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^j\|_{\phi \circ \alpha_1} = \|\alpha_1(\tilde{u}^{-j}) - \tilde{u}^{-j}\|_{\phi} = \|\alpha_1(\tilde{u}^{n-j}) - \tilde{u}^{n-j}\|_{\phi}$$

L'antiautomorphisme $\text{Ad } a_1 \circ \alpha_1$ laisse globalement fixe le commutant relatif de K dans M et définit, donc, par restriction, un antiautomorphisme de $K' \cap M$, qui est un facteur

continu. De plus, $(\text{Ad } a_1 \circ \alpha_1)^2 = \text{Ad}(a_1 \alpha_1(a_1^*))$ est un automorphisme intérieur de $K' \cap M$, car, comme

$$\text{Ad}(a_1 \alpha_1(a_1^*))(e_{s,t}) = (\text{Ad } a_1 \circ \alpha_1)^2(e_{s,t}) = e_{s,t}, \quad \forall 0 \leq s, t \leq n-1,$$

$a_1 \alpha_1(a_1^*) \in K' \cap M$. Comme, de plus,

$$\text{Ad } a_1 \circ \alpha_1(a_1 \alpha_1(a_1^*)) = (a_1 \alpha_1(a_1^*))^*$$

et que, par (viii),

$$\| a_1 \alpha_1(a_1^*) - 1 \|_\phi \leq \| a_1 - 1 \|_{\phi \circ \alpha_1} + \| a_1 - 1 \|_\phi \leq 2\epsilon_2,$$

il existe, par le lemme 1.6, un unitaire $a_2 \in K' \cap M$ tel que

$$\alpha_1(a_2 a_1) = a_2 a_1 \quad \text{et} \quad \| a_2 - 1 \|_\phi \leq 4\epsilon_2.$$

Posons $a = a_2 a_1 c$. C'est un unitaire de M et, par construction, comme $\alpha(c) = c$, les premières parties de (3) et (5) sont vérifiées. Par le choix de ϵ_2 et comme

$$\begin{aligned} \| a - 1 \|_\phi &\leq \| c - 1 \|_\phi + \| a_1 - 1 \|_\phi + \| a_2 - 1 \|_\phi \\ &\leq \delta + \epsilon_2 + 4\epsilon_2 \leq 6\epsilon_2 \end{aligned}$$

la première partie de (4) est prouvée.

Posons $b_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{-j,0} \beta_1(e_{j,0})$. C'est un unitaire de M , qui par définition, satisfait :

$$\text{Ad } b_1 \circ \beta_1(e_{a,t}) = e_{-t,-s}, \quad \forall 0 \leq a, t \leq n-1.$$

Comme ci-dessus pour (viii), nous avons :

$$(ix) \quad \| b_1 - 1 \|_\chi \leq \epsilon_2 \quad \text{pour } \chi = \phi \quad \text{et} \quad \chi = \phi \circ \beta_1$$

et par le lemme 1.6, il existe un unitaire $b_2 \in K' \cap M$ tel

$$\text{que } \beta_1(b_2 b_1) = b_2 b_1 \quad \text{et} \quad \| b_2 b_1 - 1 \|_\phi \leq 4\epsilon_2.$$

Posons $b = b_2 b_1 d$. Les points (3), (4) et (5) de 3.6 sont

alors totalement démontrés.

Pour vérifier (6), montrons, tout d'abord, que :

$$(x) \quad \| \text{Ad } a \circ \alpha(u^*) - u^* \|_{\phi} \leq \varepsilon$$

En effet, nous avons, en posant $\tilde{a} = a_2 a_1$,

$$\begin{aligned} \| \text{Ad } \tilde{a}(u^*) - u^* \|_{\phi} &\leq \| \tilde{a} u^* (\tilde{a}^* - 1) \|_{\phi} + \| (\tilde{a} - 1) u^* \|_{\phi} \\ &\leq \| \tilde{a} - 1 \|_{\phi} + \| \tilde{a} - 1 \|_{\phi \circ \text{Ad } u} \\ &\leq \| \tilde{a} - 1 \|_{\phi} + 2 \| \phi \circ \text{Ad } u - \phi \circ \alpha \circ \beta \|^{1/2} + \| \tilde{a} - 1 \|_{\phi \circ \alpha \circ \beta} \\ &\leq 5\varepsilon_2 + 2\delta^{1/2} + \varepsilon_1 \leq 8\varepsilon_1 \end{aligned}$$

car $\| \tilde{a} - 1 \|_{\phi} = \| a_2 a_1 - 1 \|_{\phi} \leq 5\varepsilon_2$ et donc

$$\| \tilde{a} - 1 \|_{\phi \circ \alpha \circ \beta} \leq \varepsilon_1, \text{ par le choix de } \varepsilon_2.$$

D'où.

$$\begin{aligned} \| \text{Ad } a \circ \alpha(u^*) - u^* \|_{\phi} &\leq \| \text{Ad } \tilde{a}(\alpha_1(u^*) - u^*) \|_{\phi} + \| \text{Ad } \tilde{a}(u^*) - u^* \|_{\phi} \\ &\leq 2 \| \phi \circ \text{Ad } \tilde{a} - \phi \|^{1/2} + \| \alpha_1(u^*) - u^* \|_{\phi} + \| \text{Ad } \tilde{a}(u^*) - u^* \|_{\phi} \\ &\leq 2\sqrt{2} \| \tilde{a} - 1 \|_{\phi}^{1/2} + \| \alpha_1(u^*) - u^* \|_{\phi} + \| \text{Ad } \tilde{a}(u^*) - u^* \|_{\phi} \\ &\leq 2\sqrt{2}\sqrt{5\varepsilon_2} + \delta + 8\varepsilon_1 \leq (2\sqrt{10} + 1 + 8)\varepsilon_1^{1/2} \leq 16\varepsilon_1^{1/2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

et ainsi (x) est vérifié. Comme

$$\| P \text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - 1 \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} = \| (\text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - P^*) P \|_{\phi} \text{ et que}$$

$\text{Ad } a \circ \alpha(\tilde{u}) = \tilde{u}$, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \| \text{Ad } a \circ \alpha(\tilde{u}^*) - \tilde{u}^* \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} = \| \text{Ad } a \circ \alpha(P^* u^*) - u^* P^* \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \geq \\ &\geq \| \text{Ad } a \circ \alpha(u^*) (\text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - P^*) \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} - \\ &\quad - \| (\text{Ad } a \circ \alpha(u^*) - u^*) P^* \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \| P \text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - 1 \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} = \| \text{Ad } a \circ \alpha(u^*) - u^* \|_{\phi}$$

Par (x), le point (6) est prouvé, ce qui termine la démonstration du lemme 3.6.

qed.

Troisième partie de la démonstration du théorème 1 :

Solent M , un facteur de McDuff, à prédual séparable et $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$, une suite d'entiers ≥ 2 telle que

$$\sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{n_\nu} < \infty$$

Comme dans [7], déterminons deux suites $(\delta_\nu)_{\nu \geq 1}$ et $(\varepsilon_\nu)_{\nu \geq 1}$ de nombres réels positifs; à l'aide des lemmes [7].3.2.2

et 3.2.3. Rappelons l'énoncé de ces deux lemmes, ainsi que

la notation suivante : Si N est une algèbre de Von Neumann,

K un sous-facteur de type I_n de N , alors, pour chaque

$\psi \in N_*$, nous noterons $\psi|_{K' \cap N} \otimes \tau_K$, l'élément de N_* ,

qui est égal, lorsque N est identifiée avec $(K' \cap N) \otimes K$,

au produit tensoriel de ψ sur $K' \cap N$, par la trace normalisée

τ_K de K .

Posons $\delta_\nu = 2^{-\nu} n_\nu^{-2} (n_\nu + 1)^{-1}$, pour $\nu \geq 1$. Nous avons

alors :

Lemme 3.7 ([7].3.2.2) : Pour chaque $\nu \geq 1$, δ_ν est tel

que si $(F_j)_{0 \leq j \leq n_\nu - 1}$ est une partition de l'unité dans M

et $u \in M$, un unitaire de M avec $u^{n_\nu} = 1$, $u F_j u^* = F_{j+1}$,

pour $0 \leq j \leq n_\nu - 1$, alors :

$$(\psi \in M_*, \|\psi, u\| \leq \delta_\nu, \|\psi, F_j\| \leq \delta_\nu, 0 \leq j \leq n_\nu - 1)$$

implique $\|\psi - \psi|_{K' \cap N} \otimes \tau_K\| \leq 2^{-\nu}$, où K est le sous-

facteur de M engendré par u et les F_j .

Lemme 3.8 ([7].3.2.3) : Pour chaque $v \geq 1$, il existe $0 < \varepsilon_v \leq 1/n_v$ et satisfaisant la condition suivante : si ϕ est un état normal, fidèle sur M et u , un unitaire de M tel que $-1 \in \Lambda(\phi, u^{n_{v+1}})$, alors

($\psi \in M_*^+$, $\psi \leq \phi$, $\|[\psi, u]\| \leq 2\varepsilon_v$) implique

$$\|[\psi, \tilde{u}]\| \leq \delta_{v+1}, \text{ où } \tilde{u} = u(f_{n_{v+1}}(u^{n_{v+1}}))^*$$

Fixons définitivement, une suite $(\varepsilon_v)_{v \geq 1}$, satisfaisant 3.8 et telle que $\varepsilon_{v+1} \leq \varepsilon_v$, $\forall v$

Rappelons encore l'énoncé du lemme 3.2.6 de [7]

Lemme 3.9 : Soit $P = Q \otimes N$, le produit tensoriel d'un facteur Q , de dimension finie, par un facteur N . Pour tout $\psi \in P_*$, il existe alors m éléments ($m =$ dimension de Q) de N_* , $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^m$, tels que :

$$(a) \forall x \in N, \|[\psi, 1 \otimes x]\| \leq \sup_j \| [\psi^j, x] \cdot \|$$

(b) $\forall u \in U(Q)$, $v \in U(N)$, $\theta \in \text{Aut}(N)$, on a :

$$\| \psi \circ (\text{Ad } u \otimes \theta) - \psi \circ \text{Ad}(u \otimes v) \| \leq \sup_j \| \psi^j \circ \theta - \psi^j \circ \text{Ad } v \|$$

Lemme 3.10 : Soient M , comme ci-dessus et α , β satisfaisant les conclusions de 3.1 ; ϕ , un état normal, fidèle sur M et $(\psi_j)_{j \geq 1}$, une suite d'éléments de $[0, \phi]_{M^*}$.

Il existe une suite de triples $(K_v, v_v, w_v)_{v \geq 1}$, où K_v est un sous-facteur de M ; v_v, w_v des unitaires de M , telle que, pour tout $v \geq 1$,

(a) K_v commute avec les K_j , $j < v$.

(b) K_v est engendré par une partition de l'unité

$(p_j^v)_{0 \leq j \leq n_v - 1}$ et un unitaire u_v , $u_v^{n_v} = 1$; $u_v p_j^v u_v^* = p_{j+1}^v$, pour $0 \leq j \leq n_v - 1$.

(c) $\|[\psi_r, u_v]\| \leq \delta_v$, $\|[\psi_r, p_j^v]\| \leq \delta_v$ pour $r < v$ et $0 \leq j \leq n_v - 1$.

(d) v_v et w_v commutent avec K_1, K_2, \dots, K_{v-1} .

(e) $\|(v_v - 1)v_{v-1} \dots v_1\|_{\phi}^{\#} \leq \frac{9}{n_v}$
 $\|(w_v - 1)w_{v-1} \dots w_1\|_{\phi}^{\#} \leq \frac{\sqrt{2}}{n_v}$

Posons $\alpha_v = \text{Ad}(v_v \dots v_1) \circ \alpha$ et $\beta_v = \text{Ad}(w_v \dots w_1) \circ \beta$ pour $v \geq 1$ et, par convention, $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$.

(f) α_v et β_v sont des transpositions de M , qui laissent globalement invariant K_r , pour $r \leq v$. Plus précisément, $\{e_{i,j}^r = u_r^{i-j} p_j^r \mid 0 \leq i, j \leq n_r - 1\}$ est un s.u.m. tel que, pour $0 \leq i, j \leq n_r - 1$,

$$(1) \alpha_v(e_{i,j}^r) = e_{-j+1, -i+1}^r \quad (2) \beta_v(e_{i,j}^r) = e_{j, -i}^r$$

$$(g) \alpha_{v-1}(v_v) = v_v \quad \text{et} \quad \beta_{v-1}(w_v) = w_v$$

$$(h) \text{Pour } k \leq v, \quad \|\psi_k \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_k \circ \text{Ad}(u_v \dots u_1)^{-1}\| \leq \varepsilon_v$$

Démonstration : Supposons $(K_1, v_1, w_1), \dots, (K_v, v_v, w_v)$ construits et déterminons $(K_{v+1}, v_{v+1}, w_{v+1})$.

Soient Q , le sous-facteur engendré par les K_j , $j \leq v$; m , la dimension du sous-facteur Q ; $N = Q' \cap M$ et $U = u_v \dots u_1$. Pour $1 \leq r \leq v+1$, soient ψ_r^e , $1 \leq e \leq m$, des éléments de N_* , qui satisfont les conditions de 3.9, relativement à ψ_r .

Choisissons $0 < \varepsilon < \delta_{v+1}$ tel que si $x \in M_2 = \{x \in M \mid \|x\| \leq 2\}$

$$[\|x\|_\phi \leq 2\varepsilon] \implies [\|x\|_\chi \leq (\frac{\varepsilon_{v+1}}{18})^2]$$

(o) pour $\chi \in \{\phi, \phi \circ \alpha_v, \phi \circ \beta_v, \phi \circ (\beta_v \circ \alpha_v)\}$]

$$\|x\|_\phi \leq 2\varepsilon \implies \text{Sup} (\|xv_v \dots v_1\|_\phi, \|xw_v \dots w_1\|_\phi) \leq \frac{1}{n_{v+1}}$$

Soit ω , un ultrafiltre libre sur N . Par restriction, α_v et β_v définissent des transpositions de N , qui satisfont les conclusions du lemme 3.1. En effet, si nous identifions M avec $Q \otimes N$, nous avons $\alpha_v \circ \beta_v = \text{Ad } U \otimes \alpha_v \circ \beta_v|_N$, d'où par le théorème 1 de [7], $\alpha_v \circ \beta_v$ est extérieurement conjugué à $\alpha_v \circ \beta_v|_N$ et donc, $\alpha_v \circ \beta_v|_N \in \overline{\text{Int}}(N)$ et

$$p_a(\alpha_v \circ \beta_v|_N) = p_a(\alpha_v \circ \beta_v) = p_a(\alpha \circ \beta) = 0.$$

De plus, comme $\alpha_v = \text{Ad}(v_v \dots v_1) \circ \alpha$, $\beta_v = \text{Ad}(w_v \dots w_1) \circ \beta$ et que α_ω et β_ω satisfont 3.1 (b), il existe par le lemme B.5, une partition $(P_j)_{0 \leq j \leq n_{v+1}-1}$ de l'unité de N , telle

$$\text{que : } (\alpha_v)_\omega(P_j) = P_{-j+1} \quad \text{et} \quad (\beta_v)_\omega(P_j) = P_{-j} \quad (0 \leq j \leq n_{v+1}-1)$$

Comme $\phi|_N$ est un état normal, fidèle sur N , il existe par le lemme 3.6, une partition de l'unité $(p_j)_{0 \leq j \leq n_{v+1}-1}$ dans N et trois unitaires a , b et u de N tels que :

$$(1) \quad -1 \in \Lambda(\phi|_N, u^{n_{v+1}}) \quad .$$

$$(2) \quad \| [\psi_r^s, p_j] \| \leq \delta_{v+1} \quad \text{pour } 1 \leq r \leq m, \quad 0 \leq j \leq n_{v+1} - 1$$

et $r = 1, \dots, v+1$.

$$(3) \quad \| \psi_r^s \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_r^s \circ \text{Ad } u^{-1} \| \leq \frac{\varepsilon_{v+1}}{2}$$

pour $1 \leq r \leq m$, $r = 1, \dots, v+1$.

$$(4) \quad \alpha_v(a) = a \quad \text{et} \quad \beta_v(b) = b \quad .$$

$$(5) \quad \| a - 1 \|_\phi \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \| b - 1 \|_\phi \leq \varepsilon$$

Posons $P = f_{n_{v+1}}(u^{n_{v+1}})^*$, $\tilde{u} = uP$ et K , le sous-facteur de type $I_{n_{v+1}}$, engendré par \tilde{u} et les p_j .

(6) $\{ e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leq i, j \leq n_{v+1} - 1 \}$ est un s.u.m. de K tel que pour $0 \leq i, j \leq n_{v+1} - 1$,

$$(a) \quad \text{Ad } a \circ \alpha_v(e_{i,j}) = e_{-j+1, -i+1} \quad (b) \quad \text{Ad } b \circ \beta_v(e_{i,j}) = e_{-j, -i} \quad .$$

$$(7) \quad \| P \text{ Ad } a \circ \alpha_v(P^*) - 1 \|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \leq \varepsilon$$

Posons $p_j^{v+1} = p_j$ pour $0 \leq j \leq n_{v+1} - 1$, $K_{v+1} = K$, $w_{v+1} = b$ et $u_{v+1} = \tilde{u}$. Comme $\alpha_v \beta_v = \text{Ad } U \otimes \alpha_v \beta_v|_N$, nous obtenons par (3) et 3.9 :

$$(8) \quad \| \psi_r \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad}(uU)^{-1} \| \leq \frac{\varepsilon_{v+1}}{2} \quad \text{pour } 1 \leq r \leq v+1 \quad .$$

et, par hypothèse d'induction,

$$\| \psi_r \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad } U^{-1} \| \leq \varepsilon_v, \quad \text{pour } 1 \leq r \leq v \quad .$$

Comme u et U commutent, nous avons :

$$\| \psi_r \circ \text{Ad } u^{-1} - \psi_r \| \leq \varepsilon_v + \frac{\varepsilon_{v+1}}{2}$$

d'où,

$$\| [\psi_r, u] \| \leq 2\varepsilon_v \quad \text{pour } 1 \leq r \leq v$$

Comme $\psi_r \leq \phi$, la condition (1) et 3.8 montrent que :

$$\|[\psi_r, \tilde{u}]\| \leq \delta_{v+1} \quad \text{pour } 1 \leq r \leq v$$

Les conditions (a), (b) et (c) du lemme 3.10 sont donc vérifiées. Construisons maintenant v_{v+1} . Posons, pour simplifier les notations, $\tilde{\alpha} = \text{Ad } a \circ \alpha_v$. L'antiautomorphisme

$\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha}$ laisse globalement fixe $K'_{v+1} \cap N$ et donc définit par restriction, un antiautomorphisme de $K'_{v+1} \cap N$, qui est un facteur continu. Comme $P \in N$ et P commute à u_{v+1} et aux p_j^{v+1} , $0 \leq j \leq n_{v+1} - 1$, $\tilde{\alpha}(P^*) \in K'_{v+1} \cap N$ et donc

$$(\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha})^2 = \text{Ad}(\tilde{\alpha}(P^*))$$

est un automorphisme intérieur de $K'_{v+1} \cap N$. De plus, par (7), et comme $\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}(P^*)) = (\tilde{\alpha}(P^*))^*$, il existe par le lemme 1.6, un unitaire $v \in K'_{v+1} \cap N$ tel que

$$\tilde{\alpha}(Pv) = Pv \quad \text{et} \quad \|v - 1\|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \leq 2\varepsilon$$

Posons $v_{v+1} = vPa$. Par construction, v_{v+1} et w_{v+1} commutent à K_1, \dots, K_v et donc (d) est vérifié.

