

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL - FACULTÉ DES SCIENCES

Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le titre de docteur ès sciences

par

ANDRÉ CALAME

licencié ès sciences mathématiques

Les relations caractéristiques
des bases du groupe symétrique

Imprimé en Suisse

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel sur le rapport de Mademoiselle et Messieurs les professeurs PICCARD, BAYS et BADER autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, 9 juillet 1955.

Le Doyen:

Prof. Dr R. CHABLE.

A Mademoiselle S. Piccard

A ma femme

I. INTRODUCTION

On sait que le groupe symétrique de degré n peut être défini sous forme abstraite par deux éléments générateurs S et T liés par un système de relations caractéristiques. M^{lle} S. Piccard a étudié les relations caractéristiques de chacune des bases d'un système complet de bases indépendantes des groupes symétriques de degré 3, 4 et 5. M^{lle} S. Piccard a bien voulu nous confier la tâche de poursuivre cette étude pour le groupe symétrique de degré 6. En même temps, il s'agissait d'exposer les méthodes utilisées dans cette recherche.

M^{lle} S. Piccard nous a suivi constamment au cours de ce travail. Ne ménageant ni son temps, ni sa peine, elle a guidé notre recherche et nous a prodigué de judicieux conseils. Ce fut pour l'auteur un précieux encouragement et il tient à exprimer à M^{lle} S. Piccard sa très vive reconnaissance.

II. HISTORIQUE

On sait qu'un groupe donné est complètement caractérisé par sa table de multiplication ou table de Cayley ¹⁾. Ce schéma étant valable pour tous les groupes simplement isomorphes, on obtient ainsi, sous forme abstraite, les propriétés du groupe « en soi », indépendamment de ses modes de représentation.

Mais, il est peu commode de construire un groupe abstrait en établissant sa table de multiplication. Sauf dans des cas très simples et particuliers, on se heurte à des difficultés qui sont bien connues. Il est donc naturel de chercher d'autres méthodes. L'une d'elles, devenue classique, consiste à définir un groupe abstrait à partir d'un certain nombre d'éléments de ce groupe et en tenant compte, s'il y a lieu, de certaines relations entre ces éléments.

Définition 1. — On dit que des éléments S, T, U, ... d'un groupe **G** forment une *base* de ce groupe, si tous les éléments de **G** peuvent être obtenus par composition des éléments S, T, U, ...

Les éléments S, T, U, ... portent le nom d'*éléments générateurs* ²⁾ ou d'*éléments fondamentaux* ³⁾.

Considérons les éléments S^i , obtenus par itération d'un seul élément S. L'ensemble des S^i forme un demi-groupe ⁴⁾. On peut construire un groupe en adjoignant à l'élément fondamental S, par exemple, son inverse T défini par la relation:

$$(1) \quad S \cdot T = S \quad \text{ou} \quad S(ST) = S$$

¹⁾ Cayley (12) p. 123. Le numéro suivant le nom de l'auteur se rapporte à la bibliographie de la page 97.

²⁾ Moore (20) p. 357.

Burnside (2) p. 20. Paragraphe 18 et p. 464. Note C.

Dyck (13) p. 1.

Bourbaki (1). Paragraphe 6. N° 2, p. 67.

Dubreuil (3) p. 112.

⁴⁾ Burnside (2) p. 21, paragraphe 18.

⁵⁾ Dubreuil (3) p. 78.

Cette formule définit T comme l'inverse de S au sens des postulats de la théorie des groupes. En effet, comme nous allons le voir, ST n'est pas seulement *élément neutre à droite* pour S, mais encore *élément neutre bilatère* pour S, T, et par suite pour tous les éléments engendrés par S et T. Composons (1) à gauche avec S :

$$(2) \quad S^3T = S(S^2T) = S^2$$

Composons (1) à droite avec S :

$$(3) \quad S^2TS = S^2$$

En égalant les valeurs de S^2 , tirées de (2) et (3), nous avons :

$$(4) \quad S^2TS = S^2T$$

Or, cette égalité entraîne :

$$(5) \quad (ST)S = S(ST)$$

car si on avait :

$$(6) \quad (ST)S \neq S(ST),$$

cette inégalité entraînerait par composition à gauche avec S :

$$(7) \quad S^2TS \neq S^2T$$

inégalité qui serait en contradiction avec (4). D'après (5), ST est donc bien *élément neutre à gauche et à droite* pour S.

Composons (5) à gauche avec T :

$$(8) \quad T(ST)S = TS(ST) = TS \quad \text{d'après (1).}$$

Cette égalité entraîne la suivante :

$$(9) \quad T(ST) = T$$

car l'inégalité :

$$(10) \quad T(ST) \neq T$$

entraînerait par composition à droite avec S l'inégalité suivante qui serait en contradiction avec (8) :

$$(11) \quad T(ST)S \neq TS$$

ST est donc *élément neutre à droite* pour T et on montrerait de même qu'il est neutre à gauche.

Ainsi, les éléments S et T forment la base d'un groupe. En posant $T = S^{-1}$ et $ST = 1$, on voit immédiatement que ce groupe est simplement isomorphe au groupe additif des nombres entiers relatifs.

Remarque 1. — Dans la notation ST, nous convenons de composer les éléments de droite à gauche, dans l'ordre T, puis S. Cette écriture est généralement adoptée actuellement ¹⁾; on la trouve déjà dans les Exercices d'Analyse de Cauchy et dans Serret ²⁾, bien qu'à cette époque la composition de gauche à droite fût plus courante ³⁾.

Remarque 2. — M. Dubreil ⁴⁾ donne une définition de la base différente de la définition 1. Dans sa définition, le groupe est engendré par les éléments générateurs et leurs inverses ⁵⁾. Au sens de cette définition, le groupe considéré à la page précédente peut être engendré par le seul élément S. Il est clair que dans un groupe fini les deux définitions sont équivalentes.

Il peut exister entre les éléments d'un groupe **G** des relations qui ne soient pas une conséquence des postulats de la théorie des groupes. En particulier, dans l'exemple de la page 9, si l'on fait l'hypothèse que les éléments S^l ne sont pas tous différents les uns des autres, il existe certainement un entier m tel que:

$$(12) \quad S^{l+m} = S^l$$

Dans ces conditions, les S^l forment un groupe simplement isomorphe au groupe cyclique d'ordre m.

D'une façon générale, dans un groupe fini **G**, engendré par les éléments fondamentaux S, T, U, ..., il existe des relations qui peuvent se mettre sous la forme:

$$(13) \quad f(S, T, U, \dots) = 1$$

Il est intéressant de considérer parmi ces relations celles dont on peut déduire toutes les autres.

Définition 2. — Un système de relations (14) $F_i(S, T, U, \dots) = 1$ est un système de *relations caractéristiques* du groupe **G** engendré par S, T, U, ..., si toutes les relations $f(S, T, U, \dots) = 1$, existant entre les éléments du groupe, sont une conséquence des relations (14).

Ces relations caractéristiques portent aussi le nom de *relations fondamentales* ⁶⁾ ou *relations génératrices* ⁷⁾.

¹⁾ Van der Waerden (8) ch. II, p. 21.

²⁾ Encycl. (9) t. I. A. 6. p. 210, note 8. Serret (7) p. 246.

³⁾ Burnside (2) ch. I, p. 3.

⁴⁾ Dubreil (3) p. 112.

⁵⁾ Dyck (13) section I, p. 5, même définition.

⁶⁾ Dubreil (3) p. 112.

⁷⁾ Moore (20) p. 357.

Au nombre des premiers groupes qui ont été définis par un système d'éléments générateurs liés par des relations caractéristiques, il convient de citer les groupes de rotations laissant invariant un polyèdre régulier.

Déjà, en 1847, W. R. Hamilton ¹⁾ définissait le groupe de l'icosaèdre au moyen de trois éléments générateurs S, T, U, liés par les relations ²⁾:

$$(15) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ U^6 &= 1 \\ U &= ST \end{aligned}$$

Cette question fut reprise en détail par van Dyck. Pour le groupe de l'icosaèdre, il donne les relations caractéristiques suivantes ³⁾:

$$(16) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ U^6 &= 1 \\ STU &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons cité ce groupe, isomorphe au groupe alterné de degré cinq et d'ordre 60, en raison de son importance bien connue ⁴⁾; mais d'autres groupes finis ou infinis ont été étudiés de ce point de vue. Qu'il nous suffise de mentionner les travaux de Netto ⁵⁾ s'attachant aux groupes engendrés par deux éléments.

C'est en 1896 que paraissent presque simultanément deux travaux très importants sur la définition abstraite du groupe symétrique de degré n: S_n . L'un est dû à Burnside ⁶⁾ et fut présenté le 12 novembre à la Société Mathématique de Londres. L'autre est dû à E. H. Moore ⁷⁾ de Chicago et fut lu à la même société un mois plus tard, soit le 10 décembre.

A l'époque seule était connue la définition abstraite des groupes symétriques de degré 3 et 4 et dont Burnside rappelle les relations caractéristiques ⁸⁾:

$$(17) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ (ST)^3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(18) \quad \begin{aligned} S^2 &= 1 \\ T^3 &= 1 \\ (ST)^4 &= 1 \end{aligned}$$

¹⁾ Hamilton (15) p. 415-416.

²⁾ Dans cet exemple, comme dans les suivants, nous uniformisons les notations.

³⁾ Dyck (13) p. 35, formules (35).

(14) p. 82, paragraphe 2.

⁴⁾ Klein (5).

⁵⁾ Netto (6) paragraphe 37, p. 37.

(21) p. 243-262.

⁶⁾ Burnside (10) p. 119-129.

⁷⁾ Moore (20) pp. 357-366.

⁸⁾ Burnside (10) p. 119.

Burnside généralise ces systèmes et caractérise le groupe symétrique de degré n par les relations ¹⁾:

$$(19) \quad \begin{aligned} S_2^2 &= 1 \\ S_n^n &= 1 \\ (S_2 S_n)^{n-1} &= 1^2 \end{aligned}$$

auxquelles il convient d'adjoindre les relations:

$$(20) \quad [(S_2 S_n)^{r-1} S_n^{-r+1}]^r = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

$$(21) \quad (S_2 S_n^r S_2 S_n^{-r})^2 = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ ou } \frac{n}{2})$$

dont le nombre n'excède pas $\frac{3n-10}{2}$ ou $\frac{3n-11}{2}$ suivant que n est pair ou impair. En effet, les relations (20) pour $r = 2, n-1, n$, équivalent au système (19).

