

SUR L'ESPACE CLASSIFIANT DES FIBRES VECTORIELS REELS
STABLEMENT COMPLEXES

THESE

présentée à la Faculté des Sciences pour obtenir
le grade de docteur ès sciences par

B. JUNOD

UNIVERSITE DE NEUCHATEL
Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
CH-2000 NEUCHATEL (Suisse)

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Sur l'espace classifiant des fibrés vectoriels
réels stablement complexes

de Monsieur Bernard Junod

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport des membres du jury,

Messieurs U. Suter, F. Sigrist et B. Steer
(Oxford)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 21 mai 1987

Le doyen:


François Sigrist

Sommaire

0.	Introduction	p.1
1.	Cohomologie entière de $B(n,k)$	p.7
1.1.	Définitions et rappels	p.7
1.2.	Structure additive de $H^*(B(n,k); \mathbb{Z})$	p.12
1.3.	Structure multiplicative de $H^*(B(n,k); \mathbb{Z})$ et carrés de Steenrod	p.19
1.4.	Cohomologie entière de $BS(n,k)$	p.24
2.	K-théorie complexe des espaces $B(n,k)$	p.26
2.1.	Préliminaires	p.26
2.2.	Description de quelques éléments de $KU(B(n,k))$	p.30
2.3.	Structure additive de $KU(B(n,k))$	p.34
2.4.	K-théorie complexe de $BS(n,k)$	p.36
2.5.	Représentations spinorielles et générateurs de $KU(B(n,k))$	p.38
3.	Dimension géométrique et immersion des variétés stablement complexes	p.41
3.1.	Un critère de non-immersion pour les variétés stablement complexes	p.41
3.2.	Applications du critère de non-immersion	p.43
3.3.	Classe d'Euler et immersion des variétés stablement complexes	p.46
	Bibliographie	p.54

0. Introduction

Etant donné X un CW-complexe fini et une classe stable de fibrés vectoriels réels $x \in \widetilde{KO}(X)$, on appelle dimension géométrique de x , $dg(x)$, le plus petit entier $k \geq 0$ tel que l'élément $x + \underline{k}$ de $KO(X)$ soit représenté par un fibré vectoriel réel. Ici \underline{k} désigne la classe du fibré vectoriel réel trivial de dimension k . Dans [3], Atiyah introduit des classes caractéristiques en KO -théorie, les γ -opérations réelles, à l'aide desquelles il établit le critère suivant:

Pour que $dg(x) \leq k$, il faut que $\gamma_i(x) = 0$ pour tout $i > k$, c'est-à-dire, si $\gamma_k(x) \neq 0$, on a $dg(x) > k$

Le critère d'Atiyah a bien sûr un équivalent en KU -théorie, pour les classes stables de fibrés vectoriels complexes, mais on peut également se demander si les γ -opérations en K -théorie complexe ne restreignent pas d'une certaine manière la dimension géométrique des classes stables en K -théorie réelle. Toutefois, on n'envisage pas ici toutes les classes stables réelles, mais uniquement celles provenant de classes stables complexes sous l'application canonique

$$\epsilon_0: KU(X) \rightarrow KO(X)$$

Dans ce travail, nous allons montrer qu'effectivement un tel lien existe, c'est-à-dire:

Soit X un CW-complexe fini de dimension $< 2n$, et soient $x \in \widetilde{KO}(X)$, $y \in \widetilde{KU}(X)$ tels que $x = \epsilon_0(y)$, alors pour que

$dg(x) \leq k$, il faut que la relation

$$\sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r(y) = 0 \pmod{2^{n-j-1}} \quad \text{où } j = [k/2]$$

soit satisfaite dans $\widetilde{KU}(X)$

Ce résultat fournit en particulier un critère de non-immersion pour les variétés différentiables réelles, stablement complexes (i.e. dont la classe stable du fibré tangent provient d'une classe stable complexe).

Soit M^m une variété différentiable réelle, connexe, compacte, de dimension m , stablement complexe, et désignons par τ_0 la classe stable du fibré tangent à M , soit d'autre part $y \in \widetilde{KU}(X)$, tel que $\tau_0 = \varepsilon_0(y)$. Si M^m s'immerge dans \mathbb{R}^{m+k} , on a dans $KU(M)$ la relation suivante:

$$\sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r(-y) = 0 \pmod{2^{n-j-1}} \quad \text{où } n > m/2 \text{ et } j = [k/2]$$

Nous examinerons en particulier les cas où $M = \mathbb{C}P^n$, l'espace projectif complexe, et où $M = L^n(2^m)$ l'espace lenticulaire S^{2n+1}/\mathbb{Z}_2 . Dans le premier cas, notre critère nous conduit aux résultats bien connus de [15]:

$$\mathbb{C}P^n \text{ ne s'immerge pas dans } \mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)-1}$$

ici $\alpha(n)$ désigne le nombre de 1 dans le développement diadique de n .

Dans le second cas, le critère fournit un résultat analogue pour m suffisamment grand.

$$\text{Si } m > [n/2] + [\log_2 n]$$

$$L^n(2^m) \text{ ne s'immerge pas dans } \mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)}$$

Remarquons que le critère d'Atiyah donne dans ce cas (voir [12]):

$$\text{Si } (1 + [n/2]) \binom{n+[n/2]+1}{[n/2]} \neq 0 \pmod{2^{m+n-2([n/2]+1)}}$$

$L^n(2^m)$ ne s'immerge pas dans $R^{2n+1+2[n/2]}$

Pour les valeurs de $m \geq [n/2] + [\log_2 n]$, notre critère constitue une amélioration sensible de ce résultat. En particulier lorsque $n = 2^s + 1$, on obtient d'après [12]

$L^n(2^m)$ ne s'immerge pas dans R^{3n} ($n \geq 9$)

alors que nous obtenons

$L^n(2^m)$ ne s'immerge pas dans $R^{4(n-1)}$

Signalons également qu'en utilisant la classe d'Euler du fibré normal associé à l'immersion de $\mathbb{C}P^n$ dans $R^{4n-2\alpha(n)}$, on retrouve le résultat de [17], résultat que nous étendons aux espaces lenticulaires $L^n(2^m)$ pour m assez grand ($m \geq n + [\log_2 n]$).

Décrivons maintenant en quelques mots la démarche suivie. Rappelons d'abord que tout élément x de $\widetilde{KO}(X)$ est représenté par une application $f: X \rightarrow BSO(2n)$, où $2n > \dim X$. Cette application se relève dans l'espace $BU(n)$ si x provient d'une classe stable complexe, et dans $BSO(k)$ si $dg(x) \leq k$. Ici $BSO(k)$ et $BU(n)$ désignent respectivement les espaces classifiants des groupes de Lie $SO(k)$ et $SU(n)$.

Notons $B(n,k)$ l'espace pull-back du diagramme

$$\begin{array}{c} BSO(k) \\ \downarrow \\ BU(n) \rightarrow BSO(2n) \end{array}$$

où toutes les flèches sont canoniques. Sous les hypothèses faites plus haut, l'application f se relève donc dans l'espace $B(n,k)$ et l'on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \xrightarrow{\quad} \\
 & \nearrow & B(n,k) \rightarrow BSO(k) \\
 & f & \downarrow \quad \downarrow \\
 X & & BU(n) \rightarrow BSO(2n)
 \end{array}$$

Dans une théorie cohomologique quelconque, ce diagramme induit encore un diagramme commutatif, et si les images des générateurs de $BU(n)$ satisfont des relations particulières dans $B(n,k)$, ces relations sont encore valables dans X et fournissent des obstructions éventuelles au relèvement de l'application classifiante f . Il est donc naturel dans ce contexte d'étudier les espaces $B(n,k)$ dans certaines théories cohomologiques. Ainsi dans ce travail nous donnerons une description explicite des anneaux $H^*(B(n,k); \mathbb{Z})$ et $KU(B(n,k))$ (chapitres 1 et 2 respectivement) sous forme de deux théorèmes analogues (Théorèmes 1.1 et 2.1), dont nous citons ici les énoncés pour $k = 2j$.

Pour tout $n > 1$, et pour tout $1 < j < n-1$, la cohomologie entière de l'espace $B(n, 2j)$ est sans torsion et on a l'isomorphisme de groupes abéliens:

$$H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} [c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1})$$

De plus, on a les relations $c_s = 2b_s$ pour tout $j+1 \leq s \leq n-1$

Pour tout $n > 1$, et pour tout $1 < j < n-1$, la K -théorie complexe de l'espace $B(n, 2j)$ est sans torsion, et on a l'isomorphisme de groupes abéliens:

$$KU(B(n, 2j)) \cong \mathbb{Z} [[\gamma_1, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\alpha_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

De plus, on a les relations

$$\sum_{r=s}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r = 2^{n-s} \beta_s \quad \text{pour tout } j+1 \leq s \leq n-1 \quad (1)$$

Ici les éléments c_s désignent les images des classes de Chern universelles, et les éléments γ_s sont les images des classes caractéristiques universelles mentionnées plus haut. Les éléments a_j, b_s, α_j et β_s sont des générateurs que nous définirons par la suite. Signalons encore que la notation $\Delta(x_1, \dots, x_n)$, empruntée à [7], désigne le groupe abélien libre de type fini, engendré par les produits $x_{s_1} \dots x_{s_r}$ avec $s_1 < s_2 < \dots < s_r$.

En cohomologie entière la démonstration se fait par une double induction sur k et n , en utilisant la suite de Gysin de la fibration en sphère:

$$S^{k-1} \rightarrow B(n, k-1) \rightarrow B(n, k)$$

Le résultat obtenu en KU-théorie découle, d'une part des connaissances acquises en cohomologie entière, et d'autre part de la généralisation des techniques de [5] à des CW-complexes infinis. On observera que les générateurs α_j et β_s en KU-théorie peuvent être définis de deux manières différentes: tout d'abord en utilisant les isomorphismes de Thom et de Bott (2.2), puis à l'aide des représentations spinorielles Δ_{2j}^+ et Δ_{2j}^- (2.5).

Le critère énoncé plus haut est un corollaire immédiat du théorème 2. Plus précisément la relation (1) correspond à l'obstruction cherchée au relèvement de l'application classifiante f . Ce résultat figure dans le chapitre 3 que nous complétons avec des applications au problème des immersions des espaces $\mathbb{C}P^n$ et $L^n(2^m)$.

Notons ici que lorsque $n = \infty$, les espaces $B(n, k)$ ont déjà fait l'objet d'études. Ainsi dans [18], Stong a montré que la cohomologie entière de $B(\infty, k)$ est sans torsion, et Baker a déterminé dans [6] l'anneau $H^*(B(\infty, k); \mathbb{Z})$.

J'aimerais exprimer ici toute ma reconnaissance à Monsieur U. Suter, directeur de thèse, dont les conseils et encouragements n'ont jamais fait défaut tout au long de ce travail, et lui dire tout le plaisir que j'ai éprouvé à travailler avec lui.

Ma gratitude s'adresse également à Messieurs F. Sigrist et B. Steer qui ont bien voulu être membres du jury et me faire part de leurs précieuses remarques.

J'aimerais encore remercier tout particulièrement Monsieur D. Linares pour les conversations stimulantes que nous avons échangées au cours de l'élaboration de ce travail.

Je tiens aussi à remercier ici Messieurs J. Rattcliff et O. Besson qui ont conçu le programme me permettant de rédiger ce travail sous sa forme actuelle.

Enfin ma reconnaissance va à l'Université de Neuchâtel et au Fonds National de la Recherche Scientifique dont le soutien financier m'a permis de terminer cette recherche.