Remarquons que, d'une part, comme $w_{v+1} = b$, nous avons, par (5), $\beta_v(w_{v+1}) = w_{v+1}$ et que, d'autre part, comme $\alpha_v(a) = a$ et $\tilde{\alpha}(vP) = \text{Ad } a \circ \alpha_v(vP) = vP$, $\alpha_v(v_{v+1}) = v_{v+1}$ et (g) est prouvé.

Démontrons (e). Comme $\|w_{v+1} - 1\|_{\phi} = \|b - 1\|_{\phi} \leq \varepsilon$, par (o), nous avons

$$\|(w_{v+1} - 1)w_v \dots w_1\|_{\phi}^* \leq \frac{\sqrt{2}}{n_{v+1}}$$

car $\|(w_{v+1} - 1)w_v \dots w_1\|_{\phi} \leq 1/n_{v+1}$ et

$$\begin{aligned} \|[w_{v+1} - 1]w_v \dots w_1\|_{\phi}^* &= \|w_1^* \dots w_v^* (w_{v+1}^* - 1)\|_{\phi} = \\ &\leq \|w_{v+1}^* - 1\|_{\phi} \leq \varepsilon \leq 1/n_{v+1} \end{aligned}$$

Posons $V = v_{\nu} \dots v_1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \|(v_{\nu+1}-1)V\|_{\phi} &= \|(vPa-1)V\|_{\phi} \leq \|(a-1)V\|_{\phi} + \|(v-1)PV\|_{\phi} + \\ &+ \|(P-1)V\|_{\phi} \end{aligned}$$

Or, comme $P = f_{n_{\nu+1}}(u^{n_{\nu+1}})^*$, nous avons $\|P - 1\|_{\phi} \leq \frac{\pi}{n_{\nu+1}}$

et donc

$$\|(P-1)V\|_{\phi} \leq \|(P-1)V\| \leq \frac{\pi}{n_{\nu+1}}$$

De plus, comme $\|a - 1\|_{\phi} \leq \epsilon$ et

$$\|(v-1)P\|_{\phi} = \|v - 1\|_{\phi \circ \text{Ad } P^*} \leq 2\epsilon$$

nous avons, par (o),

$$\|(v_{\nu+1} - 1)v_{\nu} \dots v_1\|_{\phi} \leq \frac{2 + \pi}{n_{\nu+1}}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \|V^*(v_{\nu+1}^*-1)\|_{\phi} &= \|v_{\nu+1}-1\|_{\phi} \leq \|a-1\|_{\phi} + \|(v-1)P\|_{\phi} + \|P-1\|_{\phi} \\ &\leq 3\epsilon + \frac{\pi}{n_{\nu+1}} \leq \frac{3 + \pi}{n_{\nu+1}} \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons : $\|(v_{\nu+1} - 1)v_{\nu} \dots v_1\|_{\phi}^* \leq \frac{9}{n_{\nu+1}}$.

Comme par construction, $\alpha_{\nu+1} = \text{Ad } v_{\nu+1} \circ \alpha_{\nu}$ et

$\beta_{\nu+1} = \text{Ad } w_{\nu+1} \circ \beta_{\nu}$ vérifient (f), il ne reste plus qu'à prouver (h). Remarquons, auparavant, que si $x \in M_2$,

$$\begin{aligned} \|\beta_{\nu+1} \circ \tilde{\alpha} \circ \text{Ad } P^*(x)\|_{\phi} &= \|\text{Ad}(w_{\nu+1}\beta_{\nu}(a^*)) \circ \beta_{\nu} \alpha_{\nu} \circ \text{Ad } P^*(x)\|_{\phi} \\ &\leq 2 \|\phi \circ \text{Ad}(b\beta_{\nu}(a^*)) - \phi\|^{1/2} + \|xP\|_{\phi \circ \beta_{\nu} \alpha_{\nu}} \\ &\leq 2/2 \|\text{Ad } b\beta_{\nu}(a^*) - 1\|_{\phi}^{1/2} + \|xP\|_{\phi \circ \beta_{\nu} \alpha_{\nu}} \\ &\leq 2/2 (\|b - 1\|_{\phi} + \|a - 1\|_{\phi \circ \beta_{\nu}})^{1/2} + \|xP\|_{\phi \circ \beta_{\nu} \alpha_{\nu}} \\ &\leq 4 \frac{\epsilon_{\nu+1}}{18} + \|xP\|_{\phi \circ \beta_{\nu} \alpha_{\nu}} \end{aligned}$$

Comme $\|(v - 1)P\|_{\phi} \leq 2\epsilon$, nous avons, par (o) et pour $r \leq \nu+1$,

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \left\| \psi_r \circ (\alpha_{v+1} \beta_{v+1})^{-1} - \psi_r \circ (\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{v+1})^{-1} \right\| \\
 &= \left\| \psi_r \circ \beta_{v+1} \circ \tilde{\alpha} \circ \text{Ad } P^* \circ \text{Ad } v^* - \psi_r \circ \beta_{v+1} \circ \tilde{\alpha} \circ \text{Ad } P^* \right\| \\
 &= \left\| \psi_r \circ \text{Ad} (\beta_{v+1} \circ \tilde{\alpha} \circ \text{Ad } P^* (v^*)) - \psi_r \right\| \\
 &\leq 2 \left\| \beta_{v+1} \circ \tilde{\alpha} \circ \text{Ad } P^* (v - 1) \right\|_{\phi} \\
 &\leq 4 \frac{\epsilon_{v+1}}{18} + \left\| (v-1) P \right\|_{\phi} \beta_v \alpha_v \leq 5 \frac{\epsilon_{v+1}}{18}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \psi_r \circ (\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{v+1})^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad} (u_{v+1} U)^{-1} \right\| \\
 &= \left\| \psi_r \circ (\tilde{\alpha} \circ \beta_{v+1})^{-1} \circ \text{Ad } P^* - \psi_r \circ \text{Ad} (uU)^* \circ \text{Ad } P^* \right\| \\
 &\leq \left\| \psi_r \circ \beta_{v+1} \circ \tilde{\alpha} - \psi_r \circ \beta_v \alpha_v \right\| + \left\| \psi_r \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad} (uU)^{-1} \right\| \\
 &\leq \left\| \psi_r \circ \text{Ad} (b \beta_v (a^*)) - \psi_r \right\| + \left\| \psi_r \circ (\alpha_v \beta_v)^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad} (uU)^{-1} \right\|
 \end{aligned}$$

Par (8), (9) et comme

$$\left\| \psi_r \circ \text{Ad} (b \beta_v (a^*)) - \psi_r \right\| \leq 2 \left\| b \beta_v (a^*) - 1 \right\|_{\phi} \leq 4 \frac{\epsilon_{v+1}}{18}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \psi_r \circ (\alpha_{v+1} \beta_{v+1})^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad} (u_{v+1} u_v \dots u_1)^{-1} \right\| \\
 &\leq \left\| \psi_r \circ (\alpha_{v+1} \beta_{v+1})^{-1} - \psi_r \circ (\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{v+1})^{-1} \right\| + \\
 &\quad \left\| \psi_r \circ (\text{Ad } P \circ \tilde{\alpha} \circ \beta_{v+1})^{-1} - \psi_r \circ \text{Ad} (u_{v+1} U)^{-1} \right\| \\
 &\leq 5 \frac{\epsilon_{v+1}}{18} + 4 \frac{\epsilon_{v+1}}{18} + \frac{\epsilon_{v+1}}{2} \leq \epsilon_{v+1}
 \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration de 3.10, remarquons que pour $v = 1$, les conditions (a), (c) et (d) sont vides. La construction de (K_1, v_1, w_1) s'effectue de la même manière que ci-dessus avec $v = 0$ et $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$.

qed.

Fin de la démonstration du théorème 1 : Par le lemme 3.1 , nous pouvons supposer que α et β satisfont les conditions d'application du lemme 3.10. Choisissons un état normal, fidèle ϕ sur M et une suite $(\psi_j)_{j \geq 1}$ de $[0, \phi]_{M_*}$, qui est totale dans M_* . Nous construisons alors, comme dans le lemme 3.10, une suite de triples $(K_\nu, v_\nu, w_\nu)_{\nu \geq 1}$ et nous obtenons :

(1) Les K_ν engendrent un sous-facteur K de type II_1 de M et M est égal au produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

[appliquer 3.10 (a), (c), les lemmes 3.7 et [7].2.3.6]

(2) Les unitaires $a_\nu = v_\nu v_{\nu-1} \dots v_1$ et $b_\nu = w_\nu w_{\nu-1} \dots w_1$ convergent $*$ -fortement vers deux unitaires a et b de M .

De plus, $\alpha(a) = a$ et $\beta(b) = b$.

[par 3.10 (e), $\|a_\nu - a_{\nu-1}\|_\phi \leq \frac{9}{n_\nu}$ et $\|b_\nu - b_{\nu-1}\|_\phi \leq \frac{\sqrt{2}}{n_\nu}$ et par hypothèse, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu} < \infty$

De plus, pour tout $\nu \geq 1$, $\alpha(a_\nu) = a_\nu$ et donc, $\alpha(a) = a$. En effet, par 3.10 (g), nous avons, d'une part,

$$\alpha(a_1) = \alpha_0(v_1) = v_1 = a_1$$

et d'autre part, si $\alpha(a_{\nu-1}) = a_{\nu-1}$, alors

$$\begin{aligned} \alpha(a_\nu) &= \alpha(v_\nu a_{\nu-1}) = \alpha(a_{\nu-1}) \alpha(v_\nu) = (a_{\nu-1} \alpha(v_\nu) a_{\nu-1}^*) a_{\nu-1} \\ &= \alpha_{\nu-1}(v_\nu) a_{\nu-1} = v_\nu a_{\nu-1} = a_\nu . \end{aligned}$$

On vérifie de même, que $\beta(b_\nu) = b_\nu$, pour tout $\nu \geq 1$.

Posons $\alpha_\infty = \text{Ad } a \cdot \alpha$ et $\beta_\infty = \text{Ad } b \cdot \beta$. Par (2), ce sont des transpositions de M et par la proposition 1.2, α_∞ (resp. β_∞) est $\text{Int}(M)$ -équivalent à α (resp. β).

Comme $\alpha_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_\nu$ et $\beta_\infty = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta_\nu$, nous avons :

$$(3) \quad \alpha_\infty = \text{Ad } u_\nu \circ \beta_\infty \text{ sur } K_\nu \text{ et } \beta_\infty(u_\nu) = u_\nu \text{ pour tout } \nu \geq 1.$$

En effet, par 3.10 (d) et (f), nous avons, pour $0 \leq s, t \leq n_\nu - 1$,

$$\text{Ad } u_\nu \circ \beta_\infty(e_{s,t}^\nu) = \text{Ad } u_\nu \circ \beta_\nu(e_{s,t}^\nu) = \text{Ad } u_\nu(e_{-t,-s}^\nu)$$

$$= \sum_{k,r} e_{k+1,k}^\nu e_{-t,-s}^\nu e_{r,r+1}^\nu = e_{-t+1,-s+1}^\nu$$

$$= \alpha_\nu(e_{s,t}^\nu) = \alpha_\infty(e_{s,t}^\nu)$$

$$\text{et } \beta_\infty(u_\nu) = \beta_\nu\left(\sum_{k=0}^{n_\nu-1} e_{k+1,k}^\nu\right) = \sum_{j=0}^{n_\nu-1} e_{-k,-(k+1)}^\nu = u_\nu.$$

Par (3) et le lemme 1.1, il existe, pour tout $\nu \geq 1$, un unitaire z_ν de K_ν tel que $u_\nu = z_\nu \beta_\infty(z_\nu)$. Si $\psi \in M_*$, nous avons:

$$\|\psi \circ \text{Ad } z_\nu - \psi\| = \|\psi, z_\nu\| \leq n^2 \sup_{i,j} \|\psi, e_{i,j}^\nu\|$$

car $z_\nu \in U(K_\nu)$. Par 3.10 (c) et le choix de δ_ν , nous obtenons, alors, pour $r < \nu$

$$(4) \quad \|\psi_r \circ \text{Ad } z_\nu - \psi_r\| \leq 2^{-\nu} \quad \text{et} \quad \|\psi_r \circ \text{Ad } z_\nu^{-1} - \psi_r\| \leq 2^{-\nu}$$

car, pour $\psi \in M_*$ et $0 \leq i, j \leq n_{\nu-1}$,

$$\begin{aligned} \|\psi, e_{i,j}^\nu\| &= \|\psi, u_\nu^{1-j} p_j^\nu\| \leq \|\psi, p_j^\nu\| + \|\psi, u_\nu^{1-j}\| \\ &\leq \|\psi, p_j^\nu\| + n_\nu \|\psi, u_\nu\| \end{aligned}$$

Posons $\theta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Ad}(z_\nu z_{\nu-1} \dots z_1)$. Par (4), $\theta \in \overline{\text{Int}(M)}$

et $\theta|_{K' \cap M} = 1$. De plus par construction,

$$\alpha_\infty|_K = \theta \circ \beta_\infty \circ \theta^{-1}|_K.$$

Comme, par 3.10 (h), $\alpha_\infty|_{K' \cap M} = \beta_\infty|_{K' \cap M}$, nous obtenons

$$\alpha_\infty(x) = \theta \circ \beta_\infty \circ \theta^{-1}(x), \quad \forall x \in M.$$

Comme α (resp. β) est $\text{Int}(M)$ - équivalent à α_∞ (resp. β_∞), le théorème est ainsi démontré.

4. GENERALISATION DE L'HOMOMORPHISME FONDAMENTAL

Le but de ce paragraphe est la généralisation aux antiautomorphismes de l'homomorphisme fondamental mod , défini dans [9]. Déf. IV.1.1. Celle-ci est donnée dans 4.7 et est basée principalement sur le lemme 4.1, où nous prouvons que si M est une algèbre de Von Neumann ; ϕ , un poids normal, fidèle, semi-fini sur M et $\alpha \in \text{Aut}(M)$, alors

$$\sigma_t^{\phi \circ \alpha^{-1}} = \alpha \circ \sigma_{-t}^{\phi} \circ \alpha^{-1} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} .$$

Les propositions 4.9 et 4.10 et le théorème 4.12 sont des extensions aux antiautomorphismes des propositions IV.1.2 et IV.1.3 et du théorème IV.1.10 de [9]

Dans la proposition 4.13 , nous montrons que, si M est le produit croisé d'une algèbre de Von Neumann N , par un sous-groupe dénombrable G de $\text{Aut}(N)$, tout antiautomorphisme de N , commutant à l'action de G , se prolonge en un antiautomorphisme de M .

Soit $M = W^*(L^\infty(\Omega, \mu), T)$, un facteur de Krieger de type II_∞ ou III . Dans la proposition 4.15 , nous prouvons que la transposition canonique sur M , obtenue en prolongeant, via 4.13 , l'identité sur $L^\infty(\Omega, \mu)$, est de module 1 .

Lemme 4.1 : Soit ϕ un poids normal, fidèle, semi-fini sur une algèbre de Von Neumann M . Si $\alpha \in \text{Ant}(M)$, le groupe d'automorphismes modulaires de M , associé à $\phi \circ \alpha^{-1}$, est donné ainsi :

$$\sigma_t^{\phi \circ \alpha^{-1}} = \alpha \circ \sigma_{-t}^{\phi} \circ \alpha^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Rappelons que $\mathcal{N}_\phi = \{x \in M \mid \phi(x^*x) < \infty\}$ est un idéal à gauche de M et que $\mathcal{N}_\phi^* = \mathcal{N}_\phi^* \cap \mathcal{N}_\phi \subset \mathcal{N}_\phi \cap \mathcal{N}_\phi^*$ est une sous-algèbre de M . Comme $\{\alpha \circ \sigma_{-t}^{\phi} \circ \alpha^{-1}\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de M , qui laisse $\phi \circ \alpha^{-1}$ invariant, il suffit ([30].Th.10.17), pour démontrer le lemme, de vérifier que, relativement à ce groupe, $\phi \circ \alpha^{-1}$ satisfait les conditions K.M.S., pour toute paire d'éléments de $\mathcal{N}_\phi^{\phi \circ \alpha^{-1}}$.

Remarquons tout d'abord, que $\mathcal{N}_\phi^{\phi \circ \alpha^{-1}} = \alpha(\mathcal{N}_\phi^*)$ et donc que : $\mathcal{N}_\phi^{\phi \circ \alpha^{-1}} = \alpha(\mathcal{N}_\phi)$.

En effet, soit $x \in \mathcal{N}_\phi$. On a alors

$$\phi \circ \alpha^{-1}(\alpha(x)\alpha(x^*)) = \phi \circ \alpha^{-1}(\alpha(x^*x)) = \phi(x^*x) < \infty$$

et donc, l'égalité cherchée.

Soient $x, y \in \mathcal{N}_\phi^{\phi \circ \alpha^{-1}}$. Comme ϕ satisfait les conditions K.M.S., relativement à $\{\sigma_t^\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ et que $\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y) \in \mathcal{N}_\phi$, il existe une fonction $f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}^{\phi \circ \alpha^{-1}}$, continue, bornée dans la bande $D = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im} t \leq 1\}$ et analytique à l'intérieur telle que :

$$f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}^{\phi \circ \alpha^{-1}}(t) = \phi(\sigma_t^\phi(\alpha^{-1}(x))\alpha^{-1}(y))$$

$$f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}^{\phi \circ \alpha^{-1}}(t+1) = \phi(\alpha^{-1}(y)\sigma_t^\phi(\alpha^{-1}(x)))$$

Posons $F_{y,x}(\zeta) = f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}(\zeta)$, $\zeta \in D$. Comme

$\{ \sigma_t^\phi \}$ laisse ϕ invariant, nous avons, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{y,x}(t) &= f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}(t) = \phi(\sigma_t^\phi(\alpha^{-1}(x))\alpha^{-1}(y)) = \\ &= \phi(\alpha^{-1}(x)\sigma_{-t}^\phi \cdot \alpha^{-1}(y)) = \phi \cdot \alpha^{-1}(\alpha \cdot \sigma_{-t}^\phi \cdot \alpha^{-1}(y)x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{y,x}(t+1) &= f_{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)}(t+1) = \phi(\alpha^{-1}(y)\sigma_t^\phi(\alpha^{-1}(x))) = \\ &= \phi(\sigma_{-t}^\phi \cdot \alpha^{-1}(y)\alpha^{-1}(x)) = \phi \cdot \alpha^{-1}(x\alpha \cdot \sigma_{-t}^\phi \cdot \alpha^{-1}(y)) \quad . \end{aligned}$$

qed.

Si M est une algèbre de Von Neumann et ϕ , un poids normal, fidèle, semi-fini sur M , notons, comme de coutume, $M_\phi = \{ x \in M \mid \sigma_t^\phi(x) = x, \forall t \in \mathbb{R} \}$, le centralisateur du poids ϕ . Nous avons alors immédiatement le lemme suivant :

Lemme 4.2 : Soient M , ϕ et α comme dans 4.1. Alors, α définit, par restriction, un anti-isomorphisme de M_ϕ sur

$$M_{\phi \cdot \alpha^{-1}} .$$

Remarque 4.3 : Soient M , ϕ comme dans 4.1 et $\alpha \in \text{Aut}(M)$.