Pour établir ce résultat, l'auteur traduit sous forme abstraite les propriétés du groupe engendré par les substitutions:

$$S_r = (123 \dots r) \quad (r = 2, 3, \dots, n)$$

En particulier l'ordre r des éléments générateurs peut être formulé en termes de S_2 et S_n , ce qui fournit les relations (20). La démonstration se fait par induction et Burnside prouve que si S_2 et S_{n-1} engendrent le groupe symétrique de degré $n-1$, il suffit pour obtenir le groupe symétrique de degré n d'introduire l'élément S_n et les relations caractéristiques supplémentaires ²⁾:

$$(22) \quad \begin{aligned} (S_2 S_n^2 S_2 S_n^{-2})^2 &= 1 \\ S_{n-1} &= S_n^{-1} S_2 S_n^2 \end{aligned}$$

Notons encore que Burnside établit directement les relations caractéristiques du groupe S_5 : ³⁾

$$(23) \quad \begin{aligned} S_2^2 &= 1 \\ (S_2 S_5 S_2 S_5^{-1})^3 &= 1 \\ (S_2 S_5)^4 &= 1 \\ S_5^5 &= 1 \end{aligned}$$

et ceci en faisant intervenir é légamment les relations (15) de Hamilton, en posant:

$$(24) \quad \begin{aligned} U &= S_5^{-2} \\ S &= (S_5 S_2)^2 \end{aligned}$$

¹⁾ Nous inversons l'ordre des lettres pour qu'il soit conforme à l'ordre admis dans la remarque 1.

²⁾ Burnside (10) p. 128.

³⁾ Burnside (10) p. 121.

⁴⁾ Burnside (10) p. 125, paragraphe 6.

Enfin, pour le groupe S_6 , les systèmes (19) et (20) deviennent:

$$(25) \quad \begin{aligned} S_2^3 &= 1 \\ S_6^6 &= 1 \\ (S_2 S_6)^5 &= 1 \\ (S_2 S_6 S_2 S_6^{-1})^3 &= 1 \\ (S_2 S_6^2 S_2 S_6^{-1})^4 &= 1 \\ (S_2 S_6^2 S_2 S_6^{-2})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Le travail de Moore donne des relations caractéristiques plus simples et le nombre des relations est inférieur à celui de Burnside. Le mathématicien anglais s'était d'ailleurs déclaré prêt à retirer son travail au profit de son collègue américain ¹⁾.

Moore s'appuie sur le fait que les transpositions

$$S_i = (i, i+1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

engendrent le groupe S_n . Sous forme abstraite, il démontre que les éléments S_i liés par les relations ²⁾:

$$(26) \quad \begin{aligned} S_i^2 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (S_i S_{i+1})^3 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ (S_i S_j)^2 &= 1 & (i = 1, 2, \dots, n-3) \\ & & (j = i+2, i+3, \dots, n-1) \end{aligned}$$

engendrent un groupe d'ordre $n!$ simplement isomorphe au groupe symétrique de degré n . C'est aussi par induction que le théorème est établi et Moore utilise, comme Burnside, le fait que le groupe S_{n-1} et le groupe cyclique engendré par:

$$T = S_1 S_2 \dots S_i \dots S_{n-1}$$

sont permutables. La seconde forme ³⁾ donnée par Moore aux relations caractéristiques nous sera plus utile pour la suite. Elle ne fait appel qu'à deux éléments générateurs que nous désignerons par S et T . On a ⁴⁾:

$$(27) \quad \begin{aligned} S^n &= 1 \\ T^2 &= 1 \\ (ST)^{n-1} &= 1 \\ (S^{\mp 1} T S^{\pm 1} T)^3 &= 1 \\ (S^{\mp 1} T S^{\pm 1} T)^2 &= 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n-2) \end{aligned}$$

Les relations avec le signe supérieur sont des conséquences des relations avec le signe inférieur. Le système de Moore est remarquable par sa symétrie.

¹⁾ Burnside (10) p. 119, note.

²⁾ Moore (20) p. 358.

³⁾ Moore (20) p. 364, paragraphe 3.

⁴⁾ Moore (20) p. 358 et 364.

Burnside reprendra dans son traité ce système et donnera une démonstration abrégée ¹⁾).

Envisageons le cas particulier de $n = 6$ qui retiendra notre attention par la suite:

$$(28) \quad \begin{aligned} S^6 &= 1 \\ T^2 &= 1 \\ (ST)^5 &= 1 \\ (STS^{-1}T)^3 &= 1 \\ (S^2TS^{-2}T)^2 &= 1 \\ (S^2T)^4 &= 1 \end{aligned}$$

Signalons enfin que Miller ²⁾, dans son étude des groupes de degré non supérieur à 7, donne un autre système de 5 relations caractéristiques pour S_n :

$$(29) \quad \begin{aligned} \hat{S}^6 &= 1 \\ T^4 &= 1 \\ (S^2T^2)^4 &= 1 \\ (S^2T^3S^4T)^2 &= 1 \\ S^6T^3S(S^2T)^2T(S^2T)^3T &= 1 \end{aligned}$$

Miller déduit ce système de celui du groupe alterné ³⁾. Le seul avantage de ce système est de n'avoir que 5 relations caractéristiques, car la dernière est loin d'avoir la simplicité des relations des systèmes précédents. Burnside ⁴⁾ préfère donner aux relations caractéristiques une forme plus symétrique. Il propose le système suivant, liant $n-1$ éléments générateurs, et qui contient par ailleurs un bon nombre de relations superflues:

$$(30) \quad \begin{aligned} S_i^2 &= 1 \\ (S_i S_j)^5 &= 1 \\ (S_i S_j S_i S_k)^2 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &\neq j \neq k \\ i, j, k &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

¹⁾ Burnside (2) note C pp. 464-465.

²⁾ Miller (19) pp. 368-369.

³⁾ Miller (19) p. 372, ligne 13.

⁴⁾ Burnside (2) note C p. 464.

III. LES BASES DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Comme le remarquait déjà Miller ¹⁾, un même groupe peut être caractérisé de façons bien différentes suivant la base utilisée. Les relations caractéristiques définissent le groupe sous forme abstraite, tout en conservant les particularités de la base qui engendre ce groupe. Burnside ²⁾ cite comme exemple le groupe symétrique de degré trois, qu'on peut définir soit par les relations caractéristiques:

$$(1) \quad S^3 = 1 \quad U^2 = 1 \quad (SU)^2 = 1$$

à partir de deux éléments générateurs S et U, soit par le système:

$$(2) \quad U^3 = 1 \quad V^2 = 1 \quad (UV)^3 = 1$$

obtenu également à partir d'une base du second ordre.

Moore ³⁾ et Miller ⁴⁾ donnent deux systèmes de relations caractéristiques pour le groupe symétrique de degré 6 qui sont très différents. Dans le système de Moore, les éléments générateurs sont respectivement d'ordre 6 et 2, alors que dans le système de Miller ils sont d'ordre 6 et 4.

Avant d'établir divers systèmes de relations caractéristiques d'un groupe, il s'agit d'en étudier les bases. M^{lle} S. Piccard s'est occupée spécialement ⁵⁾ des couples de substitutions qui engendrent le groupe symétrique de degré n. On sait que le groupe symétrique de degré n est engendré par les transpositions:

$$(12) (13) \dots (li) \dots (ln) \quad i=2,3,\dots,n$$

Une généralisation de ce théorème est due à P. Hoyer ⁶⁾. M^{lle} S. Piccard a établi divers critères qui permettent de déterminer si deux substitutions

¹⁾ Miller (19) p. 363.

²⁾ Burnside (2) p. 21.

³⁾ Moore, voir chap. II, relations (28) p. 15.

⁴⁾ Voir chap. II, relations (29) p. 15.

⁵⁾ S. Piccard (22) et (23).

⁶⁾ Hoyer (17) p. 539-544.

S et T forment ou non une base du groupe symétrique de degré n. Ses recherches aboutissent à un important théorème d'existence ¹⁾:

Quel que soit l'entier $n \geq 3$, il existe, pour toute substitution non identique S du groupe S_n , au moins une substitution T du groupe S_n qui constitue avec S une base de S_n , à l'exception des trois substitutions (12)(34), (13)(24), (14)(23) qui ne font partie d'aucune base du groupe S_4 .

Remarquons que les substitutions qui font exception: (12)(34), (13)(24), (14)(23), forment avec la substitution identique un groupe simplement isomorphe au groupe de Klein ²⁾.

Définition 3. — Deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont *semblables* s'il existe une substitution R telle que l'on ait simultanément soit $S' = RSR^{-1}$, $T' = RTR^{-1}$, soit $S' = RTR^{-1}$, $T' = RSR^{-1}$.

On dit aussi que la base S', T' est la transformée de la base S, T par la substitution R. Inversement, la base S, T est la transformée de la base S', T' par la substitution R^{-1} .

Soit S, T une base du groupe symétrique S_n . On peut se demander quel est le nombre des bases semblables à la base S, T. M^{lle} S. Piccard a démontré ³⁾ qu'il existe, à ce point de vue deux espèces de bases, les unes admettant $n!$ transformées distinctes et les autres $\frac{n!}{2}$.

Définition 4. — On appelle base de *première espèce* du groupe S_n une base qui possède $n!$ transformées distinctes par les substitutions de S_n . ⁴⁾

On appelle base de *seconde espèce* du groupe S_n une base qui possède $\frac{n!}{2}$ transformées distinctes par les substitutions de S_n . ⁵⁾

Le nombre de toutes les bases du groupe symétrique de degré n est donc un multiple de $\frac{n!}{2}$ ⁶⁾ et nous pouvons poser:

$$(3) \quad N_n = K_n \frac{n!}{2} \text{ e)}$$

où N_n désigne le nombre total des bases de S_n et K_n un entier positif.

Remarque 3. — Deux bases semblables S, T et S', T' du groupe S_n sont caractérisées par les mêmes relations. En effet, par hypothèse:

$$(4) \quad \begin{array}{l} S' = RSR^{-1} \quad \text{ou} \quad S' = RTR^{-1} \\ T' = RTR^{-1} \quad \quad \quad T' = RSR^{-1} \end{array}$$

Nous n'envisageons que la première hypothèse, la seconde conduisant à des développements tout à fait similaires.

