Publié dans Travaux de logique 20, 1-27, 2011,
source qui doit être utilisée pour toute référence à ce travail

Des vertus de l'axiomatisation illustrées par l'exemple

Denis Vernant

> Wir haben Zeichen nötig, nicht nur unsere Meynung Andern anzudeuten, sondern auch unsern Gedanken selbst zu helfen.
>
> G. W. LEIBNIZ

Depuis Euclide, l'axiomatique a été principalement pensée comme un mode de présentation d'un système déductif formel, logique ou mathématique.

Dans ce qui suit, je voudrais moins revenir sur la description de l'axiomatique comme produit que me centrer sur l'opération d'axiomatisation conçue comme une activité productive dont il importe d'interroger le pouvoir créateur.

Je m'attacherai donc à caractériser l'axiomatisation avant de définir ce qu'est une théorie axiomatisée. Enfin, je proposerai l'exemple de l'axiomatique des actes véridictionnels dans le champ de la philosophie du langage pour illustrer les vertus de l'axiomatisation en tant qu'étape cruciale du procès de connaissance.

1. L'axiomatisation

Il importe d'abord de dégager les fonctions principales de l'activité d'axiomatisation. Schématiquement, celles-ci relèvent de trois niveaux : de l'expression, du contenu et du contrôle.

1.1 L'expression

La question première est celle de la conceptualisation de ce qui d'abord se présente sous une forme pré-systématique de notions vagues, grevées de connotations usuelles[1]. Les opérations initiales en jeu sont alors celles d'abstraction et de généralisation. Au plan de l'expression, il s'agit d'*expliciter* ce qui pouvait rester implicite ; de *caractériser* par un symbole univoque ce qui pouvait se signifier de façon ambiguë ; enfin de *formaliser* rigoureusement ce qui pouvait s'appuyer subrepticement sur un contenu empirique.

En termes leibniziens, il s'agit de construire une *characteristica universalis* qui mette « des caractères à la place des choses pour dés-embarrasser l'imagination »[2]. Ces « caractères » sont des *symboles formels* dont le sens se résume à leur manipulation logique et qui ne retiennent plus les significations concrètes des notions d'origine.

Une telle exigence, qui semble aujourd'hui convenue, suppose cependant une discipline conceptuelle qui en géométrie par

---

[1] Méthodologiquement, nous distinguons notion, concept et symbole. Par exemple, la *notion* d'assertion, attestée en français depuis le XII^e^ siècle, mais peu usitée couramment, recouvre pour une part le sens d'affirmation avec laquelle elle reste souvent confondue. Par contre, le *concept* d'assertion possède une signification précisément déterminée par une théorie particulière. Comme on le verra par la suite, il convient de ne pas confondre le concept *logique* d'assertion tel qu'il fut utilisé par Frege et Russell avec celui de la théorie *pragmatique* contemporaine, cf. (Vernant 2005). Quant au *symbole* formel, il ne prend sens que dans une axiomatique, tel le symbole A dans notre axiomatique des actes véridictionnels, cf. *infra*. (On distingue le symbole de ses diverses *occurrences* incriptionnelles concrètes).

[2] *De la méthode de l'universalité* (vers 1674) § 4, dans (Leibniz 1875-90 : V, 10).

exemple n'a pu être réalisée qu'à la fin du XIX^e siècle avec une axiomatisation qui rectifia sévèrement la tradition euclidienne[3].

1.2 Le contenu

Le plan du contenu – lié organiquement au précédant – est celui de la structuration logique des concepts. Il requiert une *analyse* des concepts complexes ainsi qu'une *déduction* de leurs relations. Comme tel, il correspond au *calculus ratiocinator* leibnizien. Le processus en jeu est alors celui, double, d'une inventivité conceptuelle et d'une systématisation des relations.

À partir d'un petit nombre d'idées primitives, il s'agit de dégager les modalités d'engendrement définitoire des concepts dérivés. De même, il s'agit de choisir initialement les propositions primitives qui gouvernent les liens logiques entre les concepts primitifs (et en constituent ainsi une définition implicite) et d'en déduire des propositions admises comme théorèmes.

Possédant une valeur zététique puissante, cette activité d'axiomatisation impose quasi mécaniquement la considération de *tous* les aspects d'un concept, comme de *toutes* les relations interconceptuelles logiquement possibles. Une telle activité fonctionne comme un précieux outil d'*analyse logique* :

> Je passe par des phases dont la première serait de voir quelque chose à l'œil nu, et la dernière de l'examiner au microscope. Je constate que

[3] La première axiomatisation rigoureuse de la géométrie, qui ne retenait que quatre idées primitives, fut celle de Moritz Pasch (1882). Voir aussi David Hilbert (1899). Fut dès lors particulièrement critiqué le recours subreptice à des hypothèses implicites et à l'usage des figures. D'où l'attaque violente de Russell : « ce n'est rien moins qu'un scandale qu'il soit encore enseigné aux garçons d'Angleterre. Un livre devrait être soit intelligible, soit exact. Il est impossible de combiner les deux, mais manquer des deux est indigne de la place occupée par Euclide dans l'éducation » (Russell 2007 : chap. V, 102).

> l'attention fait apparaître des divisions et des distinctions là où d'abord rien n'était visible, tout comme à travers un microscope vous pouvez voir dans une eau impure des bacilles qui, à l'œil nu, n'étaient pas discernables. (Russell 1959 : 165-6)

1.3 Le contrôle

Imposant précision et rigueur, les opérations précédentes font elles-mêmes l'objet d'un contrôle second portant sur les propriétés métalogiques du système déductif qui résulte de l'activité d'axiomatisation.

On sait que l'exigence de contrôle n'est apparue clairement qu'au tournant des années Trente avec la *métamathématique* de Hilbert[4] et sa reprise dans le champ logique par Leśniewski[5].