Alors, α définit par restriction un isomorphisme de M_ϕ

sur $M_{\phi \cdot \alpha^{-1}}$, car ([6].Lemme 1.2.10)

$$\sigma_t^{\phi \cdot \alpha^{-1}} = \alpha \cdot \sigma_t^\phi \cdot \alpha^{-1} , \text{ pour } t \in \mathbb{R} .$$

Dans ce qui suit, M dénotera une algèbre de Von Neumann proprement infinie, de genre dénombrable.

Rappelons quelques définitions de [9]. Si ϕ est un poids normal, semi-fini sur M , son support, $s(\phi)$, est le projecteur e de M tel que $\phi(1-e) = 0$ et que la restriction de ϕ à M_e soit fidèle ; son groupe d'automorphismes modulaires $\{ \sigma_t^\phi \}$ est le groupe d'automorphismes modulaires, associés à la restriction de ϕ à M_e . Le centralisateur M_ϕ de ϕ est la sous-algèbre de Von Neumann de M_e , qui est laissée fixe point par point sous $\{ \sigma_t^\phi \}$.

Pour un poids normal, semi-fini ϕ sur M et un opérateur partiellement isométrique u de M avec $uu^* \in M_\phi$, on définit un nouveau poids ϕ_u par $\phi_u(x) = \phi(uxu^*)$, $\forall x \in M_+$.

Deux poids normaux, semi-finis ϕ et ψ sur M sont dits équivalents ($\phi \sim \psi$) s'il existe une isométrie partielle u de M avec $s(\phi) = uu^*$ et $s(\psi) = u^*u$ et telle que $\psi = \phi_u$. Si $\phi = \psi_u$, pour un opérateur partiellement isométrique u avec $uu^* \in M_\psi$, ϕ est dit sous-équivalent à ψ ($\phi \prec \psi$).

Soient ϕ, ψ deux poids normaux, semi-finis sur M et $\theta = \theta(\phi, \psi)$, le poids défini, sur $P = M \otimes F_2$, par

$$\theta\left(\sum_{i,j=1}^2 x_{i,j} \otimes e_{i,j}\right) = \phi(x_{11}) + \psi(x_{22})$$

pour $\sum_{i,j=1}^2 x_{i,j} \otimes e_{i,j} \geq 0$, où $(e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ est un s.u.m.

du facteur de type I_2, F_2 .

Nous noterons, comme dans [9], Déf. I.1.5,

$c_\phi(\psi) \in Z(M_\phi)$, le projecteur du centre de M_ϕ , défini par

l'égalité : $c_\phi(\psi) \otimes e_{11} = Z_{P_\theta}(s(\psi) \otimes e_{22})(s(\phi) \otimes e_{11})$

où, pour $x \in P_\theta$, $Z_{P_\theta}(x)$ désigne son support central dans P_θ .

Remarque 4.4 : Rappelons ([9], Lemme I.1.6) les résultats suivants : Soient ϕ, ψ et ω trois poids normaux, semi-finis sur M .

(a) Pour toute isométrie partielle $v \in M$ avec $vv^* \in M_\omega$, $c_{\omega_v}(\omega_v)$ est le support central de vv^* dans M_ω .

(b) Pour toute isométrie partielle $v \in M$ avec $vv^* \in M_\omega$

$$c_{\omega_v}(\phi) = v^* c_\omega(\phi) v \quad .$$

(c) $\phi \prec \psi \implies c_\omega(\phi) \leq c_\omega(\psi)$.

Lemme 4.5 : Soient M, ϕ, ψ comme ci-dessus et $\alpha \in A(M)$.

On a, alors : $c_{\phi \circ \alpha^{-1}}(\psi \circ \alpha^{-1}) = \alpha(c_\phi(\psi))$.

Démonstration : Soit t , la transposition de F_2 , définie par $t(e_{i,j}) = e_{j,i}$ pour $1 \leq i, j \leq 2$. D'une part, si $\alpha \in \text{Ant}(M)$, comme $\theta(\phi \circ \alpha^{-1}, \psi \circ \alpha^{-1}) = \theta(\phi, \psi) \circ (\alpha \otimes t)^{-1}$ et que $s(\phi \circ \alpha^{-1}) = \alpha(s(\phi))$, on vérifie, par le lemme 4.2, que :

$$\begin{aligned} \alpha(c_\phi(\psi)) \otimes e_{11} &= (\alpha \otimes t)(c_\phi(\psi) \otimes e_{11}) = \\ &= (\alpha \otimes t)(Z_{P_{\theta(\phi, \psi)}}(s(\psi) \otimes e_{22})(s(\phi) \otimes e_{11})) \\ &= Z_{P_{\theta(\phi \circ \alpha^{-1}, \psi \circ \alpha^{-1})}}(s(\psi \circ \alpha^{-1}) \otimes e_{22})(s(\phi \circ \alpha^{-1}) \otimes e_{11}) \\ &= c_{\phi \circ \alpha^{-1}}(\psi \circ \alpha^{-1}) \otimes e_{11} \quad . \end{aligned}$$

D'autre part, si $\alpha \in \text{Aut}(M)$, comme

$$\theta(\phi \circ \alpha^{-1}, \psi \circ \alpha^{-1}) = \theta(\phi, \psi) \circ (\alpha \otimes 1)^{-1}$$

et que $(\alpha \otimes 1)(P_{\theta(\phi, \psi)}) = P_{\theta(\phi \circ \alpha^{-1}, \psi \circ \alpha^{-1})}$, un même calcul

que ci-dessus termine la démonstration du lemme .

qed.

Soit (P_M, F^M) , le flot lié des poids sur M ([9].Déf.II.2.6). Notons $W_{int}^M(M)$, l'ensemble des poids normaux, semi-finis et intégrables sur M . Rappelons ([9].Th.I.1.11 et p.503) que P_M est une algèbre de Von Neumann abélienne et qu'il existe une application p_M de $W_{int}^M(M)$ sur $P(P_M)$, l'ensemble des projecteurs de P_M , qui induit une bijection, préservant l'ordre entre l'ensemble des classes d'équivalence de poids normaux, semi-finis, intégrables et de multiplicité infinie et $P(P_M)$. Rappelons, de plus, que F_λ^M agit pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, comme la multiplication par λ , c'est-à-dire que :

$$F_\lambda^M(p_M(\phi)) = p_M(\lambda\phi), \text{ pour } \lambda > 0 \text{ et } \phi \in W_{int}^M(M).$$

Soit $\bar{\omega}$, un poids dominant sur M . ([9].Déf.II.1.2).

Remarque 4.6 : L'application $c_{\bar{\omega}}(\phi) \longmapsto p_M(\phi)$, où $\phi \in W_{int}^M(M)$, s'étend de manière unique en un isomorphisme $p_{\bar{\omega}}$ de $Z(M_{\bar{\omega}})$ sur P_M . ([9].Déf.II.2.6 + Th.I.1.11).

Soit $\alpha \in A(M)$. Comme $\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}$ est aussi un poids dominant sur M , $\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}$ et $\bar{\omega}$ sont unitairement équivalents ([9].Th.II.1.1). Donc, il existe un unitaire $v \in M$ tel que

$$\bar{\omega} \circ \alpha^{-1} = \bar{\omega} \circ \text{Ad } v.$$

Posons p_α , la restriction de $\text{Ad } v$ à $Z(M_{\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}})$. Comme, par 4.4(b), $c_{\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}}(\phi) = v^* c_{\bar{\omega}}(\phi) v$, $\phi \in W_{int}^M(M)$, p_α est l'unique isomorphisme de $Z(M_{\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}})$ sur $Z(M_{\bar{\omega}})$ tel que :

$$p_\alpha(c_{\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}}(\phi)) = c_{\bar{\omega}}(\phi), \quad \phi \in W_{int}^M(M).$$

De plus, comme par 4.2 et 4.3, $M_{\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}} = \alpha(M_{\bar{\omega}})$, la restriction de α à $Z(M_{\bar{\omega}})$ définit un isomorphisme de $Z(M_{\bar{\omega}})$ sur

$Z(M_{\overline{\omega} \cdot \alpha^{-1}})$. En considérant $p_\alpha \circ \alpha$, nous obtenons un automorphisme de $Z(M_{\overline{\omega}})$, qui satisfait :

$$p_\alpha \circ \alpha(c_{\overline{\omega}}(\phi)) = c_{\overline{\omega}}(\phi \circ \alpha^{-1}), \quad \phi \in W_{\text{int}}(M)$$

et qui est donc déterminé de manière unique.

$$\text{Soit } \text{Aut}(F^M) = \{ \sigma \in \text{Aut}(P_M) \mid \sigma \circ F_\lambda^M = F_\lambda^M \circ \sigma, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \}$$

et posons, par 4.6 :

Définition 4.7 : A tout $\alpha \in A(M)$ correspond un unique élément $\text{mod}(\alpha)$ de $\text{Aut}(F^M)$, défini par la condition :

$$(*) \quad \text{mod}(\alpha) P_M(\phi) = P_M(\phi \circ \alpha^{-1}), \quad \phi \in W_{\text{int}}(M).$$

L'application mod de $A(M)$ dans $\text{Aut}(F^M)$, ainsi définie, est clairement un homomorphisme de groupe, par (*), ce qui justifie la définition suivante :

Définition 4.8 : L'application mod de $A(M)$ dans $\text{Aut}(F^M)$ est appelée l'homomorphisme fondamental.

Proposition 4.9 : Si M est un facteur de type II_ω , à pré-dual séparable, alors l'application $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto F_\lambda^M \in \text{Aut}(F^M)$ est un isomorphisme. Pour tout $\alpha \in A(M)$ et toute trace τ normale, fidèle, semi-finie sur M , nous avons

$$\tau \circ \alpha^{-1} = \text{mod}(\alpha) \tau$$

où $\text{mod}(\alpha) = F_\lambda^M$ est identifié avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 4.10 : (i) Si M est un facteur de type III_λ , $0 < \lambda < 1$, à pré-dual séparable, alors l'application $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto F_\lambda^M \in \text{Aut}(F^M)$ est un homomorphisme de \mathbb{R}_+^* sur $\text{Aut}(F^M)$, dont le noyau est $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\alpha \in A(M)$

et toute trace généralisée ϕ ([6] 4.3), nous avons :

$$\phi \circ \alpha^{-1} \sim \lambda \cdot \phi \quad \text{avec} \quad \text{mod}(\alpha) = F_{\lambda}^M$$

(11) Si M est de type III₁, alors $\text{mod}(\alpha) = 1$, pour tout $\alpha \in A(M)$.

Comme 4.9 et 4.10 s'obtiennent par une extension immédiate aux antiendomorphismes des propositions IV.1.2 et IV.1.3 de [9], nous omettrons leur preuve.

Lemme 4.11 : Soient $\alpha \in A(M)$ et $\bar{\omega}$, un poids dominant sur M . Alors, $\alpha \in \ker(\text{mod})$ si et seulement s'il existe α_1 avec $\alpha_1 \alpha^{-1} \in \text{Int}(M)$ tel que $\bar{\omega} \circ \alpha_1 = \bar{\omega}$ et la restriction de α_1 à $Z(M_{\bar{\omega}})$ est l'identité.

Démonstration : Comme $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega} \circ \alpha^{-1}$ sont unitairement équivalents, il existe un unitaire $v \in M$ tel que $\bar{\omega} \circ \alpha^{-1} = \bar{\omega} \circ \text{Ad } v$. Posons $\alpha_1 = \text{Ad } v \circ \alpha$. Nous avons alors $\bar{\omega} \circ \alpha_1 = \bar{\omega}$. De plus, pour tout $\phi \in W_{\text{int}}(M)$, comme $\text{mod}(\alpha) = 1$, nous avons, par le lemme 4.5 et la remarque 4.4 (b) :

$$c_{\bar{\omega}}(\phi) = c_{\bar{\omega}}(\phi \circ \alpha^{-1}) = c_{\bar{\omega}}(\phi \circ \alpha_1^{-1}) = c_{\bar{\omega} \circ \alpha_1^{-1}}(\phi \circ \alpha_1^{-1}) = \alpha_1(c_{\bar{\omega}}(\phi))$$

ce qui termine la démonstration de la première partie du lemme.

Inversément, comme, par hypothèse, $\alpha_1|_{Z(M_{\bar{\omega}})} = 1$ et que $\bar{\omega} \circ \alpha_1^{-1} = \bar{\omega}$, nous avons, pour tout $\phi \in W_{\text{int}}(M)$,

$$c_{\bar{\omega}}(\phi \circ \alpha_1^{-1}) = c_{\bar{\omega}}(\phi)$$

et donc, par la remarque 4.4, $c_{\bar{\omega}}(\phi \circ \alpha^{-1}) = c_{\bar{\omega}}(\phi)$ ce qui termine la démonstration du lemme.

qed.

Démontrons maintenant une généralisation du théorème IV.1.10 de [9].

Théorème 4.12 : Soient M , un facteur de type III_λ , $\lambda \neq 1$, à préduel séparable et $\alpha \in A(M)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{mod } (\alpha) = 1$

(ii) Il existe ϕ , un état normal, fidèle sur M et un unitaire u de M tels que

$$\phi \circ (\text{Ad } u \circ \alpha) = \phi \quad \text{et} \quad \text{Ad } u \circ \alpha|_{Z(M_\phi)} = 1 .$$

(iii) Pour tout $\varepsilon > 1$ tel que $]\varepsilon^{-1}, \varepsilon[\cap S(M) = \{1\}$, il existe ϕ un état normal, fidèle sur M et un unitaire u de M tel que $\text{Ad } u \circ \alpha$ satisfait (ii) et $\text{Sp}(\Delta_\phi) \cap]\varepsilon^{-1}, \varepsilon[= \{1\}$, où Δ_ϕ est l'opérateur modulaire correspondant à $\{M, \phi\}$

Démonstration : Par le théorème IV.1.10 de [9], nous pouvons supposer d'une part, que $\alpha \in \text{Ant}(M)$ et d'autre part, en utilisant le lemme 4.11 et en effectuant une preuve tout à fait semblable à celle de IV.1.10, que l'implication (i) \implies (iii) est démontrée. Comme (iii) \implies (ii) est trivial il ne reste plus à prouver que (ii) \implies (i) .

Commençons par définir une transposition τ de $F_\infty = \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Soit J , la conjugaison de $L^2(\mathbb{R})$, ainsi définie : $(Jf)(p) = \overline{f(-p)}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ et posons, pour tout $x \in F_\infty$, $\tau(x) = Jx^*J$.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, soit U_t , l'unitaire de F_∞ tel que

$$(U_t f)(p) = f(p + t) \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

et soit U , l'isomorphisme de $L^\infty(\mathbb{R})$ dans F_∞ tel que

$$U(\exp(it.)) = U_t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Comme $\tau(U_t) = U_t$, $t \in \mathbb{R}$, la restriction de τ à $U(L^\infty(\mathbb{R}))$ est l'identité.

Notons Tr , la trace usuelle sur F_∞ et ω , le poids normal, fidèle, semi-fini sur F_∞ tel que :

$$(D \omega : D \text{Tr})_t = U_t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Rappelons que $\sigma_t^\omega = \text{Ad } U_t$, $t \in \mathbb{R}$, et remarquons que $\sigma_t^{\omega \circ \tau} = \sigma_t^\omega$, $t \in \mathbb{R}$. En effet, par le lemme 4.1 , nous avons :

$$\sigma_t^{\omega \circ \tau} = \tau \circ \sigma_{-t}^\omega \circ \tau = \tau \circ \text{Ad } U_{-t}^* \circ \tau = \text{Ad } \tau(U_t) = \text{Ad } U_t = \sigma_t^\omega \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, par le corollaire 1 de [30].C.10.4 , il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que $\omega \circ \tau = \lambda \omega$ et donc, comme τ est une transposition, $\lambda = 1$. Nous avons donc vérifié que :

$$\omega \circ \tau = \omega \quad .$$

Démontrons maintenant l'implication cherchée. Par hypothèse, il existe un antiautomorphisme α_0 , avec $\alpha_0^{-1} \in \text{Int}(M)$ et ϕ , un état normal, fidèle sur M tels que $\phi \circ \alpha_0 = \phi$ et $\alpha_0|_{Z(M_\phi)} = 1$. Considérons les produits tensoriels $\bar{M} = M \otimes F_\infty$, $\bar{\omega} = \phi \otimes \omega$ et $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 \otimes \tau$. Par [9].Th.II.1.3 , $\bar{\omega}$ est un poids dominant et par la démonstration de [9].Th.II.5.1 , $Z(M_{\bar{\omega}})$ est une sous-algèbre de Von Neumann de $Z(M_\phi) \otimes U(L^\infty(\mathbb{R}))$. Comme la restriction de α_0 à $Z(M_\phi)$ et celle de τ à $U(L^\infty(\mathbb{R}))$ est l'identité , $\bar{\alpha}_0$ laisse fixe point par point $Z(M_{\bar{\omega}})$. De plus, $\bar{\omega} \circ \bar{\alpha}_0 = \bar{\omega}$, car $\phi \circ \alpha_0 = \phi$ et $\omega \circ \tau = \omega$. Par conséquent, par le lemme 4.11 , nous avons $\text{mod}(\bar{\alpha}_0) = 1$. Comme $\text{mod}(\alpha) = \text{mod}(\alpha_0)$, une application du lemme suivant

termine la démonstration de 4.12.

Lemme 4.12.1 : Soient M , une algèbre de Von Neumann proprement infinie et $\alpha \in \text{Ant}(M)$. Si τ est un antiautomorphisme de $F_\infty = \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}))$, l'antiautomorphisme $\alpha \otimes \tau$ est extérieurement conjugué à α .

Démonstration : Soit $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ une famille dénombrable de projecteurs deux à deux orthogonaux, tels que $e_n \sim 1$, pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = 1$. Soit $\{v_n\}_{n \geq 1}$, une suite d'isométries partielles de M avec $v_n^* v_n = 1$ et $v_n v_n^* = e_n$. Soit $\{f_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq \infty\}$, un s.u.m. de F_∞ . Pour chaque $x \in M$, posons :

$$x_{i,j} = v_i^* x v_j \quad \text{et} \quad \sigma(x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_{i,j} \otimes f_{i,j}.$$

Alors, σ définit un isomorphisme de M sur $M \otimes F_\infty$. Soit γ la transposition de F_∞ , définie par $\gamma(f_{i,j}) = f_{j,i}$ ($1 \leq i, j \leq \infty$) et montrons que α est extérieurement conjugué à $\alpha \otimes \gamma$.