1. COHOMOLOGIE ENTIERE DE B(n,k)

1.1. Définitions et rappels

1.1.1. Soit $B(n,k)$ l'espace pull-back du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \text{BSO}(k) \\ & & \downarrow \\ \text{BU}(n) & \rightarrow & \text{BSO}(2n) \end{array}$$

où $\text{BU}(n)$ et $\text{BSO}(l)$ désignent les espaces classifiants des groupes de Lie $U(n)$ et $\text{SO}(l)$ et les flèches sont induites par les inclusions de groupes canoniques. De manière analogue, soit $\text{BS}(n,k)$ l'espace pull-back du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \text{BSO}(k) \\ & & \downarrow \\ \text{BSU}(n) & \rightarrow & \text{BSO}(2n) \end{array}$$

où $\text{BSU}(n)$ désigne l'espace classifiant du groupe de Lie $\text{SU}(n)$.

Dans ce chapitre nous allons calculer la cohomologie entière de ces deux espaces. Signalons toutefois que la cohomologie de $\text{BS}(n,k)$ se déduit sans autre de la cohomologie de $B(n,k)$.

Remarque: L'espace $B(n,k)$ peut être également vu comme le pull-back du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & BSO(k) \\ & & \downarrow \\ B(n,k+1) & \rightarrow & BSO(k+1) \end{array}$$

ce qui permet une définition inductive des $B(n,k)$.

1.1.2. Nous allons rappeler ici quelques faits concernant la cohomologie entière des espaces classifiants $BU(n)$ et $BSO(n)$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [7] ou [14].

L'anneau $H^*(BU(n); \mathbb{Z})$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ où c_r est la r -ième classe de Chern universelle. L'application g_r induite par l'inclusion des groupes canonique $U(r) \subset U(n)$ est un isomorphisme en cohomologie pour les degrés $\leq 2r$.

Dans $H^{2r}(BSO(2r); \mathbb{Z})$, il existe un élément libre noté e_r dont la réduction modulo 2 n'est autre que la classe de Stiefel-Whitney mod 2, w_{2r} . On appelle e_r la classe d'Euler-Poincaré universelle. Relevons que l'homomorphisme induit par l'application canonique $S^{2r} \rightarrow BSO(2r)$, envoie e_r sur 2 dans $H^{2r}(S^{2r}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Considérons $r_j: BU(j) \rightarrow BSO(2j)$ l'application induite par l'inclusion de groupes canonique $U(j) \subset SO(2j)$.

En cohomologie entière cette application envoie e_j sur la classe de Chern universelle c_j .

Soit $s: BS(2j) \rightarrow BU(2j)$ l'application induite par l'inclusion canonique $SO(2j) \subset U(2j)$. En cohomologie entière, on appelle r -ième classe de Pontrjagin universelle l'élément

$$p_r = (-1)^r s^*(c_{2r}) \in H^{4r}(BS(2j); \mathbb{Z})$$

Par ailleurs, on a les relations:

$$e_j^2 = p_j$$

$$r_n^*(p_r) = c_r^2 + (-1)^r 2 \sum_{k=r+1}^{\min(n, 2r)} (-1)^k c_k c_{2r-k}, \quad r = 1, \dots, j$$

1.1.3. Dans ce qui suit nous rappellerons quelques notions rattachées à la suite spectrale de Serre ainsi que quelques résultats provenant d'applications directes de cette suite spectrale.

Soit un espace fibré

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\quad} & X \\ & & \downarrow \tau \\ & & B \end{array}$$

où B est un CW-complexe connexe.

Soit $B^0 = * \subset B^1 \subset \dots \subset B^p \subset \dots \subset B$ la filtration par les p -squelettes B^p de B .

Les espaces $X_p = \tau^{-1}(B^p)$ ($p \geq 0$) fournissent une filtration $X_0 = F \subset X_1 \subset \dots \subset X_p \subset \dots \subset X$ de l'espace total X .

Supposons encore B 1-connexe, F connexe et soit R un anneau principal. Il existe alors une suite spectrale de R -algèbres bigraduées telle que

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; R)) \text{ et } E_\infty^{p,q} = G^p(H^{p+q}(X; R))$$

où $G^p(H^{p+q}(X; R))$ est le p -ième terme de l'anneau gradué associé à la filtration suivante de $H^{p+q}(X; R)$:

$$H^{p+q}(X; R) = \ker j_{-1}^\bullet \supset \ker j_0^\bullet \supset \dots \supset \ker j_p^\bullet \supset \dots \supset 0$$

On note ici j_p l'inclusion $X_p \subset X$.

Cette suite spectrale est appelée suite spectrale de Leray-Serre de la fibration $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} B$ en cohomologie.

Remarquons que tous les termes non-nuls de la suite spectrale de Serre se trouvent dans le premier quadrant.

On obtient ainsi, d'une part une suite d'injections

$$E_\infty^{0,q} \subset \dots \subset E_3^{0,q} \subset E_2^{0,q} = H^q(F; R)$$

où on peut identifier $E_\infty^{0,q}$ à $i^*(H^q(X; R))$ dans $H^q(F; R)$, et d'autre part, une suite de surjections

$$H^p(B; R) = E_2^{p,0} \rightarrow E_3^{p,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_\infty^{p,0}$$

où on peut identifier $E_\infty^{p,0}$ à $\tau^*(H^p(B; R))$ dans $H^p(X; R)$.

Notons encore que la différentielle $d_{r+1}: E_{r+1}^{0,r} \rightarrow E_{r+1}^{r+1,0}$ s'appelle la transgression, les éléments de $E_{r+1}^{0,r} \subset E_2^{0,r}$ étant appelés transgressifs.

Lorsque $E_{r+1}^{0,r} = E_2^{0,r}$, c'est le cas en particulier si la suite spectrale est triviale, la transgression donne lieu à une application $\tau: H^r(F; R) \rightarrow H^{r+1}(B; R)$.

Nous allons énoncer ici deux applications directes de la suite spectrale de Serre que l'on peut trouver dans ([16], p.468) ou dans ([19], p.360).

1.1.3.1. Supposons en plus des hypothèses générales formulées plus haut sur la fibration $F \xrightarrow{1} X \xrightarrow{r} B$ que B soit $(p-1)$ -connexe et F soit $(q-1)$ -connexe ($p \geq 2$, $q \geq 1$).

Nous obtenons alors une suite exacte longue en cohomologie

$$0 \rightarrow H^1(B;R) \rightarrow H^1(E;R) \rightarrow H^1(F;R) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^{p+q-2}(F;R) \xrightarrow{r} H^{p+q-1}(B;R) \xrightarrow{r^*} H^{p+q-1}(E;R) \xrightarrow{1^*} H^{p+q-1}(F;R)$$

1.1.3.2. Considérons la fibration en sphère $S^k \rightarrow E \xrightarrow{r} B$.

La suite spectrale de Serre de cette fibration donne lieu à une suite exacte de $H^*(B;R)$ -modules

$$\rightarrow H^r(E;R) \xrightarrow{\phi} H^{r-k}(B;R) \xrightarrow{v_e = d_{k+1}} H^{r+1}(B;R) \xrightarrow{r^*} H^{r+1}(E;R) \rightarrow \dots$$

où l'élément e , qui désigne la classe d'Euler de la fibration, est l'image par la transgression d_{k+1} d'un générateur approprié de $H^k(S^k;R) = R$.

Précisons que cette suite exacte, appelée suite de Gysin peut s'obtenir sans faire appel à la suite spectrale de Leray-Serre (voir pour cela [14], p.143).

1.1.3.3. Le résultat suivant est une application immédiate de la suite de Gysin.

PROPOSITION: Soit $S^k \rightarrow E \xrightarrow{r} B$ une fibration en sphère, avec B connexe, dont la classe d'Euler e est nulle et soit $a \in H^k(E)$, un élément qui a pour image le générateur 1 de $H^0(B) = \mathbb{Z}$ sous l'application ϕ de la suite de Gysin. Alors, $H^*(E)$ est un $H^*(B)$ -module libre à 2 générateurs 1 et a .

$$H^*(E) \cong H^*(B) \oplus a \cdot H^*(B)$$

1.2. Structure additive de $H^*(B(n,k);Z)$

1.2.1. Préliminaires

Considérons le diagramme commutatif de fibrations suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 V_{2n,2n-2j} & = & V_{2n,2n-2j} \\
 \downarrow & & \downarrow j \\
 B(n,2j) & \xrightarrow{f_{2j}} & BSO(2j) \\
 \downarrow p & & \downarrow \\
 BU(n) & \xrightarrow{r_n} & BSO(2n)
 \end{array}$$

où $V_{2n,2n-2j}$ désigne la variété de Stiefel $SO(2n)/SO(2j)$.

Soit u_j le générateur de $H^{2j}(V_{2n,2n-2j};Z) = Z$ caractérisé par $j^*(e_j) = -2u_j$, où e_j est la classe d'Euler universelle (voir 1.1.2) et soit $h: BU(j) \rightarrow B(n,2j)$ l'application déterminée par les projections canoniques

$$g_j: BU(j) \rightarrow BU(n) \text{ et } r_j: BU(j) \rightarrow BSO(2j).$$

Lemme 1.1. Le groupe abélien $H^{2j}(B(n,2j);Z)$ est libre et contient un générateur a_j caractérisé par:

$$f_{2j}^*(e_j) = p^*(c_j) - 2a_j$$

De plus on a $i^*(a_j) = u_j$ et $h^*(a_j) = 0$

Preuve Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H^{2j}(BSO(2j);Z) & & \\
 & & & & \swarrow f_{2j}^* & \searrow j^* & \\
 0 \rightarrow & H^{2j}(BU(n);Z) & \xrightarrow{p^*} & H^{2j}(B(n,2j);Z) & \xrightarrow{i^*} & H^{2j}(V_{2n,2n-2j};Z) & \rightarrow 0 \\
 & \searrow g_j^* & & \swarrow h^* & & & \\
 & & & H^{2j}(BU(j);Z) & & &
 \end{array}$$

D'après 1.1.3.1, la suite horizontale est exacte puisque

$V_{2n, 2n-2j}$ est $(2j-1)$ -connexe et $BU(n)$ est 1-connexe et n'a pas de cohomologie en degrés impairs.

Comme nous l'avons dit sous 1.1.2, g_j° est un isomorphisme.

Il existe donc un unique élément a_j dans $H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ tel que

$$i^\circ(a_j) = u_j \text{ et } h^\circ(a_j) = 0$$

La suite exacte ci-dessus est scindée, elle nous fournit ainsi une décomposition en somme directe

$$H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \cong \text{Imp}^\circ \oplus \mathbb{Z} a_j \cong H^{2j}(BU(n); \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} a_j$$

Rappelons encore que $h^\circ \circ f_{2j}^\circ = r_j^\circ$ envoie e_j sur c_j (voir 1.1.2) et par conséquent $f_{2j}^\circ(e_j) = p^\circ(c_j) + m a_j$.

Comme $i^\circ(f_{2j}^\circ(e_j)) = j^\circ(e_j) = -2u_j$ on en déduit que $m = -2$ ce qui achève la démonstration du lemme.