Désormais, cette exigence métalogique s'exprime par la démonstration pour un système formel donné de[6]:

– sa consistance[7];

---

[4] Cf. (Hilbert 1918).

[5] Contre les auteurs des *Principia Mathematica*, Stanisław Leśniewski distingua clairement le niveau du langage logique de celui, métalogique, de ses règles d'utilisation, cf. (Leśniewski 1989). Cette approche fut précisée par son élève Alfred Tarski, notamment dans sa communication de 1930 : « Sur quelques concepts fondamentaux de la métamathématique », dans (Tarski 1972 : T1, 35-43).

[6] Sur les propriétés métalogiques des systèmes logiques standard, cf. (Vernant 2001 : § 1.3.5 ; 2.4 ; 3.3.4).

[7] On exige en principe qu'un système muni de la négation soit *non contradictoire*, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune proposition prouvable dans ce système et dont la négation serait également prouvable. De façon plus générale, on exige d'un système qu'il soit *consistant* (ou non trivial), c'est-à-dire qu'il ne soit pas possible d'y prouver toutes les formules. Si le système contient la négation classique, ces deux exigences sont équivalentes. Munis d'une négation plus faible, les logiques dites paraconsistantes permettent de concevoir des systèmes consistants qui ne sont pourtant pas soumis à l'exigence de non contradiction.

– sa complétude[8];
– sa décidabilité[9];
– l'indépendance de ses axiomes[10];
– l'économie des idées et des propositions primitives[11].

Le contrôle de ces exigences assure la cohérence logique du système formel ainsi que sa simplicité théorique.

1.4 Le procès de connaissance

Nous venons de définir cursivement l'activité d'axiomatisation au triple plan de l'expression, du contenu et du contrôle. Il reste toutefois à déterminer son rôle et sa place dans le processus complet de connaissance.

---

[8] Cette propriété assure la correspondance entre preuve syntaxique et validité sémantique.

[9] On sait que la logique des relations n'est plus généralement décidable, cf. (Vernant 2001 : § 3.3.4.3).

[10] Cette exigence est simplement heuristique. Une méthode consiste à tester, par exemple par l'absurde, si un axiome donné est démontrable à partir des autres. Dans sa perspective universaliste, Russell ne pouvait admettre qu'une telle métaprocédure soit appliquée à la question de l'indépendance des axiomes logiques : « car tous nos axiomes sont des principes de déduction ; et s'ils sont vrais, les conséquences qui semblent suivre de l'emploi d'un principe opposé ne s'en suivront pas réellement, si bien que les arguments tirés de la supposition de la fausseté d'un axiome sont ici sujets à des erreurs particulières » (Russell 1903 : 15).

[11] Souvent l'économie théorique s'accorde mal avec l'économie pratique. Ainsi Russell, dans la seconde édition, s'est bien gardé de réécrire les *Principia Mathematica* lorqu'il découvrit que l'on pouvait en simplifier l'axiomatique en recourant au seul opérateur d'incompatibilité de Sheffer et à l'unique axiome correspondant de Nicod, cf. (Vernant 2001 : § 1.3.1.3).

De façon générale et schématique, nous décrirons ce processus en quatre opérations :

– la première est celle de la récollection des données empiriques et de la recension des savoirs pré-théoriques sur le domaine d'objets que l'on étudie[12];

– la deuxième est celle de la *théorisation* proprement dite où s'élaborent la description, l'analyse et l'explication conceptuelles du domaine[13];

– la troisième est précisément celle de l'*axiomatisation* de la théorie produite selon la triple dimension décrite précédemment ;

– enfin, la quatrième est celle de la *modélisation*. On sait en effet qu'une axiomatique donnée peut admettre plusieurs modèles qui viennent en fournir des interprétations différentes[14]. Par exemple, en plus de l'interprétation arithmétique usuelle pour laquelle elle a été conçue, l'axiomatique de Peano peut

---

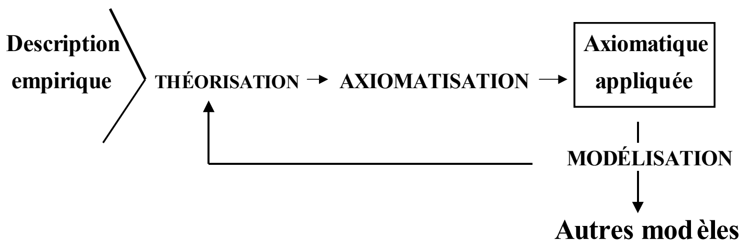
[12] On pourrait concevoir une axiomatique comme un pur jeu formel, combinatoire et arbitraire. Dans notre perspective d'une opération d'*axiomatisation* d'une théorie, nous partons d'une enquête empirique initiale : « Toute pensée effective suppose application de la pensée abstraite à une intuition » (Cavaillès 1981 : 92).

[13] Une *théorie* est composée d'un ensemble de *signes* ayant fonction de description et d'explication d'un domaine spécifié de phénomènes et d'objets. En ce sens, une logique n'est pas une théorie. En tant que jeu de manipulation de *symboles,* elle ne porte que sur des *activités* opératoires. Le calcul des propositions traite non de la *vérité,* mais de la *validité* et ses propositions sont dénuées de contenu (*sinnlos*). Le calcul des prédicats élabore des procédures universelles d'objectité (critère d'engagement ontologique), mais n'impose aucun contenu objectal particulier (choix d'une ontologie).

[14] En logique, un *modèle* d'une axiomatique formelle est une interprétation qui, à partir du choix d'un domaine d'objets, donne sens à ses concepts primitifs et rend vrais ses axiomes.

recevoir bien d'autres interprétations[15]. Il importe de remarquer que la théorie axiomatisée peut admettre comme modèle la théorie initiale, telle pour l'axiomatique de Peano l'arithmétique « naïve » usuelle. On a là un retour formel qui vient valider tout le procès de connaissance.