En effet, posons, pour tout $m \geq 1$, $w_m = \sigma(v_m)$, $\bar{\alpha} = \sigma \circ \alpha \circ \sigma^{-1}$ et $u = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \bar{\alpha}(w_k)$. On vérifie, par calcul direct, que u est un unitaire de $M \otimes F_\infty$. Soit x , un élément arbitraire de M et posons $y = x \otimes 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k x v_k^* \\ \text{et} \\ \text{Ad } u \circ \bar{\alpha}(y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} w_n \bar{\alpha}(w_n) \bar{\alpha}(y) \bar{\alpha}(w_m^*) w_m^* = \sum_{n,m=1}^{\infty} w_n \bar{\alpha}(w_m^* y w_n) w_m^* \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \sigma(v_n \alpha(v_m^* \sigma^{-1}(y) v_n) v_m^*) = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \sigma(v_n \alpha(v_m^* (\sum_{k=1}^{\infty} v_k x v_k^*) v_n) w_m^*) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma(v_k \alpha(x) v_k^*) = \sigma(\sum_{k=1}^{\infty} v_k \alpha(x) v_k^*) = \alpha(x) \otimes 1 \end{aligned}$$

De plus, comme $1 \otimes f_{i,j} = w_i w_j^*$ pour $1 \leq i, j \leq \infty$, nous avons:

$$\begin{aligned} \text{Ad } u \cdot \bar{\alpha}(1 \otimes f_{i,j}) &= \sum_{n,m} w_n \bar{\alpha}(w_n) \bar{\alpha}(w_i w_j^*) \bar{\alpha}(w_m^*) w_m^* = w_j \bar{\alpha}(w_i^* w_j w_j^*) w_i^* \\ &= w_j \bar{\alpha}(1) w_i^* = 1 \otimes f_{j,i} \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ad } u \cdot \sigma \cdot \alpha \cdot \sigma^{-1} = \alpha \otimes \gamma$ et comme $\tau = \text{Ad } v \cdot \gamma$ où v est un unitaire de F_∞ , le lemme est démontré.

qed.

4.13. Soient $N \subset \mathcal{L}(H)$, une algèbre de Von Neumann ; G , un groupe discret dénombrable, qui opère par automorphismes sur N et $M = W^*(N, G) \subset \mathcal{L}(L^2(G, H))$, le produit croisé de N par G . Rappelons que si I est l'isomorphisme canonique de N sur une sous-algèbre de Von Neumann de M , M est engendrée par les opérateurs $I(x)$, ($x \in N$), et u_g ($g \in G$) définis ainsi : Si ξ ($g \in G \mapsto \xi(g) \in H$) désigne l'élément générique de $L^2(G, H)$, alors

$$I(x)\xi(g) = g^{-1} \cdot x \xi(g) \quad , \quad g \in G$$

$$(u_h \xi)(g) = \xi(h^{-1}g) \quad , \quad g, h \in G$$

Rappelons aussi que tout élément de M admet une unique représentation $\sum_{g \in G} I(x_g) u_g$ et qu'il existe une espérance conditionnelle normale, fidèle de M sur $I(N)$, déterminée

par :

$$E\left(\sum_{g \in G} I(x_g) u_g\right) = I(x_e)$$

où e désigne l'élément neutre de G .

Proposition : Soient M, N comme ci-dessus et A , la sous-algèbre involutive de M des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la forme $I(x) u_g$ ($x \in N, g \in G$).

Si σ est un antiautomorphisme de N , qui commute à l'action de G , alors l'application $\bar{\alpha}$ de A sur A , définie par :

$$\bar{\alpha}\left(\sum_{g \in G} I(x_g) u_g\right) = \sum_{g \in G} u_{g^{-1}} I(\alpha(x_g))$$

se prolonge en un antiautomorphisme de M .

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\bar{\alpha}$ définit un antiautomorphisme de A . Nous devons donc vérifier les relations $\bar{\alpha}(xy) = \bar{\alpha}(y)\bar{\alpha}(x)$ et $\bar{\alpha}(x^*) = \bar{\alpha}(x)^*$ pour $x, y \in A$. Par linéarité, il suffit de le faire pour des paires $I(a)u_g$ et $I(b)u_h$. Or, nous avons :

$$\bar{\alpha}(I(a)u_g) = u_{g^{-1}} I(\alpha(a)) = I(g^{-1} \cdot \alpha(a)) u_{g^{-1}} = I(\alpha(g^{-1} \cdot a)) u_{g^{-1}}.$$

$$\bar{\alpha}(I(b)u_h) = u_{h^{-1}} I(\alpha(b)) = I(\alpha(h^{-1} \cdot b)) u_{h^{-1}}.$$

Donc,

$$\bar{\alpha}(I(b)u_h I(a)u_g) = \bar{\alpha}(I(b \cdot h \cdot a)u_{hg}) = u_{(hg)^{-1}} I(\alpha(h \cdot a) \alpha(b))$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(I(a)u_g) \bar{\alpha}(I(b)u_h) &= u_{g^{-1}} I(\alpha(a)) u_{h^{-1}} I(\alpha(b)) = \\ &= u_{g^{-1}} u_{h^{-1}} I(h \cdot \alpha(a) \alpha(b)) = u_{(hg)^{-1}} I(\alpha(h \cdot a) \alpha(b)) \end{aligned}$$

De plus,

$$\bar{\alpha}(I(a)u_g)^* = (u_{g^{-1}} I(\alpha(a)))^* = I(\alpha(a^*))u_g \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}((I(a)u_g)^*) &= \bar{\alpha}(u_{g^{-1}} I(\alpha(a^*))) = \bar{\alpha}(I(g^{-1} \cdot \alpha(a^*))u_{g^{-1}}) = u_g I(\alpha(g^{-1} \cdot \alpha(a^*))) \\ &= u_g I(g^{-1} \cdot \alpha(a^*)) = I(\alpha(a^*))u_g. \end{aligned}$$

Soient M^0 , N^0 et A^0 les algèbres opposées à

M , N et A et soit E^0 , l'espérance conditionnelle de M^0 sur N^0 , définie à l'aide de E . Par le théorème II.1 de [1], il suffit pour terminer la démonstration de la proposition, de vérifier que $\bar{\alpha}$ définit un isomorphisme de A sur A^0 tel que :

$$E^0 \circ \bar{\alpha} = \bar{\alpha} |_{I(N)^0 E|_A}$$

Or, cela est clair, car $\bar{\alpha}$ est un antiautomorphisme de A et

$$\begin{aligned} E(\bar{\alpha}(\sum_{g \in G} I(x_g) u_g)) &= E(\sum_{g \in G} u_{g^{-1}} I(\alpha(x_g))) = \\ &= E(\sum_{g \in G} I(\alpha(g^{-1} x_g)) u_{g^{-1}}) = I(\alpha(x_e)) \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}(E(\sum_{g \in G} I(x_g) u_g)) = \bar{\alpha}(I(x_e)) = I(\alpha(x_e))$$

qed.

Remarque 4.14 : Soient M , N et α comme ci-dessus.

Si α est de période $2n$, il en est de même de $\bar{\alpha}$.

Soient Ω , un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité diffuse μ ; T , un isomorphisme ergodique de Ω sur Ω , de type II_∞ ou III et M , le facteur de Krieger associé.

Proposition 4.15 : Soient M , comme ci-dessus et α , la transposition canonique sur M , obtenue, via la proposition 4.13, par prolongement de l'identité sur $L^\infty(\Omega, \mu)$.

Alors, $\text{mod}(\alpha) = 1$.

Démonstration : Si M est de type II_∞ , $\text{Aut}(F^M) = \mathbb{R}_+^*$, par la proposition 4.9 et donc $\text{mod}(\alpha) = 1$.

Si M est de type III_1 , $\text{mod}(\alpha) = 1$, par la proposition 4.10 (b). Nous pouvons donc supposer que M est de type III_λ , $\lambda \neq 1$.

Soit $\tilde{\mu}$, l'état normal, fidèle sur M , dual de la trace μ sur $L^\infty(\Omega, \mu)$. Par la proposition 1.1 de [26] et comme M est de type III , $M_{\tilde{\mu}} = I(L^\infty(\Omega, \mu))$ et donc, la restriction de α à $M_{\tilde{\mu}}$ est l'identité. De plus, comme $\tilde{\mu} = \mu \circ I^{-1} \circ E$, où E est l'espérance conditionnelle de M sur $I(L^\infty(\Omega, \mu))$, $\tilde{\mu} \circ \alpha = \tilde{\mu}$ et une application directe du théorème 4.12 termine la démonstration.

qed.

5. CLASSIFICATION DES TRANSPOSITIONS DES FACTEURS

DE KRIEGER CONTINUS ET INFINIS .

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème 5.4 . Nous y établissons une bijection entre les classes d'équivalence de transpositions des facteurs de Krieger (i.e. produits croisés d'une algèbre de Von Neumann abélienne par un automorphisme ergodique) infinis et continus et les classes de conjugaison d'automorphismes involutifs de leur flot des poids.

Sauf indication particulière, nous supposerons que toutes les algèbres de Von Neumann, intervenant dans les paragraphes 5 et 6 , sont isomorphes à des algèbres agissant dans des espaces de Hilbert séparables.

Proposition 5.1 : Tous les facteurs de Krieger continus sont des facteurs de McDuff .

Démonstration : Par unicité, à isomorphisme près, des facteurs de Krieger de type II et III_λ , $\lambda \neq 0$, ([12],[21]) et comme le produit tensoriel de deux facteurs de Krieger est encore un facteur de Krieger, 5.1 est vérifié dans ces cas.

Soit M , un facteur de Krieger de type III_0 . Comme $M \otimes R$ l'est aussi, il suffit, par [5].Cor.7.6 , de démontrer que les flots des poids de M et de $M \otimes R$ sont isomorphes, pour terminer la preuve de 5.1 .

Soient X , un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité diffuse μ , un automorphisme ergodique T de X , quasi-invariant tels que

M soit égal à $W^*(L^\infty(X, \mu), T)$, le produit croisé de $L^\infty(X, \mu)$, par l'action de \mathbb{Z} , correspondant au transposé de T (i.e. $n.f = f \circ T^{-n}$, pour $f \in L^\infty(X, \mu)$, $n \in \mathbb{Z}$).

De même, soit $R = W^*(L^\infty(\mathbb{Z}, \nu), S)$, où S est une transformation ergodique, ν -invariante de l'espace borélien standard \mathbb{Z} , muni de la mesure de probabilité diffuse ν .

Soit ρ_T , la fonction borélienne de $\mathbb{Z} \times X$, à valeur dans \mathbb{R} , définie par :

$$\rho_T(n, x) = \log \frac{d\mu \circ T^{-n}}{d\mu}(x), \quad (n, x) \in \mathbb{Z} \times X.$$

Sur l'espace mesuré produit $(X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$, où m est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , considérons les actions suivantes de \mathbb{Z} et de \mathbb{R} :

$$\tilde{n} : (x, t) \longmapsto (T^n x, t + \log \rho_T(n, x)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda_s : (x, t) \longmapsto (x, t - s), \quad s \in \mathbb{R}$$

Par le théorème [9].II.6.2, le flot F^M des poids sur M est isomorphe à l'action de \mathbb{R} , induite par les λ_s , $s \in \mathbb{R}$, sur l'algèbre des points fixes

$$L^\infty(X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m) \{\tilde{n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

De même, comme $M \otimes R = W^*(L^\infty(X \times \mathbb{Z}, \mu \otimes \nu), T \times S)$, considérons la fonction borélienne $\rho_{T \times S}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times X \times \mathbb{Z}$

à valeur dans \mathbb{R} , définie par :

$$\rho_{T \times S}(n, m; x, z) = \log \frac{d(\mu \otimes \nu) \circ (T^n \times S^m)}{d(\mu \otimes \nu)}(x, z)$$

et, sur l'espace mesuré produit $(X \times Z \times \mathbb{R}, \mu \otimes \nu \otimes m)$, les actions de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et \mathbb{R} , données par :

$$(\widetilde{n, m}) : (x, z, t) \longmapsto (T^n x, S^m z, t + \log \rho_{T \times S}(n, m; x, z))$$

$$\phi_s : (x, z, t) \longmapsto (x, z, t - s)$$

où $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}$.

Or, comme S est ν -invariante, nous avons, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et presque pour tout $x \in X$, $z \in Z$,

$$\rho_{T \times S}(n, m, x, z) = \rho_T(n, x).$$

De plus, comme S est une transformation ergodique,

$$L^\infty(X \times Z \times \mathbb{R}, \mu \otimes \nu \otimes m) \{(\widetilde{n, m}) \mid (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = L^\infty(X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m) \{\widetilde{n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

et le flot des poids de $M \otimes R$ est isomorphe à celui de M .

qed.

Rappelons la proposition suivante, énoncée dans [10] et qui sera utilisée dans la démonstration de 5.3.

Proposition 5.2 : Soit M , un facteur de Krieger infini, continu. Alors, mod définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $\text{Aut}(M) / \overline{\text{Int}}(M)$ sur $\text{Aut}(F^M)$.

Rappelons que deux antiautomorphismes d'une algèbre de Von Neumann M sont dits équivalents s'ils sont conjugués par un automorphisme de M .

Proposition 5.3 : Soient M , un facteur de Krieger infini, continu et α et β , deux transpositions de M . Alors, pour que α et β soient équivalentes, il faut et il suffit que $\text{mod}(\alpha)$ et $\text{mod}(\beta)$ soient conjugués par un automorphisme de F^M .

Démonstration : Comme mod est un homomorphisme, la nécessité de la condition est évidente. Inversement, la restriction de mod à $\text{Aut}(M)$ étant surjective (Proposition 5.2), nous pouvons supposer que $\text{mod}(\alpha) = \text{mod}(\beta)$ et donc que $\text{mod}(\alpha\beta) = 1$. Par conséquent, (Proposition 5.2), $\alpha\beta \in \overline{\text{Int}}(M)$. Une application du théorème 1 démontre alors la proposition.
qed.

Théorème 5.4 : Soit M , un facteur de Krieger infini et continu. L'homomorphisme fondamental induit une bijection des classes d'équivalence de transpositions de M sur les classes de conjugaison d'automorphismes involutifs de F^M .

Démonstration : Par la proposition 5.3, mod induit clairement une injection. La surjectivité résulte de la proposition suivante :

Proposition 5.5 : Soient M , un facteur de Krieger infini, continu et α , un antiautomorphisme, dont le carré est approximativement intérieur.

Alors, il existe une transposition β de M avec $\text{mod}(\alpha) = \text{mod}(\beta)$.

Démonstration de 5.5 : Si M est de type II_{∞} , comme $\alpha^2 \in \overline{\text{Int}(M)}$, $\text{mod}(\alpha^2) = 1$ et donc, $\text{mod}(\alpha) = 1$, car, par la proposition 4.9, $\text{Aut}(F^M) \cong \mathbb{R}_+^*$. Soit β , une transposition de M (existence par 4.13). Comme $\text{mod}(\beta) = 1$, 5.5 est démontré dans ce cas.

Si M est de type III, une application de la proposition 5.6 ci-dessous termine la preuve.

Proposition 5.6 : Soient M , un facteur de McDuff de type III, à préduel séparable et α un antiautomorphisme de M , dont le carré est approximativement intérieur. Il existe, alors, une transposition β de M avec $\alpha \circ \beta \in \overline{\text{Int}(M)}$.

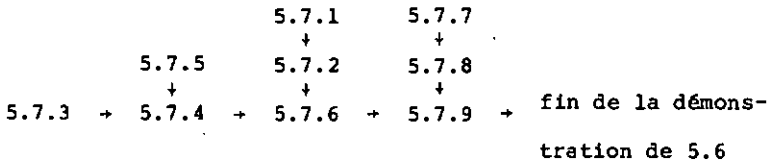
5.7 Démonstration de la proposition 5.6.

Comme celle du théorème 1, la démonstration de 5.6 se divise en trois parties. La première, composée du lemme 5.7.1, nous permet de supposer que $p_a(\alpha^2)$, la période asymptotique de α^2 est nulle et que, si ω est un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} , il existe, pour tout entier $n \geq 1$, une partition de l'unité $(P_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ dans M_{ω} telle que

$$\alpha_{\omega}(P_j) = P_{j+n+1} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2n.$$

Le but principal de la deuxième partie est la preuve du lemme 5.7.6, qui sera appliqué, inductivement, dans la démonstration du lemme 5.7.9.

Le schéma logique de la preuve est le suivant :



Lemme 5.7.1 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable ; $\beta \in \text{Ant}(M)$ et ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} .

Il existe alors un antiautomorphisme α de M , avec $\alpha \circ \beta^{-1} \in \overline{\text{Int}}(M)$ et satisfaisant les conditions suivantes :

(a) $p_a(\alpha^2) = 0$

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une partition de l'unité $(P_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ dans M_ω telle que

$$\alpha_\omega(P_j) = P_{j+n+1} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2n :$$

Remarque : les indices sont calculés modulo $2n$.

Démonstration : Soit $(\psi_j)_{j \geq 1}$, une suite dense dans M_* et soit $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$, la suite d'entiers, dont les premiers termes sont : $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, \dots$

Par la proposition 2.3 et sa démonstration, il existe un unitaire $b \in M$ et une suite $\{(e_{i,j}^\nu)_{0 \leq i, j \leq n_\nu}\}_{\nu \geq 1}$ de a.u.m. de M , commutant deux à deux et satisfaisant les conditions suivantes : pour tout $\nu \geq 1$,

(1) $\| [e_{i,j}^\nu, \psi_r] \| \leq \frac{2^{-\nu}}{(n_\nu+1)^2}$ pour $r \leq \nu$, $0 \leq i, j \leq n_\nu$.

(2) $\text{Ad } b \circ \beta(e_{i,j}^\nu) = e_{j,1}^\nu$ pour $0 \leq i, j \leq n_\nu$

Posons K_ν , le sous-facteur de M , engendré par les $e_{i,j}^\nu$.

(3) Les K_ν engendrent un sous-facteur K de type II_1 , qui factorise M en $K \otimes K' \cap M$.

Pour chaque $\nu \geq 1$, posons, si n_ν est pair (resp. impair) $n_\nu = 2p_\nu$ (resp. $n_\nu = 2p_\nu + 1$) et $b_\nu = \sum_{i=0}^{n_\nu} e_{i+p_\nu+1,i}^\nu$.

C'est un unitaire de K_ν et par (1), nous avons, pour $r \leq \nu$:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \| \psi_r \circ \text{Ad}(b_\nu b_{\nu-1} \dots b_1) - \psi_r \circ \text{Ad}(b_{\nu-1} \dots b_1) \| = \\ & = \| \psi_r \circ \text{Ad } b_\nu - \psi_r \| = \| [b_\nu, \psi_r] \| \leq 2^{-\nu} \\ & \| \psi_r \circ \text{Ad}(b_\nu b_{\nu-1} \dots b_1)^* - \psi_r \circ \text{Ad}(b_{\nu-1} \dots b_1)^* \| = \\ & = \| \psi_r \circ \text{Ad } b_\nu^* - \psi_r \| = \| [b_\nu^*, \psi_r] \| \leq 2^{-\nu} \end{aligned}$$

Posons $\chi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Ad}(b_\nu b_{\nu-1} \dots b_1)$ dans $\text{Aut}(M)$. Par (4), $\chi \in \overline{\text{Int}}(M)$ et par construction, nous avons, pour tout $\nu \geq 1$,

$$\chi \circ \text{Ad } b \circ \beta(e_{i,j}^\nu) = e_{j+p_\nu+1,i+p_\nu+1}^\nu \text{ pour } 0 \leq i, j \leq n_\nu.$$

Posons $\alpha = \chi \circ \text{Ad } b \circ \beta$ et vérifions que $p_a(\alpha^2) = 0$.