1.2.2. Résultat principal

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 & \downarrow & \downarrow \\
 B(n, k) & \xrightarrow{f_k} & BSO(k) \\
 p_k \downarrow & & \downarrow \\
 B(n, k+1) & \xrightarrow{f_{k+1}} & BSO(k+1) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 BU(n-1) = B(n, 2n-1) & \xrightarrow{f_{2n-1}} & BSO(2n-1) \\
 p_{2n-1} \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n) = B(n, 2n) & \xrightarrow{f_n} & BSO(2n)
 \end{array}$$

Nous avons remarqué plus haut que tous les carrés composant ce diagramme étaient commutatifs avec la propriété de pull-back. En fait chacun de ces carrés décrit un morphisme de fibrations:

$$\begin{array}{ccc}
 S^k & = & S^k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(n,k) & \xrightarrow{f_k} & BSO(k) \\
 p_k \downarrow & & \downarrow \\
 B(n,k+1) & \xrightarrow{f_{k+1}} & BSO(k+1)
 \end{array}$$

Définissons encore quelques éléments de $H^*(B(n,k); \mathbb{Z})$. Tout d'abord posons $b_j = p_{2j-1}^*(a_j)$ où $a_j \in H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ est l'élément libre défini dans le lemme précédent. On notera encore b_j l'image par $p_k^* \circ p_{k+1}^* \circ \dots \circ p_{2j-1}^*$, de a_j , c'est-à-dire

$$b_j = p_k^* \circ p_{k+1}^* \circ \dots \circ p_{2j-1}^*(a_j) \in H^{2j}(B(n,k); \mathbb{Z}), \quad k \leq 2j-1.$$

Pour $k \leq 2n-1$ et $1 \leq r \leq n-1$, l'image de la r -ième classe de Chern c_r dans $H^{2r}(B(n,k); \mathbb{Z})$, sous l'application $p_k^* \circ \dots \circ p_{2r-1}^*$, sera encore notée c_r .

THEOREME 1.1. Pour tout n , et pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$, la cohomologie entière de $B(n,k)$ est sans torsion, et on a les isomorphismes de groupes abéliens:

$$H^*(B(n, 2j+1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \quad (*)$$

$$H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \quad (*)$$

De plus on a les relations $c_r = 2b_r$ pour $r = j+1, \dots, n-1$
 On observera en particulier que la cohomologie des espaces $B(n, k)$ est nulle dans les degrés impairs.

(*) On écrit $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_r)$ pour le groupe abélien libre engendré par les éléments:

$$x_{k_1} \cdot x_{k_2} \dots x_{k_r} \text{ avec } k_1 < k_2 < \dots < k_r$$

Preuve La démonstration se fait par induction descendante sur k , en remarquant d'abord que la situation est triviale pour $k = 2n-1$, puisque $B(n, 2n-1) = BU(n-1)$.

Supposons le résultat vérifié pour $r \leq k \leq 2n-1$ et considérons la suite de Gysin de la fibration en sphère:

$$S^{r-1} \xrightarrow{!} B(n, r-1) \xrightarrow{P_{r-1}} B(n, r) \quad (1)$$

Deux situations peuvent se présenter

1) r est impair

Dans ce cas la classe d'Euler de la fibration en sphère (1) est nulle et l'homomorphisme

$$\phi: H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(B(n, 2j+1); \mathbb{Z})$$

est surjectif. Rappelons également que

$$H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \cong \text{imp}^0 \oplus \mathbb{Z} a_j$$

(voir démonstration du lemme 1.1) et signalons que

$$\text{imp}^0 \subset \text{imp}_{2j}^0 = \ker \phi$$

Il est alors évident que l'élément a_j est envoyé par ϕ sur un générateur de $H^0(B(n, 2j+1); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et que, si on se

réfère à 1.1.3.3, on peut décrire $H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ comme le $H^*(B(n, 2j+1); \mathbb{Z})$ -module

$$H^*(B(n, 2j+1); \mathbb{Z}) \oplus a_j \cdot H^*(B(n, 2j+1); \mathbb{Z})$$

d'où l'isomorphisme cherché.

2) n est pair

Considérons le morphisme de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} \psi_n: \mathbb{Z} [c_1, \dots, c_{j-1}, c_j - 2a_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) & \rightarrow & H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \\ x \otimes y & \rightarrow & x \cdot y \end{array}$$

Nous montrerons un peu plus loin, que ψ_n est un isomorphisme.

Par le lemme 1.1, la classe d'Euler de la fibration en sphère (1) est égale à $c_j - 2a_j$ et, avec l'identification de $H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ faite ci-dessus, on vérifie facilement que la multiplication par la classe d'Euler est injective. Par conséquent $\psi = 0$ et on obtient l'isomorphisme de groupes abéliens

$$H^*(B(n, 2j-1); \mathbb{Z}) \cong H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}) / (c_j - 2a_j)$$

Notre identification de $H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ permet ensuite de conclure à l'isomorphisme cherché.

Enfin, les relations $c_r = 2b_r$ sont satisfaites pour $j+1 \leq r \leq n-1$ par hypothèse d'induction et $c_j = 2b_j$ puisque $p_{2j-1}^*(c_j - 2a_j) = 0$.

Pour vérifier que ψ_n est un isomorphisme, on procède par induction sur n , en commençant par $n = j + 1$.

Dans ce premier cas, il suffit d'observer qu'on a la relation $a_j^2 = a_j c_j$ dans $H^*(B(j+1, 2j); \mathbb{Z})$ pour vérifier la

surjectivité de ψ_{j+1} . L'injectivité découle alors de l'existence d'une bijection entre les bases de ces deux Z -modules.

Supposons maintenant le résultat vérifié pour $n-1$, et considérons d'une part, l'application

$$h: B(n-1, 2j) \rightarrow B(n, 2j)$$

que l'on obtient par propriété de l'espace pull-back $B(n, 2j)$, et d'autre part, les Z -modules

$$A = Z[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-2})$$

$$B = Z[c_1, \dots, c_j - 2a_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-2})$$

Par définition de h^* , on a la courte suite exacte

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \cap & \searrow & \\ \ker h^* & = H^*(B(n, 2j); Z) & \xrightarrow{h^*} H^*(B(n-1, 2j); Z) \end{array}$$

où $\ker h^* = A \vee b_{n-1}$. On a également un isomorphisme de Z -modules

$$H^*(B(n, 2j); Z) \cong A \oplus A \vee b_{n-1}$$

Désignons par $(x_q)_{q \geq 1}$ la base canonique du Z -module A , $(x_q \vee b_{n-1})_{q \geq 1}$ est alors une base de $A \vee b_{n-1}$, et considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \psi_n \downarrow & & \searrow \psi_{n-1} \\ H^*(B(n, 2j); Z) & \xrightarrow{h^*} & H^*(B(n-1, 2j); Z) \end{array}$$

(La commutativité découle du fait que h^* est un morphisme d'anneaux)

Par hypothèse d'induction, ψ_{n-1} est un isomorphisme, il est alors évident que $\psi_n|B$ est injectif et que B possède une base $(y_q)_{q \geq 1}$ telle que

$$\psi_n(y_q) = x_q + z_q \vee b_{n-1} \text{ pour } q \geq 1, \text{ avec } z_q \in A$$

On remarquera encore que b_{n-1}^2 est nul dans $H^*(B(n,2j);Z)$, ce qui a pour conséquence que $\psi|B \vee b_{n-1}$ est injectif et que $\psi_n(B \vee b_{n-1}) = A \vee b_{n-1}$.

On peut alors conclure:

$$\psi_n: B \oplus B \vee b_{n-1} \rightarrow H^*(B(n,2j);Z)$$

est un isomorphisme de Z -modules.

COROLLAIRE 1.1. La cohomologie entière du groupe quotient $SO(2n)/U(n)$ est décrite par l'isomorphisme de Z -modules libres:

$$H^*(SO(2n)/U(n);Z) \cong \Delta(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

où les b_i , $i=1,2,\dots,n-1$, sont les éléments définis plus haut.

PREUVE Rappelons que $SO(1)$ est le groupe trivial $\{1\}$ et que par conséquent, $B(n,1)$ s'identifie au groupe quotient $SO(2n)/U(n)$.

Ce résultat figure également dans [13].

1.3. Structure multiplicative de $H^*(B(n,k);Z)$ et carrés de Steenrod

Pour décrire $H^*(B(n,2j+1);Z)$ et $H^*(B(n,2j);Z)$ comme anneaux, nous devons connaître les produits des éléments $c_1, \dots, c_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}$ et a_j . Remarquons préalablement que les éléments c_1, \dots, c_j engendrent un sous-anneau de polynômes, et que par définition les produits:

$$b_{r_1} \cdot b_{r_2} \dots b_{r_s} \text{ et } a_j \cdot b_{r_1} \cdot b_{r_2} \dots b_{r_s}, \quad j+1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq n-1$$

forment une base de $\Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1})$ comme groupe abélien, alors que les produits:

$$b_{r_1} \cdot b_{r_2} \dots b_{r_s}, \quad j+1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_s \leq n-1$$

forment une base de $\Delta(b_{j+1}, \dots, b_{n-1})$ comme groupe abélien.

Les seules inconnues de la structure multiplicative sont donc liées aux carrés des éléments a_j et b_r . ($j+1 \leq r \leq n-1$)

Or, par construction, b_r est l'image de a_r par un homomorphisme d'anneaux, il suffira alors de connaître la description des a_j^2 dans le système de générateurs choisi de $H^*(B(n,2j);Z)$ pour contrôler la structure multiplicative des anneaux $H^*(B(n,k);Z)$.

Par ailleurs on peut ramener ce problème au calcul du carré de la classe d'Euler, $e = c_j - 2a_j$, de la fibration en sphère (1) lorsque $n = 2j$. En effet, le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 B(n, 2j) & \xrightarrow{p_1} & BSO(2j) \\
 p_1 & & 1 \\
 BU(n) & \xrightarrow{r_2} & BSO(2n)
 \end{array}$$

ainsi que les remarques faites sous 1.1.2 fournissent l'identité.

$$e^2 = c_j^2 + (-1)^j 4 \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n-1)} (-1)^r b_r c_{2j-r}$$

Or $e^2 = c_j^2 - 4c_j a_j + 4a_j^2$, ce qui permet d'exprimer a_j^2 par:

$$a_j^2 = a_j c_j + (-1)^j \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n-1)} (-1)^r b_r c_{2j-r} \quad (2)$$

En utilisant la relation (2) et en imitant la démarche de Wu Wen-Tsun dans [21] nous pouvons décrire les opérations de Steenrod pour la réduction mod 2 des éléments a_j de $H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z}/2)$.

PROPOSITION 1.1. Pour tout $n > 1$, tout $1 \leq j \leq n-1$ et tout $0 \leq k \leq j$, on a la relation

$$Sq^{2k}(a_j) = \sum_{r=\max(0, k+j+1-n)}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{k+j-r} c_r + a_j c_k \quad (3)$$

dans $H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}/2)$

Preuve: On procède par induction sur n , en constatant que la situation est triviale pour $n=1$. Supposons le résultat vrai pour $n > 1$ quelconque, on remarquera immédiatement que lorsque $k+j < n$, $Sq^{2k}(a_j)$ satisfait la relation (3) puisque

$$H^q(B(n+1, 2j); \mathbb{Z}) = H^q(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \text{ pour } q < 2n.$$

Supposons donc $k+j > n$, et considérons le diagramme suivant, où toutes les flèches sont obtenues de manière canonique:

$$\begin{array}{ccccc}
 B(n, 2j) \times \mathbb{C} P^{\infty} & & \rightarrow & & BSO(2j) \times \mathbb{C} P^{\infty} \\
 & & & & \downarrow \\
 \downarrow & & B(n+1, 2j+2) & \rightarrow & BSO(2j+2) & (4) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n) \times \mathbb{C} P^{\infty} & \rightarrow & BU(n+1) & \rightarrow & BSO(2n+2)
 \end{array}$$

On observera en particulier que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 B(n, 2j) \times \mathbb{C} P^{\infty} & \rightarrow & BSO(2j+2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n+1) & \rightarrow & BSO(2n+2)
 \end{array}$$

est commutatif à homotopie près, et quitte à remplacer la flèche

$$B(n, 2j) \times \mathbb{C} P^{\infty} \rightarrow BSO(2j+2)$$

par une application homotope, on peut même supposer que ce carré est commutatif puisque l'application

$$BSO(2j+2) \rightarrow BSO(2n+2)$$

est une fibration. Ainsi il existe une application

$$f: B(n, 2j) \times \mathbb{C} P^{\infty} \rightarrow B(n+1, 2j+2)$$

qui fait commuter le diagramme (4) à homotopie près.