Schématiquement, on en résumera les étapes de cette façon :



[15] Peano lui-même relève la multiplicité des interprétations (ou « systèmes » dans son vocabulaire) que peut recevoir son axiomatique conçue sur la base de trois idées primitives (*zéro, nombre entier* et *successeur immédiat*) et de cinq propositions primitives : « Il y a une infinité de systèmes satisfaisant toutes les propositions primitives. Par ex. elles sont toutes vérifiées si l'on remplace nombre et 0 par nombre autre que 0 et 1. Tous les systèmes qui satisfont les propositions primitives sont en correspondance un-un avec les nombres. Le nombre est ce qu'on obtient par abstraction de tous ces systèmes ; en d'autres termes, le nombre est le système qui a toutes les propriétés énoncées dans les propositions primitives et celles-ci seulement » (Peano 1899 : vol.1, § 20). Russell (1903 : 125*sq*), critique cette procédure par abstraction qui ne permet ni d'assurer l'existence, ni de définir de façon univoque le nombre.

2. L’axiomatique

Ayant caractérisé l’activité d’axiomatisation et sa place dans le procès de connaissance, il convient de préciser ce qui en résulte : une axiomatique. Nous rappellerons donc succinctement la structure d’une théorie axiomatisée.

2.1 Structure d’une axiomatique

Sous forme axiomatisée, un système formel se présente *classiquement* comme un stock, aussi limité que possible, d’idées et de propositions primitives auquel on adjoint des règles de définition explicite des idées dérivées, des règles de bonne formation des formules et des règles de transformation déductive de certaines de ces formules à partir des axiomes. L’axiomatique se résume alors à une triple procédure *effective*, c’est-à-dire algorithmique, de définition des idées dérivées, de formation des formules et de démonstration des théorèmes. Comme on l’a vu, la cohérence, la simplicité et la productivité d’un tel système axiomatique sont contrôlées par des méta-règles.

2.2 Axiomatique pure/appliquée

Ce qu'on vient de décrire vaut au premier chef pour toutes les présentations axiomatiques des systèmes formels logiques. De tels systèmes constituent des axiomatiques *pures* en ce qu'elles n'intègrent ni idée ni proposition primitives relevant d'une théorie spécifiée qui vise la description et l'explication d'un domaine d'objets particulier. Ainsi, l'axiomatique du calcul propositionnel élaborée par Łukasiewicz en 1924 est une *axiomatique pure*[16]; par contre, l'axiomatique peanienne de l'arithmétique constitue une *axiomatique appliquée* dans la mesure où ce système formel et axiomatisé relève bien d'une *théorie*, même si elle n'est pas empirique : celle de l'arithmétique, qui admet pour objets les entiers naturels. Selon cette définition, il en va de même en géométrie, dans la mesure où toute géométrie, si formelle soit-elle, est bien la théorie d'un domaine d'objets particulier[17]. À l'inverse, une axiomatique *pure* vaut comme outil formel *universel*, c'est-à-dire potentiellement applicable à n'importe quelle théorie rendant compte d'un domaine spécifique d'objets[18].

Dès lors, toute axiomatisation d'une théorie, qu'elle porte sur des objets abstraits ou empiriques, produit une *axiomatique appliquée* qui adjoint au noyau logique pur des idées et des

[16] Elle admet pour idées primitives la négation et le conditionnel ainsi que trois axiomes.

[17] Nous n'ignorons pas que certains parlent de géométrie « pure » à propos de la géométrie systématisée et axiomatisée. En toute rigueur, il convient de parler d'« axiomatique formelle » (par opposition à *matérielle*), cf. (Kleene 1971 : 200-1).

[18] « La logique, globalement, se distingue par le fait que ses propositions peuvent être formulées de telle sorte qu'elles s'appliquent à n'importe quoi » (Russell 2007 : 88).

propositions primitives relevant spécifiquement du domaine d'objets étudié.

2.3 Axiomatique bipolaire

À titre provisionnel, nous avons précédemment présenté la forme « classique » d'une axiomatique pure. Mais à bien y réfléchir, une telle forme est incomplète, proprement « hémiplégique ». En effet, cette forme « classique » ne prend en compte que les axiomes, c'est-à-dire les propositions que, pour des raisons diverses, l'on *accepte* initialement. Mais c'est oublier que si un jugement possède un pôle positif exprimant ce que l'on accepte et asserte, il possède aussi un pôle négatif composé de ce que l'on rejette et dénie. En fait, le processus zététique de théorisation se fonde tout autant – et peut-être même plus – sur ce que l'on veut rejeter que sur ce que l'on veut accepter. Ainsi, pour être complète, une axiomatique doit se construire de façon *bipolaire*[19] en dédoublant le choix des axiomes et des règles.

Marqué par Twardowski[20], Łukasiewicz proposa au début des années Trente une définition logique du concept de rejet (ou dénégation) et, avec l'aide de son disciple Słupecki, élabora une *axiomatisation bipolaire* de la syllogistique traditionnelle[21] qui peut se résumer ainsi :

---

[19] On sait que Wittgenstein proposa une notation *ab* bipolaire pour les propositions élémentaires fondée sur l'idée selon laquelle : « nous comprenons une proposition *que* si nous savons *à la fois* ce qui aurait lieu si elle était *fausse, et* si elle était *vraie* » (Wittgenstein 1971 : 224).

[20] Kazimierz Twardowski adopta la conception de Brentano selon laquelle le jugement ne met pas en relation deux représentations, mais le rapport intentionnel de la conscience à son objet. Juger est alors *accepter* ou *refuser* l'existence de l'objet présenté.