Comme, pour tout n_ν impair (resp. pair) et $0 \leq i, j \leq n_\nu$, $\alpha^2(e_{i,j}^\nu) = e_{i+1,j+1}^\nu$ (resp. $\alpha^2(e_{i,j}^\nu) = e_{i+2,j+2}^\nu$)

et que, par définition de la suite $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$, tous les entiers y apparaissent une infinité de fois, α^2 est extérieurement conjugué à $\alpha^2 \otimes s_p^1$, pour tout $p \geq 1$, par définition des s_p^1 ([8]. Prop. 1.6). Une application du théorème [7].2.3.1 prouve alors que $p_a(\alpha^2) = 0$.

Pour démontrer 5.7.1 (b), considérons, pour $n \geq 1$, l'ensemble $N = \{ \nu \in \mathbb{N} \mid n_\nu = 2n \}$. Par définition de la suite $(n_\nu)_{\nu \geq 1}$, N est un ensemble infini. Pour $\nu \in N$, posons

$p_j^v = e_{j,j}^v$. Par construction, $\{(p_j^v)_{0 \leq j \leq 2n}\}_{v \in \mathbb{N}}$ est une suite de partitions de l'unité dans M , avec pour $0 \leq j \leq 2n$ et $v \in \mathbb{N}$

$$\sigma(p_j^v) = p_{j+n+1}^v$$

Notons $(P_j)_{0 \leq j \leq 2n}$, la partition de l'unité dans M_ω , représentée par la suite $\{(p_j^v)_{0 \leq j \leq 2n}\}_{v \in \mathbb{N}}$. Nous avons bien

$\sigma_\omega(P_j) = P_{j+n+1}$, ce qui termine la démonstration.

qed.

Lemme 5.7.2 : Soient M comme ci-dessus et $\sigma \in \text{Ant}(M)$, satisfaisant les conclusions de 5.7.1. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de partitions de l'unité $\{(p_j^k)_{0 \leq j \leq 2n}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans M et une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que :

$$(i) \quad \|\ [\psi, p_j^k] \ \| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2n, \forall \psi \in M_*$$

$$(ii) \quad (a_k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad * \text{-fortement.}$$

$$(iii) \quad \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ Ad } a_k \circ \sigma(p_j^k) = p_{j+n+1}^k \quad (0 \leq j \leq 2n).$$

Démonstration : Comme M_* est séparable, par 5.7.1 et la proposition [7]. 1.1.3, il existe une suite de partitions de l'unité dans M , $\{(p_j^k)_{0 \leq j \leq 2n}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, quand $k \rightarrow \infty$,

$$(a) \quad (\sigma(p_j^k) - p_{j+n+1}^k) \rightarrow 0, \quad * \text{-fortement.}$$

$$(b) \quad \|\ [\psi, p_j^k] \ \| \xrightarrow{} 0, \quad \forall \psi \in M_*$$

Par (b), la vérification de (i) est triviale.

Par (a) et le lemme [7].1.1.4, comme, pour tout $0 \leq j \leq 2n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(p_j^k)$ et p_{j+n+1}^k sont des projecteurs équi-valents, il existe $(2n+1)$ suites d'opérateurs partiellement

isométriques $\{(z_j^k)_{k \in \mathbb{N}}\}_{0 \leq j \leq 2n}$ de M avec $z_j^k (z_j^k)^* = \alpha(p_j^k)$,
 $(z_j^k)^* z_j^k = p_{j+n+1}^k$ et $(z_j^k - \alpha(p_j^k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ *-fortement.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = \sum_{j=0}^{2n} (z_j^k)^*$.
 c'est un unitaire de M tel que pour $0 \leq j \leq 2n$,

$$\text{Ad } a_k \circ \alpha(p_j^k) = p_{j+n+1}^k.$$

De plus, la suite d'unitaires $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, *-fortement, quand $k \rightarrow \infty$, ce qui termine la démonstration.

qed.

Lemme 5.7.3 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable ; α , un antiautomorphisme de M avec $\alpha^2 \in \overline{\text{Int}}(M)$ et $p_\alpha(\alpha^2) = 0$.

Alors, il existe une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \rightarrow \infty$,

(a) $\text{Ad } z_p \xrightarrow{} \alpha^2$ dans $\text{Aut}(M)$.

(b) $(\alpha(z_p^r) - \bar{z}_p^r) \xrightarrow{} 0$, *-fortement, $\forall r \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Par le lemme [7].3.1.1, il existe une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $p \rightarrow \infty$

(i) $\text{Ad } y_p \xrightarrow{} \alpha^2$ dans $\text{Aut}(M)$.

(ii) $(\alpha^2(y_p^k) - y_p^k) \xrightarrow{} 0$, *-fortement, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $w_p = \alpha(y_p^*) y_p^*$. c'est un unitaire de M . Comme $\text{Ad } \alpha(y_p^*) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \alpha^2$ dans $\text{Aut}(M)$, par (i),

$$\text{Ad } w_p \xrightarrow{} 1 \text{ dans } \text{Aut}(M), \text{ quand } p \rightarrow \infty,$$

et donc, $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite centralisante.

Soient ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} et W , l'unitaire de M_ω , représenté par $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Nous avons

$$a_\omega(W) = W$$

car, comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a(w_p) - w_p = a(y_p^*) (a^2(y_p^*) - y_p^*)$, les suites $(a(w_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes,

par (ii) et le lemme B.4.(2). Par le lemme 1.1, il existe alors un unitaire V de M_ω avec $a_\omega(V)V = W$. Soit $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'unitaires de M , représentant V . Nous avons alors $\text{Ad } v_p \rightarrow 1$ dans $\text{Aut}(M)$ et

$$(a(v_p)v_p - w_p) \rightarrow 0, \text{ *-fortement, quand } p \rightarrow \omega.$$

Par conséquent, comme $\text{Ad } a(y_p) \rightarrow a^{-2}$ dans $\text{Aut}(M)$, cela implique, par le lemme B.4.(2), que, quand $p \rightarrow \omega$,

$$\text{Ad } (v_p y_p) \rightarrow a^2 \text{ dans } \text{Aut}(M) \text{ et que}$$

$$(a(v_p y_p) - y_p^* v_p^*) \rightarrow 0, \text{ *-fortement.}$$

Nous avons donc montré comment construire une suite $z_p = v_p y_p$ d'unitaires satisfaisant 5.7.3 (a) et

$$(a(z_p) - z_p^*) \xrightarrow[p \rightarrow \omega]{} 0, \text{ *-fortement.}$$

Soit $r \in \mathbb{N}$ et supposons que $(a(z_p^r) - z_p^{-r}) \rightarrow 0, \text{ *-fort.}$

Comme $((a(z_p^r) - z_p^{-r}) a(z_p))_{p \in \mathbb{N}}$ et $(z_p^{-r} (a(z_p) - z_p^{-1}))_{p \in \mathbb{N}}$

tendent vers 0, *-fortement, il en est de même de la suite

$$(a(z_p^{r+1}) - z_p^{-r-1})_{p \in \mathbb{N}}$$

La condition 5.7.3 (b) se démontre alors par induction.

qed.

Lemme 5.7.4 : Soient M comme ci-dessus, $\alpha \in \text{Ant}(M)$, satisfaisant les conditions de 5.7.3 et n , un entier ≥ 1 .

Si $(p_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ est une partition de l'unité dans M telle que $\alpha(p_j) = p_{j+n+1}$ pour $0 \leq j \leq 2n$, alors il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M telle que, quand $k \rightarrow \infty$,

- (a) $\text{Ad } u_k \rightarrow \alpha^2$ dans $\text{Aut}(M)$.
- (b) $(\alpha(u_k^r) - u_k^{-r}) \rightarrow 0$, *-fortement, $\forall r \in \mathbb{Z}$
- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k p_j u_k^* = p_{j+1}$, pour $0 \leq j \leq 2n$.

Démonstration : Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite d'unitaires de M , satisfaisant les conclusions de 5.7.3. Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{j+1} = \alpha^2(p_j)$ et $z_k p_j z_k^*$ sont des projecteurs de M équivalents et que par 5.7.3 (a),

$$(\text{Ad } z_k (p_j) - p_{j+1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ *-fortement,}$$

il existe, par le lemme [7].1.1.4 (b), une suite d'opérateurs partiellement isométriques $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(x_j^k)^* x_j^k = z_k p_j z_k^*, \quad x_j^k (x_j^k)^* = p_{j+1} \quad \text{et}$$

$$(x_j^k - p_{j+1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{-fortement.}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \sum_{j=0}^{2n} x_j^k$ est un unitaire de M tel que

$$(1) \quad x_k z_k p_j z_k^* x_k^* = p_{j+1} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2n.$$

$$(2) \quad (x_k - 1) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{-fortement.}$$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = x_k z_k$. Par (2), la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'unitaires de M , satisfait (a) et par (1), l'affirmation (c) est vérifiée, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour vérifier (b), rappelons (voir le lemme 3.4), que pour tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$(3) \quad ((x_k z_k)^r - z_k^r) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \text{ *-fortement}$$

Comme, pour tout $r \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha((x_k z_k)^r) - (x_k z_k)^{-r} = \alpha((x_k z_k)^r - z_k^r) + \alpha(z_k^r) - z_k^{-r} + (z_k^{-r} - (x_k z_k)^{-r})$$

nous obtenons (b), par 5.7.3.(b) et (3).

qed.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous dénoterons, comme dans le paragraphe 3, par f_n la fonction borélienne de \mathbb{T} dans \mathbb{T} , définie par :

$$f_n(e^{i\theta}) = e^{i\theta/n} \quad \text{pour } -\pi < \theta \leq \pi$$

et par $J_{\lambda, q}$, l'intervalle de \mathbb{T} , de centre λ et de mesure de Haar 2^{-2q} .

Lemme 5.7.5 : Soit n , un entier ≥ 1 . Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe, pour $1 \leq p \leq n$, des polynômes (en z et z^{-1})

$R_p(z) = \sum_{|t| \leq k} a_{p,t} z^t$, à coefficients réels tels que :

$$(a) \quad |R_p(z) - (z f_n(z^n))^{-1}|^p \leq \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{T}, z^n \notin J_{-1, m}$$

$$(b) \quad |R_p(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{T}$$

Démonstration : Soit $m \in \mathbb{N}$ et posons $A = \{x \in]-\pi, \pi[\mid e^{inx} = -1\}$,

$A_m = \{x \in]-\pi, \pi[\mid e^{inx} \in J_{-1, m}\}$. Rappelons aussi, que,

pour $g \in L^1(]-\pi, \pi[)$, $S_N g(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{-inx} \quad (x \in]-\pi, \pi[)$

est la N-ième somme de Fourier de g et que

$$\sigma_N g(x) = \frac{1}{N+1} (S_0 g(x) + \dots + S_N g(x))$$

est la N-ième somme de Féjer de g.

Définissons, pour $1 \leq p \leq n$, $F^p :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{T}$ par

$$F^p(x) = (e^{ix} f_n(e^{inx})^{-1})^p.$$

Pour $1 \leq p \leq n$, $F^p \in L^1(]-\pi, \pi])$ et comme $F(-x) = \overline{F(x)}$, pour $x \in]-\pi, \pi] - A$, les coefficients de Fourier de F^p sont réels. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} c_q(F^p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^p e^{-iqx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(-x)^p e^{iqx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)^p e^{-iqx} dx = c_q(F^p). \end{aligned}$$

Soit δ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{n \cdot 2^{2m}}$. Par définition de F,

nous avons, pour $x \in]-\pi, \pi] - A_m$, $1 \leq p \leq n$ et tout y , $0 \leq y \leq \delta$,

$$2 F^p(x) = F^p(x+y) + F^p(x-y)$$

et donc, par le théorème de Féjer,

$$\sigma_N(F^p) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F^p \text{ uniformément sur }]-\pi, \pi] - A_m.$$

Par conséquent, il existe k tel que, pour tout $x \in]-\pi, \pi] - A_m$ et tout $1 \leq p \leq n$,

$$|\sigma_k(F^p)(x) - (F(x))^p| \leq \varepsilon$$

Posons $R_p(e^{ix}) = \sigma_k(F^p)(x)$. Par construction, R_p est un polynôme à coefficients réels et satisfait (a).

Comme, si $g \in L^1(]-\pi, \pi])$, $|\sigma_k(g)(x)| \leq \|g\|_{\infty}$, $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $|R_p(z)| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{T}$, car $|F^p(x)| = 1$, $\forall x \in]-\pi, \pi]$,

(b) est donc vérifié.

qed.

Le lemme suivant est le principal résultat de la deuxième partie de la démonstration de 5.6.

Lemme 5.7.6 : Soient M , un facteur de McDuff, à préduel séparable et α , un anti-automorphisme avec $\alpha^2 \in \overline{\text{Int}}(M)$ et satisfaisant les conclusions de 5.7.1. Soit ϕ , un état normal, fidèle sur M et ψ_1, \dots, ψ_q q éléments de M_*^+ .

Alors, pour tout $n \geq 1$, $0 < \epsilon < 1$, il existe une partition $(p_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ de l'unité dans M et deux unitaires a et u de M tels que :

(a) $-1 \in \Lambda(\phi, u^{2n+1})$ où $\Lambda(\dots)$ est défini comme dans 3.5.

$$(1) \quad \|\psi_s, p_j\| \leq \epsilon \quad \text{pour } 1 \leq s \leq q; \quad 0 \leq j \leq 2n.$$

$$(2) \quad \|\psi_s \circ \alpha^{-2} - \psi_s \circ \text{Ad } u^{-1}\| \leq \epsilon \quad \text{pour } 1 \leq s \leq q$$

$$(3) \quad \|a - 1\|_\phi \leq \epsilon$$

Posons $P = f_{2n+1}(u^{2n+1})^*$, $\tilde{u} = uP$.

(4) $\{e_{1,j} = \tilde{u}^{1-j} p_j \mid 0 \leq 1, j \leq 2n\}$ est un a.u.m. du sous-facteur K , engendré par les p_j et \tilde{u} ,

tel que : $\text{Ad } a \circ \alpha(e_{1,j}) = e_{j+n+1, 1+n+1}$ pour $0 \leq 1, j \leq 2n$.

$$(5) \quad \|\text{Ad } a \circ \alpha(P^*) - P\|_\phi \leq \epsilon$$

Démonstration : Soient $0 < \epsilon < 1$ et $n \geq 1$ fixés et posons $r = 2n + 1$. Choisissons $\epsilon_1 > 0$ avec $8\epsilon_1^{1/2} \leq \epsilon$. Comme ϕ est fidèle, il existe $0 < \epsilon_3 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_1$ tels que si $x \in M_3$, nous avons, d'une part,

$$\|x\|_\phi \leq \frac{\epsilon_3}{4r} \implies \|x\|_{\phi \circ \alpha} \leq \frac{\epsilon_2}{4r}$$

et d'autre part, $\|x\|_{\phi} \leq \varepsilon_2 \implies \|x\|_{\phi \circ \alpha^2} \leq \varepsilon_1$

Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $3(2^{-m})^{1/2} \leq \frac{\varepsilon_3}{8r}$.

Pour $p = 1, \dots, r$, choisissons, alors, par le lemme 5.7.5, des polynômes (en z et z^{-1}), $R_p(z) = \sum_{|t| \leq k} a_{p,t} z^t$, à coefficients réels, tels que :

$$(i) \quad \begin{aligned} |R_p(z) - (zf_r(z^r)^{-1})^p| &\leq \frac{\varepsilon_3}{8r}, \quad \forall z \in \mathbb{T}, \quad z^r \notin J_{-1,m} \\ |R_p(z)| &\leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

Solent $A = \sum_{p,t} |a_{p,t}|$ et prenons $\delta > 0$, avec

$$3\sqrt{2} \delta^{1/2} + A\delta + \frac{\varepsilon_2}{2r} \leq \frac{\varepsilon_2}{r}$$

Par 5.7.2, il existe une partition $(p_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ de l'unité dans M et un unitaire a_1 de M tels que, si nous posons $\alpha_1 = \text{Ad } a_1 \circ \alpha$,

- (1) $\|[\psi_s, p_j]\| \leq \varepsilon$ pour $s = 1, \dots, q$ et $0 \leq j \leq 2n$.
- (2) $\alpha_1(p_j) = p_{j+n+1}$ pour $0 \leq j \leq 2n$.
- (3) $\|a_1 - 1\|_{\phi} \leq \delta$
- (4) $\|\psi_s \circ \alpha_1^{-2} - \psi_s \circ \alpha^{-2}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $s = 1, \dots, q$.
- (5) $\|\phi \circ \alpha_1^2 - \phi \circ \alpha^2\| \leq \frac{\delta}{2}$

Comme $\varepsilon_M(\alpha_1^2) = \varepsilon_M(\alpha^2)$, nous avons $\alpha_1^2 \in \overline{\text{Int}(M)}$ et $p_a(\alpha_1^2) = p_a(\alpha^2)$. Par conséquent, α_1 et la partition de l'unité $(p_j)_{0 \leq j \leq 2n}$ satisfont les hypothèses du lemme 5.7.4.

Il existe, donc, un unitaire $u \in M$, avec :

- (a) $up_j u^* = p_{j+1}$, pour $0 \leq j \leq 2n$.
- (b) $\|\alpha_1(u^r) - u^{-r}\|_{\phi} \leq \delta$ pour $|r| \leq k$.

$$(c) \quad \left\| \psi_s \circ \alpha_1^{-2} - \phi_s \circ \text{Ad } u^{-1} \right\| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ pour } s = 1, \dots, q.$$

$$(d) \quad \left\| \phi \circ \alpha_1^2 - \phi \circ \text{Ad } u \right\| \leq \frac{\delta}{2} \text{ et donc, par (5) ,}$$

$$\left\| \phi \circ \alpha_1^2 - \phi \circ \text{Ad } u \right\| \leq \delta$$

Par 3.5 , nous pouvons supposer que $-1 \in \Lambda(\phi, u^X)$ et donc, comme

$$\begin{aligned} \left\| \psi_s \circ \alpha_1^{-2} - \psi_s \circ \text{Ad } u^{-1} \right\| \leq & \left\| \psi_s \circ \alpha_1^{-2} - \psi_s \circ \alpha_1^{-2} \right\| + \\ & + \left\| \psi_s \circ \alpha_1^{-2} - \psi_s \circ \text{Ad } u^{-1} \right\| \end{aligned}$$

les points (c), (1) et (2) de 5.7.6 sont vérifiés.

Comme dans 3.6 , on démontre, de plus, par (i),

$$(ii) \quad \left\| R_p(u) - \tilde{u}^P \right\|_\phi = \left\| (R_p(u) - \tilde{u}^P)^* \right\|_\phi \leq \frac{\epsilon_3}{4r} \text{ pour } 1 \leq p \leq r.$$

$$(iii) \quad \left\| \alpha_1(\tilde{u}^P) - \alpha_1(R_p(u)) \right\|_\phi \leq 3/2 \delta^{1/2} + \frac{\epsilon_2}{4r} \text{ et}$$

$$(iv) \quad \left\| R_p(\alpha_1(u)) - R_p(u^*) \right\|_\phi \leq A\delta$$

Par (ii), (iii) et (iv) et comme $R_p(u^*) = R_p(u)^*$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (v) \quad \left\| \alpha_1(\tilde{u}^P) - \tilde{u}^{-P} \right\|_\phi & \leq \left\| \alpha_1(\tilde{u}^P) - \alpha_1(R_p(u)) \right\|_\phi + \\ & + \left\| R_p(\alpha_1(u)) - R_p(u^*) \right\|_\phi + \left\| (R_p(u) - \tilde{u}^P)^* \right\|_\phi \\ & \leq 3/2 \delta^{1/2} + \frac{\epsilon_2}{4r} + A\delta + \frac{\epsilon_2}{4r} \leq \frac{\epsilon_2}{r} \end{aligned}$$

Par construction, $\tilde{u}^X = 1$ et comme u^X commute sur p_j , $0 \leq j \leq 2n$, il en est de même, de $P = f_r(u^X)^*$, d'où

$$\tilde{u} p_j \tilde{u}^* = p_{j+1} \quad , \quad 0 \leq j \leq 2n$$

et, par conséquent, $\{ e_{i,j} = \tilde{u}^{i-j} p_j \mid 0 \leq i, j \leq 2n \}$ est un s.u.m. de K , le sous-facteur de type I_r , engendré par \tilde{u} et les p_j .