¹⁾ S. Piccard (22) p. 80, proposition 42.
²⁾ van der Waerden (8) p. 36, Aufgaben 1 und 4.
³⁾ S. Piccard (22) corollaire 24 p. 90.
⁴⁾ S. Piccard (22) page 88.
⁵⁾ S. Piccard (22) p. 91, proposition 47.
⁶⁾ S. Piccard (22) p. 88.

A toute relation (5) $f(S', T') = 1$ entre les éléments générateurs S' et T' , le système (4) fait correspondre la relation:

$$f(RSR^{-1}, RTR^{-1}) = Rf(S, T)R^{-1} = 1$$

d'où l'on tire:

$$(5') \quad f(S, T) = 1$$

Réciproquement, toute relation (5') entraîne (5) d'après (4).

Il s'ensuit que pour l'étude des relations caractéristiques du groupe S_n , les bases semblables peuvent être considérées comme équivalentes.

Définition 5. — Deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont *indépendantes* si, quelle que soit la substitution R du groupe S_n , les deux bases RSR^{-1} , RTR^{-1} et S', T' sont distinctes, c'est-à-dire différent au moins par une substitution ¹⁾).

Définition 6. — Soit M_n un entier supérieur à 1. Nous disons que M_n bases S_i, T_i ($i = 1, 2, \dots, M_n$) du groupe S_n forment un *système complet de bases indépendantes de S_n* si elles sont toutes indépendantes deux à deux et si toute base de S_n s'obtient en transformant l'une des bases du système considéré par une substitution déterminée de S_n ²⁾).

Le nombre M_n est un invariant du groupe S_n . Tout système complet de bases indépendantes de S_n possède des bases de première espèce et des bases de seconde espèce. En désignant par M'_n le nombre des bases de première espèce et par M''_n le nombre des bases de seconde espèce, on a:

$$(6) \quad M_n = M'_n + M''_n$$

$$(7) \quad K_n = 2M'_n + M''_n$$

où K_n a la même signification que dans (3). ³⁾

M^{lle} S. Piccard a établi un système complet de bases indépendantes pour chacun des groupes symétriques de degré 3, 4, 5, 6, ⁴⁾ et 7 ⁵⁾. Dans un travail postérieur ⁶⁾, M^{lle} Piccard a étudié les relations caractéristiques de ces bases pour les groupes symétriques de degré 3, 4 et 5.

Il nous appartenait de poursuivre cette étude en établissant les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique de degré 6.

¹⁾ S. Piccard (22) p. 9, définition 3.

²⁾ S. Piccard (22) p. 9, définition 4.

³⁾ S. Piccard (22) p. 88.

⁴⁾ S. Piccard (22) p. 98-101.

⁵⁾ S. Piccard (23) p. 47-117.

⁶⁾ S. Piccard (24) p. 88-91.

IV. ÉTUDE DE QUELQUES BASES DU GROUPE S_6 ET DE LEURS RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

Un système complet de bases indépendantes du groupe symétrique S_6 comprend 163 bases: 155 de première espèce et 8 de seconde espèce. D'après les notations introduites dans le chapitre précédent, on a donc:

$$(1) \quad M_n = 163 \quad M'_n = 155 \quad M''_n = 8$$

$$(2) \quad K_n = 318$$

La valeur de K_n , calculée par la formule (7) du chapitre III, permet de déterminer le nombre total des bases du groupe S_6 . Il suffit de remplacer K_n par sa valeur dans la formule (3) du chapitre III:

$$(3) \quad N_n = 318 \cdot \frac{6!}{2} = 114480 \text{)}$$

L'étude des relations caractéristiques des 163 bases indépendantes du groupe S_6 est facilitée du fait que le groupe S_6 possède des automorphismes externes. Hölder a démontré ²⁾ que le groupe symétrique de degré n ne possède des automorphismes externes que pour $n = 6$. M^{lle} S. Piccard a donné ³⁾ une nouvelle démonstration de ce théorème en mettant en évidence la cause de ce résultat. Le nombre 6 est le seul entier qui est à la fois égal à la somme et au produit de ses diviseurs propres ⁴⁾:

$$(4) \quad 6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Du fait de l'existence des automorphismes externes, les bases du groupe S_6 se répartissent en deux catégories.

Définition 7. — Une base S,T du groupe S_6 est dite base de *première catégorie* s'il lui correspond une base semblable par les automorphismes du

¹⁾ S. Piccard (23) p. 117.

²⁾ Hölder (16) p. 333-345.

³⁾ S. Piccard (24) p. 94-100.

⁴⁾ S. Piccard (24) p. 96, relation 4.

groupe S_n . Dans le cas contraire, la base S, T est dite de *seconde catégorie*.¹⁾

Le groupe S_n possède 7 bases de première catégorie et 156 bases de seconde catégorie réparties en 78 couples de bases qui se correspondent par les automorphismes externes du groupe S_n .²⁾

Nous donnons dans le tableau I un système complet de bases indépendantes du groupe S_n .³⁾ Deux bases S, T et S', T' écrites sur la même ligne se correspondent par les automorphismes externes du groupe S_n . Elles seront donc caractérisées par les mêmes relations. Pour l'étude des relations caractéristiques, il suffit de considérer les 7 bases de première catégorie et une base de chacun des couples de bases de seconde catégorie.

La méthode que nous utilisons dans cette étude nous a été indiquée par M^{lle} S. Piccard qui l'a elle-même employée pour l'étude des groupes symétriques de degré n ($n = 3, 4, 5$)⁴⁾. Cette méthode rappelle par son principe la méthode citée, en particulier, par Hoyer⁵⁾ et Netto⁶⁾. Elle est valable pour tout groupe fini G de substitutions.

L'étude d'un groupe fini G , engendré par deux substitutions S et T comprend:

- A) la *reconstitution* du groupe G à partir de ses éléments générateurs S et T;
- B) la liste des *relations* obtenues par la reconstitution;
- C) l'*élimination* des relations superflues;
- D) un système de *relations caractéristiques* du groupe G accompagné, s'il y a lieu, d'un bref commentaire.

A. RECONSTITUTION DU GROUPE

Soit S et T les éléments générateurs du groupe fini G . Nous supposons que l'ordre m de S soit supérieur ou égal à l'ordre n de T.

$$(5) \quad m \geq n$$

Il est avantageux dans ce cas de commencer la reconstitution du groupe par les éléments S^i ($i = 1, 2, \dots, m$).

1) S. Piccard (24) p. 92.
2) S. Piccard (24) p. 92-94.
3) S. Piccard (24) p. 92-94.
4) S. Piccard (24) et (27).
5) Hoyer (18) p. 103-108.
6) Netto (21) p. 256.

TABLEAU 1.¹⁾

Bases de première catégorie:

S	T
1 (1234)	(1356)
2 (123456)	(12) (364)
3 (123456)	(12) (365)
4 (123456)	(13) (456)
5 (123456)	(13) (465)
6 (123456)	(14) (235)
7 (123456)	(14) (236)

Bases de deuxième catégorie:

S	T	S	T
8 (1234)	(456)	9 (1234)	(152) (346)
10 (1234)	(125) (36)	11 (1453)	(123456)
12 (1234)	(152) (36)	13 (1435)	(123456)
14 (1234)	(125) (46)	15 (1534)	(123456)
16 (1234)	(152) (46)	17 (1354)	(123456)
18 (1234)	(135) (46)	19 (1432)	(123456)
20 (1234)	(153) (46)	21 (1234)	(123456)
22 (1234)	(12) (356)	23 (1342)	(123456)
24 (1234)	(12) (456)	25 (1243)	(123456)
26 (1234)	(13) (256)	27 (1463)	(123456)
28 (1234)	(12) (3456)	29 (1234)	(15) (2346)
30 (1234)	(12) (3654)	31 (1234)	(15) (2643)
32 (1234)	(12) (3546)	33 (1234)	(13) (2456)
34 (1234)	(15) (2364)	35 (1234)	(15) (2463)
36 (1234)	(15) (2436)	37 (1234)	(15) (2634)
38 (123) (45)	(146)	39 (123456)	(124) (365)
40 (123) (45)	(164)	41 (123456)	(125) (364)
42 (123) (45)	(14) (26)	43 (123456)	(12) (35)
44 (123) (45)	(14) (56)	45 (123456)	(12) (36)
46 (123) (45)	(14) (36)	47 (123456)	(12) (46)
48 (123) (45)	(12) (346)	49 (156324)	(123456)
50 (123) (45)	(12) (364)	51 (132564)	(123456)
52 (123) (45)	(14) (236)	53 (135624)	(123456)
54 (123) (45)	(14) (263)	55 (142653)	(123456)
56 (123) (45)	(14) (256)	57 (145623)	(123456)
58 (123) (45)	(12) (34) (56)	59 (123456)	(12)
60 (123) (45)	(124) (356)	61 (123456)	(142)
62 (123) (45)	(142) (365)	63 (123456)	(124)
64 (123) (45)	(145) (236)	65 (123456)	(123)
66 (123) (45)	(154) (263)	67 (123456)	(132)
68 (123) (45)	(134) (256)	69 (123456)	(125)

¹⁾ S. Piccard (24) p. 92-94.