[21] Pour une présentation de la genèse du système Łukasiewicz-Słupecki, cf. (Vernant 2006).

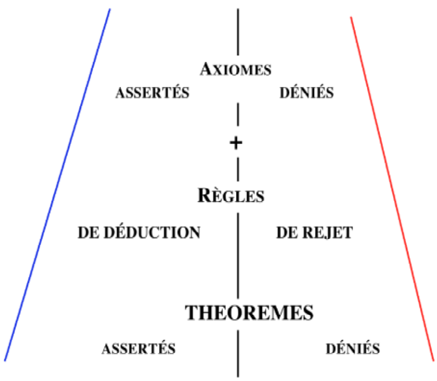
Termes :

primitifs : Aab, Iab

définis : Eab, Oab

	ASSERTION	**REJET**
Axiomes :		
	AA1 $\vdash A(aa)$	**AR1 :** $\dashv (Acb \circ Aab) \rightarrow Iac$
	AA2 $\vdash I(aa)$	
	AA3 $\vdash (Abc \circ Aab) \rightarrow Aac$	
	AA4 $\vdash (Abc \circ Iba) \rightarrow Iac$	
Règles :		
Détachement :		
	DA	**DR**
Substitution :		
	SA	**SR**
		SRR Règle de rejet de Slupecki

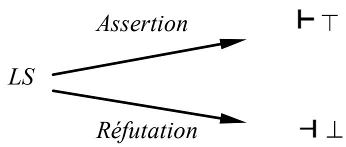
Une telle axiomatique permet d'engendrer à la fois des théorèmes à partir des axiomes assertés *et des « contre-théorèmes » à partir des axiomes déniés*.



STRUCTURE D'UNE AXIOMATIQUE BIPOLAIRE

Ainsi déployé de façon bipolaire, le champ déductif s'avère complet qui couvre aussi bien tout ce que l'on accepte que tout ce que l'on refuse.

BIPOLARITÉ DÉDUCTIVE



3. L'axiomatisation de la pragmatique véridictionnelle

Afin de mesurer sur un exemple précis l'apport et les vertus de l'activité d'axiomatisation, nous allons examiner le cas de l'axiomatisation de la pragmatique des actes véridictionnels.

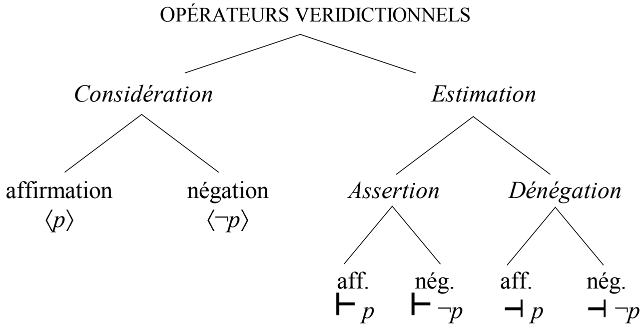
3.1 La théorie pragmatique de la véridiction

La pragmatique véridictionnelle résulte d'une théorisation des procédures langagières par lesquelles un locuteur s'engage ou non sur la vérité de ce qu'il dit. Sans entrer dans les détails[22], rappelons que nous avons proposé une théorie pragmatique qui distingue entre un acte de simple *considération* du contenu propositionnel sans aucun engagement du locuteur et un acte contraire d'*estimation*, c'est-à-dire d'engagement. Cet engagement peut être celui, positif, d'acceptation, d'*assertion*, ou bien, négatif, de refus, de *dénégation*[23]. L'ensemble des actes véridictionnels s'organise alors ainsi :

---

[22] Pour une analyse précise, cf. (Vernant 2009).

[23] On ne confondra pas l'*assertion* et la *dénégation* qui sont des opérations illocutoires de nature pragmatique avec les opérations, purement logiques, d'*affirmation* ou de *négation* du contenu propositionnel.

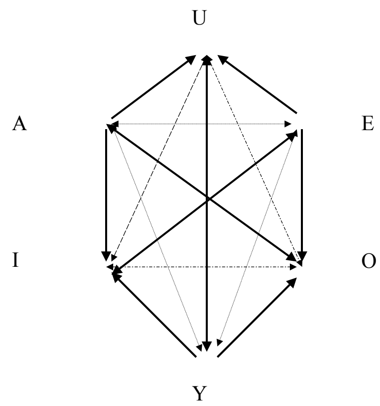


La théorie pragmatique consiste à définir la nature de chacun de ces actes et leurs conditions de réussite comme de satisfaction. Le recours à l'outil logique et à ses capacités d'axiomatisation permet, comme nous l'avons indiqué, de préciser chaque définition de ces actes et surtout de spécifier leurs relations logiques en garantissant de plus la systématicité et l'exhaustivité de l'analyse.

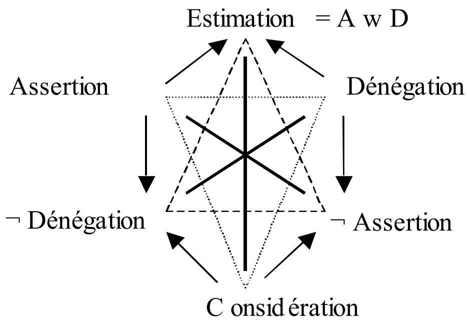
3.2 L'hexagone alternatif

Manifestement, les relations logiques entre actes véridictionnels fonctionnent selon un jeu d'« opposition ». Pour formaliser un tel jeu, nous avons eu recours à l'hexagone d'Augustin Sesmat qui complète le carré dit des « oppositions » d'Aristote en ajoutant aux traditionnelles positions A, E, I, O, les sommets U et Y.[24]

[24] Quoiqu'informelle, l'analyse de Sesmat s'avère remarquablement systématique, cf. (1951 : T.2, § 117 & 128).