Posons $a_2 = \sum_{j=0}^{2n} e_{j+n+1, n+1} \alpha_1(e_{j, 0})$. C'est un unitaire de M , qui, par construction, satisfait :

$$\text{Ad } a_2 \circ \alpha_1(e_{s, t}) = e_{t+n+1, s+n+1}, \quad \forall \quad 0 \leq s, t \leq 2n.$$

De plus, par (v), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{(vi)} \quad \| a_2 - 1 \|_{\phi} &\leq \sum_{j=0}^{2n} \| e_{j+n+1, n+1} \alpha_1(e_{j, 0}) - e_{j+n+1, j+n+1} \|_{\phi} \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \| e_{j+n+1, n+1} (\alpha_1(e_{j, 0}) - e_{n+1, j+n+1}) \|_{\phi} \\ &\leq \sum_{j=0}^{2n} \| p_{n+1} (\alpha_1(\tilde{u}^j) - \tilde{u}^{-j}) \|_{\phi} \leq \epsilon_2. \end{aligned}$$

Posons $a = a_2 a_1$. C'est un unitaire de M , qui par construction, vérifie les points (3) et (4) de 5.7.6. En effet, par (3) et (vi),

$$\| a - 1 \|_{\phi} \leq \| a_1 - 1 \|_{\phi} + \| a_2 - 1 \|_{\phi} \leq \delta + \epsilon_2 \leq 2\epsilon_1.$$

Démontrons maintenant le point (5) de 5.7.6. Posons $\beta = \text{Ad } a \circ \alpha$ et évaluons $\| \beta(u) - u^* \|_{\phi}$. Tout d'abord, remarquons que, par (b) et (vi),

$$\begin{aligned} \| \alpha_1(u) - u^* \|_{\phi \circ \text{Ad } a_2} &\leq 2 \| \phi \circ \text{Ad } a_2 - \phi \|^{1/2} + \| \alpha_1(u) - u^* \|_{\phi} \\ &\leq 2\sqrt{2} \| a_2 - 1 \|_{\phi}^{1/2} + \| \alpha_1(u) - u^* \|_{\phi} \\ &\leq 2\sqrt{2} \epsilon_2^{1/2} + \| \alpha_1(u) - u^* \|_{\phi} \leq 2\sqrt{2} \epsilon_2^{1/2} + \delta. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \| a_2 u^* a_2^* - u^* \|_{\phi} &\leq \| a_2 - 1 \|_{\phi} + \| (a_2 - 1) u^* \|_{\phi} = \| a_2 - 1 \|_{\phi} + \| a_2 - 1 \|_{\phi \circ \text{Ad } u} \\ &\leq \| a_2 - 1 \|_{\phi} + 2 \| \phi \circ \text{Ad } u - \phi \circ \alpha^2 \|^{1/2} + \| a_2 - 1 \|_{\phi \circ \alpha^2} \\ &\leq \epsilon_2 + 2\delta^{1/2} + \epsilon_1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \text{(vii)} \quad \|\beta(u) - u^*\|_{\phi} &\leq \|\alpha_1(u) - u^*\|_{\phi \circ \text{Ad } a_2} + \|a_2 u^* a_2^* - u^*\|_{\phi} \\
 &\leq 2\sqrt{2} \varepsilon_2^{1/2} + \delta + \varepsilon_2 + 2\delta^{1/2} + \varepsilon_1 \leq 8 \varepsilon_1^{1/2}
 \end{aligned}$$

Or, comme $\beta(\tilde{u}) = \tilde{u}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 0 = \|\beta(\tilde{u}^*) - \tilde{u}\|_{\phi \circ \text{Ad } u} &\geq \|\beta(P^*)(\beta(u^*) - u)\|_{\phi \circ \text{Ad } u} - \\
 &\quad - \|(\beta(P^*) - P)u\|_{\phi \circ \text{Ad } u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et donc} \quad \|\beta(P^*) - P\|_{\phi} &= \|\beta(P^*)(\beta(u^*) - u)\|_{\phi \circ \text{Ad } u} \\
 &= \|(\beta(u^*) - u)u^*\|_{\phi} = \|\beta(u) - u^*\|_{\phi}
 \end{aligned}$$

Par (vii), nous obtenons le résultat cherché.

qed.

Troisième partie de la démonstration de 5.6 .

Nous choisissons une suite $(n_v)_{v \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 telle que

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2n_v + 1} < \infty$$

et, comme dans la démonstration du théorème 1, posons

$$\delta_v = 2^{-(v+1)} (2n_v + 1)^{-2} (n_v + 1)^{-1}$$

et choisissons une suite $(\varepsilon_v)_{v \geq 1}$ de nombres réels positifs, avec $\varepsilon_{v+1} \leq \varepsilon_v$, $\forall v$ et satisfaisant un analogue du lemme 3.8 .

Démontrons maintenant deux lemmes techniques que nous utiliserons dans la preuve du lemme 5.7.9. Le lemme 5.7.7 est une généralisation du lemme 3 de [22] .

Lemme 5.7.7 : Soient M , un facteur de type II_1 ou III ;
 ϕ , un état normal, fidèle sur M ; u , un unitaire de M
 et N , le sous-facteur de type I_2 , engendré par
 $(e_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2}$, un s.u.m. dans M .

Posons $\epsilon = \sup_{i,j} (\| [u, e_{i,j}] \|_{\phi}^{\#}, \| [u^*, e_{i,j}] \|_{\phi}^{\#})$. Il existe,
 alors un unitaire v de $N' \cap M$ tel que $\| u - v \|_{\phi}^{\#} \leq 12/2 \epsilon$.

Démonstration : Comme l'espérance conditionnelle de M sur
 $N' \cap M$ est donnée par $E(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_{i,j} x e_{j,i}$, $x \in M$.
 nous avons :

$$\| E(x) - x \|_{\phi} = \frac{1}{2} \left\| \sum_{i,j} e_{i,j} [x, e_{j,i}] \right\|_{\phi} \leq 2 \sup_{i,j} \| [x, e_{j,i}] \|_{\phi}$$

Comme, pour tout unitaire z et tout x de M ,

$$[z, x] z^* = z [x, z^*]$$

et donc, que

$$\| [z, x] \|_{\phi \circ \text{Ad } z} = \| [z, x] z^* \|_{\phi} = \| [z, x^*] \|_{\phi}$$

nous avons :

$$\sup (\| E(u) - u \|_{\phi}, \| E(u) - u \|_{\phi \circ \text{Ad } u}) \leq 2 \sup_{i,j} \| [u, e_{i,j}] \|_{\phi}^{\#} \leq 2\epsilon$$

(o) et de même,

$$\sup (\| E(u^*) - u^* \|_{\phi}, \| E(u^*) - u^* \|_{\phi \circ \text{Ad } u^*}) \leq 2\epsilon$$

Posons, par commodité, $E(u) = t$ et rappelons que $t \in (N' \cap M)_1$.

Soient $w|t|$, la décomposition polaire de t et $w^*|t^*|$,
 celle de t^* . Comme $|t| + 1 \geq 1$, nous avons, par (o),
 pour $\chi = \phi$ et $\chi = \phi \circ \text{Ad } u$,

$$\| |t| - 1 \|_{\chi} \leq \| t^* t^{-1} \|_{\chi} \leq \| t^* (t - u) \|_{\chi} + \| t^* - u^* \|_{\chi \circ \text{Ad } u^*} \leq 4\epsilon$$

Nous avons de même, pour $\psi = \phi$ et $\psi = \phi \circ \text{Ad } u^*$,

$$\| |t^*| - 1 \|_{\psi} \leq 4\epsilon.$$

Soient g_1 , le projecteur initial ; g_2 , le projecteur final de w . Nous obtenons, par les inégalités ci-dessus :

$$\|u - w\|_{\chi} \leq \|u-w|t|\|_{\chi} + \|w(|t|-1)\|_{\chi} \leq \|u-t\|_{\chi} + \||t|-1\|_{\chi} \leq 6\epsilon$$

et aussi $\|u^* - w^*\|_{\psi} \leq 6\epsilon$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \|1-g_1\|_{\phi} &= \|(1-g_1)u^*\|_{\phi \circ \text{Ad } u^*} = \|(1-g_1)(u^*-w^*)\|_{\phi \circ \text{Ad } u^*} \\ &\leq \|u^* - w^*\|_{\phi \circ \text{Ad } u^*} \leq 6\epsilon \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} \|1-g_2\|_{\phi} &= \|(1-g_2)u\|_{\phi \circ \text{Ad } u} = \|(1-g_2)(u-w)\|_{\phi \circ \text{Ad } u} \\ &\leq \|u - w\|_{\phi \circ \text{Ad } u} \leq 6\epsilon \end{aligned}$$

Comme g_1 et g_2 sont des projecteurs équivalents, $1-g_1$ et $1-g_2$ le sont aussi, car $N' \wedge M$ est de type II_1 ou III . Soit w_0 , une isométrie partielle de $N' \wedge M$, de support initial $1-g_1$ et de support final $1-g_2$. Posons $v = w + w_0$. C'est un unitaire de $N' \wedge M$ et il satisfait les conclusions du lemme, car

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{\phi} &\leq \|u-w\|_{\phi} + \|w_0\|_{\phi} = \|u-w\|_{\phi} + \|1-g_1\|_{\phi} \leq 12\epsilon \\ \|u^* - v^*\|_{\phi} &\leq \|u^*-w^*\|_{\phi} + \|w_0^*\|_{\phi} = \|u^*-w^*\|_{\phi} + \|1-g_2\|_{\phi} \leq 12\epsilon \end{aligned}$$

qed.

Lemme 5.7.8 : Soient M , un facteur de McDuff, à prédual séparable, de type II_1 ou III ; $\alpha \in \text{Ant}(M)$; $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ des états normaux, fidèles sur M et $0 < \epsilon < 1$.

Si P est un unitaire de M avec $\|\alpha(P^*) - P\|_{\phi_0} \leq \epsilon$, il existe un unitaire v de M tel que :

$$(a) \quad \|\alpha(v^*) - P\|_{\phi_0} \leq 2\varepsilon$$

$$(b) \quad \|v - 1\|_{\phi_j} \leq 2\|P - 1\|_{\phi_j} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n.$$

Démonstration : Soit ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} .

Par le lemme 2.1, il existe un s.u.m. $(E_{1,j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ dans M_ω tel que $\alpha_\omega(E_{1,j}) = (-1)^{1-j} E_{j,i}$.

Soit $S = \{\phi_0, \dots, \phi_n, \phi_0 \circ \alpha, \phi_0 \circ \text{Ad } P^*\}$ et choisissons

$$0 < \delta \leq \frac{1}{12\sqrt{2}} \inf\{ \|P - 1\|_\chi, \chi \in S \} \quad \text{et} \quad 68\delta^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Par les propositions [7].1.1.3 et [3].2.8, il existe un s.u.m. $(e_{1,j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ de M tel que, pour $\chi \in S$ et pour $1 \leq i, j \leq 2$,

$$(1) \quad \|\alpha(e_{1,j}) - (-1)^{1-j} e_{j,i}\|_\chi \leq \delta$$

$$\|[P, e_{1,j}]\|_\chi^* \leq \delta \quad \text{et} \quad \|[P^*, e_{1,j}]\|_\chi^* \leq \delta$$

Notons N , le sous-facteur de type I_2 , engendré par les $e_{1,j}$, $1 \leq i, j \leq 2$. Par le lemme 5.7.7, il existe un unitaire Q de $N' \cap M$ tel que $\|P - Q\|_\chi^* \leq 12\sqrt{2} \delta$, pour tout χ de S .

Soit (f_1, f_2) , la partition de l'unité de M , définie par $f_1 = (1/2)(1 + (-1)^1(e_{1,2} + e_{2,1}))$ et posons $v = f_1 + Qf_2$. C'est clairement un unitaire et il satisfait (b), par le choix de δ .

Pour démontrer (a), remarquons, tout d'abord, par (1), que

$$\|\alpha(f_1) - f_2\|_{\phi_0} = \frac{1}{2} \|\alpha(e_{1,2} + e_{2,1}) + e_{1,2} + e_{2,1}\|_{\phi_0} \leq \delta$$

et que

$$\|\alpha(f_2) - f_1\|_{\phi_0 \circ \text{Ad } P^*} = \frac{1}{2} \|\alpha(e_{1,2} + e_{2,1}) + e_{1,2} + e_{2,1}\|_{\phi_0 \circ \text{Ad } P^*} \leq \delta$$

Comme $\| \phi_{\circ} \circ \text{Ad } Q^* - \phi_{\circ} \circ \text{Ad } P^* \| \leq 2 \| Q-P \|_{\phi_{\circ}} \leq 24/2 \delta$,
 nous avons alors :

$$\begin{aligned} \| \alpha(f_2) - f_1 \|_{\phi_{\circ} \circ \text{Ad } Q^*} &\leq 2/2 \| Q-P \|_{\phi_{\circ}}^{1/2} + \| \alpha(f_2) - f_1 \|_{\phi_{\circ} \circ \text{Ad } P^*} \\ &\leq 12\delta^{1/2} + \delta \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \| \alpha(Q^*) - Q \|_{\phi_{\circ}} &\leq \| \alpha(Q^* - P^*) \|_{\phi_{\circ}} + \| \alpha(P^*) - P \|_{\phi_{\circ}} + \| P-Q \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq \| Q - P \|_{\phi_{\circ}} \cdot \alpha + \| \alpha(P^*) - P \|_{\phi_{\circ}} + \| P-Q \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq 24/2 \delta + \epsilon \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned} \| \text{va}(v^*) - Q \|_{\phi_{\circ}} &= \| (f_1 + Qf_2) \alpha(f_1 + Q^*f_2) - (f_1 + Qf_2) (f_2 + Qf_1) \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq \| \alpha(f_1) - f_2 \|_{\phi_{\circ}} + \| \alpha(Q^*f_2) - Qf_1 \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq \| \alpha(f_1) - f_2 \|_{\phi_{\circ}} + \| \alpha(f_2) (\alpha(Q^*) - Q) \|_{\phi_{\circ}} + \| (\alpha(f_2) - f_1) Q \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq \| \alpha(f_1) - f_2 \|_{\phi_{\circ}} + \| \alpha(Q^*) - Q \|_{\phi_{\circ}} + \| \alpha(f_2) - f_1 \|_{\phi_{\circ} \circ \text{Ad } Q^*} \\ &\leq \delta + 12\delta^{1/2} + \epsilon + 24/2 \delta + \delta \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| \text{va}(v^*) - P \|_{\phi_{\circ}} &\leq \| \text{va}(v^*) - Q \|_{\phi_{\circ}} + \| Q - P \|_{\phi_{\circ}} \\ &\leq \delta + 24/2 \delta + \epsilon + 12\delta^{1/2} + \delta + 12/2 \delta \\ &\leq (36/2 + 2) \delta + 12\delta^{1/2} + \epsilon \\ &\leq 2(18/2 + 7) \delta^{1/2} + \epsilon \leq 2 \cdot 34\delta^{1/2} + \epsilon \end{aligned}$$

et donc (a) est vérifié, ce qui termine la démonstration
 du lemme.

qed.

Lemme 5.7.9 : Soient M , un facteur de McDuff de type II_1 ou III , à préduel séparable et α , un antiautomorphisme avec $\alpha^2 \in \overline{\text{Int}(M)}$ et satisfaisant les conclusions de 5.7.1 ; ϕ , un état normal, fidèle sur M et $(\psi_j)_{j \geq 1}$, une suite d'éléments de $[0, \phi]_{M_*}$.

Il existe alors une suite de couples $(K_v, v_v)_{v \geq 1}$, où K_v est un sous-facteur de M ; v_v , un unitaire de M , telle que, pour tout $v \geq 1$,

(a) K_v commute avec les K_j , $j < v$.

(b) K_v est engendré par une partition de l'unité $(p_j^v)_{0 \leq j \leq 2n_v}$ et un unitaire u_v ; $u_v^{2n_v+1} = 1$;
 $u_v p_j^v u_v^* = p_{j+1}^v$, pour $0 \leq j \leq 2n_v$.

(c) $\| [\psi_r, u_v] \| \leq \delta_v$, $\| [\psi_r, p_j^v] \| \leq \delta_v$ pour $r < v$ et $0 \leq j \leq 2n_v$.

(d) v_v commute avec K_1, \dots, K_{v-1} .

(e) $\| (v_v - 1)v_{v-1} \dots v_1 \|_{\phi}^{\#} \leq \frac{11}{2n_v + 1}$.

Posons $\alpha_v = \text{Ad}(v_v v_{v-1} \dots v_1) \circ \alpha$ pour $v \geq 1$ et par convention, $\alpha_0 = \alpha$.

(f) α_v laisse globalement invariant K_r , pour $r \leq v$. Plus précisément, $\{ e_{i,j}^r = u_r^{i-j} p_j^r \mid 0 \leq i, j \leq 2n_r \}$ est un s.u.m. de K_r tel que, pour $0 \leq i, j \leq 2n_r$,

$$\alpha_v(e_{i,j}^r) = e_{j+n_r+1, i+n_r+1}^r$$

(g) Pour $k \leq v$,

$$\| \psi_k \circ \alpha_v^{-2} - \psi_k \circ \text{Ad}(u_v \dots u_1)^{-1} \| \leq \epsilon_v$$

Démonstration : Supposons $(K_1, v_1), \dots, (K_v, v_v)$ construits et déterminons (K_{v+1}, v_{v+1}) .

Soient Q , le sous-facteur engendré par les K_j , $j \leq v$; m , la dimension de Q ; $N = Q' \cap M$ et $U = u_v \dots u_1$. Pour $1 \leq r \leq v+1$, soient ψ_r^s , $s = 1, \dots, m$ des éléments de N_* qui satisfont les conditions de 3.9, relativement à ψ_r .

Choisissons $0 < \epsilon < \delta_{v+1}$ tel que si $x \in M_2 = \{x \in M \mid \|x\| \leq 2\}$

$$[\|x\|_\phi \leq 2\epsilon] \implies [\|x\|_\chi \leq (\frac{\epsilon_{v+1}}{28})^2]$$

(o) pour $\chi \in \{ \phi, \phi \circ \alpha_v^{-1}, \phi \circ \alpha_v^{-2} \}$]

$$[\|x\|_\phi \leq \epsilon] \implies [\|xv \dots v_1\|_\phi \leq \frac{1}{2n_{v+1} + 1}]$$

Soit ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} . Par un raisonnement semblable à celui effectué dans 3.10, on vérifie que α_v définit, par restriction, un antiautomorphisme de N , qui satisfait les conclusions du lemme 5.7.1. Comme $\phi|_N$ est un état normal, fidèle sur N , il existe par le lemme 5.7.6, une partition $(p_j^{v+1})_{0 \leq j \leq 2n_{v+1}}$ de l'unité dans N et deux unitaires a et u de N tels que :

(1) $-1 \in \Lambda(\phi|_N, u^{2n_{v+1} + 1})$

(2) $\|[\psi_r^s, p_j^{v+1}]\| \leq \delta_{v+1}$ pour $1 \leq s \leq m$; $r = 1, \dots, v+1$.