Observons qu'en cohomologie entière f envoie les éléments

$c_1, c_2, \dots, c_j, c_{j+1}, a_{j+1}, b_{j+2}, \dots, b_n$ de $H^*(B(n+1, 2j+2); \mathbb{Z})$

respectivement sur les éléments

$c_1 + z, c_2 + c_1 z, \dots, c_j + c_{j-1} z, 2b_{j+1} + c_j z, b_{j+1} + a_j z, b_{j+2} + b_{j+1} z, \dots,$

$b_{n-1} + b_{n-2} z, b_{n-1} z$

de $H^*(B(n, 2j) \times \mathbb{C} P^{\infty}; \mathbb{Z}) \cong H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}) \otimes H^*(\mathbb{C} P^{\infty}; \mathbb{Z})$.

où z est le générateur canonique de $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$.

Considérons d'autre part le sous-groupe

$$A = \mathbb{Z}/2[c_1, \dots, c_j] \oplus \mathbb{Z}/2 a_{j+1} \oplus \mathbb{Z}/2 b_{j+2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/2 b_n$$

de $H^*(B(n+1, 2j+2); \mathbb{Z}/2)$ et notons que la restriction de f^* à A en cohomologie mod 2 est injective.

Remarquons encore que pour $j > 1$ et $k < j$, on a par hypothèse d'induction

$$Sq^{2k}(a_j) = \sum_{r=j+k+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + a_j c_k + b_n p(c_1, \dots, c_{j+k-n})$$

où $p(c_1, \dots, c_{j+k-n}) \in \mathbb{Z}/2[c_1, \dots, c_{j-1}]$.

Par conséquent $Sq^{2k}(a_j)$ est un élément de $A \subset H^*(B(n+1, 2j); \mathbb{Z}/2)$, et on peut calculer son image par f^*

$$f^*(Sq^{2k}(a_j)) = Sq^{2k}(f^*(a_j))$$

$$= Sq^{2k}(b_j + a_{j-1}z) = Sq^{2k}(b_j) + Sq^{2k}(a_{j-1})z + Sq^{2(k-1)}(a_{j-1})z^2$$

$$= \sum_{r=j+k+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + \sum_{r=j+k-n}^{k-1} \binom{j-1-r}{k-r} b_{j-1+k-r} c_r z + a_{j-1} c_k z +$$

$$\sum_{r=\max(0, j+k-1-n)}^{k-2} \binom{j-1-r}{k-1-r} b_{j+k-2-r} c_r z^2 + a_{j-1} c_{k-1} z^2$$

$$= \sum_{r=j+k+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + \sum_{r=j+k-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j-1+k-r} c_r z + \sum_{r=j+k-n}^{k-1} \binom{j-r-1}{k-r-1} b_{j-1+k-r} c_r z$$

$$+ a_{j-1} c_k z + \sum_{r=\max(0, j+k-1-n)}^{k-2} \binom{j-1-r}{k-1-r} b_{j+k-2-r} c_r z^2 + a_{j-1} c_{k-1} z^2 \pmod{2}$$

$$= \sum_{r=j+k+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + \sum_{r=j+k-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j-1+k-r} c_r z + \sum_{r=j+k+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_{r-1} z$$

$$+ a_{j-1} c_k z + \sum_{r=\max(1, j+k-n)}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-1-r} c_{r-1} z^2 + a_{j-1} c_{k-1} z^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=j+k+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} (b_{j+k-r} c_r + b_{j-1+k-r} c_r z + b_{j+k-r} c_{r-1} z + b_{j+k-1-r} c_{r-1} z^2) + b_j c_k \\
&\quad + \binom{n-k}{n-j} b_{n-1} c_{j+k-n} z + b_j c_{k-1} z + a_{j-1} c_k z + a_{j-1} c_{k-1} z^2 + \binom{n-k}{n-j} b_{n-1} c_{j+k-1-n} z^2 \\
&= \sum_{r=j+k+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} (b_{j+k-r} + b_{j-1+k-r} z) (c_r + c_{r-1} z) + (b_j + a_{j-1} z) (c_k + c_{k-1} z) \\
&\quad + \binom{n-k}{n-j} b_{n-1} z (c_{k+j-n} + c_{k+j-1-n} z)
\end{aligned}$$

si $k+j > n$

On obtient alors lorsque $k+j > n$

$$\begin{aligned}
f^*(Sq^{2k}(a_j)) &= f^* \left(\sum_{r=j+k+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + a_j c_k + \binom{n-k}{n-j} b_n c_{k+j-n} \right) \\
&= f^* \left(\sum_{r=j+k-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + a_j c_k \right)
\end{aligned}$$

Remarquons que le calcul reste valable pour $k+j = n$. On peut alors conclure par injectivité de f^* sur A . Il reste deux situations à examiner, d'une part lorsque $j=1$, les seules opérations de Steenrod non nulles

$$Sq^0(a_1) = a_1 \text{ et } Sq^2(a_1) = a_1^2 = a_1 c_1 + b_2$$

satisfont la relation indiquée, et d'autre part lorsque $k=j$, on a par définition des opérations de Steenrod et d'après (2)

$$Sq^{2j}(a_j) = a_j^2 = a_j c_j + \sum_{r=2j-n}^{j-1} b_{2j-r} c_r = \sum_{r=2j-n}^{j-1} \binom{j-r}{j-r} b_{2j-r} c_r + a_j c_j$$

La relation (3) est alors également satisfaite.

1.4. Cohomologie entière de $BS(n,k)$

Rappelons que $BS(n,k)$ est l'espace pull-back du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & B(n,k) \\ & & \downarrow p \\ BSU(n) & \rightarrow & BU(n) \end{array}$$

ainsi la fibration en cercle

$$S^1 \rightarrow BSU(n) \rightarrow BU(n)$$

induit une fibration en cercle sur $B(n,k)$:

$$S^1 \rightarrow BS(n,k) \xrightarrow{q} B(n,k)$$

Considérons la suite exacte de Gysin associée à cette dernière fibration:

$$\begin{array}{ccccccc} -H^{r-2}(B(n,k)) & \xrightarrow{h} & H^r(B(n,k)) & \xrightarrow{q^*} & H^r(BS(n,k)) & \rightarrow & H^{r+1}(B(n,k)) \rightarrow \\ & & & & \rightarrow & H^{r-1}(B(n,k)) & \xrightarrow{h} & H^{r+1}(B(n,k)) \rightarrow \end{array}$$

où h désigne la multiplication par $p^*(c_1)$ élément que nous avons noté par abus c_1 dans $H^*(B(n,k))$. Avec les résultats énoncés sous 1.2.2, on peut affirmer que h est injective et par conséquent que q^* est surjective pour $k \geq 2$. Ainsi on obtient les isomorphismes de groupes abéliens:

$$H^*(BS(n,2j); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_2, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \quad \text{pour } j \geq 2$$

$$H^*(BS(n,2j+1); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_2, \dots, c_j] \otimes \Delta(b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \quad \text{pour } j \geq 1$$

$$H^*(BS(n,2); \mathbb{Z}) \cong \Delta(a_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

Remarque: Lorsque $k=1$, la situation est beaucoup plus complexe puisque l'application

$$h: H^*(B(n,1)) \rightarrow H^*(B(n,1)) \quad x \rightarrow 2b_1x$$

n'est plus injective.

Toutefois si l'on considère les limites inductives

$B(\infty, 1) = \varinjlim B(n,1)$ et $BS(\infty, 1) = \varinjlim BS(n,1)$, la suite de Gysin de la fibration en cercle:

$$S^1 \rightarrow BS(\infty, 1) \xrightarrow{q} B(\infty, 1)$$

fournit les suites exactes courtes pour $r \geq 2$

$$0 \rightarrow H^{r-2}(B(\infty, 1)) \xrightarrow{2b_1} H^r(B(\infty, 1)) \xrightarrow{q^*} H^r(BS(\infty, 1)) \rightarrow 0$$

On observera en effet que $B(\infty, 1)$ s'identifie au quotient SO/U où $SO = \varinjlim SO(2n)$ et $U = \varinjlim U(n)$, et on rappellera que

$$H^*(SO/U; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} [b_1, b_3, \dots, b_{2r+1}, \dots], \quad (\text{voir [10], p.28}).$$

On obtient ainsi l'isomorphisme

$$H^*(B(\infty, 1); \mathbb{Z}) = H^*(SO/SU; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} [b_1, b_3, \dots, b_{2r+1}, \dots] / (2b_1)$$

2. K-THEORIE COMPLEXE DES ESPACES $B(n,k)$

2.1. Préliminaires

Les résultats classiques de KU-théorie qui sont en général formulés pour des CW-complexes finis, peuvent s'appliquer à certains CW-complexes infinis, et en particulier aux espaces $B(n,k)$ qui nous occupent ici.

Soit X un CW-complexe dont tous les n -squelettes X^n sont finis, et dont la cohomologie entière est sans torsion.

L'anneau $KU^*(X)$ est filtré par les idéaux

$$K_n^*(X) = \ker(KU^*(X) \rightarrow KU^*(X^{n-1})) \quad n \geq 0$$

On pose ici $X^{-1} = \emptyset$.

D'après ([9], p.524) et puisque X est sans torsion, cette filtration est complète (i.e. $\bigcap_{n \geq 0} K_n^*(X) = 0$) et l'homomorphisme canonique

$$KU^*(X) \rightarrow \varprojlim KU^*(X^n)$$

est un isomorphisme.

En particulier dans la suite spectrale de Atiyah-Hirzebruch de X , le terme E_\bullet est l'anneau gradué associé à la filtration par les $K_n^*(X)$. Comme X n'a pas de torsion en cohomologie entière, on a $E_\bullet = E_2$, c'est-à-dire

$$G_n(KU^*(X)) = K_n^*(X) / K_{n+1}^*(X) = H^n(X; \mathbb{Z})$$

Ainsi $KU^*(X)$ est sans torsion comme groupe abélien.

Soit maintenant Y un CW-complexe fini sans torsion, d'après ([5], 2.5 p.19), si a_1, a_2, \dots, a_q est une base homogène du groupe abélien $H^*(Y; \mathbb{Z})$ et si x_1, x_2, \dots, x_q sont des éléments

de $KU^*(Y)$ tels que

$$\text{ch}(x_k) = a_k + \text{termes de degré supérieur}$$

les éléments x_1, x_2, \dots, x_q forment alors une base de $KU^*(Y)$, c'est-à-dire

$$KU^*(Y) = \bigoplus_{k=1}^q \mathbb{Z} x_k$$

On peut étendre ce résultat à des CW-complexes X sans torsion en cohomologie entière, dont tous les squelettes sont finis.

En effet, supposons, en remplaçant éventuellement X par un CW-complexe homotope que

$$H^p(X^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} H^p(X; \mathbb{Z}) & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

On peut alors ordonner la base $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ de $H^*(X; \mathbb{Z})$ comme groupe abélien libre en sorte que pour tout n , les q_n premiers éléments forment une base de $H^*(X^n; \mathbb{Z})$.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ tels que

$$\text{ch}(x_k) = a_k + \text{termes de degré supérieur}$$

Avec ce qui précède on obtient les isomorphismes

$$KU^*(X^n) = \prod_{k=1}^{q_n} \mathbb{Z} x_k$$

Remarquons que les homomorphismes $KU^*(X^n) \rightarrow KU^*(X^{n-1})$ correspondent sous cette identification aux projections canoniques

$$\prod_{k=1}^{q_n} Z_{X_k} \rightarrow \prod_{k=1}^{q_{n+1}} Z_{X_k}$$

et par conséquent

$$KU^*(X) = \varprojlim \prod_{k=1}^{q_n} Z_{X_k} = \prod_{k \geq 1} Z_{X_k}$$

Soit X comme précédemment, et considérons sur X un fibré vectoriel réel orientable ξ de dimension k . Ce fibré vectoriel admet une classe de Thom T en cohomologie entière et on a un isomorphisme

$$H^*(X; Z) \cong \tilde{H}^*(T[\xi]; Z) \quad x \rightarrow T \cup x$$

où $T[\xi]$ désigne le complexe de Thom associé à ξ .