Conformément à l'intuition pragmatique, nous avons interprété alors U comme l'*estimation* qui, en termes de disjonction exclusive, propose une *alternative* entre A, l'Assertion et E, la Dénégation. Quant à Y, le contradictoire de U, il correspond à la simple *Considération* et, *sous la contrainte d'incompatiblité entre A et E*, est définissable comme la conjonction de ¬A et ¬E.



Il restait alors à construire une axiomatique qui rende compte de toutes les relations logiques entre les différents sommets de l'hexagone[25].

3.3 L'axiomatisation des actes véridictionnels

Les actes véridictionnels A, E, I, O, U, Y sont des *opérateurs pragmatiques* qui expriment l'attitude véridictionnelle du locuteur relativement au contenu propositionnel de ce qu'il dit. On peut donc formellement les considérer comme des opérateurs propositionnels, par exemple A*P*, signifie l'assertion de *P*, et E*Q* la dénégation de *Q*, *etc.* (*P* et *Q* étant des méta-variables de propositions, simples ou complexes).

L'analyse du fonctionnement logique de ces actes passe par une axiomatique qui permet de définir rigoureusement leurs relations systématiques. Nous avons ainsi construit une axiomatique qui prend pour idées primitives les opérations d'assertion et de dénégation et qui peut se résumer ainsi :

[25] En annexe de (Vernant 2009), nous présentons une axiomatisation de l'hexagone alternatif ainsi que celle des opérateurs véridictionnels que nous présentons succinctement ici.

IDÉES PRIMITIVES :

A		(assertion)
E		(dénégation)

DEFINITIONS :

D1	I$P =_{\mathrm{Df}} \neg\mathrm{A}\neg P$	(non assertion)
D2	O$P =_{\mathrm{Df}} \neg\mathrm{E}\neg P$	(non dénégation)
D3	U$P =_{\mathrm{Df}}$ AP w EP	(estimation)
D4	Y$P =_{\mathrm{Df}} \neg$UP	(considération)

AXIOMES :

AX0	$\vdash$ (AP –> $\neg$EP)	(Axiome alternatif)
AX1	$\vdash$ (AP –> P)	(Axiome d'assertabilité)[26]
AX2	$\vdash$ {[A(P –> Q) $\circ$ AP] –> AQ}	(Principe d'assertion)[27]

REGLES DE TRANSFORMATION PRIMITIVES :

R0	SUBSTITUTION	(notée SUB. P/Q)
R1	$\vdash P$ => $\vdash$ AP [28]	

REGLES DE TRANSFORMATION DERIVEES :

R2	$\vdash$ (P –> Q) => $\vdash$ (AP –> AQ)	
R3	[$\vdash$ A(P –> Q) $\circ$ $\vdash$ AP] => $\vdash$ AQ	(*Modus Ponens*)
R4	[$\vdash$ A(P –> Q) $\circ$ $\vdash$ EQ] => $\vdash$ EP	(*Modus tollens*)
R5	$\vdash$ ($P \equiv Q$) => $\vdash$ (A$P \equiv$ AQ)	(Règle d'extensionnalité)

---

[26] Cet *axiome d'assertabilité* (qui formellement correspond à l'axiome de nécessité) n'affirme rien d'autre qu'en assertant *P*, le locuteur s'engage sur la vérité de *P*. Ce qui ne signifie en rien que *P* soit vrai, mais est *tenu pour vrai* dans le monde discursif proposé par le locuteur. Pour un traitement sémantique, cf. (Vernant 2009 : chap.VI).

[27] Le choix de cet axiome est commandé par notre préoccupation pragmatique puisqu'il correspond structurellement au « principe d'assertion » de Russell. Son sens ici ne doit toutefois pas être confondu avec celui du *Modus ponens*.

[28] L'écriture $\vdash P$ signifie dans cette axiomatique que la formule *P* est une *thèse* du système et « => » est le métasymbole de *dérivabilité*.

Une telle axiomatique mobilise toutes les ressources de la logique formelle standard et en particulier ses règles usuelles de transformation[29]. Mais il s'agit bien d'une *axiomatique appliquée* dans la mesure où elle introduit des opérateurs de nature pragmatique et opère un choix initial d'axiomes qui gouverne l'usage *proprement pragmatique* de l'assertion. Ainsi, A*P* signifie l'assertion de *P* par un locuteur, autrement dit le fait que le locuteur en question s'engage sur la *vérité* de *P*, ce qui, bien entendu, diffère *toto cælo* de l'assertion *logique* de *P*, qui, notée ici $\vdash P$, signifie que la proposition *P* est *prouvable* dans le système formel considéré.

Opérant la symbolisation et la formalisation de la théorie initiale, cette axiomatique garantit au plan de l'expression le caractère explicite et univoque des concepts pragmatiques en jeu.

Au plan du contenu, elle assure la systématicité et l'exhaustivité de l'analyse. Elle impose de compter à titre d'actes véridictionnels, non seulement l'assertion et la dénégation, mais leur négation ainsi que les actes d'estimation et de simple considération. De même, elle requiert la démonstration formelle de la totalité des relations logiquement possibles entre les concepts[30]. Pour ne prendre qu'un exemple, il est aisé de démontrer ce que nous avons appelé la loi de Russell[31] qui stipule que « Si *p* est déniée, non *p* doit être assertée », soit en symboles $\mathrm{E}p \rightarrow \mathrm{A}\neg p$:

[29] Il en va de même pour les règles de bonne formation des formules que nous laissons ici implicites pour simplifier l'exposition.
[30] L'hexagone exprime 15 relations (dont 9 sont symétriques si on excepte les contraposées des subalternes).
[31] Cf. (Vernant 2009 : chap.1).