S	T	S	T
70 (123) (45)	(143) (265)	71 (123456)	(152)
72 (12345)	(56)	73 (12345)	(14) (23) (56)
74 (12345)	(1263)	75 (12345)	(1326)
76 (12345)	(1362)	77 (12345)	(1623)
78 (12345)	(1346)	79 (12345)	(1436)
80 (12345)	(1643)	81 (12345)	(1634)
82 (12345)	(123) (46)	83 (12354)	(123456)
84 (12345)	(132) (46)	85 (12543)	(123456)
86 (12345)	(123) (56)	87 (13452)	(123456)
88 (12345)	(132) (56)	89 (14532)	(123456)
90 (12345)	(124) (36)	91 (15243)	(123456)
92 (12345)	(142) (36)	93 (14235)	(123456)
94 (12345)	(124) (56)	95 (15324)	(123456)
96 (12345)	(142) (56)	97 (13425)	(123456)
98 (12345)	(126) (34)	99 (14523)	(123456)
100 (12345)	(162) (34)	101 (14352)	(123456)
102 (12345)	(126) (35)	103 (15432)	(123456)
104 (12345)	(162) (35)	105 (12345)	(123456)
106 (12345)	(126) (45)	107 (12534)	(123456)
108 (12345)	(162) (45)	109 (13254)	(123456)
110 (12345)	(136) (24)	111 (13245)	(123456)
112 (12345)	(163) (24)	113 (15342)	(123456)
114 (12345)	(136) (25)	115 (12435)	(123456)
116 (12345)	(163) (25)	117 (15423)	(123456)
118 (12345)	(136) (45)	119 (13524)	(123456)
120 (12345)	(163) (45)	121 (14253)	(123456)
122 (1234) (56)	(17) (345)	123 (13) (2456)	(123456)
124 (1234) (56)	(12) (354)	125 (13) (2654)	(123456)
126 (1234) (56)	(12) (356)	127 (12) (3465)	(123456)
128 (1234) (56)	(12) (456)	129 (12) (3564)	(123456)
130 (1234) (56)	(13) (256)	131 (14) (2536)	(123456)
132 (1234) (56)	(15) (234)	133 (12) (3645)	(123456)
134 (1234) (56)	(15) (243)	135 (12) (3546)	(123456)
136 (1234) (56)	(15) (236)	137 (13) (2546)	(123456)
138 (1234) (56)	(15) (263)	139 (13) (2564)	(123456)
140 (1234) (56)	(15) (346)	141 (13) (2465)	(123456)
142 (1234) (56)	(15) (364)	143 (13) (2645)	(123456)
144 (123456)	(12) (345)	145 (13) (265)	(123456)
146 (123456)	(12) (354)	147 (13) (245)	(123456)
148 (123456)	(12) (346)	149 (12) (356)	(123456)
150 (123456)	(12) (456)	151 (13) (254)	(123456)
152 (123456)	(12) (465)	153 (13) (256)	(123456)
154 (123456)	(14) (253)	155 (14) (263)	(123456)
156 (123456)	(134562)	157 (123) (45)	(16) (243)
158 (123456)	(126543)	159 (123) (45)	(16) (234)
160 (123456)	(132654)	161 (123) (45)	(14) (356)
162 (123456)	(143265)	163 (123) (45)	(14) (265)

Remarque 4. — Si l'ordre de T est supérieur à l'ordre de S ($n > m$), il est préférable de commencer la reconstitution du groupe par les éléments T^j ($j = 1, 2, \dots, n$). Dans ce cas, tout ce que nous exposons dans la suite de ce chapitre reste valable, à condition de remplacer S par T et inversement, m par n et inversement.

Nous établissons dans un premier tableau les substitutions S^i , en écrivant toute substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

sous la forme abrégée

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k.$$

Ainsi, dans la reconstitution du groupe S_6 , à partir de la base $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$, le tableau 1 s'écrira :

$$\begin{array}{l} 1 S^1 \\ 234156 \\ 341256 \\ 412356 \\ 123456 \end{array}$$

Le nombre de lignes du tableau est égal à l'ordre m de S.

Nous composons les substitutions S^i à droite successivement avec T, T^2, T^3, \dots, T^n , ce qui donne n tableaux portant les numéros 2, 3, ..., n+1. Les n-1 premiers tableaux $S^i T^j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) sont différents du tableau 1, tandis que le tableau n+1 des substitutions $S^i T^n$ est identique, ligne pour ligne, au tableau 1, car :

$$(6) \quad T^n = 1$$

Il est donc inutile de poursuivre la reconstitution du groupe avec ce tableau et nous le notons en soulignant le dit tableau et en écrivant à sa droite le numéro 1 du tableau qui lui est équivalent.

Viennent ensuite les tableaux contenant les substitutions de la forme $S^i T^j S^k$. Occupons-nous d'abord des n-1 tableaux $S^i T^j S$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Il peut s'en trouver qui soient équivalents à des tableaux précédents, c'est-à-dire contenant les mêmes substitutions à l'ordre près. Nous les éliminons pour la suite des calculs en les soulignant et en notant à leur droite le numéro du tableau équivalent. Ceci fournit une relation du type :

$$(7) \quad \underline{S^i T^j S} = S^{i' T^{j'}}$$

Nous composons les tableaux restants à droite avec S et en éliminant au fur et à mesure les tableaux équivalents à un tableau précédemment obtenu.

Remarque 5. — A tout tableau S^uT^v ($u = 1, 2, \dots, m; v \leq n-1$) correspond un tableau équivalent $S^iT^jS^k$ ($i = 1, 2, \dots, m; j \leq n-1; k \leq m$). Si $k = m$, les tableaux se correspondent ligne par ligne.

Nous composons les tableaux non soulignés $S^iT^jS^k$ à droite avec T, T^2, \dots, T^l ($l \leq n$) en éliminant au fur et à mesure les tableaux précédemment obtenus, et ainsi de suite. Comme le groupe \mathbf{G} que nous reconstituons est supposé fini, nous obtiendrons toutes ses substitutions en un nombre fini de tableaux.

Remarque 6. — M désignant l'ordre du groupe \mathbf{G} , la reconstitution de ce groupe comporterait $\frac{2M}{m}$ tableaux, dont la moitié seraient soulignés. Pour le groupe symétrique \mathbf{S}_6 d'ordre $6! = 720$, la reconstitution comporterait $\frac{1440}{m}$ tableaux dont $\frac{720}{m}$ soulignés. Mais pour abrégier l'écriture, nous avons supprimé tous les tableaux se terminant par S^m et T^n .

B. RELATIONS

La liste des relations entre S et T comprend d'abord les deux relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$ donnant l'ordre des éléments générateurs. Nous écrivons ensuite les relations qui découlent de la reconstitution du groupe. Elles sont de la forme:

$$(8) \quad f_{p+1}(S, T) = f_p(S, T)$$

p indiquant le nombre des lettres S et T figurant dans l'expression f . On ramène ces égalités à des égalités de la forme $F_{2p+1}(S, T) = 1$ en composant (8) à droite avec f_p^{-1} :

$$(9) \quad F_{2p+1}(S, T) = f_{p+1}(S, T)f_p^{-1}(S, T) = 1$$

Remarque 7. — Pour faciliter l'élimination, nous remplaçons dans (9) les exposants négatifs par les exposants positifs, en utilisant les relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$. Le nombre $2p+1$ des lettres S et T dans $F_{2p+1}(S, T)$ étant impair, l'expression $F_{2p+1}(S, T)$ commence et finit par S . On la transforme immédiatement en une expression équivalente de $2p$ lettres S et T commençant par T et se terminant par S .

Ainsi, pour la base S_6, T_6 déjà citée, la relation:

$$(10) \quad 26/17 \quad S^4TS^2TS = S^3T^2S^2 \quad \text{devient:}$$

$$(11) \quad TS^2TSTS^2TS = 1$$

Il n'y a aucun inconvénient à supprimer dans la reconstitution du groupe les tableaux dont il est question dans la remarque 6. On ne supprime ainsi

que des relations équivalentes respectivement à $S^m = 1$ et $T^n = 1$, qui figurent déjà dans la liste des relations.

C. ÉLIMINATION

Lors de l'élimination des relations superflues, nous essayons autant que possible de montrer qu'une relation donnée est une conséquence des précédentes. Ce moyen permet d'éviter à coup sûr des cercles vicieux. Le numéro des relations utilisées dans l'élimination est inscrit sous l'expression correspondante. Mais nous avons omis de signaler l'emploi des relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$ en raison de leur fréquent usage.

Il est clair que dans cette élimination, on ne tient aucun compte de la forme particulière des substitutions S et T qui ne sont que des symboles abstraits soumis aux postulats de la théorie des groupes.

D. RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

A la suite de l'élimination des relations superflues, il reste un système de relations caractéristiques du groupe considéré. Dans certains cas, on peut transformer les relations restantes pour donner au système des relations caractéristiques une forme plus élégante. Il est évident, que dans cette transformation, aucune relation étrangère au système ne saurait être utilisée. Le nouveau système n'est équivalent au premier que si la transformation inverse est possible.

Nous donnons dans les pages qui suivent les calculs complets pour la base S_8, T_8 et les résultats obtenus pour les bases $S_{28}, T_{28}; S_{79}, T_{79}$ et S_{83}, T_{83} . Nous établissons dans le chapitre suivant la liste complète des bases du groupe S_8 pour lesquelles nous avons effectué tous les calculs.

Reconstitution du groupe S_8 .

Base: $S_8 = (1234) \quad T_8 = (456)$.

1 S^4	2 S^4T	3 S^4T^2	4 S^4T^3	5 S^4T^4
234156	234561	234615	345261	346215
341256	341562	341625	415362	416325
412356	412563	412635	125463	126435
123456	123564	123645	235164	236145
6 $S^4T^2S^2$	7 $S^4T^2S^4$	8 $S^4T^2S^6$	9 $S^4T^2S^8$	10 $S^4T^2S^{10}$
452361	462315	523461	623415	345612
153462	163425	534162	634125	415623
254163	264135	541263	641235	125634
351264	361245	512364	612345	235641

