Publié dans Travaux de logique 20, vii-xi, 2011,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

Introduction

Atavists of all nations, unite !
Return to content !

Göran Sundholm

Depuis les *Éléments* d'Euclide, jusqu'au programme formaliste de David Hilbert, la méthode axiomatique a longtemps accompagné le développement des mathématiques et aussi, bien que plus tardivement, celui de la logique et des démarches de formalisation. Pour Frege, en effet, l'approche logiciste de l'arithmétique nécessitait d'étendre le champ d'usage des langues formulaires et de l'axiomatisation à la logique elle-même. Comme il l'écrivait dans son introduction à la *Begriffsschrift*,

> Pour que, ce faisant [à savoir réduire le concept de *nombre* à la conséquence logique] quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'introduire de façon inaperçue, tout devait dépendre de l'absence de lacunes dans la chaîne des déductions[1].

Si l'idéographie et le système axiomatique qu'il mit en place pour réaliser son grand projet de réduction devait sombrer dans l'échec par la contradiction que B. Russell y décela en 1902, il n'en reste pas moins que les travaux axiomatiques de Frege ouvraient une ère nouvelle pour la logique, pour les fondements

[1] Frege G. 1879. *Begriffsschrift, eine des arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens,* Halle: Nebert. [Cité dans trad. fr. par Besson C. *Idéographie,* Paris: Vrin, 1999, p. 6.]

de l'arithmétique et donc aussi pour l'épistémologie d'une grande partie des mathématiques.

On sait, par exemple, qu'une fois limité au second ordre et expurgé de la fameuse Loi V, qui introduisait la notion contradictoire *d'extension de concept*, le système de Frege permet une axiomatisation extraordinairement économique de l'arithmétique élémentaire. Ce qu'on nomme aujourd'hui l'arithmétique de Frege, s'obtient en effet à partir d'une logique des prédicats du second ordre, par l'ajout d'un unique axiome ne contenant pour seul terme propre que « nombre de… ». Cet axiome que l'on nomme désormais le *Principe de Hume*[2] constitue alors une définition implicite de la notion de nombre cardinal.

Il est sans doute banal aujourd'hui de rappeler que, malgré l'échec d'une forme sans doute trop radicale de logicisme, l'héritage de Frege reste considérable. Non seulement l'étude qu'il donna de la notion de *nombre cardinal* reste un modèle d'analyse logique, mais surtout il montra la fécondité dans les domaines de la logique et des fondements des mathématiques de la méthode axiomatique lorsqu'elle se trouve formalisée par l'adoption d'une idéographie logique et l'intégration d'axiomes et de règles caractérisant l'ensemble des chaînes déductives.

A. N. Whitehead, B. Russell, F. P. Ramsey, R. Carnap et aussi, à sa manière, S. Leśniewski furent sur ce plan parmi les héritiers de Frege. En atteignant à des degrés divers l'idéal de rigueur que s'était fixé Frege, chacun pratiqua en effet l'analyse logique à l'aide d'une axiomatique formelle, mais sans être formaliste, en usant d'un langage interprété, à savoir une idéographie dont les formules ne sont pas de simples suites de caractères, mais des expressions pourvues de sens.

[2] A savoir, $(\forall F)(\forall G)(Nombre(F) = Nombre(G) \equiv F \infty G)$, une formule du second ordre où $F \infty G$ exprime qu'il existe une relation biunivoque entre les objets tombant sous le concept F et ceux tombant sous G.