1	$p \mid \neg p$	Condition
2	$\mathrm{E}p \mid \mathrm{E}\neg p$	Application de E sur 1
3	$\mathrm{E}\neg p \mid \mathrm{E}p$	2, Commutativité
4	$\mathrm{A}p \mid \mathrm{E}p$	Application T2 sur p [32]
5	$\mathrm{E}p \mid \mathrm{A}p$	4, Commutativité
6	$(\mathrm{E}\neg p \rightarrow \neg\mathrm{E}p) \circ (\mathrm{E}p \rightarrow \neg\mathrm{E}\neg p)$	3, Df Incompatibilité
7	$(\mathrm{E}p \rightarrow \neg\mathrm{A}p) \circ (\neg\mathrm{E}p \rightarrow \mathrm{A}p)$	5, Df Incompatibilité
8	$\mathrm{E}\neg p \rightarrow \neg\mathrm{E}p$	6, Élim. Conjonction
9	$\neg\mathrm{E}p \rightarrow \mathrm{A}p$	7, Élim. Conjonction
10	$\mathrm{E}\neg p \rightarrow \mathrm{A}p$	8, 9, Transitivité
11	$\mathrm{E}\neg\neg p \rightarrow \mathrm{A}\neg p$	10, Sub $p/\neg p$
12	$\mathrm{E}p \rightarrow \mathrm{A}\neg p$	11, double nég. *CQFD.*

Au plan du contrôle, cette axiomatique répond aux exigences métalogiques habituelles. Ainsi, dans la mesure où elle est logiquement équivalente au système modal *T* de Robert Feys[33], elle possède les métapropriétés de consistance, de complétude et de décidabilité[34].

---

[32] Stipulant que A et E sont incompatibles, ce théorème T2 appartient à notre axiomatique de l'hexagone alternatif qui examine les relations entre A, E, I, O, U, Y, cf. (Vernant 2009 : 236).
[33] Cf. (Feys 1937-8). Ce système se fonde sur l'axiome de nécessité ($\mathrm{L}p \rightarrow p$) et l'axiome $\mathrm{L}(p \rightarrow q) \rightarrow (\mathrm{L}p \rightarrow \mathrm{L}q)$ qui correspond dans notre axiomatique au théorème général 9.
[34] Pour une présentation du système *T* et une démonstration de sa consistance, complétude et décidabilité, cf. (Hugues & Cresswell 1968 : 22-42, 82-104).

3.4 L'axiomatique bipolaire des actes véridictionnels

Telle que nous venons de la présenter, notre axiomatique garde une forme classique en ce qu'elle ne fait figurer que les axiomes admis et, partant, les théorèmes que l'on peut en déduire. Mais comme nous importe du point de vue de la théorisation pragmatique autant *ce que nous rejetons* que ce que nous acceptons, nous devons en proposer une présentation *bipolaire* qui autorise aussi bien la démonstration de tout ce qu'elle rejette – les *contre-théorèmes* – que de ce qu'elle admet – les théorèmes. D'où la nécessité de lui adjoindre ceci :

CONTRE-AXIOME :

CAX1 $\dashv (\neg \mathrm{A}P \text{–>} \neg P)$ (contre-axiome de négation)

CONTRE-REGLES DE TRANSFORMATION :

CR0 Substitution (notée : CSub. P/Q)

CR1 $[\vdash \mathrm{A}(P \text{–>} Q) \circ \dashv \mathrm{A}Q] \Rightarrow \dashv \mathrm{A}P$ (Détachement)

CR2 $\{[\dashv (\alpha \text{–>} \Gamma) \circ \dashv (\beta \text{–>} \Gamma)] \Rightarrow \dashv [\alpha \text{–>} (\beta \text{–>} \Gamma)]\}$[35]

On dispose alors d'une axiomatique complète de la théorie pragmatique des actes véridictionnels. Explicite, univoque, systématique et exhaustive, cette axiomatique permet une évaluation précise de la théorie de départ dans ses prémisses comme dans toutes ses conséquences, aussi bien en ce qu'elle admet qu'en ce qu'elle refuse.

Pour montrer tout l'intérêt théorique de cette possibilité, arrêtons-nous pour finir sur un cas précis de théorème et de contre-théorème.

[35] α et β représentent des propositions simples et Γ des propositions élémentaires conditionnelles. C'est le contre-détachement de Słupecki.

D’un point de vue purement technique, l’enjeu est celui de l’itération de l’opérateur d’assertion. Il est aisé de démontrer dans notre axiomatique l’implication de gauche à droite. On obtient en effet le théorème général 11 à partir de l’axiome 1 par simple substitution :

TG11 $\vdash (\mathrm{AA}P \rightarrow \mathrm{A}P)$

1	$\mathrm{A}P \rightarrow P$	AX1
2	$\mathrm{AA}P \rightarrow \mathrm{A}P$	Sub. $P/\mathrm{A}P$

Par contre, pour démontrer le *contre-théorème* 1, qui fait jouer l’implication de droite à gauche, il convient de démontrer auparavant le théorème général 8 de contraposition :

TG8 $\vdash [(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{A}Q) \equiv (\neg\mathrm{A}Q \rightarrow \neg\mathrm{A}P)]$

1	$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$	Tautologie
2	$(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{A}Q) \equiv (\neg\mathrm{A}Q \rightarrow \neg\mathrm{A}P)$	Sub. $P/\mathrm{A}P$; $Q/\mathrm{A}Q$

Le contre-théorème général 1 s'obtient alors ainsi :