11 S ¹ T ² ST	12 S ¹ TS ² T	13 S ¹ T ² S ² T	14 S ¹ TS ² T	15 S ¹ T ² S ² T
346152	452613	462153	523614	623154
416253	153624	163254	534621	634251
126354	254631	264351	541632	641352
236451	351642	361452	512643	612453
16 S ¹ TST ²	17 S ¹ T ² ST ²	18 S ¹ TS ² T ²	19 S ¹ T ² S ² T ²	20 S ¹ TS ² T ²
345126	346521	452136	462531	523146
415236	416532	153246	163542	534216
125346	126543	254316	264513	541326
235416	236514	351426	361524	512436
21 S ¹ T ² S ² T ²	22 S ¹ TST ² S	23 S ¹ T ² STS	24 S ¹ TS ² TS	25 S ¹ T ² S ² TS
623541	456312	461352	526413	621453
634512	156423	162453	536124	632154
641523	256134	263154	546231	643251
612534	356241	364251	516342	614352
26 S ¹ TS ² TS	27 S ¹ T ² S ² TS	28 S ¹ TST ² S	29 S ¹ T ² ST ² S	30 S ¹ TS ² T ² S
236514	231654	451326	465321	521436
346521	342651	152436	165432	532146
416532	413652	253146	265143	543216
<u>126543</u> 17	124653	354216	365214	514326
31 S ¹ T ² S ² T ² S	32 S ¹ TS ² T ² S	33 S ¹ T ² S ² T ² S	34 S ¹ TST ² S	35 S ¹ T ² STS
625431	231546	235641	563412	613452
635142	342516	345612	564123	624153
645213	413526	415623	561234	631254
615324	124536	<u>125634</u> 10	562341	642351
36 S ¹ TS ² TS ²	37 S ¹ T ² S ² TS ²	38 S ¹ T ² S ² TS ²	39 S ¹ TST ² S ²	40 S ¹ T ² ST ² S ²
264513	214653	316254	513426	653421
361524	321654	426351	524136	654132
462531	432651	136452	531246	651243
<u>163542</u> 19	143652	246153	542316	652314
41 S ¹ TS ² T ² S ²	42 S ¹ T ² S ² T ² S ²	43 S ¹ TS ² T ² S ²	44 S ¹ TST ² S ²	45 S ¹ T ² STS ²
214536	254631	315246	634512	134652
321546	351642	425316	641523	241653
432516	452613	135426	612534	312654
143526	<u>153624</u> 12	245136	<u>623541</u> 21	423651
46 S ¹ T ² S ² TS ²	47 S ¹ T ² S ² TS ²	48 S ¹ TST ² S ²	49 S ¹ T ² ST ² S ²	50 S ¹ TS ² T ² S ²
146253	162354	134526	534621	145236
216354	263451	241536	541632	215346
326451	364152	312546	512643	325416
436152	461253	423516	<u>523614</u> 14	435126

51 S1T*S*T	152346	253416	354126	451236
52 S1T*S*T	456123	152346	253416	354126
53 S1T*S*T	461523	162534	263541	364512
54 S1T*S*T	526134	36241	546312	516423
55 S1T*S*T	621534	632541	643512	614523
56 S1T*S*T	231546	231546	451263	625314
57 S1T*S*T	451263	451263	152364	521364
58 S1T*S*T	465213	465213	165324	532461
59 S1T*S*T	521364	521364	532461	543162
60 S1T*S*T	625314	625314	635421	645132
61 S1T*S*T	231465	231465	563124	615243
62 S1T*S*T	563124	563124	615243	615243
63 S1T*S*T	613524	613524	624531	635142
64 S1T*S*T	214536	214536	321546	514263
65 S1T*S*T	316542	316542	426513	514263
66 S1T*S*T	124365	124365	413265	426513
67 S1T*S*T	563214	563214	652143	134526
68 S1T*S*T	214365	214365	321465	315462
69 S1T*S*T	315462	315462	425163	425163
70 S1T*S*T	134526	134526	241536	134526
71 S1T*S*T	146532	146532	216543	134526
72 S1T*S*T	162543	162543	263514	152463
73 S1T*S*T	134265	134265	241365	152463
74 S1T*S*T	145362	145362	215463	152463
75 S1T*S*T	152463	152463	253164	152463
76 S1T*S*T	436521	436521	326514	253164
77 S1T*S*T	326514	326514	364521	354261
78 S1T*S*T	461532	461532	364521	354261
79 S1T*S*T	325164	325164	435261	451362
80 S1T*S*T	435261	435261	451362	451362
81 S1T*S*T	456231	456231	156342	451362
82 S1T*S*T	156342	156342	162345	451362
83 S1T*S*T	461235	461235	536415	451362
84 S1T*S*T	162345	162345	536415	451362
85 S1T*S*T	356124	356124	364125	354621
86 S1T*S*T	256413	256413	364125	354621
87 S1T*S*T	456132	456132	516234	354621
88 S1T*S*T	165243	165243	546123	354621
89 S1T*S*T	265314	265314	546123	354621
90 S1T*S*T	365421	365421	614235	354621
91 S1T*S*T	465132	465132	614235	354621
92 S1T*S*T	563241	563241	643125	354621
93 S1T*S*T	663342	663342	643125	354621
94 S1T*S*T	763443	763443	643125	354621
95 S1T*S*T	863544	863544	643125	354621
96 S1T*S*T	963645	963645	643125	354621
97 S1T*S*T	1063746	1063746	643125	354621
98 S1T*S*T	1163847	1163847	643125	354621
99 S1T*S*T	1263948	1263948	643125	354621
100 S1T*S*T	1364049	1364049	643125	354621

89 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	90 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	91 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	92 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
653142	214653	315624	146325
654213	321654	425631	216435
651324	432651	135642	326145
652431	<u>143652</u> 37	245613	436215
93 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	94 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	95 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	96 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
162435	134652	145623	152634
263145	241653	215634	253641
364215	312654	325641	354612
461325	<u>423651</u> 45	435612	451623
97 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	98 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	99 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	100 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
561423	615423	261534	215634
562134	625134	362541	325641
563241	635241	463512	435612
<u>564312</u> 85	645312	164523	<u>145623</u> 95
101 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	102 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	103 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	104 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
512463	652413	213564	253614
523164	653124	324561	354621
534261	654231	431562	451632
541362	651342	142563	<u>152643</u> 80
105 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	106 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	107 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	108 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
314265	631524	135624	165342
421365	642531	245631	265413
132465	613542	315642	365124
243165	624513	425613	465231
109 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	110 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	111 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	112 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
132564	532614	143265	154362
243561	543621	214365	251463
314562	514632	321465	352164
421563	<u>521643</u> 82	<u>432165</u> 68	453261
113 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	114 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	115 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	116 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
465132	625143	342165	453162
165243	635214	413265	154263
265314	645321	124365	251364
<u>365421</u> 81	<u>615432</u> 83	<u>231465</u> 61	352461
117 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	118 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	119 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶	120 S ¹ T ² S ³ T ⁴ S ⁵ T ⁶
524163	562431	612435	263541
531264	563142	623145	364512
542361	564213	634215	461523
513462	561324	641325	<u>162534</u> 53

121 S ¹ T ³ S ² TST ³ S	122 S ¹ TST ³ ST ² S	123 S ¹ T ³ ST ² ST ² S	124 S ¹ TS ² T ² ST ² S
213645	516432	651432	216543
324615	526143	652143	326514
431625	536214	653214	436521
142635	546321	<u>654321</u> 67	<u>146532</u> 71
125 S ¹ T ³ S ² T ³ ST ² S	126 S ¹ TST ³ S ² T ² S	127 S ¹ T ³ ST ² T ² S	128 S ¹ T ³ S ² TS ² T ² S
251643	632541	132645	164325
352614	643512	243615	261435
453621	614523	314625	362145
154632	<u>621534</u> 55	421635	463215
129 S ¹ TST ³ S ² T ² S	130 S ¹ T ³ ST ² S ² T ² S	131 S ¹ TS ² T ² S ² T ² S	132 S ¹ T ³ S ² TS ² T ² S
136542	531642	156324	463125
246513	542613	256431	164235
316524	513624	356142	261345
426531	524631	456213	362415
133 S ¹ T ³ S ² TS ² T ² S	134 S ¹ TS ² T ² S ² T ² S	135 S ¹ TS ² T ² S ² T ² S	136 S ¹ T ³ STST ² S
624135	456123	526134	154623
631245	156234	536241	251634
642315	256341	546312	352641
613425	<u>356412</u> 52	<u>516423</u> 54	453612
137 S ¹ TS ² TST ² S	138 S ¹ TST ³ ST ² S	139 S ¹ T ³ ST ² ST ² S	140 S ¹ TS ² T ² ST ² S
615234	124563	524613	135264
625341	231564	531624	245361
635412	342561	542631	315462
645123	413562	<u>513642</u> 88	<u>425163</u> 69
141 S ¹ TS ² T ² ST ² S	142 S ¹ TST ³ ST ² S	143 S ¹ T ³ ST ² ST ² S	144 S ¹ T ³ S ² TS ² T ² S
142365	315624	356124	653142
213465	425631	456231	654213
324165	135642	156342	651324
431265	<u>245613</u> 91	<u>256413</u> 76	<u>652431</u> 89
145 S ¹ TST ³ S ² T ² S	146 S ¹ TS ² T ² S ² TS ²	147 S ¹ TS ² T ² S ² TS ²	148 S ¹ TS ² T ² S ² TS ²
325164	543162	531462	241563
435261	514263	542163	312564
145362	521364	513264	423561
<u>215463</u> 74	<u>532461</u> 59	<u>524361</u> 66	134562
149 S ¹ TS ² ST ² T ² S	150 S ¹ T ³ TST ² T ² S	151 S ¹ T ³ S ² TST ² S	152 S ¹ TST ³ ST ² S
624531	124635	136245	164532
631542	231645	246315	261543
642513	342615	316425	362514
<u>613524</u> 63	413625	<u>426135</u> 87	463521

153 S1T*S2T*S3T*S4	516243	326145	643125	365142
154 S1T*S2T*S3T*S4	526314	436215	614235	465213
155 S1T*S2T*S3T*S4	536421	146325	621345	165324
156 S1T*S2T*S3T*S4	546132	216435	632415	265431
157 S1T*S2T*S3T*S4	316542	563124	631425	241635
158 S1T*S2T*S3T*S4	316542	564231	642135	312645
159 S1T*S2T*S3T*S4	426513	564231	642135	312645
160 S1T*S2T*S3T*S4	136524	561342	613245	423615
161 S1T*S2T*S3T*S4	246531	562413	624315	134625
162 S1T*S2T*S3T*S4	546123	152634	245163	423165
163 S1T*S2T*S3T*S4	516234	253641	315264	134265
164 S1T*S2T*S3T*S4	526341	354612	425361	241365
165 S1T*S2T*S3T*S4	126345	625341	362415	523641
166 S1T*S2T*S3T*S4	236415	635412	463125	534612
167 S1T*S2T*S3T*S4	346125	645123	164235	541623
168 S1T*S2T*S3T*S4	415263	246135	645132	162543
169 S1T*S2T*S3T*S4	415263	316245	615243	263514
170 S1T*S2T*S3T*S4	235461	426315	625314	364521
171 S1T*S2T*S3T*S4	345162	136425	635421	461532
172 S1T*S2T*S3T*S4	416235	615234	261345	512634
173 S1T*S2T*S3T*S4	126345	625341	362415	523641
174 S1T*S2T*S3T*S4	236415	635412	463125	534612
175 S1T*S2T*S3T*S4	346125	645123	164235	541623
176 S1T*S2T*S3T*S4	416235	213645	314652	631245
177 S1T*S2T*S3T*S4	416235	213645	314652	631245
178 S1T*S2T*S3T*S4	652134	213645	314652	631245
179 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
180 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
181 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
182 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
183 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
184 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
185 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
186 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
187 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
188 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
189 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
190 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
191 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
192 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
193 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
194 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
195 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
196 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
197 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
198 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
199 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635
200 S1T*S2T*S3T*S4	652134	421635	127	421635