Remarquons que $T[\xi]$ est un CW-complexe dont tous les squelettes sont finis. Plus précisément, son $(n+k)$ -squelette s'identifie au complexe de Thom de $\xi|_{X^n}$. Dans la suite on notera ξ_n le fibré $\xi|_{X^n}$.

Il est d'autre part évident que le complexe de Thom $T[\xi]$ n'a pas de torsion en cohomologie entière et qu'ainsi sa suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch est triviale. On a en particulier un isomorphisme

$$H^k(T[\xi]; Z) \cong K_k^0(T[\xi]) / K_{k+1}^0(T[\xi])$$

Soit U un élément de $KU^0(T[\xi])$ représentant T sous cette identification et considérons l'application

$$KU^*(X) \rightarrow \tilde{K}U^*(T[\xi]) \quad x \rightarrow U \cup x$$

La naturalité de cette application nous permet d'établir le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 KU^*(X) & \rightarrow & \widetilde{KU}^*(T[\xi]) \\
 | & & | \\
 KU^*(X^n) & \rightarrow & \widetilde{KU}^*(T[\xi_n]) \\
 | & & | \\
 KU^*(X^{n-1}) & \rightarrow & \widetilde{KU}^*(T[\xi_{n-1}])
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions des squelettes de X et les flèches horizontales correspondent à la multiplication par U et par ses images U_n, U_{n-1} dans $KU^*(T[\xi_n]), KU^*(T[\xi_{n-1}])$ respectivement.

À homotopie près, on peut supposer comme plus haut que :

$$H^p(X^n; Z) \cong H^p(X; Z) \quad \text{si } p \leq n$$

On vérifie alors facilement que U_n et U_{n-1} sont des classes de Thom de ξ_n et ξ_{n-1} respectivement en KU -théorie.

Le diagramme ci-dessus donne lieu à un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 KU(X) & \rightarrow & \widetilde{KU}(T[\xi]) \\
 | & & | \\
 \varprojlim KU(X^n) & \rightarrow & \varprojlim \widetilde{KU}(T[\xi]^{m_k})
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes d'après ([9], p.524) et l'homomorphisme

$$\varprojlim KU(X^n) \rightarrow \varprojlim \widetilde{KU}(T[\xi]^{m_k})$$

est un isomorphisme puisque les flèches

$$KU(X^n) \rightarrow \widetilde{KU}(T[\xi]^{m_k}) \cong \widetilde{KU}(T[\xi_n]) \quad x \rightarrow U_n \vee x$$

sont des isomorphismes pour tout n .

On peut affirmer alors que l'application

$$KU(X) = \widetilde{KU}(T[\xi]) \quad x = U \circ x$$

est un isomorphisme et que le fibré ξ possède une classe de Thom, U .

Les observations faites ici s'appliquent en particulier à l'espace classifiant $BU(n)$. Sa K-théorie complexe peut être décrite par l'isomorphisme

$$KU(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[[\gamma_1, \dots, \gamma_n]]$$

où les γ_r sont les γ -opérations universelles définies par Atiyah, et satisfont les relations

$$ch(\gamma_r) = c_r + \text{termes de degré} > 2r$$

On peut également trouver cette description de $KU(BU(n))$ dans ([11], p.397).

2.2. Description de quelques éléments de $KU(B(n,k))$

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} B(n,k) & \xrightarrow{r_k} & BSO(k) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow l^q \\ BU(n) & \xrightarrow{r_n} & BSO(2n) \end{array} \quad (1)$$

On remarquera d'abord que la restriction de l'application

$$p^1: KU(BU(n)) \rightarrow KU(B(n,k))$$

au sous-groupe abélien libre engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ est injective, puisque p induit une injection en cohomologie entière dans les degrés $< 2n$ et que

$$\text{ch}(r_r) = c_r + \text{termes de degré } > 2r$$

Dans la suite on notera encore r_r l'image de cet élément par l'application p^1 , pour $1 \leq r \leq n-1$.

Soit maintenant ω_r le fibré vectoriel réel universel sur $BSO(r)$, et posons $\rho_k = f_k^*(\omega_k)$. On sait que

$$q^*(\omega_{2n}) = \omega_k \oplus \underline{2n-k}$$

où $\underline{2n-k}$ désigne le fibré vectoriel réel trivial de dimension $2n-k$.

De plus le fibré induit $r_n^*(\omega_{2n})$ s'identifie à σ_n^R , le fibré vectoriel réel sous-jacent au fibré vectoriel complexe universel σ_n sur $BU(n)$.

Par commutativité du diagramme (1), les fibrés

$$f_k^*(\omega_k) \oplus \underline{2n-k} \quad \text{et} \quad p^*(\sigma_n^R)$$

sont isomorphes sur $B(n,k)$, cela signifie en particulier que

ω_k induit sur $B(n,k)$ un fibré vectoriel réel stablement complexe. D'autre part le complexe de Thom $T[p^*(\sigma_n^R)]$ s'identifie ainsi à la $(2n-k)$ -ième suspension du complexe de Thom $T[\rho_k]$.

Avec le théorème 1.1, nous avons vérifié que l'espace $B(n,k)$ est un CW-complexe dont tous les squelettes sont finis, sans torsion en cohomologie entière. Par ailleurs le fibré vectoriel $p^*(\sigma_n^R)$ est orientable, puisqu'il induit par un fibré vectoriel complexe. Sous ces conditions, et avec les observations du paragraphe précédent nous savons qu'il existe un isomorphisme de Thom pour ce fibré:

$$KU(B(n,k)) \cong \widetilde{KU}(T[p^*(\sigma_n^R)])$$

Soit $k = 2j$, en composant cet isomorphisme de Thom avec l'isomorphisme de Bott

$$\theta^{n-j} : \widetilde{KU}(T[\rho_{2j}]) \cong \widetilde{KU}(\Sigma^{2(n-j)} T[\rho_{2j}])$$

on obtient un isomorphisme de Thom

$$KU(B(n,2j)) \rightarrow \widetilde{KU}(T[\rho_{2j}]) \quad (2)$$

pour le fibré ρ_{2j} .

En effet, soit U une classe de Thom du fibré $p^*(\sigma_n^R)$, et soit $U_1 \in \widetilde{KU}(T[\rho_{2j}])$ tel que $\theta^{n-j}(U_1)$ s'identifie à U dans $\widetilde{KU}(\Sigma^{2(n-j)} T[\rho_{2j}])$. L'élément U_1 est alors une classe de Thom en KU -théorie pour le fibré ρ_{2j} .

D'après ([8] p.35) et ([1] p.618), on obtient respectivement les deux descriptions suivantes de l'opération d'Adams ψ^2 de U :

$$\psi^2(U) = U \smile \sum_{r=0}^{n-1} 2^{n-r} \gamma_r = \theta^{n-j} (U_1 \smile \sum_{r=0}^{n-1} 2^{n-r} \gamma_r)$$

$$\psi^2(U) = \psi^2(\theta^{n-j}(U_1)) = \theta^{n-j}(2^{n-j} \psi^2(U_1))$$

On en déduit alors immédiatement la relation:

$$2^{n-j} \psi^2(U_1) = U_1 \smile \sum_{r=0}^{n-1} 2^{n-r} \gamma_r = 2^{n-j} U_1 \smile \sum_{r=0}^{j-1} 2^{j-r} \gamma_r + U_1 \smile \sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r} \gamma_r$$

qui décrit implicitement $\psi^2(U_1)$.

Considérons maintenant l'élément a_j de $KU(B(n,2j))$, correspondant sous l'isomorphisme de Thom (2) à

$$-\lambda^2(U_1) = U_1 \smile \sum_{r=0}^{j-1} 2^{j-r-1} \gamma_r \in \widetilde{KU}(T[\rho_{2j}])$$

où λ^2 désigne la 2-ième puissance extérieure en KU -théorie.

Notons alors ε_j la classe d'Euler associée à U_1 (i.e. $U_1^2 = U_1 \cup \varepsilon_j$), et par analogie avec les notations adoptées au chapitre 1, posons

$$\beta_j = p_{2j-1}^1(\alpha_j)$$

On notera encore β_j l'image de l'élément α_j par les homomorphismes

$$p_k^1 \circ p_{k+1}^1 \circ \dots \circ p_{2j-1}^1$$

pour $k \leq 2j-1$, c'est-à-dire

$$\beta_j = p_k^1 \circ p_{k+1}^1 \circ \dots \circ p_{2j-1}^1(\alpha_j) \in KU(B(n,k)) \text{ pour } 1 \leq k \leq 2j-1$$

En utilisant la définition de α_j ainsi que la relation bien connue

$$\psi^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x)$$

appliquée à la classe de Thom U_1 , on observe que l'élément β_j satisfait la relation suivante dans $KU(B(n,k))$

$$2^{n-j} \beta_j = \sum_{r=j}^{n-1} 2^{n-r-1} r_r \quad (3)$$

On vérifiera par la même occasion, que la classe d'Euler ε_j du fibré ρ_j est décrite par

$$\varepsilon_j = r_j + \beta_{j+1} - 2\alpha_j \quad (4)$$

où β_{j+1} est l'image de $\alpha_{j+1} \in KU(B(n,2j+2))$ par l'application canonique.

2.3. Structure additive de $KU(B(n,k))$

Les espaces $B(n,k)$ sont, comme nous l'avons déjà dit, des CW-complexes dont tous les squelettes sont finis et dont la cohomologie entière est sans torsion. De plus le théorème 1.1 nous fournit explicitement une base homogène de $H^*(B(n,k); \mathbb{Z})$ comme groupe abélien. On pourra décrire la structure additive de $KU(B(n,k))$, si l'on y trouve des éléments associés à cette base par le caractère de Chern, ainsi que nous l'avons vu sous 2.1. Pour cela nous allons donner une description du caractère de Chern des éléments définis sous 2.2.

Appliquons d'abord le caractère de Chern à la relation (3). On constate alors que

$$\text{ch}_q(\beta_r) = 0 \quad \text{pour } 0 < q < 2r-1$$

et que

$$2^{n-r} \text{ch}_{2r}(\beta_r) = 2^{n-r-1} c_r$$

où $\text{ch}_q(\beta_r)$ désigne la composante de $\text{ch}(\beta_r)$ en degré q .

En se référant au théorème 1.1, on peut remplacer c_r par $2b_r$ et diviser par 2^{n-r} dans la seconde identité. Par conséquent

$$\text{ch}(\beta_r) = b_r + \text{termes de degré } > 2r$$

et β_r a filtration exacte $2r$, pour $j+1 < r < n-1$ où $j = [k/2]$.

Soit maintenant ε_j la classe d'Euler du fibré ρ_{2j} en KU-théorie. D'après ([8] p.32), on sait que

$$\text{ch}(\varepsilon_j) = c_j - 2a_j + \text{termes de degré } > 2j$$

où $c_j - 2a_j$ est la classe d'Euler de ρ_{2j} en cohomologie entière (voir 1.2).