(3) $\|\psi_r^s \circ \alpha_v^{-2} - \psi_r^s \circ \text{Ad } u^{-1}\| \leq \frac{\epsilon_{v+1}}{2}$

pour $1 \leq s \leq m$; $1 \leq r \leq v+1$.

(4) $\|a - 1\|_\phi \leq \epsilon$.

Posons $P = f_{2n_{v+1} + 1}(u^{2n_{v+1}})^*$, $u_{v+1} = uP$ et

K_{v+1} , le sous-facteur de type $I_{2n_{v+1}+1}$, engendré par u_{v+1} et les p_j^{v+1} .

$$(5) \quad \{ e_{i,j}^{v+1} = u_{v+1}^{i-j} p_j^{v+1} \mid 0 \leq i, j \leq 2n_{v+1} \} \text{ est un s.u.m.}$$

de K_{v+1} tel que, pour $0 \leq i, j \leq 2n_{v+1}$,

$$\text{Ad } a \circ \alpha_v (e_{i,j}^{v+1}) = e_{j+n_{v+1}+1, i+n_{v+1}+1}^{v+1}.$$

$$(6) \quad \left\| \text{Ad } a \circ \alpha_v (P^*) - P \right\|_{\phi} \leq \epsilon$$

Les conditions (a), (b) et (c) du lemme se vérifient, en utilisant (1) et (2), comme dans 3.10.

Construisons, maintenant, v_{v+1} . L'antiautomorphisme $\tilde{\alpha} = \text{Ad } a \circ \alpha_v$ laisse $K'_{v+1} \cap N$ globalement invariant et donc, définit, par restriction, un antiautomorphisme de $K'_{v+1} \cap N$, qui est un facteur de type II_1 ou III . Comme $P \in N$ et commute à u_{v+1} et aux p_j^{v+1} , $P \in K'_{v+1} \cap N$ et donc, par (c), (6) et le lemme 5.7.8, il existe un unitaire $v \in K'_{v+1} \cap N$ tel que :

$$(7) \quad \left\| v \tilde{\alpha}(v^*) - P \right\|_{\phi \circ \alpha_v^{-2}} \leq \frac{\epsilon_{v+1}}{28}$$

$$\left\| v - 1 \right\|_{\chi} \leq 2 \left\| P - 1 \right\|_{\chi} \quad \text{pour } \chi = \phi \text{ et } \chi = \phi \circ \text{Ad}(v_v \dots v_1)^*$$

Posons $v_{v+1} = v a$. Par construction, v_{v+1} commute aux K_j , $j \leq v$ et donc (d) est vérifié.

Posons $V = v_v \dots v_1$ et démontrons (e). Par définition de P , nous avons

$$\left\| P - 1 \right\| \leq \frac{\pi}{2n_{v+1} + 1}$$

et donc, par (c), (4) et (7),

$$\begin{aligned} \|(v_{\nu+1} - 1)v\|_{\phi} &= \|va^{-1}\|_{\phi \circ \text{Ad } v^*} \leq \|v^{-1}\|_{\phi \circ \text{Ad } v^*} + \|a^{-1}\|_{\phi \circ \text{Ad } v^*} \\ &\leq \frac{2\pi}{2n_{\nu+1} + 1} + \frac{1}{2n_{\nu+1} + 1} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|v^*(v_{\nu+1}^* - 1)\|_{\phi} &= \|v_{\nu+1}^* - 1\|_{\phi} = \|v_{\nu+1} - 1\|_{\phi} \\ &\leq \|v - 1\|_{\phi} + \|a - 1\|_{\phi} \leq \frac{2\pi}{2n_{\nu+1} + 1} + \epsilon \end{aligned}$$

Donc, $\|(v_{\nu+1} - 1)v_{\nu} \dots v_1\|_{\phi} \leq \frac{1}{2n_{\nu+1} + 1}$ et (e) est prouvé.

Comme, par construction, $\alpha_{\nu+1} = \text{Ad } v_{\nu+1} \circ \alpha_{\nu}$ vérifie (f), démontrons, maintenant, (g). Pour cela, remarquons que :

$$\begin{aligned} \|\phi \circ \tilde{\alpha}^{-2} - \phi \circ \alpha_{\nu}^{-2}\| &\leq 2 \|\alpha_{\nu}^{-1}(a)\alpha_{\nu}^{-2}(a^*) - 1\|_{\phi} \\ &\leq 2 \|a^{-1}\|_{\phi \circ \alpha_{\nu}^{-1}} + 2 \|a^{-1}\|_{\phi \circ \alpha_{\nu}^{-2}} \leq 4 \left(\frac{\epsilon_{\nu+1}}{28}\right)^2 \end{aligned}$$

et donc que, par (7),

$$\begin{aligned} (8) \quad \|\psi_r \circ \alpha_{\nu+1}^{-2} - \psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} \circ \text{Ad } P^*\| &= \\ &= \|\psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} \circ \text{Ad}(\tilde{\alpha}(v)v^*) - \psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} \circ \text{Ad } P^*\| \\ &\leq 2 \|\tilde{\alpha}(v^*)^{-P}\|_{\phi \circ \tilde{\alpha}^{-2}} \\ &\leq 4 \|\phi \circ \tilde{\alpha}^{-2} - \phi \circ \alpha_{\nu}^{-2}\|^{1/2} + 2 \|\tilde{\alpha}(v^*)^{-P}\|_{\phi \circ \alpha_{\nu}^{-2}} \\ &\leq 8 \frac{\epsilon_{\nu+1}}{28} + 2 \frac{\epsilon_{\nu+1}}{28} = 10 \frac{\epsilon_{\nu+1}}{28} \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons, par (2) et 3.9,

$$\begin{aligned} (9) \quad \|\psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} - \psi_r \circ \text{Ad}(uU)^{-1}\| &\leq \\ &\leq \|\psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} - \psi_r \circ \alpha_{\nu}^{-2}\| + \|\psi_r \circ \alpha_{\nu}^{-2} - \psi_r \circ \text{Ad}(uU)^{-1}\| \\ &\leq 4 \frac{\epsilon_{\nu+1}}{28} + \frac{\epsilon_{\nu+1}}{2} \end{aligned}$$

Donc, par (8) et (9) ,

$$\begin{aligned} & \| \psi_r \circ \alpha_{v+1}^{-2} - \psi_r \circ \text{Ad}(u_{v+1} u_v \dots u_1)^{-1} \| \leq \\ & \leq \| \psi_r \circ \alpha_{v+1}^{-2} - \psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} \circ \text{Ad } P^* \| + \| \psi_r \circ \tilde{\alpha}^{-2} - \psi_r \circ \text{Ad}(uU)^{-1} \| \\ & \leq 14 \frac{\epsilon_{v+1}}{28} + \frac{\epsilon_{v+1}}{2} = \epsilon_{v+1} . \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration de 5.7.9 , remarquons que pour $v = 1$, les conditions (a), (c) et (d) sont vides. La construction de (K_1, v_1) s'effectue de la même manière que ci-dessus , avec $v = 0$ et $\alpha_0 = \alpha$

qed.

Fin de la démonstration de 5.6 :

Par le lemme 5.7.1 , nous pouvons supposer que α satisfait les hypothèses du lemme 5.7.9. Choisissons un état normal, fidèle ϕ sur M et une suite $(\psi_j)_{j \geq 1}$ de $[0, \phi]_{M_*}$, qui est totale dans M_* . Nous construisons, comme dans le lemme 5.7.9 , une suite de couples $(K_\nu, v_\nu)_{\nu \geq 1}$ et nous avons alors :

(1) Les K_ν engendrent un sous-facteur K de M et M est isomorphe au produit tensoriel de K par $K' \cap M$.

[appliquer 5.7.9 (a), (c), les lemmes 3.7 et [7].2.3.6]

(2) Les unitaires $a_\nu = v_\nu \dots v_1$ convergent *-fortement vers un unitaire a de M .

[par 5.7.9 (e)] .

Posons $\alpha_\infty = \text{Ad } a \circ \alpha$.

(3) Pour chaque $v \geq 1$, $\alpha_\infty(e_{1,j}^v) = e_{j+n_v+1, i+n_v+1}^v$ pour $0 \leq i, j \leq 2n_v$. [par 5.7.9 (f) et (d)].

Rappelons que, par 5.7.9 (c), nous avons, pour $k < v$,

$$(4) \quad \begin{aligned} \|\psi_k, e_{1,j}^v\| &= \|\psi_k, u_v^{1-j} p_j^v\| \\ &\leq \|\psi_k, p_j^v\| + \|\psi_k, u_v^{1-j}\| \leq (2n_v+2)\delta_v \end{aligned}$$

Pour tout $v \geq 1$, $z_v = \prod_{j=0}^{2n_v} e_{j, j+n_v+1}^v$ est un unitaire de K_v , qui, par (4) et le choix de δ_v , satisfait, pour $k < v$

$$(5) \quad \|\psi_k \circ \text{Ad } z_v - \psi_k\| = \|\psi_k, z_v\| \leq (2n_v+1)^2 \sup_{i,j} \|\psi_k, e_{i,j}^v\| \leq 2^{-v}$$

$$\|\psi_k \circ \text{Ad } z_v^{-1} - \psi_k\| \leq 2^{-v}.$$

Posons $\theta = \lim_{v \rightarrow \infty} \text{Ad}(z_1 z_2 \dots z_v)$. Par (5), $\theta \in \overline{\text{Int}(M)}$ et $\theta|_{K' \cap M} = 1$. De plus, par construction, pour chaque $v \geq 1$,

$$\theta \circ \alpha_\infty(e_{1,j}^v) = e_{j,i}^v \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq 2n_v$$

et donc, comme par 5.7.9 (g), $\alpha_\infty^2|_{K' \cap M} = 1$, nous avons $(\theta \circ \alpha_\infty)^2 = 1$.

Comme $\alpha \circ (\theta \circ \alpha_\infty) \in \overline{\text{Int}(M)}$, la proposition est démontrée avec $\beta = \theta \circ \alpha_\infty$.

qed.

6. CLASSIFICATION, A EQUIVALENCE PRES, DES TRANSPOSITIONS
DES FACTEURS INJECTIFS, AGISSANT DANS UN ESPACE DE
HILBERT SEPARABLE, DE TYPE II ET III $_{\lambda}$, $\lambda \neq 1$,
AINSI QUE DU FACTEUR D'ARAKI-WOODS DE TYPE III $_1$.

Comme R , le facteur hyperfini de type II_1 est à isomorphisme près, le seul facteur injectif de type II_1 . ([5].Th.7.1) et que $\overline{\text{Int}}(R) = \text{Aut}(R)$ ([25].Th.4), le résultat suivant est un corollaire direct du théorème 1.

Théorème 6.0 : Deux transpositions du facteur injectif de type II_1 sont équivalentes.

Rappelons qu'un facteur de Krieger continu est injectif ([5].Cor.6.9.b) et qu'inversément, tous les facteurs injectifs de type II et III_{λ} , $\lambda \neq 1$, ainsi que le facteur d'Araki-Woods de type III_1 sont isomorphes à un facteur de Krieger. ([5].[6].[21]). Les résultats ci-dessus sont donc des corollaires du théorème 5.4.

Par la proposition 4.9, le groupe des automorphismes du flot (lisse) des poids sur $R_{0,1}$, le facteur hyperfini de type II_{∞} , est topologiquement isomorphe à \mathbb{R}_+^* , de sorte que l'identité est le seul automorphisme involutif de ce groupe. Par conséquent, comme $R_{0,1}$ est, à isomorphisme près, le seul facteur injectif de type II_{∞} ([5].Th.7.4), nous avons, par 5.4 :

Théorème 6.1 : Deux transpositions du facteur injectif de type II_{∞} sont équivalentes.

Donnons une démonstration plus directe et plus précise de 6.1 . Soient α et β deux transpositions de $R_{0,1}$. Par la proposition 4.9 , $\text{mod}(\alpha\beta) = \text{mod}(\alpha)\text{mod}(\beta) = 1$ et donc, $\alpha\beta \in \overline{\text{Int}}(R_{0,1})$, par la proposition 5.2 (ou plus directement en utilisant [4] .3.11). Par le théorème 1 , nous avons alors :

Théorème 6.2 : Deux transpositions de $R_{0,1}$ sont $\overline{\text{Int}}(R_{0,1})$ -équivalentes .

Soit R_∞ , le facteur d'Araki-Woods de type III_1 . Par la proposition 5.2 et la proposition 4.10, $\overline{\text{Int}}(R_\infty) = \text{Aut}(R_\infty)$. et, donc, nous avons :

Théorème 6.3 : Deux transpositions du facteur d'Araki-Woods de type III_1 sont équivalentes .

Soient $0 < \lambda < 1$ et R_λ , le facteur injectif de type III_λ . Comme, par la proposition 4.10, le groupe des automorphismes du flot des poids de tout facteur M de type III_λ ($0 < \lambda < 1$) est topologiquement isomorphe à

$$\mathbb{R}_+^* / S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* / \{ \lambda^n \}_{n \in \mathbb{Z}}$$

il existe deux classes de conjugaison d'automorphismes involutifs du flot des poids de R_λ , correspondant à 1 ou $\sqrt{\lambda}$, modulo $\{ \lambda^n \}_{n \in \mathbb{Z}}$. Par le théorème 5.4 , nous avons alors :

Théorème 6.4 : Soient $0 < \lambda < 1$ et R_λ , le facteur injectif de type III_λ . Il existe exactement deux classes d'équivalence de transpositions de R_λ .

Remarque 6.5 : Dans 4.15 , nous avons exhibé une transposition de module 1 . Construisons explicitement une transposition de R_λ , de module $\sqrt{\lambda}$.

Soient $\Omega = \mathbb{R} \times]0, \infty[\subset \mathbb{R}^2$ et μ , la mesure définie sur Ω par la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Soit

$$G = \{ (a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) \mid a > 0 \}$$

le groupe des transformations affines et préservant l'ordre de la droite rationnelle. L'action de G sur Ω , définie par

$$(a,b).(x,y) = (ax+b, \frac{1}{a} y) \text{ pour tout } (a,b) \in G, (x,y) \in \Omega$$

présERVE la mesure μ , est libre et ergodique. Comme G est résoluble, le produit croisé $W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$ est isomorphe à $R_{0,1}$.

Définissons un groupe à un paramètre, β , d'automorphismes de (Ω, μ) par:

$$\beta_s(x,y) = (x, sy) \text{ pour } (x,y) \in \Omega \text{ et } s \in \mathbb{R}_+^* .$$

Comme β commute à l'action de G , il se prolonge en un groupe à un paramètre, toujours noté β , d'automorphismes de $R_{0,1}$. Par la proposition 4.9 , $\text{mod}_{R_{0,1}}(\beta_s) = s$. En effet,

si τ est la trace canonique sur $W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$, nous avons, pour $x = \sum_G a_g u_g \in W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)_+$

$$\begin{aligned} \tau \circ \beta_s^{-1}(x) &= \tau \left(\sum_G \beta_{s^{-1}}(a_g) u_g \right) = \int_\Omega \beta_{s^{-1}}(a_g)(x,y) d\mu(x,y) = \\ &= \int_\Omega a_g(x, s^{-1}y) d\mu(x,y) = s \int_\Omega a_g(x,y) d\mu(x,y) = \\ &= s \cdot \tau \left(\sum_G a_g u_g \right) = s \cdot \tau(x) . \end{aligned}$$

Soit σ , la transposition canonique, définie sur $W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$, par :

$$\sigma \left(\sum_G a_g u_g \right) = \sum_G u_g^{-1} a_g, \quad \forall \sum_G a_g u_g \in W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$$

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha_\epsilon = \beta_\epsilon \circ \sigma$ définit alors un antiautomorphisme de $R_{O,1}$ de module ϵ , qui commute avec β .

Pour $\lambda \in]0, 1[$, considérons le facteur injectif de type III $_\lambda$, R_λ , comme le produit croisé de $R_{O,1} = W^*(L^\infty(\Omega, \mu), G)$ par l'automorphisme $\beta_{\lambda^{-1}}$. Soient I , l'injection canonique de $R_{O,1}$ dans R_λ ; V , un unitaire de R_λ avec $I(\beta_{\lambda^{-1}}(x)) = \text{Ad } V(I(x))$, ($\forall x \in R_{O,1}$); E , l'espérance conditionnelle canonique de R_λ sur $I(R_{O,1})$ et notons ϕ , la trace généralisée sur R_λ , donnée par $\tau \circ I^{-1} \circ E$, où τ est une trace normale, fidèle, semi-finie sur $R_{O,1}$.

Comme, pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, l'antiautomorphisme α_ϵ commute avec $\beta_{\lambda^{-1}}$, il induit, par la proposition 4.13, un antiautomorphisme $\bar{\alpha}_\epsilon$ de R_λ , tel que

$$\bar{\alpha}_\epsilon \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} I(x_n) V^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V^{-n} I(\alpha_\epsilon(x_n)) \quad \text{pour} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} I(x_n) V^n \in R_\lambda$$

et tel que $\text{mod}(\bar{\alpha}_\epsilon) = \epsilon \text{ modulo } \{ \lambda^n \}_{n \in \mathbb{Z}}$. En effet, nous

$$\begin{aligned} \text{avons :} \quad \phi \circ \bar{\alpha}_\epsilon^{-1} &= \tau \circ I^{-1} \circ E \circ \bar{\alpha}_\epsilon^{-1} = \tau \circ \alpha_{\epsilon^{-1}} \circ I^{-1} \circ E = \\ &= \epsilon \cdot \tau \circ I^{-1} \circ E = \epsilon \cdot \phi \end{aligned}$$

d'où le résultat par la proposition 4.10.

Posons $\epsilon = \lambda^{-\frac{1}{2}}$. Comme $\alpha_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(x) = \beta_{\lambda^{-1}}(x)$, pour tout $x \in R_{O,1}$, nous avons : $\bar{\alpha}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}^2 = \text{Ad } V$, car, par construction, $\bar{\alpha}_\epsilon(V) = V^*$, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par le lemme 1.6, il existe un unitaire $w \in R_\lambda$ tel que $V^* = w \bar{\alpha}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(w^*)$.

L'antiautomorphisme $Ad w \circ \bar{\alpha}_{\lambda^{-1/2}}$ est alors une transposition de R_λ de module $\sqrt{\lambda}$ modulo $\{\lambda^n\}_n$.

Remarquons aussi que $\bar{\alpha}_1$ est une transposition de module 1.

6.6 Transpositions des facteurs injectifs de type III₀.

Dans cette section, nous construisons, grâce à 5.4, des exemples de facteurs injectifs de type III₀, avec 2^n , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, classes d'équivalence de transpositions.