183 S¹TSTST²ST
562314
563421
564132
561243

184 S¹T²STST²ST
612354
623451
634152
641253

185 S¹T²S²TST²ST
213456
324156
431256
142356

186 S¹TST²ST²ST
516324
526431
536142
546213

187 S¹T²S²T²ST²ST
251436
352146
453216
154326

188 S¹T²STS²T²ST
132456
243156
314256
421356

189 S¹T²S²TS²T²ST
164253
261354
362451
463152

190 S¹TST²S²T²ST
136425
246135
316245
426315 166

191 S¹T²ST²S²T²ST
531426
542136
513246
524316

192 S¹TS²T²S²T²ST
156243
256314
356421
456132

193 S¹T²S²TS²T²ST
463251
164352
261453
362154

194 S¹T²S²TS²T²ST
624351
631452
642153
613254

195 S¹T²STSTS²T
154236
251346
352416
453126

196 S¹TS²TSTS²T
615342
625413
635124
645231

197 S¹TST²STS²T
124635
231645
342615
413625 150

198 S¹TS²T²STS²T
142653
213654
324651
431652

199 S¹TS²T²S²TS²T
241635
312645
423615
134625 160

200 S¹T²STST²S²T
124356
231456
342156
413256

201 S¹TST²ST²S²T
164325
261435
362145
463215 128

202 S¹T²S²T²ST²S²T
516432
526143
536214
546321 122

203 S¹T²S²TS²T²S²T
241356
312456
423156
134256

204 S¹TST²STS²T
245631
315642
425613
135624 107

205 S¹TS²T²S²TS²T
415632
125643
235614
345621

206 S¹T²STST²S²T
246351
316452
426153
136254

207 S ¹ T ² S ³ TS ³ T ² S ³ T	208 S ¹ TST ² STST ²	209 S ¹ T ² ST ² STST ²
416352	512346	652341
126453	523416	653412
236154	534126	654123
346251	541236	651234
210 S ¹ TS ³ T ² STST ²	211 S ¹ T ² STS ³ IST ³	212 S ¹ T ² S ³ TS ³ TST ²
314526	135462	165234
421536	245163	265341
132546	315264	365412
243516	<u>425361</u> 163	465123
213 S ¹ TSTST ² ST ²	214 S ¹ T ² STST ² ST ²	215 S ¹ T ² S ³ TST ² ST ²
562143	612543	213564
563214	623514	324561
564321	634521	431562
561432	641532	<u>142563</u> 103
216 S ¹ TST ² ST ² ST ²	217 S ¹ T ² S ³ T ² ST ² ST ²	218 S ¹ T ² STS ³ T ² ST ²
516243	251364	132564
526314	352461	243561
536421	453162	314562
<u>546132</u> 153	<u>154263</u> 116	<u>421563</u> 109
219 S ¹ T ² S ³ TS ³ T ² ST ²	220 S ¹ T ² ST ² S ³ T ² ST ²	221 S ¹ TS ³ T ² S ³ T ² ST ²
164532	531264	156432
261543	542361	256143
362514	513462	356214
<u>463521</u> 152	<u>524163</u> 117	456321
222 S ¹ T ² S ³ TS ³ T ² ST ²	223 S ¹ T ² S ³ TS ³ T ² ST ²	224 S ¹ T ² STST ² T ²
463512	624513	154362
164523	631524	251463
261534	642531	352164
<u>362541</u> 99	<u>613542</u> 106	<u>453261</u> 112
225 S ¹ TS ³ TST ² ST ²	226 S ¹ TS ³ T ² STS ³ T ²	227 S ¹ T ² STST ² S ³ T ²
615423	142536	124563
625134	213546	231564
635241	324516	342561
<u>645312</u> 98	431526	<u>413562</u> 138
228 S ¹ T ² S ³ TS ³ T ² S ³ T ²	229 S ¹ TS ³ T ² S ³ TS ³ T ²	230 S ¹ T ² STST ² S ³ T ²
241563	415326	246513
312564	125436	316524
423561	235146	426531
<u>134562</u> 148	345216	<u>136542</u> 129

231 S ¹ T [*] S [*] TS [*] T [*] S [*] T [*] 416523 126534 236541 346512	232 S ¹ TST [*] STSTS 126534 236541 346512 <u>416523</u> 231	233 S ¹ T [*] ST [*] STSTS 521634 532641 543612 514623
234 S ¹ TS [*] T [*] STSTS 146352 216453 326154 436251	235 S ¹ T [*] STS [*] TSTS 352146 453216 154326 <u>251436</u> 187	236 S ¹ T [*] S [*] TS [*] TSTS 654123 651234 652341 <u>653412</u> 209
237 S ¹ TSTST [*] STS 623514 634521 641532 <u>612543</u> 214	238 S ¹ T [*] STST [*] STS 123654 234651 341652 412653	239 S ¹ T [*] S [*] TST [*] STS 134256 241356 312456 <u>423156</u> 203
240 S ¹ TST [*] ST [*] STS 163524 264531 361542 462513	241 S ¹ T [*] S [*] T [*] ST [*] STS 514236 521346 532416 543126	242 S ¹ T [*] STS [*] T [*] STS 324156 431256 142356 <u>213456</u> 185
243 S ¹ T [*] S [*] TS [*] T [*] STS 642153 613254 624351 <u>631452</u> 194	244 S ¹ T [*] ST [*] S [*] T [*] STS 314526 421536 132546 <u>243516</u> 210	245 S ¹ TS [*] T [*] S [*] T [*] STS 562143 563214 564321 <u>561432</u> 213
246 S ¹ T [*] S [*] TS [*] T [*] STS 632451 643152 614253 621354	247 S ¹ T [*] S [*] TS [*] T [*] STS 243651 314652 421653 <u>132654</u> 175	248 S ¹ T [*] STST [*] TS 542136 513246 524316 <u>531426</u> 191
249 S ¹ TS [*] TSTST [*] TS 153642 254613 351624 452631	250 S ¹ TS [*] T [*] STS [*] TS 426153 136254 246351 <u>316452</u> 206	251 S ¹ T [*] STST [*] S [*] TS 243156 314256 421356 <u>132456</u> 188
252 S ¹ T [*] S [*] TS [*] T [*] S [*] TS 413256 124356 231456 <u>342156</u> 200	253 S ¹ TS [*] T [*] S [*] TS [*] TS 156432 256143 356214 <u>456321</u> 221	254 S ¹ T [*] STST [*] S [*] TS 463251 164352 261453 <u>362154</u> 193

255 S¹T²S³TS²T²S²TS
163452
264153
361254
462351

256 S¹TST²STST²S
123546
234516
341526
412536

257 S¹T²ST²STST²S
523641
534612
541623
512634 172

258 S¹TS²T²STST²S
145326
215436
325146
435216

259 S¹T²S²TS²TST²S
652134
653241
654312
651423 173

260 S¹TSTST²ST²S
621543
632514
643521
614532

261 S¹T²STST²ST²S
125643
235614
345621
415632 205

262 S¹TS²T²S²T²ST²S
564132
561243
562314
563421 183

263 S¹TS²T²STS²T²S
425136
135246
245316
315426 177

264 S¹TS²T²S²TS²T²S
153426
254136
351246
452316

265 S¹T²S²TS²T²S²T²S
165423
265134
365241
465312 178

266 S¹T²ST²STSTS²
216534
326541
436512
146523

267 S¹TS²T²STSTS²
463152
164253
261354
362451 189

268 S¹T²STST²STS²
236154
346251
416352
126453 207

269 S¹TST²ST²STS²
635124
645231
615342
625413 196

270 S¹T²S²T²ST²STS²
142536
213546
324516
431526 226

271 S¹T²S²TS²T²STS²
324651
431652
142653
213654 198

272 S¹TS²TSTSTS²TS²
536142
546213
516324
526431 186

273 S¹T²S²TS²T²S²TS²
634152
641253
612354
623451 184

274 S¹TST²STST²S²
235146
345216
415326
125436 229

275 S¹TS²T²STST²S²
453126
154236
251346
352416 195

276 S¹TSTST²ST²S²
215643
325614
435621
145632

277 S¹TS²T²S²TS²T²S²
534126
541236
512346
523416 208

278 S¹T²ST²STSTS²
165234
265341
365412
465123 212

279 S¹TSTST²ST³S³
156243
256314
356421
456132 192

280 S¹T²ST³STSTST
521346
532416
543126
514236 241

281 S¹TS²T³STSTST
146523
216534
326541
436512 266

282 S¹T²STST³STST
123546
234516
341526
412536 256

283 S¹TST²ST³STST
163245
264315
361425
462135

284 S¹T²S³T³ST³STST
514362
521463
532164
543261

285 S¹T²S³TS³T³STST
632514
643521
614532
621543 260

286 S¹TS²T³TS³T³ST
153426
254136
351246
452316 264

287 S¹T²S³TS³T³S³TST
163524
264531
361542
462513 240

288 S¹TST²STST³ST
123465
234165
341265
412365

289 S¹TS²T³STST³ST
145263
215364
325461
435162

290 S¹TSTST²ST³ST
621435
632145
643215
614325

291 S¹TS²T³S³TS³T³ST
153264
254361
351462
452163

292 S¹T²ST³STST³T
216345
326415
436125
146235

293 S¹TSTST²ST³S³T
215436
325146
435216
145326 258

294 S¹TST²ST³STST³
163452
264153
361254
462351 255

295 S¹T²S³T³ST³STST³
514623
521634
532641
543612 233

296 S¹TST²STST³ST³
123654
234651
341652
412653 238

297 S¹TS²T³STST³ST³
145632
215643
325614
435621 276

298 S¹TSTST²ST³ST³
621354
632451
643152
614253 246

299 S¹TS²T³S³TS³T³ST³
153642
254613
351624
452631 249

300 S¹T²ST³STST³S³T³
216453
326154
436251
146352 234

301 S¹TST²ST³STST³
632145
643215
614325
621435 290

302 S¹T²S³T³ST³STST³
143562
214563
321564
432561

303 S ¹ TST ² STST ³ STS	304 S ¹ TS ² T ³ STST ⁴ STS	305 S ¹ TSTST ² ST ³ STS
234165	452163	214635
341265	153264	321645
412365	254361	432615
<u>123465</u> 288	<u>351462</u> 291	143625
306 S ¹ TS ² T ³ S ⁴ TS ⁵ T ⁶ STS	307 S ¹ T ² ST ³ STST ⁴ TS	308 S ¹ T ² S ³ T ⁴ ST ⁵ STST ⁶ S ⁷
532164	163245	435162
543261	264315	145263
514362	361425	215364
<u>521463</u> 284	<u>462135</u> 283	<u>325461</u> 289
309 S ¹ TSTST ² ST ³ STS ⁴	310 S ¹ T ² S ³ T ⁴ ST ⁵ STST ⁶ ST	311 S ¹ TSTST ² ST ³ STST ⁴
146235	143625	214356
216345	214635	321456
326415	321645	432156
<u>436125</u> 292	<u>432615</u> 305	143256
312 S ¹ TSTST ² ST ³ STST ⁴	313 S ¹ TSTST ² ST ³ STST ⁴ S	
214563	143256	
321564	214356	
432561	321456	
<u>143562</u> 302	<u>432156</u> 311	