CTG1 $\dashv (\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P)$

1	$\dashv (\neg \mathrm{A}P \rightarrow \neg P)$	CAX1
2	$\vdash [(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{A}Q) \equiv (\neg \mathrm{A}Q \rightarrow \neg \mathrm{A}P)]$	TG8
3	$\vdash [(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P) \equiv (\neg \mathrm{AA}P \rightarrow \neg \mathrm{A}P)]$	2, CSub. $Q/\mathrm{A}P$
4	$\dashv (\neg \mathrm{AA}P \rightarrow \neg \mathrm{A}P)$	1, CSub $P/\mathrm{A}P$
5	$\vdash \{[(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P) \rightarrow (\neg \mathrm{AA}P \rightarrow \neg \mathrm{A}P)] \circ [(\neg \mathrm{AA}P \rightarrow \neg \mathrm{A}P) \rightarrow (\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P)]\}$	3, Df. biconditionnel
6	$\vdash [(\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P) \rightarrow (\neg \mathrm{AA}P \rightarrow \neg \mathrm{A}P)]$	5, Élim. conjonction
7	$\dashv (\mathrm{A}P \rightarrow \mathrm{AA}P)$	6, 4 CR1. *CQFD.*

Est ainsi logiquement démontré *qu'il n'y a pas équivalence entre l'assertion et son redoublement*. On sait qu'une telle équivalence n'est possible que dans un système formel de puissance égale au système modal *S4* et non à un système aussi faible que *T* [36].

Pareil résultat n'est donc en rien logiquement surprenant et remarquable. Toutefois, il possède un intérêt pragmatique déterminant en ce qu'il prend position sur l'interprétation de l'itération de l'assertion.

D'un strict point de vue pragmatique, il convient en effet de ne pas confondre ou assimiler l'assertion et son itération. A*p* symbolise l'assertion de *p* par un locuteur[37]. Le locuteur s'engage sur la vérité du contenu de la proposition *p*. C'est par

[36] Cf. (Hugues & Cresswell 1968 : 43-44).

[37] Une formalisation plus sophistiquée est possible qui intégre le locuteur, on a alors $\mathrm{A}_a p$, cf. (Vernant 2009 : chap.VI).

exemple le cas lorsqu'il énonce : « Il pleut ». Par contre, AA*p* symbolise l'opération qui a pour effet rhétorique de *renforcer* le degré de puissance de l'assertion initiale. Dans la langue naturelle, cela s'exprime par exemple par le fait que notre locuteur énonce cette fois : « J'affirme qu'il pleut ». Pragmatiquement, les deux actes diffèrent manifestement, le premier étant une simple *assertion*, vraie ou fausse, et le second un acte de nature métadiscursive – plus précisément un expositif[38] – qui, en tant que tel, ne peut pas ne pas être vrai dès lors qu'il est produit :

> La phrase « C'est le cas que j'affirme qu'il pleut » a manifestement une valeur de vérité différente de la phrase « Il pleut » (la première peut être vraie sans que l'autre le soit). (Apel 1994 : 43)

Si on admet cette distinction conceptuelle[39], on comprend que l'implication puisse valoir de gauche à droite puisque si on affirme une proposition, on ne peut pas ne pas l'asserter, l'engagement métadiscursif étant plus fort que la simple assertion. Par contre, une simple assertion n'implique pas nécessairement un engagement plus fort. Par où l'on voit que le fait de *rejeter* l'implication de droite à gauche explicite toute une thématisation et une conceptualisation de nature pragmatique[40].

[38] Pour une définition précise, cf. (Vernant 2009 : chap.IV, § 2.1) où nous procédons à une analyse des métadiscursifs en tant que type spécifique d'actes de discours.

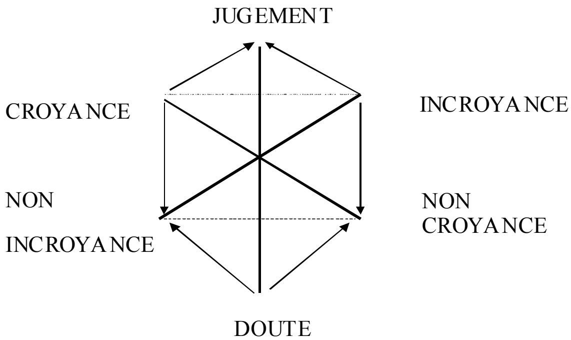
[39] Ce que ne fait pas Searle qui néglige la spécificité des métadiscursifs et assimile indûment « J'affirme qu'il pleut » à un assertif, cf. (Searle 1982 : 61).

[40] Daniel Vanderveken, qui formalise la théorie searlienne, recourt à un système équivalent au système modal *S5* autorisant la réciproque de notre TG11, cf. (Vanderveken 1990).

3.5 La modélisation

Comme on l'a vu, en tant que système formel, une axiomatique appliquée peut recevoir plusieurs modèles. Le premier modèle qui vient à l'esprit est, bien entendu, la théorie qui est à l'origine de l'axiomatisation. Ainsi notre axiomatique appliquée admet pour modèle notre théorisation pragmatique des actes véridictionnels.

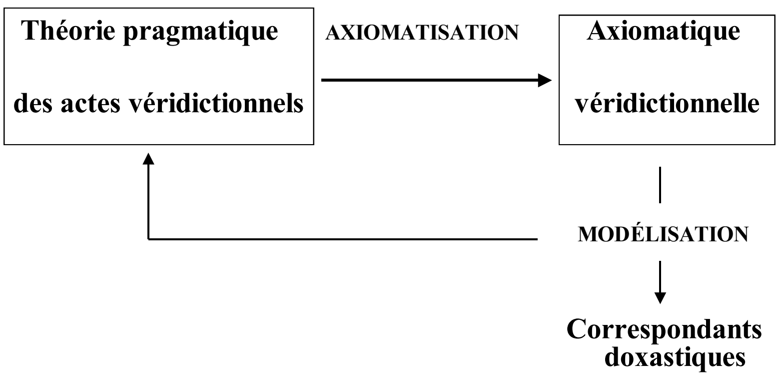
Mais d'autres modèles sont toujours concevables. Dans notre cas, l'axiomatique fournit une *structure formelle* qui vaut non seulement pour les actes de discours, mais aussi pour les *états d'esprit* qui leur sont associés. Ainsi obtient-on l'hexagone suivant qui exprime les relations logiques entre les *correspondants doxastiques* des actes véridictionnels :



Le *Jugement*, qui est un engagement véridictionnel exprimé par l'Assertion ou la Dénégation, repose sur une attitude soit de Croyance, soit d'Incroyance. Le *Doute*, en tant qu'état mental, correspond à la position neutre, suspensive qu'est la simple Considération : à la fois non-croyance et non-incroyance.