Tout lecteur attentif du *Journal of Symbolic Logic* constate aujourd'hui sans peine que les travaux logiques dominants ne ressemblent plus guère, ni par leurs sujets, ni par leurs méthodes, aux œuvres des illustres ancêtres que j'ai nommés ici. La raison en est assez simple et remonte au changement radical de perspective que la logique a subi dans les années Trente, après la découverte des théorèmes de limitation et en particulier le théorème d'incomplétude de Gödel. Depuis cette période l'approche axiomatique d'une théorie ou d'un domaine spécifique d'objets, l'usage de l'axiomatique comme outil d'analyse, ne sont plus parmi les préoccupations premières de la grande majorité des logiciens. Avec Gödel, avec Tarski aussi (pourtant l'élève de Leśniewski), le travail premier des logiciens devenait de montrer de manière métamathématique les propriétés de systèmes formels, à savoir de systèmes symboliques considérés comme dépouillés de tout contenu représentationnel. Dans cette perspective, la logique telle que l'avait conçue des Frege, Russell et Leśniewski devait passer au second plan et laisser sa place au langage devenu idiome universel de la théorie des modèles.

Cette évolution, sans doute rendue nécessaire par les problématiques spécifiques rencontrées par les sciences formelles, ne rendait cependant pas caduques les questions et les enjeux de l'analyse logique de contenu. Avec le renouveau des entreprises fondationnalistes, celui de l'intuitionnisme, avec l'urgence d'éclaircir les notions de réduction et de définition en épistémologie, avec aussi le développement de l'inférentialisme en philosophie du langage, l'usage de l'axiomatique comme instrument précieux de clarification et de découverte revient sur le devant de la scène logique. On notera aussi l'apparition de plusieurs systèmes à langage logique de base interprété, par exemple la Théorie Intuitionniste des Types, élaborée par Per Martin-Löf dans les années Quatre-vingt et qui fut discutée à plusieurs reprises dans les années Nonante au Centre de

Recherches Sémiologiques de Neuchâtel[3]. L'étude des systèmes et des axiomatiques construites sur la base de langages interprétés n'est désormais plus du ressort des seuls historiens des sciences formelles, mais revient naturellement aux logiciens.

Il est d'ailleurs frappant que depuis la parution en 1955 de l'excellent petit ouvrage de Robert Blanché sur l'axiomatique, aucune monographie ne soit, à notre connaissance, parue en français sur le sujet. Il nous a ainsi semblé naturel que les *Travaux de Logique*, qui ont entre autres largement consacré leurs pages aux études leśniewskiennes, contribuent à combler ce retard.

L'atavisme ne se caractérise pas comme une dévotion marquée au culte des ancêtres, mais comme la mise en valeur d'un héritage délaissé par les générations récentes. Puissent les regards croisés sur l'axiomatique offerts ici au lecteur contribuer au retour du contenu que notre ami Göran Sundholm appelait de ses vœux, par un plaisant manifeste, lors de l'édition 2000 du colloque tchèque *Logica*[4].

***

Je ne saurais terminer cette introduction sans évoquer la disparition toute prochaine du Centre de Recherches Sémiologiques de l'Université de Neuchâtel. Pour ne pas m'adonner prématurément au plus célèbre des sentiments brésiliens, je voudrais tout simplement saluer la générosité intellectuelle et la remarquable émulation scientifique que tout d'abord Jean-Blaise Grize, le fondateur du Centre, puis Denis Miéville, qui lui succéda à la direction, ont su offrir aux nombreux chercheurs

[3] Voir en particulier, Martin-Löf P. 1984. *Intuitionistic Type Theory*, Naples : Bibliopolis et la présentation de cette théorie par Sommaruga G. dans le numéro 11 des *Travaux de Logique*.

[4] Sundholm G. 2001. A Plea for Logical Atavism, in Majer O. (ed). *The Logica Yearbook 2000*, Prague: Filosofia, 151-162.

qui ont eu le privilège de travailler avec eux. J'espère qu'en reprenant la responsabilité éditoriale des *Travaux de Logique*, je saurai faire vivre à l'avenir un peu de cet esprit qui caractérise l'Ecole neuchâteloise de logique.

Pierre Joray
Professeur de logique et de philosophie des sciences
UFR de philosophie
Université de Rennes 1