Relations:

- 1) $S^4 = 1.$
- 2) $T^3 = 1.$
- 3) 26/17 $TS^3TSTS^3TS = 1.$
- 4) 33/10 $T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S = 1.$
- 5) 36/19 $TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1.$
- 6) 42/12 $T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 7) 44/21 $TSTST^3TSTST^3 = 1.$
- 8) 49/14 $T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3 = 1.$
- 9) 56/32 $T^2S^3TSTST^3TST^3 = 1.$
- 10) 64/41 $T^2S^2TS^2TS^2TS^2T^2 = 1.$
- 11) 70/48 $T^2STST^3TSTST^3T^2 = 1.$
- 12) 84/27 $TS^3T^2ST^2S^3T^2ST = 1.$
- 13) 90/37 $TS^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2T = 1.$
- 14) 94/45 $TST^2S^3T^2ST^2S^3T = 1.$

- 15) 97/85 TSTSTSTS²T²S³T²S² = 1.
- 16) 100/95 T²S²TSTSTSTS²T²S³ = 1.
- 17) 104/80 T²S²T²STSTSTS²TS³T²S² = 1.
- 18) 110/82 T²ST²S²TSTSTS²TS²T²S³ = 1.
- 19) 111/68 TS²T²S²TST²S²TS²T²S = 1.
- 20) 113/81 T²S²TS³TSTSTS²TS³T = 1.
- 21) 114/83 T²S³TS³TSTSTS²TS²T = 1.
- 22) 115/61 TST²S³TST²S³TST²S³ = 1.
- 23) 120/53 TS²TST²ST²S³T²S²TS² = 1.
- 24) 123/67 T²ST²ST²ST²S²TS³TS² = 1.
- 25) 124/71 TS²T²ST²ST²ST²S²TS³ = 1.
- 26) 126/55 TSTST²T²ST²S³T²S²TS³ = 1.
- 27) 134/52 TS²T³S³T²ST²S³T²S³T² = 1.
- 28) 135/54 TS³T³S³T²ST²S³T²S²T² = 1.
- 29) 139/88 T²ST³STS²TS²TS³T²S³ = 1.
- 30) 140/69 TS²T²STS²T²S²TST²S³ = 1.
- 31) 142/91 TSTST²TS³TS³TST² = 1.
- 32) 143/76 T²STS²TS²TS³T²S²T²S = 1.
- 33) 144/89 T²S³TS²TS²TS³TS³T = 1.
- 34) 145/74 TST²S²TS²T²STS²T²S² = 1.
- 35) 146/59 TS³T²S²TS²T²S³TS²T²S² = 1.
- 36) 147/66 TS²T²S³TS²T²S²TS³T²S³ = 1.
- 37) 149/63 TSTST²S²T²S²T²S²TS³ = 1.
- 38) 151/87 T²S²TST²S²TS²T²STS³ = 1.
- 39) 154/92 T²STS²T²S³TST²S²TS² = 1.
- 40) 155/79 T²S³TS²T²S³TS³T²S²TS³ = 1.
- 41) 156/58 TST²S²T²S²T²S²TS³TS = 1.
- 42) 157/65 T²ST²S²T²S²T²S³T²ST = 1.
- 43) 158/62 TS³T²S²T²S²T²S²T²S³T² = 1.
- 44) 159/86 T²S²TS³T²S²TS²T²S³TS² = 1.

- 45) 161/78 $T^2STSTS^3TS^2T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 46) 162/96 $TS^2TSTS^3TSTST^3 = 1.$
- 47) 164/73 $TS^3T^2STS^3T^2STS^3T^2S = 1.$
- 48) 167/60 $TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2TS^2 = 1.$
- 49) 168/72 $T^2S^3T^2ST^2S^3T^2ST^2ST = 1.$
- 50) 170/137 $T^2STSTSTS^2T^2S^3T^2S^2T^2 = 1.$
- 51) 171/132 $TS^2TSTSTS^3TST^2S^2TS^2 = 1.$
- 52) 174/121 $TS^2T^2STSTS^3TS^3T^2S^2T = 1.$
- 53) 176/133 $TS^2S^2TSTS^3TST^2STS^3 = 1.$
- 54) 179/127 $TST^2S^2TSTS^3TS^2T^2S^3T = 1.$
- 55) 180/136 $TS^2T^2S^2TSTS^3T^2S^3T^2S^2T = 1.$
- 56) 181/125 $TS^2T^2S^3TSTS^3TS^3TS^2TS^3 = 1.$
- 57) 182/130 $TS^2T^2S^3TSTS^3TS^2TS^2TS = 1.$
- 58) 190/166 $TST^2S^2T^2STSTS^3T^2S^3TS = 1.$
- 59) 197/150 $TST^2STS^3TS^2TS^3T^2S^3T = 1.$
- 60) 199/160 $TS^3T^2S^3TS^2TS^2TST^2ST = 1.$
- 61) 201/128 $TST^2ST^2S^2TS^3TS^2T^2ST = 1.$
- 62) 202/122 $T^2S^2T^2ST^2S^2TS^3TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 63) 204/107 $TST^2STS^3TS^3T^2S^2T^2S^3TS^3 = 1.$
- 64) 211/163 $T^2STS^2TST^2ST^2S^3TS^3T^2S = 1.$
- 65) 215/103 $T^2S^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2T^2 = 1.$
- 66) 216/153 $TST^2ST^2ST^2S^2TS^3TS^2T = 1.$
- 67) 217/116 $T^2S^3T^2ST^2ST^2S^3T^2STS^3T^2S^3 = 1.$
- 68) 218/109 $T^2STS^2T^2ST^2S^3T^2S^2TS^3T^2 = 1.$
- 69) 219/152 $T^2S^3TS^2T^2ST^2S^3TS^3TS^3T^2 = 1.$
- 70) 220/117 $T^2ST^2S^2T^2ST^2S^3T^2STST^2S^3 = 1.$
- 71) 222/99 $T^2S^2TS^3T^2ST^2S^3T^3S^3T^2S^2T^2S^2 = 1.$
- 72) 223/106 $T^2S^3TS^3T^2ST^2S^3T^2S^3T^2S^2T^2S = 1.$
- 73) 224/112 $T^2STSTS^3T^2S^3T^2S^2TST^3 = 1.$
- 74) 225/98 $TS^2TSTS^2T^2S^3T^2S^3T^2S^3T = 1.$

- 75) 227/138 $T^2STST^2S^2T^2S^2T^2S^3TS^3T^2 = 1.$
- 76) 228/148 $T^2S^3TS^3T^2S^2T^2S^2T^2STST^2 = 1.$
- 77) 230/129 $T^2STST^2S^3T^2S^3TS^2TS^3T^2S^3 = 1.$
- 78) 232/231 $TST^2STSTSTSTST^2STS^3 = 1.$
- 79) 235/187 $T^2STS^2TSTST^2S^3TS^3TS^3TS^3 = 1.$
- 80) 236/209 $T^2S^3TS^2TSTST^3T^2S^3TS^3TS^3 = 1.$
- 81) 237/214 $TSTST^2STST^3TS^3T^2S^3TS^3 = 1.$
- 82) 239/203 $T^2S^2IST^2STST^2S^2TST^2STS = 1.$
- 83) 242/185 $T^2STS^2T^2STST^2S^3TS^3T^2S^2TS^3 = 1.$
- 84) 243/194 $T^2S^3TS^2T^2STST^3S^3TST^2STS^2 = 1.$
- 85) 244/210 $T^2ST^2S^2T^2STST^3T^2S^2TST^2 = 1.$
- 86) 245/213 $TS^3T^2S^2T^2STST^3TS^3T^2S^3T^2 = 1.$
- 87) 247/175 $T^2S^3TS^3T^2STST^2S^3T^2S^3TST^2S = 1.$
- 88) 248/191 $T^2STST^2TST^2S^3TS^2TS^3TS^3 = 1.$
- 89) 250/206 $TS^3T^2STS^2TST^2STS^3T^2S^3TS^2 = 1.$
- 90) 251/188 $T^2STST^2S^2TST^2S^3TS^2T^2S^3TS^3 = 1.$
- 91) 252/200 $T^2S^3TS^3T^2S^2TST^2S^2TS^3T^2S^3TS = 1.$
- 92) 253/221 $TS^3T^2S^3TS^3TST^3TS^2TST^2 = 1.$
- 93) 254/193 $T^2STST^2S^3TST^2S^3TST^2S^2T = 1.$
- 94) 257/172 $T^2ST^2STST^2ST^2S^3T^2S^3TS^3T^2S^3 = 1.$
- 95) 259/173 $T^2S^3TS^2TST^2ST^2S^3T^2S^3TS^3T = 1.$
- 96) 261/205 $T^2STST^2ST^2ST^2ST^2STST^2S^3 = 1.$
- 97) 262/183 $TS^3T^2S^2T^2ST^2ST^2S^3TS^3T^2S^3T^2S^2 = 1.$
- 98) 263/177 $TS^3T^2STS^2T^2ST^2S^3T^2S^2T^2S^3TS = 1.$
- 99) 265/178 $T^2S^3TS^3T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S^2T^2ST = 1.$
- 100) 267/189 $TS^3T^2STST^2T^2S^3TS^2T^2STS = 1.$
- 101) 268/207 $T^2STST^2STS^2T^2STST^2STS^2 = 1.$
- 102) 269/196 $TST^2ST^2STS^2T^2S^2T^2S^3T^2S^2T^2S^3 = 1.$
- 103) 270/226 $T^2S^3T^2ST^2STS^2TS^2T^2S^3TST^2 = 1.$
- 104) 271/198 $T^2S^3TS^3T^2STS^2T^2S^2T^2S^3TST^2S^2 = 1.$