Théorie des actes véridictionnels et théorie des états mentaux s'avèrent ainsi deux modèles isomorphes de la même et unique architecture axiomatique. Tout comme elle l’a permis pour les actes de discours, cette architecture formelle permet de clarifier et de systématiser la théorie des actes mentaux. Pour ne prendre qu’un exemple, elle établit logiquement qu’il convient, à l’encontre de ce que l’on fait trop souvent, de ne pas confondre l’incroyance [*disbelief*], qui relève de la dénégation, avec la non-croyance, qui dépend de la non-assertion[41].

Au terme, le processus complet de connaissance que nous avons suivi peut se schématiser ainsi :



La construction axiomatique fournit ainsi une structuration relationnelle abstraite qui peut recevoir plusieurs modèles isomorphes faisant jouer la structure formelle sur des objets de nature différente, en l’occurrence les actes véridictionnels et leurs correspondants doxastiques.

[41] Sur cette distinction importante, cf. (Vernant 2009 : chap.I & VII).

Conclusion

Si l'on considère l'axiomatisation non comme un pur jeu formel n'ayant qu'une valeur expositive, mais comme une activité de formalisation et de systématisation d'une théorie préalable, elle apparaît comme un *ars inveniendi* qui, composant l'étape cruciale du processus de connaissance, en garantit l'abstraction, la généralité, la systématicité et l'exhaustivité ainsi que l'extension éventuelle à d'autres domaines d'objets à travers la mise en correspondance de modèles inédits.

On sait aujourd'hui qu'un système formel peut parfaitement se dispenser d'être axiomatisé, il n'en demeure pas moins, comme nous l'avons montré sur un exemple précis, que la procédure d'axiomatisation d'une théorie particulière présente des vertus incomparables permettant de l'expliciter, de la systématiser et, *in fine*, d'en évaluer la pertinence conceptuelle.

L'axiomatisation vient clore le dynamisme du procès de connaissance en le marquant du sceau de sa nécessité.

Bibliographie

APEL K.-O. 1994. *Le Logos propre au langage humain*, trad. fr. Charrière M. & Cometti J.-P., Paris : L'Éclat.

CAVAILLÈS J. 1981. *Méthode axiomatique et formalisation*, Paris : Hermann.

FEYS R. 1937-38. Les logiques nouvelles des modalités, *Revue Néoscolastique de Philosophie* **40**(1937), 517-553 & **41**(1938), 217-252.

HILBERT D. 1899. *Grundlagen der Geometrie,* Leibzig: Gauss-Weber Festschrift. [Trad. fr. par Rossier P. *Fondements de la géométrie*, Paris: Gabay, 1997].

HILBERT D. 1918. Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen* **78**, 405-415. [Trad. fr. Arnold Reymond, Pensée axiomatique, *L'enseignement mathématique* 1919].

HUGHES G. E. & CRESSWELL M. J. 1968. *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen & Co.

KLEENE S. C. 1971. *Logique mathématique,* trad. fr. par Largeault J., Paris : Armand Colin.

LEIBNIZ G. W. 1875-90. *Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz,* Berlin: Gerhard.

LEŚNIEWSKI S. 1989. *Sur les fondements de la mathématique,* trad. fr. Kalinowski G., Paris : Hermès.

PASCH M. 1882. *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leibzig.

PEANO G. 1899. *Formulaire de mathématiques,* Turin : Bocca.

RUSSELL B. 1903. *Principles of Mathematics,* London: Allen & Unwin.

RUSSELL B. 1959. *Histoire de mes idées philosophiques,* trad. fr. Auclair G., Paris : Gallimard.

RUSSELL B. 2007. *Mysticisme et logique,* trad. fr. Vernant D. *et alii*, Paris : Vrin.

SEARLE J. 1982. *Sens et expression,* trad. fr. Proust J., Paris : Minuit.

SESMAT A. 1951. *Logique*, Paris: Hermann.

TARSKI A. 1972. *Logique, sémantique, métamathématique*, trad. fr. dirigée par Granger G.-G. Paris : A. Colin.

VANDERVEKEN D. 1990. *Meaning and Speech Acts* (Vol. 1 *Principles of Language*, Vol. 2 *Formal Semantics of Success and Satisfaction*), Cambridge University Press.

VERNANT D. 2001. *Introduction à la logique standard*, Paris : Flammarion.

VERNANT D. 2005. The limits of a logical treatment of assertion, in Vanderveken D. (ed.) *Logic, Thought and Action*, Dordrecht: Springer. 276-287.

VERNANT D. 2006. La genèse logique du concept de dénégation de Frege à Słupecki, in Pouivet R. & Rebuschi M. (éds) *La philosophie en Pologne 1918-1939*, Paris : Vrin. 151-178.

VERNANT D. 2009. *Discours et vérité, aspects pragmatiques, dialogiques et praxéologiques de la véridicité*, Paris : Vrin.

WHITEHEAD A. N. & RUSSELL B. 1927. *Principia Mathematica*, Cambridge University Press. [First ed. 1910-13].

WITTGENSTEIN L. 1971. *Carnets 1914-1916*, trad. fr. Granger G.-G., Paris : Gallimard.