En appliquant le caractère de Chern à la relation (4), il apparaît d'autre part que

$$\text{ch}(\varepsilon_j) + 2\text{ch}(a_j) = c_j + \text{termes de degré} > 2j$$

et l'on en déduit l'identité

$$\text{ch}(a_j) = a_j + \text{termes de degré} > 2j$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

THEOREME 2.1. Pour tout $n > 1$ et pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$, la K -théorie complexe des espaces $B(n,k)$ est sans torsion, et on a les isomorphismes de groupes abéliens

$$KU(B(n,2j)) \cong \mathbb{Z} [[\gamma_1, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(a_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

$$KU(B(n,2j+1)) \cong \mathbb{Z} [[\gamma_1, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

De plus, en posant $j = [k/2]$, on a dans $KU(B(n,k))$ les relations

$$2^{n-s} \beta_s = \sum_{r=0}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r \quad \text{pour } s = j+1, \dots, n-1$$

Preuve: Puisque le caractère de Chern est multiplicatif, on a, en tenant compte des observations faites plus haut:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_j^{r_j} \otimes a_j \beta_{j_1} \dots \beta_{j_s}) &= c_1^{r_1} \dots c_j^{r_j} \otimes a_j b_{j_1} \dots b_{j_s} \\ &+ \text{termes de degré supérieur} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{ch}(\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_j^{r_j} \otimes \beta_{j_1} \dots \beta_{j_s}) &= c_1^{r_1} \dots c_j^{r_j} \otimes b_{j_1} \dots b_{j_s} \\ &+ \text{termes de degré supérieur} \end{aligned}$$

où $r_1, \dots, r_j > 0$ et $j+1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq n-1$

Or

$$\left\{ c_1^{r_1} \dots c_j^{r_j} \otimes a_j b_{j_1} \dots b_{j_s}, c_1^{r_1} \dots c_j^{r_j} \otimes b_{j_1} \dots b_{j_s} \mid \right. \\ \left. r_1, \dots, r_j \geq 0 \text{ et } j+1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq n-1 \right\}$$

forme une base homogène de $H^*(B(n,2j); \mathbb{Z})$ comme groupe abélien, ce qui nous permet de conclure dans le cas de $B(n,2j)$. La situation est analogue pour $B(n,2j+1)$.

Dans le cas particulier où $k = 1$, $B(n,1)$ s'identifie au groupe quotient $SO(2n)/U(n)$ et on obtient:

COROLLAIRE 2.1. La K -théorie complexe du groupe quotient $SO(2n)/U(n)$ est décrite par l'isomorphisme de \mathbb{Z} -modules libres:

$$KU(SO(2n)/U(n)) \cong \Delta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$$

où les β_s , $s = 1, 2, \dots, n-1$, sont les éléments définis plus haut.

2.4. K-Théorie complexe des espaces $BS(n,k)$

Rappelons pour commencer que l'application canonique $BSU(n) \rightarrow BU(n)$ induit en KU -théorie un épimorphisme dont le noyau est l'idéal de $\mathbb{Z}[[\gamma_1, \dots, \gamma_n]]$ engendré par l'élément $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$.

En posant

$$\gamma_1 = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$$

et $\gamma_r = \gamma_r$ pour $2 \leq r \leq n$,

on peut décrire $KU(BU(n))$ comme l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}[[\gamma_1, \dots, \gamma_n]]$,

et identifier alors $KU(BSU(n))$ à $Z[[\gamma_2, \dots, \gamma_n]]$.

On peut également envisager une nouvelle description de $KU(B(n,k))$ en effectuant le changement de notations:

$$\gamma_i = \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}$$

$$\gamma_r = \gamma_r \quad 2 \leq r \leq n-1$$

$$\alpha_j = \alpha_j \quad (\text{pour } k = 2j)$$

$$\beta_r = \beta_r \quad j+1 \leq r \leq n-1 \text{ où } j = [k/2]$$

Pour $k \geq 2$, en procédant comme sous 2.2 et 2.3, on obtient les isomorphismes de groupes abéliens

$$KU(B(n, 2j)) \cong Z[[\gamma_2, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\alpha_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

$$KU(B(n, 2j+1)) \cong Z[[\gamma_2, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

De plus les relations

$$2^{n-s} \beta_s = \sum_{r=s}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r \quad \text{pour } j+1 \leq s \leq n-1$$

sont satisfaites dans chacun de ces cas.

On remarquera encore que l'application canonique $BS(n,k) \rightarrow B(n,k)$ induit un morphisme en KU-théorie dont le noyau est l'idéal engendré par γ_j . Nous pouvons formuler alors le résultat suivant analogue au théorème 2.1:

THEOREME 2.2. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $2 \leq k \leq 2n-1$, l'espace $BS(n,k)$ n'a pas de torsion en KU-théorie, et on a les isomorphismes de groupes abéliens:

$$KU(BS(n, 2j)) \cong Z[[\gamma_2, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\alpha_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

$$KU(BS(n, 2j+1)) \cong Z[[\gamma_2, \dots, \gamma_j]] \otimes \Delta(\beta_{j+1}, \dots, \beta_{n-1})$$

De plus on a les relations

$$2^{n-s} \beta_s = \sum_{r=s}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r \quad \text{pour } s = j+1, \dots, n-1$$

2.5. Représentations spinorielles et générateurs de $KU(B(n, 2k))$

L'application canonique $BU(n) \xrightarrow{r_n} BSO(2n)$ factorise par l'espace classifiant du groupe $Spin^\circ(2n)$, et l'application $f_{2k} : B(n, 2k) \rightarrow BSO(2k)$ définie dans le chapitre 1 factorise à homotopie près par l'espace classifiant du groupe $Spin^\circ(2k)$. On obtient ainsi le diagramme commutatif à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc} B(n, 2k) & \xrightarrow{\tilde{r}_{2k}} & BSpin^\circ(2k) \\ | & & | \\ BU(n) & \xrightarrow{\tilde{r}_{2n}} & BSpin^\circ(2n) \end{array}$$

où les flèches verticales sont canoniques.

Rappelons d'autre part que le groupe $Spin^\circ(2m)$ est isomorphe à $Spin(2m) \times_{\mathbb{Z}/2} U(1)$. La projection

$$Spin(2m) \times U(1) \rightarrow Spin(2m) \times_{\mathbb{Z}/2} U(1)$$

induit un morphisme au niveau des anneaux de représentations

$$RU(Spin^\circ(2m)) \rightarrow RU(Spin(2m)) \otimes RU(U(1))$$

Soit ρ la représentation définie par l'identité de $U(1)$, la restriction des représentations

$$\Delta_{2m}^+ \otimes \rho \text{ et } \Delta_{2m}^- \otimes \rho$$

au sous-groupe $\mathbb{Z}/2$ de $Spin(2m) \times U(1)$ est la représentation triviale, ce sont par conséquent des représentations de $Spin^\circ(2m)$ que l'on notera $\tilde{\Delta}_{2m}^+$ et $\tilde{\Delta}_{2m}^-$.

Ces deux représentations induisent des éléments de $KU(BSpin^{\circ}(2m))$ que nous noterons encore $\tilde{\Delta}_{2m}^{+}$ et $\tilde{\Delta}_{2m}^{-}$.

Nous allons établir ici un lien entre les éléments $\tilde{\Delta}_{2k}^{+}$ et $\tilde{\Delta}_{2k}^{-}$ de $KU(BSpin^{\circ}(2k))$ et les éléments α_k et β_{k+1} de $KU(B(n,2k))$ définis plus haut.

PROPOSITION 2.1. Dans $KU(B(n,2k))$, on a les identités

$$i) \quad \tilde{f}_{2k}^1(\tilde{\Delta}_{2k}^{+}) = \sum_{r=0}^{k-1} 2^{k-r-1} \gamma_r + \gamma_k - \alpha_k + \beta_{k+1}$$

$$ii) \quad \tilde{f}_{2k}^1(\tilde{\Delta}_{2k}^{-}) = \sum_{r=0}^{k-1} 2^{k-r-1} \gamma_r + \alpha_k$$

Preuve Remarquons d'abord que

$$\tilde{f}_{2n}^1(\tilde{\Delta}_{2n}^{+} + \tilde{\Delta}_{2n}^{-}) = \prod_{r=1}^n (\theta_r + 1) = \prod_{r=1}^n (\theta_r - 1 + 2) = \sum_{r=0}^n 2^{n-r} \gamma_r$$

dans $KU(BU(n))$, où le fibré universel $\gamma_{n,\bullet}$ a pour image $\sum_{r=1}^n \theta_r$ dans $KU(BT^n)$, et T^n est le tore maximal dans $U(n)$.

En effet, on se rappelle que

$$\tilde{\Delta}_{2n}^{+} + \tilde{\Delta}_{2n}^{-} = \prod_{r=1}^n (\theta_r^{1/2} + \theta_r^{-1/2}) \otimes \rho = \prod_{r=1}^n \theta_r^{-1/2} \prod_{r=1}^n (\theta_r + 1) \otimes \rho$$

où les $\theta_r^{1/2}$ sont des représentations irréductibles de dimension 1 sur le tore maximal de $Spin(2n)$ convenablement choisies, et que

$$\prod_{r=1}^n \theta_r^{-1/2} \otimes \rho$$

a pour image dans $KU(T^n)$ la représentation triviale.

Nous savons d'autre part que l'image de $\tilde{\Delta}_{2n}^{+} + \tilde{\Delta}_{2n}^{-}$ dans $KU(BSpin^{\circ}(2k))$ est l'élément $2^{n-k}(\tilde{\Delta}_{2k}^{+} + \tilde{\Delta}_{2k}^{-})$.

On obtient alors dans $KU(B(n, 2k))$ la relation

$$2^{n-k} \tilde{f}_{2k}^1 (\tilde{\Delta}_{2k}^+ + \tilde{\Delta}_{2k}^-) = \sum_{r=0}^{n-1} 2^{n-r} \gamma_r$$

et par conséquent,

$$\tilde{f}_{2k}^1 (\tilde{\Delta}_{2k}^+ + \tilde{\Delta}_{2k}^-) = \sum_{r=0}^k 2^{k-r} \gamma_r + \beta_{k+1}$$

Par ailleurs, le fibré en sphère

$$S^{2k-1} \rightarrow BSpin^o(2k-1) \rightarrow BSpin^o(2k)$$

a pour classe d'Euler en KU-théorie l'élément $\tilde{\Delta}_{2k}^+ - \tilde{\Delta}_{2k}^-$ de $KU(BSpin^o(2k))$, et ainsi $\tilde{f}_{2k}^1 (\tilde{\Delta}_{2k}^+ - \tilde{\Delta}_{2k}^-)$ s'identifie à la classe d'Euler du fibré en sphère

$$S^{2k-1} \rightarrow B(n, 2k-1) \rightarrow B(n, 2k)$$

qui n'est autre que l'élément $\gamma_k + \beta_{k+1} - 2\alpha_k$ décrit plus haut. On obtient alors trivialement les relations cherchées.

Remarque:

Les générateurs de $KU(B(n, 2k))$ proviennent pour une part de $KU(BU(n))$, ce sont les images des γ_r -opérations universelles et pour une autre part de $KU(BSpin^o(2k))$, ce sont les éléments α_k et β_r ($j+1 \leq r \leq n-1$) engendrés par les images des représentations spinorielles $\tilde{\Delta}_{2r}^+$ et $\tilde{\Delta}_{2r}^-$.

3. DIMENSION GEOMETRIQUE ET IMMERSION DES VARIETES STABLEMENT COMPLEXES

3.1. Un critère de non-immersion pour les variétés stablement complexes

Soit X un CW-complexe fini de dimension $< 2n$ et soit $x \in \widetilde{KO}(X)$ un élément stablement complexe. Cet élément admet une application classifiante $X \rightarrow BSO(2n)$ qui se relève dans $BU(n)$. Notons y l'élément de $\widetilde{KU}(X)$ tel que $\varepsilon_0(y) = x$ où ε_0 désigne l'application canonique $KU(X) \rightarrow KO(X)$.