Rappelons, d'une part, que, pour les facteurs injectifs de type III₀, le flot des poids est un invariant complet d'isomorphisme ([5].Cor 7.6) et d'autre part, que tout flot mesurable, ergodique d'automorphismes sur un espace de Lebesgue, qui est apériodique et conservatif, apparaît comme flot des poids d'un facteur injectif de type III₀. ([20]).

6.6.1 : Soient (B, μ) , un espace de Lebesgue ; Q , un automorphisme ergodique de B , quasi-invariant et $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$, le flot construit sous la fonction constante $c = 1$. Rappelons la construction de ce flot. Dans l'espace mesuré $\Omega = B \times [0, 1]$, muni de la mesure produit $\bar{\mu} = \mu \otimes m$ (m = mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$), on identifie les points $(b, 1)$ et $(Qb, 0)$, pour $b \in B$ et le flot $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est défini par :

$$F_t(b, s) = (b, s+t) \quad \text{pour } (b, s) \in \Omega, s < 1 \text{ et } t \in [0, 1-s]$$

Lemme : Le flot mesurable $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$, ainsi défini, est ergodique, apériodique et conservatif.

Démonstration : Commençons par vérifier l'ergodicité de $(F_t)_t$. Soit A , une partie mesurable de Ω , invariante mod 0 sous chacun des automorphismes du flot. Comme il existe (par exemple

[24].5.4) une partie \tilde{A} , mesurable de Ω , identique mod 0 avec A et strictement invariante sous tous les automorphismes du flot, nous pouvons supposer que $A = B' \times [0,1]$. Comme $F_1 = Q \times \text{id}$ et par l'ergodicité de Q , A est égal mod 0 à Ω ou à \emptyset .

Remarquons que, pour que $(x,t) \in \Omega$ soit un point périodique, il doit exister un entier $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $Q^n x = x$. Or, comme Q est ergodique, Q^m est libre, pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$, ce qui démontre l'apériodicité de $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Rappelons ([13].2.2) que le flot $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est conservatif, si Q l'est aussi (i.e. il n'existe pas dans B , de parties de mesure > 0 , errantes sous Q). Or, comme Q est ergodique, Q est clairement conservatif.

qed.

Soient $(G_t)_{t \in \mathbb{R}}$, un flot mesurable ergodique d'automorphismes d'un espace de Lebesgue X et $C((G_t)_{t \in \mathbb{R}})$, son commutant, c'est-à-dire le groupe des automorphismes U de X tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$U \circ G_t(x) = G_t \circ U(x), \text{ presque pour tout } x \in X.$$

Dans [16], T. Hamachi démontre le résultat suivant :

Proposition 6.6.2 : Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$, un flot mesurable, ergodique comme dans 6.6.1. Nous avons alors :

$$C((F_t)_{t \in \mathbb{R}}) = \{ F_t \circ (U \times \text{id}) \mid t \in \mathbb{R} \text{ et } U \in C(Q) \}$$

où $(U \times \text{id})(b,s) = (Ub,s)$, pour $(b,s) \in \Omega$.

Par un simple calcul, nous obtenons alors :

Corollaire 6.6.3 : Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$, comme dans 6.6.1. Un élément S de $C((F_t)_{t \in \mathbb{R}})$ est involutif si et seulement s'il peut s'écrire $S = F_t \circ (U \times \text{id})$ avec soit

$$t=0 \text{ et } U^2 = 1 \quad \text{ou} \quad t=\frac{1}{2} \text{ et } U^2 = Q^{-1} .$$

Soit T , une transformation ergodique, dont le commutant est isomorphe à \mathbb{Z} . (existence [23], [16]).

Par 6.6.3, nous avons :

Lemme 6.6.4 : Soit $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$, le flot, construit à l'aide de T comme dans 6.6.1. Le commutant $C((F_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ne contient alors qu'un seul élément involutif.

Soient n , un entier ≥ 1 ; \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{T}^∞), le tore de dimension n (resp. le produit direct d'un nombre dénombrable de copies de \mathbb{T}) et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{T}^n$ (resp. $\lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$, une suite de nombres réels).

Posons T_λ , l'automorphisme de \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{T}^∞), défini par :

$$T_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \lambda_1 \pmod{1}, \dots, x_n + \lambda_n \pmod{1}), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$$

(resp. $T_\lambda((x_n)_{n \geq 1}) = (x_n + \lambda_n \pmod{1})_{n \geq 1}$, pour $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{T}^\infty$)

Rappelons (voir par exemple [27].p.25) que T_λ est ergodique si et seulement si $(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (resp. $(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$) sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants.

Lemme 6.6.5 : Si S est une transformation de \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{T}^∞) du commutant $C(T_\lambda)$ de l'automorphisme ergodique T_λ , alors S est un produit de rotations, c'est-à-dire : il existe $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ (resp. $\mu = (\mu_n)_{n \geq 1}$) tel que :

$S(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \mu_1 \pmod{1}, \dots, x_n + \mu_n \pmod{1})$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$
 (resp. $S((x_n)_{n \geq 1}) = (x_n + \mu_n \pmod{1})_{n \geq 1}$ pour $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{T}^\infty$)

Démonstration : Pour $1 \leq k \leq n$ (resp. $k \in \mathbb{N}$), notons p_k , la k -ième projection définie par $p_k(x) = x_k$, pour $x \in \mathbb{T}^n$ (resp. \mathbb{T}^∞) et posons $S_k = p_k \circ S$. S_k est une fonction mesurable de \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{T}^∞) dans \mathbb{T} , qui satisfait la relation suivante :

$$S_k(T_\lambda(x)) = S_k(x) + \lambda_k \pmod{1}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{T}^n \text{ (resp. } \mathbb{T}^\infty)$$

En développant S_k en série de Fourier, on vérifie facilement que : $S_k(x) = x_k + \mu_k \pmod{1}$, où $\mu_k \in \mathbb{R}$.

qed.

Lemme 6.6.6 : Soient \mathbb{T}^n (resp. \mathbb{T}^∞) et T_λ , comme ci-dessus. Dans $C(T_\lambda)$, il existe 2^n (resp. $2^{\mathbb{N}}$) éléments involutifs distincts.

Le lemme 6.6.6 découle de 6.6.3 de manière directe. En utilisant les lemmes 6.6.1, 6.6.4 et 6.6.6, nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.6.7 : Il existe des facteurs injectifs de type III_0 , agissant dans un espace de Hilbert séparable, avec 2^n , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, classes d'équivalence de transpositions.

Addendum : Pour chaque entier $n \geq 1$, nous avons pu exhiber des facteurs injectifs de type III_0 , agissant dans un espace de Hilbert séparable, avec n classes d'équivalence de transpositions.

APPENDICES .

A. Sur les semi-normes définies par une forme normale.

Soient M , une algèbre de Von Neumann et M_* , son prédual.
Rappelons les définitions suivantes :

Définition A.1 : Si $x \in M$ et $\phi \in M_*$, les formes normales $x \cdot \phi$, $\phi \cdot x$ et $[\phi, x]$ sont définies par : $(x \cdot \phi)(y) = \phi(yx)$, $(\phi \cdot x)(y) = \phi(xy)$ et $[\phi, x](y) = (\phi \cdot x - x \cdot \phi)(y) = \phi([x, y])$ pour tout $y \in M$.

Définition A.2 : Pour tout $\phi \in M_*^+$, les semi-normes $\| \cdot \|_\phi$ et $\| \cdot \|_\phi^\#$ sont définies pour tout $x \in M$, par :

$$\|x\|_\phi = \phi(x^*x)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\phi^\# = \phi(x^*x + xx^*)^{1/2} .$$

Complétons l'ensemble des inégalités, énoncées dans le lemme [3] .2.1, par celles du lemme ci-dessous :

Lemme A.3 : Pour $x, y \in M$; u , un unitaire de M et $\phi \in M_*^+$, nous avons :

- 1) $\|yx\|_\phi \leq \|y\| \|x\|_\phi$ et $\|ux\|_\phi = \|x\|_\phi$
- 2) $\|xu\|_\phi = \|Ad u^*(x)\|_\phi = \|x\|_{\phi \circ Ad u^*}$
- 3) Si x est normal, $\|x\|_\phi = \|x^*\|_\phi$
- 4) $\|[\phi, x-y]\| \leq \|\phi\| (\|x-y\|_\phi + \|x^*-y^*\|_\phi)$
- 5) Si $\alpha \in Aut(M)$, $\|\alpha(x)\|_\phi = \|x\|_{\phi \circ \alpha}$ et si $\beta \in Ant(M)$, $\|\beta(x)\|_\phi = \|x^*\|_{\phi \circ \beta}$
- 6) Si $\alpha \in A(M)$, $\|[\phi, \alpha(x)]\| = \|[\phi \circ \alpha, x]\|$
- 7) $\|\phi \circ Ad u - \phi\| = \|\phi \circ Ad u^* - \phi\| = \|[\phi, u]\|$
 $\leq \|\phi \cdot (u-1)\| + \|(u-1) \cdot \phi\| \leq 2 \|\phi\| \|u-1\|_\phi$

Nous laissons la vérification de ce lemme au lecteur .

Rappelons le lemme suivant, qui est un cas particulier de la proposition I.4.5 de [11]

Lemme A.4 : Soient M , une algèbre de Von Neumann et ϕ, ψ deux formes positives, normales, fidèles sur M . Alors, sur la boule unité M_1 de M , la topologie définie par la semi-norme $\| \cdot \|_{\phi}$ est équivalente à celle, définie par $\| \cdot \|_{\psi}$.

B. Centralisateur asymptotique d'une algèbre

de Von Neumann .

Soient M , une algèbre de Von Neumann de genre dénombrable et ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} . Rappelons la définition et le résultat suivants de [3] .

Définition B.1 : Une suite centralisante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de M (resp. une suite ω -centralisante) est un élément de la C^* - algèbre $L^{\infty}(\mathbb{N}, M)$ tel que :

$$\forall \psi \in M_* , \quad \| [\psi, x_n] \| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ (resp. } \omega \text{)}$$

Proposition B.2 : Soient M et ω comme ci-dessus .

1) Les suites ω -centralisantes forment une sous- C^* -algèbre M^{ω} de $L^{\infty}(\mathbb{N}, M)$.

2) Le quotient de M^{ω} par l'idéal bilatère des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ω -centralisantes convergeant $*$ -fortement vers 0 , lorsque $n \rightarrow \omega$, est une algèbre de Von Neumann finie M_{ω} , appelée le centralisateur asymptotique de M .

Remarque B.3 : Pour tout automorphisme (resp. anti-) θ de M , l'application de M^ω sur elle-même, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (\theta(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, définit un automorphisme (resp. un anti-) θ_ω de M_ω , et θ_ω ne dépend que de $\varepsilon_M(\theta)$ où ε_M est l'application canonique de $A(M)$ sur $A(M)/\text{Int}(M)$.

Lemme B.4 : Soient M, ω comme ci-dessus et $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, une suite d'unitaires de M telle que $\text{Ad } u_p \rightarrow \theta$ dans $\text{Aut}(M)$, quand $p \rightarrow \infty$.

1) Si $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite ω -centralisante, il en est de même de la suite $(\text{Ad } u_p(x_p))_{p \in \mathbb{N}}$.

2) Si $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in L^\infty(\mathbb{N}, M)$, les assertions suivantes sont équivalentes, quand $p \rightarrow \omega$:

- a) $x_p \rightarrow 0$, *-fortement b) $x_p u_p \rightarrow 0$, *-fortement
 c) $u_p x_p \rightarrow 0$, *-fortement.

Démonstration : Soit $\phi \in M_*$. Nous avons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|\text{Ad } u_p(x_p), \phi\| &= \|[x_p, \phi \circ \text{Ad } u_p]\| \\ &\leq \|[x_p, \phi \circ \text{Ad } u_p - \phi \circ \theta]\| + \|[x_p, \phi \circ \theta]\| \\ &\leq 2 \|x_p\| \|\phi \circ \text{Ad } u_p - \phi \circ \theta\| + \|[x_p, \phi \circ \theta]\| \end{aligned}$$

ce qui démontre (1).

Vérification de (2) : Soit $\phi \in M_*^+$.

(a) \implies (b) : Comme $\|u_p^* x_p^*\|_\phi = \|x_p^*\|_\phi$, il reste à voir que

$$\begin{aligned} \|x_p u_p\|_\phi &\xrightarrow{p \rightarrow \omega} 0. \text{ Or, pour tout } p \in \mathbb{N}, \\ \|x_p u_p\|_\phi &= \|x_p\|_{\phi \circ \text{Ad } u_p} \leq \|x_p\|_{\phi \circ \text{Ad } u_p^* - \phi \circ \theta}^{-1/2} + \|x_p\|_{\phi \circ \theta}^{-1} \end{aligned}$$

et donc (b) est prouvé .

(b) \implies (a) : Comme ci-dessus, il suffit de montrer que :

$\|x_p\|_{\phi} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous avons l'inégalité :

$$\|x_p\|_{\phi} = \|x_p u_p\|_{\phi \circ \text{Ad } u_p} \leq \|x_p\|_{\phi \circ \text{Ad } u_p - \phi \circ \theta}^{1/2} + \|x_p u_p\|_{\phi \circ \theta}$$

et donc (a) est vérifié.

La preuve de (a) \iff (c) est analogue .

qed.

Lemme B.5 : Soient $M = Q \otimes N$, le produit tensoriel d'un facteur de dimension finie Q , par une algèbre de Von Neumann N , à préduel séparable et ω , un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} .

(a) L'homomorphisme canonique Π_{ω} , correspondant à $\pi : x \in N \longmapsto 1_Q \otimes x \in M$ est un isomorphisme de N_{ω} sur M_{ω} .

(b) Pour tout couple d'automorphismes $\alpha \in \text{Aut}(Q)$ et $\beta \in \text{Aut}(N)$ (resp. d'antiautomorphismes $\alpha \in \text{Ant}(Q)$ et $\beta \in \text{Ant}(N)$), on a : $\Pi_{\omega}(\beta_{\omega}(X)) = (\alpha \otimes \beta)_{\omega}(\Pi_{\omega}(X))$, $\forall X \in N_{\omega}$.

Démonstration : (a) Soient $(f_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$, un s.u.m. de Q ($m^2 =$ dimension de Q) et τ , la trace canonique associée .

(i.e. $\tau(\sum_{i,j=1}^m \lambda_{i,j} f_{i,j}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \lambda_{i,i}$). Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in Q$ tels que $\| [x, f_{i,j}] \|_2 < \epsilon$, pour $1 \leq i,j \leq m$, nous avons :

$$\|x - \tau(x) \cdot 1\|_2 < m\epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \|x - \tau(x)\|_2 &= \|x - \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^m f_{i,j} x f_{j,i}\|_2 \\ &= \frac{1}{m} \left\| \sum_{i,j=1}^m [x, f_{i,j}] f_{j,i} \right\|_2 \leq \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^m \| [x, f_{i,j}] \|_2 \end{aligned}$$

Donc, (a) est un cas particulier du lemme [3].2.11 .

Par définition de Π_{ω} , (b) est immédiat .

qed.

BIBLIOGRAPHIE .

- [1] P.L. AUBERT : Théorie de Galois pour une W^* -algèbre.
Comment.Math.Helv. 39(51) (1976),p. 411-433.
- [2] E. CARTAN : Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne. J.Math. pures et appl.,t.8, fasc. 1, 1929, p. 1-33.
- [3] A. CONNES : Almost periodic states and factors of type III_1 . J. Funct. Anal.,16, (1974),p.415-445 .
- [4] A. CONNES : A factor not anti-isomorphic to itself.
Ann. of Math.,101,no.3, (1975),p.536-554 .
- [5] A. CONNES : Classification of injective factors .
Ann. of Math.,104, (1976),p.73-115 .
- [6] A. CONNES : Une classification des facteurs de type III.
Ann.Sci.Ec.Norm.Sup., 4ème série,t.6,fasc.2, (1973)
p. 133-252 .
- [7] A. CONNES : Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.,4ème série,t.8, (1975),p. 383-420 .
- [8] A. CONNES : Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1 . Acta Sci. Math. 39 (1977),p.39-66.
- [9] A. CONNES-M. TAKESAKI : The flow of weights on factors of type III . Tôhoku Math. J.,2.series,vol.29, (1977)
p. 473-575 .
- [10] A. CONNES-M. TAKESAKI : Flots des poids sur les facteurs de type III . C.R. Acad. Sci.,Paris, Sér.A 278, (1974),p. 937-940 .

- [11] J. DIXMIER : Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2ème éd., Gauthiers-Villars, Paris.
- [12] H. OYE : On groups of measure preserving transformations I. Amer. J. of Math. 81 (1959), p.119-159 .
- [13] T. FACK-P. DE LA HARPE : Sommes de commutateurs dans les algèbres de Von Neumann finies continues. Ann. Inst. Fourier , 30, (1980), p. 49-73 .
- [14] T. GIORDANO : Antiautomorphismes involutifs des facteurs injectifs. C.R. Acad. Sci., Paris, Sér.A 291, (1980) p. 583-585.
- [15] T. GIORDANO-V. JONES : Antiautomorphismes involutifs du facteur hyperfini de type II_1 . C.R. Acad. Sci., Paris, Sér.A 290, (1980), p. 29-31 .
- [16] T. HAMACHI : The normalizer group of an ergodic automorphism of type III and the commutant of an ergodic flow. J. Funct. Anal., 40, (1981), p.387-403 .
- [17] P. DE LA HARPE : Classical groups and classical Lie algebras of operators. à paraître dans les proceedings of A.M.S. Summer institute on operator algebras 1980.
- [18] G.G. KASPAROV : Hilbert C^* -modules : theorems of Stinespring and Voiculescu. J. Operator Th. 4. (1980), p.133-150 .
- [19] U. KRENGEL : Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen I. Math. Ann. 176, (1968), p. 181-190.
- [20] W. KRIEGER : On ergodic flows and the isomorphism of factors. Math. Ann. 223, (1976), p. 19-70 .

- [21] W. KRIEGER : On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space.
dana Lect. Notas no. 160 .
- [22] D. MC DUFF : Central sequences and the hyperfinite factor.
Proc. London Math. Soc. XXI, (1970), p. 443-461 .
- [23] D.S. DRNSTEIN : On the root problem in ergodic theory .
dana "Proceedings, Sixth Berkeley Symposium on
Math. Statistics and Probability " Vol.2, pp.347-356,
(Univ. of California Press Berkeley, 1972) .
- [24] V.A. ROHLIN : Selected topics from the metric theory of dynamical system. A.M.S. Translation. 49, (1966)
p. 171-240 .
- [25] S. SAKAI : On automorphism groups of II_1 -factors.
Tohoku Math. J. 26, (1974), p.423-430.
- [26] J.L. SAUVAGEOT : Sur le type du produit croisé d'une algèbre de Von Neumann par un groupe localement compact.
Bull. Soc. Math. Fr. 105, (1977) p.349-368.
- [27] Y.G. SINAI : Introduction to ergodic theory .
Math. Notes Princeton Univ. Press 1976.
- [28] E. STØRMER : On anti-automorphisms of Von Neumann algebras.
Pacific J. of Math. vol.21, no.2, (1967), p.349-370.
- [29] E. STØRMER : Real structure in the hyperfinite factor.
Duke Math. J. 47 (1980) no.1, p. 145-153 .
- [30] S. STRATILA-L. ZSIDO : Lectures on Von Neumann algebras.
Abacus Press. 1979.