Si la dimension géométrique de x est $\leq k$ on peut également relever l'application classifiante de x dans $BSO(k)$, et par suite dans l'espace $B(n,k)$. On obtient alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \xrightarrow{r_k} BSO(k) \\
 & \nearrow \tilde{f} & \\
 & B(n,k) & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{g} BU(n) & \xrightarrow{r_n} BSO(2n)
 \end{array}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant:

THEOREME 3.1. Soient $\dim X < 2n$, $x \in \widetilde{KO}(X)$ stablement complexe et soit $\varepsilon_0(y) = x$ où $y \in \widetilde{KU}(X)$. Si $\text{dg} x \leq k$ on a dans $\widetilde{KU}(X)$ la relation

$$\sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r(y) = 0 \pmod{2^{n-j-1}} \quad \text{où } j = [k/2]$$

Preuve Ce résultat découle immédiatement de la relation

$$\sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r = 2^{n-j-1} \beta_{j+1} \text{ pour } j = [k/2] \text{ dans } \widetilde{KU}(B(n,k))$$

en lui appliquant $\tilde{f}^!$ et en remarquant que $\tilde{f}^!(\gamma_r) = \gamma_r(y)$.

Considérons maintenant M , une variété différentiable réelle de dimension m , compacte, connexe et stablement complexe (i.e. le fibré tangent τ de M possède une structure complexe stable). L'élément $v_0 = m - \tau \in \widetilde{KO}(M)$ est donc de la forme $v_0 = \varepsilon_0(y)$, où $y \in \widetilde{KU}(M)$. Dans ce contexte le résultat précédent devient:

COROLLAIRE 3.1. Si M^n s'immerge dans R^{m+k} , on a dans $\widetilde{KU}(M)$ la relation

$$\sum_{r=j+1}^{n-1} 2^{n-r-1} \gamma_r(y) = 0 \pmod{2^{n-j-1}} \quad \text{où } j = [k/2] \text{ et } n > m/2$$

Preuve On observera que si M^n s'immerge dans R^{m+k} alors $dg v_0 \leq k$ et si $n > m/2$, M^n est un CW-complexe fini de dimension $< 2n-1$.

3.2. Applications du critère de non-immersion

Le critère obtenu au paragraphe précédent s'applique en particulier à deux types de variétés stablement complexes bien connues, les espaces projectifs complexes et les espaces lenticulaires $L^n(2^n)$.

PROPOSITION 3.1. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)-1}$.

Ce résultat figure déjà dans [15].

Preuve: Supposons que $\mathbb{C}P^n$ s'immerge dans \mathbb{R}^{2n+k} , et soit ν le fibré vectoriel réel normal de cette immersion.

La classe stable ν_0 de ν vérifie l'identité

$$\nu_0 = -(n+1) \varepsilon_0 \mu$$

où μ désigne la classe stable du fibré en droite canonique sur $\mathbb{C}P^n$.

Le corollaire 3.1 fournit alors immédiatement la relation

$$\sum_{r=j+1}^n (-1)^r 2^{n-r} \binom{n+r}{r} \mu^r = 0 \pmod{2^{n-j}} \quad \text{où } j = [k/2]$$

et les congruences

$$2^{n-r} \binom{n+r}{r} = 0 \pmod{2^{n-j}} \quad \text{pour } j+1 \leq r \leq n,$$

puisque les éléments μ^r sont libres dans $KU(\mathbb{C}P^n)$ pour $0 \leq r \leq n$.

Lorsque $r = n$, en particulier, la congruence se traduit par la condition

$$\alpha(n) > n - j$$

d'où le résultat.

On remarquera d'autre part que les conditions pour $j+1 \leq r \leq n-1$ n'apportent aucune information supplémentaire.

PROPOSITION 3.2. L'espace lenticulaire $L^n(2^m)$ ne s'immerge pas dans $\mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)}$, pour $m \geq [n/2] + [\log_2 n]$.

Preuve: Supposons que $L^n(2^m)$ s'immerge dans \mathbb{R}^{2n+1+k} et soit ν le fibré vectoriel normal de cette immersion. D'après [20], la classe stable ν_0 de ce fibré vérifie l'identité

$$\nu_0 = -(n+1) \varepsilon_0 \pi^!(\mu)$$

où π désigne l'application canonique $L^n(2^m) \rightarrow \mathbb{C}P^n$.

Remarquons que d'après la théorie de Hirsch, il existe alors une immersion de $\mathbb{R}P^{2n+1}$ dans \mathbb{R}^{2n+1+k} , et que sous cette condition, on a $k > n$. (voir [2] Th.12.8, p.77)

Le corollaire 3.1 fournit dans $\widetilde{KU}(L^n(2^m))$ la relation

$$\sum_{r=j+1}^n (-1)^r 2^{n-r} \binom{n+r}{r} \sigma^r = 0 \pmod{2^{n-j}}$$

pour $j = [k/2]$ et $\sigma = \pi^!(\mu)$.

Rappelons d'autre part que

$$KU(L^n(2^m)) \cong \mathbb{Z}[\sigma]/(\sigma^{n+1}, (\sigma+1)^{2^n}-1)$$

(voir [4]) et considérons la projection canonique

$$\mathbb{Z}[\sigma] \rightarrow KU(L^n(2^m))$$

Il existe dans $\mathbb{Z}[\sigma]$ des polynômes $p(\sigma)$, $q(\sigma)$ et $r(\sigma)$

tels que

$$\sum_{r=j+1}^n (-1)^r 2^{n-r} \binom{n+r}{r} \sigma^r = 2^{n-j} p(\sigma) + \sigma^{n+1} q(\sigma) + ((\sigma+1)^{2^n}-1) r(\sigma)$$

Remarquons encore que l'on peut trouver des polynômes $s(\sigma)$

et $t(\sigma)$ dans $Z[\sigma]$ tels que

$$(\sigma+1)^{2^m} - 1 = 2^N s(\sigma) + \sigma^{n+1} t(\sigma)$$

lorsque $m > N + [\log_2 n]$.

En effet,

$$(\sigma+1)^{2^m} - 1 = \sum_{r=1}^{2^m} \binom{2^m}{r} \sigma^r, \text{ et } \binom{2^m}{r} \text{ est divisible par } 2^{m-v_2(r)}$$

Ici $v_2(r)$ désigne la plus grande puissance de 2 divisant r , et vérifie l'inégalité $v_2(r) \leq [\log_2(n)]$ pour $r = 1, 2, \dots, n$. Par conséquent, en posant $N = [n/2]$, on a dans $Z[\sigma]$ la relation

$$\sum_{r=j+1}^n (-1)^r 2^{n-r} \binom{n+r}{r} \sigma^r = 2^{n-j} (p(\sigma) + s(\sigma)r(\sigma)) + \sigma^{n+1} (q(\sigma) + t(\sigma)r(\sigma))$$

puisque ici $n-j \leq n-1-[n/2] \leq [n/2]$.

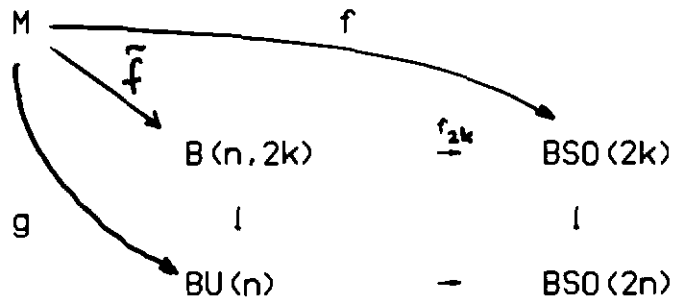
On peut donc conclure comme dans la proposition 3.1.

Remarque: Lorsque $m < [n/2] + [\log_2 n]$, on peut se demander si notre critère fournit encore des informations sur k . Sans répondre à cette question, on peut toutefois signaler que pour $m = 1$, ces des espèces projectifs réels, la relation du corollaire 3.1 est triviale.

3.3. Classe d'Euler et immersion des variétés stablement complexes

Soit M une variété différentiable réelle de dimension m comme sous 3.1, et supposons que M s'immerge dans \mathbb{R}^{m+2k} . Soit ν le fibré normal de cette immersion et soit ν_0 sa classe stable. Par hypothèse sur M , il existe un élément $y \in \widetilde{KU}(M)$ tel que $\nu_0 = \varepsilon_0(y)$.

Désignons par $f: M \rightarrow BSO(2k)$ la classifiante de ν_0 et par $g: M \rightarrow BU(n)$ la classifiante de y , pour $n > m/2$. Il existe alors $\tilde{f}: M \rightarrow B(n, 2k)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif:

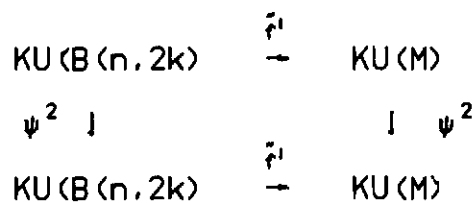


Soit $\varepsilon \in KU(B(n, 2k))$ la classe d'Euler du fibré $\rho_k = f_{2k}^*(\omega_{2k})$ où ω_{2k} désigne comme dans le chapitre 2 le fibré vectoriel universel sur $BSO(2k)$.

Rappelons que

$$\varepsilon = \gamma_k + \beta_{k+1} - 2\alpha_k \quad (1)$$

et que le diagramme suivant est commutatif par naturalité des opérations d'Adams



ce qui nous fournit l'identité

$$\psi^2(\tilde{f}^1(\varepsilon)) = \tilde{f}^1(\psi^2(\varepsilon)) \quad (2)$$

Dans la suite nous allons examiner la classe d'Euler $\tilde{f}^1(\varepsilon)$ de v et tirer parti de la relation (2) lorsque $M = \mathbb{C}P^n$ et $M = L^n(2^*)$.

PROPOSITION 3.3. Si $\mathbb{C}P^n$ s'immerge dans $R^{4n-2\alpha(n)}$, il existe un entier a_0 tel que la série de puissances

$$\sum_{r \geq n-\alpha(n)} a_r t^r = a_0 (\log(1+t))^{2n-\alpha(n)+1} / t^{n+1}$$

satisfait les conditions

$$a_r = 0 \pmod{2} \quad \text{pour } n-\alpha(n) \leq r \leq n-2$$

$$a_r = 1 \pmod{2} \quad \text{pour } r = n-1, n$$

Ce résultat figure déjà dans [17].

Preuve: Observons d'abord que

$$\tilde{f}^1(\varepsilon) = \tilde{f}^1(\gamma_k + \beta_{k+1} - 2\alpha_k) = \sum_{r=k}^n a_r \mu^r$$

où les a_r satisfont les conditions

$$a_r = 0 \pmod{2} \quad \text{pour } k \leq r \leq n-2$$

$$a_r = 1 \pmod{2} \quad \text{pour } r = n-1, n$$

En effet, on a dans $KU(\mathbb{C}P^n)$ la relation:

$$2^{n-k} f^1(\beta_{k+1}) = \sum_{r=k+1}^n 2^{n-k} b_r \mu^r = \sum_{r=k+1}^n (-1)^r 2^{n-r} \binom{n+r}{r} \mu^r$$

et par conséquent

$$b_r = (-1)^r 2^{k-r} \binom{n+r}{r}$$

satisfait les conditions:

$$b_r = 0 \pmod{2} \text{ pour } k+1 \leq r \leq n-2$$

$$b_r = 1 \pmod{2} \text{ pour } r = n-1, n$$

pour $k = n - \alpha(n)$.

On vérifie de même que

$$(-1)^k \binom{n+k}{k} = 0 \pmod{2} \text{ pour } k = n - \alpha(n),$$

pour autant que $\alpha(n) > 1$.

Nous pouvons ainsi décrire le premier terme de l'identité (2) dans $KU(\mathbb{C} P^n)$ par

$$\psi^2(\tilde{f}^1(\varepsilon)) = \sum_{r=k}^n a_r \mu^r (\mu+2)^r \quad (3)$$

Par ailleurs, avec la description de la classe de Thom de ρ_k donnée sous 2.2, on vérifie facilement que

$$\tilde{f}^1(\psi^2(\varepsilon)) = \sum_{r=k}^n a_r \mu^r \left(\sum_{j=0}^k 2^{k-j} \binom{-n-1}{j} \mu^j + \sum_{j=k+1}^n b_j \mu^j \right) \quad (4)$$

où $\sum_{j=k+1}^n b_j \mu^j = \tilde{f}^1(\beta_{k+1})$ dans $KU(\mathbb{C} P^n)$

L'identité (2) se traduit dans $KU(\mathbb{C} P^n)$ par l'identité des polynômes (3) et (4) jusqu'aux termes de degré n . En identifiant les coefficients des termes de degré $\leq n$, on obtient un système de $n-k$ équations linéaires homogènes

$$\sum_{j=k}^r (2^{2j-r} \binom{j}{r-j} - 2^{k+j-r} \binom{-n-1}{r-j}) a_j = 0 \text{ pour } k+1 \leq r \leq n$$

que l'on peut résoudre récursivement, en donnant une valeur arbitraire à a_k . Pour chaque choix de a_k , on obtient une solution unique pour les coefficients a_{k+1}, \dots, a_n .

De plus l'expression donnée sous (4) coïncide jusqu'au degré n avec

$$\sum_{r=k}^n a_r \mu^r 2^k (1+\mu/2)^{-n-1}$$

Par conséquent le polynôme $\sum_{r=k}^n a_r \mu^r$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$f(t(t+2)) = 2^k f(t) (1+t/2)^{-n-1} \quad (5)$$

dans l'anneau des polynômes tronqués à la hauteur n . Les solutions de cette équation dans $Z[[\sigma]]$ sont de la forme

$$f(t) = a_0 (\log(1+t))^{n+k+1} / t^{n+1}$$

ce qui nous permet de conclure puisque

$$Z[[\sigma]] / (\sigma^{n+1}) = Z[\sigma] / (\sigma^{n+1})$$

PROPOSITION 3.4. Si $L^n(2^m)$ s'immerge dans $R^{4n+1-2\alpha(n)}$ et si $m \geq n + \lceil \log_2 n \rceil$, il existe un entier a_0 tel que la série de puissances

$$\sum_{r \geq n-\alpha(n)} a_r t^r = a_0 (\log(1+t))^{2n-\alpha(n)+1} / t^{n+1}$$

satisfait les conditions

$$a_r = 0 \pmod{2} \text{ pour } n-\alpha(n) \leq r \leq n-2$$

$$a_r = 1 \pmod{2} \text{ pour } r = n-1, n$$

Preuve: Supposons que $L^n(2^m)$ s'immerge dans $R^{2n+1+2k}$ avec $k = n-\alpha(n)$, et considérons la projection canonique

$$Z[\sigma] \rightarrow KU(L^n(2^m))$$

Si $m \geq \lfloor n/2 \rfloor + \lceil \log_2 n \rceil$, $f^1(\varepsilon) \in KU(L^n(2^m))$ est représenté dans $Z[\sigma]$ par un élément de la forme

$$\sum_{r \geq k} a_r \sigma^r$$

avec $a_r = 0 \pmod{2}$ pour $k \leq r \leq n-2$
 $a_r = 1 \pmod{2}$ pour $r = n-1, n$

On peut donc représenter $\psi^2(\tilde{f}^1(\varepsilon))$ dans $Z[\sigma]$ par

$$\sum_{r \geq k} a_r \sigma^r (\sigma+2)^r \quad (6)$$

avec les conditions ci-dessus pour les coefficients a_r .

L'élément $\tilde{f}^1(\psi^2(\varepsilon))$ est quant à lui représenté par

$$\sum_{r \geq k} a_r \sigma^r \left(\sum_{j=0}^k 2^{k-j} \binom{-n-1}{j} \sigma^j + \sum_{j=k+1}^n b_j \sigma^j \right) \text{ dans } Z[\sigma] \quad (7)$$

où $\sum_{j=k+1}^n b_j \sigma^j$ représente $\tilde{f}^1(\beta_{k+1})$ dans $Z[\sigma]$.

La relation (2) ainsi que les expressions (6) et (7) nous permettent d'établir l'identité suivante dans $Z[\sigma]$

$$\sum_{r \geq k} a_r \sigma^r (\sigma+2)^r - \sum_{r \geq k} a_r \sigma^r \left(\sum_{j=0}^k 2^{k-j} \binom{-n-1}{j} \sigma^j + \sum_{j=k+1}^n b_j \sigma^j \right) =$$

$$p(\sigma) \sigma^{n+1} + q(\sigma) ((\sigma+1)^{2^n} - 1) \quad (8)$$

où $p(\sigma)$ et $q(\sigma)$ sont des éléments de $Z[\sigma]$.

Rappelons que le polynôme $(\sigma+1)^{2^n} - 1$ peut s'écrire sous la forme

$$2^N r(\sigma) + \sigma^{n+1} s(\sigma), \text{ dès que } m \geq N + \lceil \log_2 n \rceil$$

avec $r(\sigma)$ et $s(\sigma)$ des éléments de $Z[\sigma]$.

Si nous comparons les coefficients des termes de degré plus petit ou égal à n dans (8), nous obtenons le système d'équations linéaires modulo 2^N

$$\sum_{j=k}^r \left(2^{2^j - r} \binom{j}{r-j} - 2^{j+k-r} \binom{-n-1}{r-j} \right) a_j = 0 \pmod{2^N}, \quad k+1 \leq r \leq n$$

pour autant que $m \geq N + \lceil \log_2 n \rceil$.

Considérons la matrice A de ce système, elle a la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1, k} & a_{k+1, k+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{k+2, k} & a_{k+2, k+1} & a_{k+2, k+2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n, k} & a_{n, k+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n, n} \end{pmatrix}$$

avec $a_{r, j} = 2^{2^{j-r}} \binom{j}{r-j} - 2^{j+k-r} \binom{-n-1}{r-j} = 0 \ (2^{j+k-r})$ puisque $j \geq k$

On peut associer un homomorphisme de \mathbb{Z} -modules à cette matrice A

$$A: \mathbb{Z}^{n-k+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-k}$$

Désignons par $(e_r)_{r=1, \dots, n-k}$ la base canonique de \mathbb{Z}^{n-k} , on peut montrer par induction descendante sur r , que pour chacun des e_r , il existe un entier impair N_r tel que

$$2^{n-r} N_r e_r$$

soit dans l'image de A .

En effet, pour $r = n-k$, on prend le dernier vecteur colonne de la matrice A ,

$$v_{n-k+1} = a_{n, n} e_{n-k} = (2^n - 2^k) e_{n-k} = 2^k (2^{n-k} - 1) e_{n-k}$$

et si l'on pose $N_{n-k} = 2^{n-k} - 1$, on obtient la relation cherchée. Supposons alors le résultat vrai pour $s+1 \leq r \leq n-k$ et désignons par v_{s+1} le $s+1$ -ième vecteur colonne de la matrice A . Dans la relation

$$2^{n-k-s} N v_{s+1} = 2^{n-k-s} N a_{k+s, k+s} e_s + 2^{n-k-s} N a_{k+s+1, k+s} e_{s+1} + \dots + 2^{n-k-s} N a_{n, k+s} e_{n-k} \quad \text{où } N = N_{s+1} N_{s+2} \dots N_{n-k}$$

les vecteurs $2^{n-k-s} N a_{k+r, k+s} e_r$ sont dans l'image de A pour $s+1 \leq r \leq n-k$ puisque

$2^{n-k-s} N a_{k+r, k+s}$ est divisible par $2^{n-k-s+k+s-r} N_r = 2^{n-r} N_r$ pour $s+1 \leq r \leq n-k$

On en déduit alors que le vecteur

$$2^{n-k-s} N a_{k+s, k+s} e_s = 2^{n-k-s} N (2^s - 2^k) e_s = 2^{n-s} N (2^{s-k} - 1) e_s$$

se trouve dans l'image de A et en posant $N_s = N(2^{s-k} - 1)$ que le résultat est encore vrai pour $r = s$.

Posons maintenant $N = n$, et considérons $x = (x_1, \dots, x_{n-k})$ une solution du système d'équations

$$Ax = 0 \pmod{2^n}$$

Il existe alors une solution $x' = (x'_1, \dots, x'_{n-k})$ du système d'équations

$$Ax = 0 \quad (9)$$

telle que $x'_r = x_r \pmod{2}$ pour $1 \leq r \leq n-k$

En effet soit x une telle solution, il existe un élément y de Z^{n-k} , vérifiant l'identité

$$Ax = 2^n y$$

Avec la remarque précédente et en posant $N = N_1 N_2 \dots N_{n-k}$, on peut affirmer que $2^{n-1} N y$ est l'image d'un élément z de Z^{n-k+1} et que

$$Nx = 2z$$

est le candidat tout désigné pour x' .

Il suffit alors de rappeler que les solutions de (9) sont les $n-k$ premiers coefficients du développement en série entière de

$$a_0(\log(1+t))^{n+k+1} / t^{n+1}$$

pour conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams: Vector Fields on Spheres, *Annals of Math.*, vol. 75, 1962.

[2] J. Adem et S. Gitler: Secondary Characteristic Classes and the Immersion Problem, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, Vol. 8, 1963.

[3] M.F. Atiyah: Immersions and Embeddings of Manifolds, *Topology*, Vol. 1, 1962.

[4] M.F. Atiyah: *K-theory*, Benjamin Inc., 1967.

[5] M.F. Atiyah et F. Hirzebruch: Vector Bundles and Homogeneous Spaces, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, AMS, Vol. 3, 1961.

[6] A. Baker: On the Spaces Classifying Complex Vector Bundles with Given Real Dimension, (1983).

[7] A. Borel, *Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles*, *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 36, 1967.

[8] R. Bott: *Lecture on $K(X)$* , Harvard Univ. Cambridge, (Mass.), 1963.

[9] V.M. Buhstaber et A.S. Miscenko: *K-Theory on the Category of Infinite Cell. Complexes*, *Math. USSR Izvestija* Vol. 2, 1968.

[10] H. Cartan: Homologie et Cohomologie des Groupes Classiques et leurs Espaces Homogènes, Séminaire Henri Cartan 12, Fasc.2, Exp. 17 (1959-60).

[11] C. Lazarov: Secondary Characteristic Classes in K-Theory, Trans. Amer. Soc. Vol. 136, 1969.

[12] N. Mahammed, R. Piccinini et U. Suter: Some Applications of Topological K-Theory, North Holland, 1980.

[13] W.S. Massey: Obstructions to the Existence of Almost Complex Structure, Bull. AMS, vol. 67, p.559-64, 1961.

[14] J.W. Milnor et James D. Stasheff, Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies (Princeton), Vol.76, 1974.

[15] B.J. Sanderson et R.L.E. Schwarzenberger: Non-Immersion Theorems for Differentiable Manifolds, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 59, 1963.

[16] J.-P. Serre, Homologie Singulière des Espaces Fibrés, Annals of Math., Vol.54, 1951, p.425-505.

[17] F. Sigrist et U. Suter: On Immersion of CP^n in $R^{4n-a(n)}$ Lecture Notes in Math. Vol.673, 1977.

[18] R. Stong: On the Cobordism of Pairs, Pac. J. of Math. 38, 1971.

[19] R.M. Switzer, Algebraic Topology-Homotopy and Homology, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1975.

[20] R.H. Szczarba: On Tangent Bundles of Fibre Spaces and Quotient Spaces, Amer. J. of Math. Vol. 86, 1964.

[21] Wu Wen-Tsün: Les i -Carrés dans une Variété Grassmannienne, CR Acad. Sc. Paris, 230 (1950) p.918-20.