- 105) 272/186 $TS^2TSTS^2TS^2T^2S^3TS^2TS^2T^2S^2$ = 1.
- 106) 273/184 $T^2S^3TS^3T^2S^3TS^2T^2S^3TS^3T^2S^3TS^2$ = 1.
- 107) 274/229 $TST^2STST^2S^2TST^2STST^2S^2$ = 1.
- 108) 275/195 $TS^2T^2STST^2S^2T^2S^2T^2S^3T^2S^3TS$ = 1.
- 109) 277/208 $TS^2T^2S^2TS^3T^2S^2TS^2T^2S^2TS^2T^2S^2$ = 1.
- 110) 278/212 $T^2ST^2STSTS^3TS^3T^2S^2T^2ST$ = 1.
- 111) 279/192 $TSTST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2TST^3$ = 1.
- 112) 280/241 $T^2ST^2STSTSTS^3T^2S^2TS^2TS^2TS^3$ = 1.
- 113) 281/266 $TS^3T^2STSTSTS^2T^2S^3T^2S^2TS^2TS$ = 1.
- 114) 282/256 $T^2STST^2STSTS^3TS^3T^2S^3TS^2T^2$ = 1.
- 115) 285/260 $T^2S^2TS^3T^2STSTS^3TS^2TS^2T^2S^3T^2S^3$ = 1.
- 116) 286/264 $TS^2TSTS^2TSTS^2TST^2STST^2$ = 1.
- 117) 287/240 $T^2S^3TS^3T^2S^3TSTS^3T^2S^3TS^3TS^3T^3$ = 1.
- 118) 293/258 $TSTST^2ST^2S^2TS^3TS^2T^2S^3TST^2S^3$ = 1.
- 119) 294/255 $TST^2ST^2STST^3S^2T^2STST^2ST$ = 1.
- 120) 295/233 $T^2S^2T^2ST^2STST^2S^3T^2S^3T^2S^3TS^2TS$ = 1.
- 121) 296/238 $TST^2STST^2ST^2S^3T^2S^3TS^2T^2S^2T$ = 1.
- 122) 297/276 $TS^3T^2STST^2ST^2S^2TS^3TS^3T^2S^3T^2S$ = 1.
- 123) 298/246 $TSTST^2ST^2ST^2S^3T^2S^3TST^2S^2TS$ = 1.
- 124) 299/249 $TS^3T^3S^3TS^2T^2ST^2S^3T^3S^3T^2S^3T^2S^3T^2$ = 1.
- 125) 300/234 $T^2ST^2STSTS^2T^2S^3T^2S^3T^2S^3TST^2S^3$ = 1.
- 126) 301/290 $TST^2ST^2STSTST^2S^3TS^3TS^3T^2S^3T^2S^3$ = 1.
- 127) 303/288 $TST^2STST^2STST^2S^2TS^3T^2S^3TS^2T^2S^3$ = 1.
- 128) 304/291 $TS^3T^2STST^3STST^2S^3TST^2STST^3S$ = 1.
- 129) 306/284 $TS^3T^2S^3TS^3T^2STST^2S^3T^2S^3TS^3TS^2TS^2$ = 1.
- 130) 307/283 $T^2ST^2STSTS^2TST^2S^3T^2S^3TS^3TS^2T^2$ = 1.
- 131) 308/289 $T^2S^2T^2ST^2STSTS^2T^2S^3TS^3T^2S^3TST^2S$ = 1.
- 132) 309/292 $TSTST^2ST^2STS^2T^2S^2T^2S^3T^2S^3TS^2TS$ = 1.
- 133) 310/305 $T^2S^3T^2ST^2STSTSTS^3T^2S^3TS^3TS^2T^2S^3T^2S$ = 1.
- 134) 312/302 $TSTST^2ST^2STST^2S^2T^2S^3T^2S^3TS^3TS^2TS^3$ = 1.
- 135) 313/311 $TSTST^2ST^2STSTST^2S^2T^2S^3TS^3TS^2T^2S^2T^2S$ = 1.

(47) est équivalente à (22). (48) est équivalente à (17).

(49) est équivalente à (4). (50) est équivalente à (15).

$$(51) T^2(T^2S^2TSTSTS) \underset{15}{(S^2TST^2S^2TS^2)} = T^2(STS^2T^2) \underset{19}{(TS^2T^2S^2T)} = 1.$$

(52) est équivalente à (17).

$$(53) T \underset{3}{(TSTS^3TSTS^3)} S^3TSTS^3TS = TS^3TSTS^3TS = 1.$$

(54) est équivalente à (18). (55) est équivalente à (15).

$$(56) TS^2T \underset{3}{(TS^3TSTS^3TS)} S^2TS^2TS^2 = TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1.$$

$$(57) TS^3T \underset{3}{(TS^3TSTS^3TS)} STS^3TS = TS^3TSTS^3TS = 1.$$

$$(58) TS^3(S^2T^2S^2T^2S^2) \underset{5}{(S^2TSTS^3T)} TS^3TS = TS^3(TS^3T) \underset{3}{(T^2S^3TS^3TS)} = 1.$$

(59) est équivalente à (29). (60) est équivalente à (23).

(61) est équivalente à (24). (62) est équivalente à (24).

$$(63) TST \underset{3}{(TSTS^3TS)} \underset{5}{(S^2T^2S^2T^2S^2)} STS^3 = TST(ST^3) \underset{3}{(TS^2T)} STS^3 = 1.$$

$$(64) T^2S \underset{17}{(TS^2TST^2ST^2S^3T^2)} T^2S^3T^2S = T^2S(S^2T^2S) \underset{4}{T^2S^3T^2S} = 1.$$

(65) est équivalente à (17). (66) est équivalente à (24).

$$(67) T^2(T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2) \underset{6}{S^3T^2ST^2S^3T^2S} = T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S = 1.$$

(68) est équivalente à (18). (69) est équivalente à (25).

$$(70) T^2ST^2S^3(S^2T^2ST^2S^3T^2ST^2) \underset{4}{T^2ST^2S^3} = T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3 = 1.$$

$$(71) T^2S^2T^2(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S) \underset{4}{S^2T^2S^2T^2S^2} = T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2 = 1.$$

$$(72) T^2S^3T^3(T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S) \underset{4}{ST^2S^3T^2S} = T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S = 1.$$

(73) est équivalente à (15). (74) est équivalente à (15).

(75) est équivalente à (29). (76) est équivalente à (17).

$$(77) T^2ST(ST^2S^3T^2S^3TS^2TS^2) \underset{17}{ST^2S^3} = T^2ST(TS^3T^2) \underset{4}{ST^2S^3} = 1.$$

$$(78) \underset{15}{TST^2S^3(S^2TSTSTSTS^2)}S^3T^2STS^3 = TST^2S^3(TST)S^3T^2STS^3 =$$

$$\underset{3}{TST(TS^2TSTS^3T)}TSTS^3 = \underset{3}{TSTS^3TSTS^3} = 1.$$

$$(79) \underset{18}{T^2ST^2(T^2S^2TSTS^3)} \underset{29}{(S^2T^2S^3TS^2TS)}STS^3 =$$

$$\underset{4}{T^2ST^2(S^2TSTS^2T^2)} \underset{4}{(TS^2TS^2T^2)}STS^3 = \underset{4}{T^2ST^2S^3T(ST^2S^3T^2S)}TS^3 =$$

$$\underset{4}{T^2ST^2S^3T^2ST^2S^3} = 1.$$

$$(80) \underset{15}{T^2S^3T^2(T^2S^2TSTSTS)} \underset{29}{(S^2T^2S^3TS^2)}TS^2 =$$

$$\underset{4}{T^2S^3T^2(STS^2T^2)} \underset{4}{(TS^2TS^2T^2S^2T^2)}TS^2 = \underset{4}{T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S} = 1.$$

$$(81) \underset{18}{TSTST^2S^2(S^2TSTS^3TS^2)}S \underset{29}{(T^2S^3TS^3)} =$$

$$\underset{3}{TSTST^2S^2(TS^2TST)}S(S^2) \underset{3}{(TS^2TS^3T^2S^3T^2)} =$$

$$\underset{3}{TSTST^2S^2(STS^3TSTS^3T)}S^2TS^3T^2S^3T^2 = 1.$$

$$(82) \underset{17}{T(TS^2TST^2ST^2)} \underset{18}{(T^2ST^2S^2TST)}TSTS = \underset{17}{T(S^2T^2STS)} \underset{18}{(STS^2T^2S)}TSTS =$$

$$\underset{19}{(TS^2T^2STS^2T^2)} \underset{19}{T^2S^2T^2STSTS} = \underset{17}{S^2TS^2T^2S^2T^2S^2TSTS} = 1.$$

$$(83) \underset{19}{(T^2STS^2T^2S^2)} \underset{22}{(S^3TST^2S^3TS)}S^2T^2S^2TS^3 =$$

$$\underset{19}{(S^2T^2S^2TS^3T^2)} \underset{19}{(TS^3T^2ST)}S^2T^2S^2TS^3 = \underset{19}{S(ST^2S^2TS^2T^2STS^2T^2S^2T)}S^3 = 1.$$

$$(84) \underset{83}{T^2S^2(STS^2T^2STST^2S^3TS^3)}S^2T^2STS^2 = \underset{19}{T^2S^2TST^2S^2TS^2T^2STS^2} = 1.$$

$$(85) \underset{17}{T^2S(T^2S^2T^2STSTS^3T)}TS^2TST^2 = \underset{17}{T^2S(S^2TS)}TS^3TST^2 =$$

$$\underset{3}{T(TS^3TSTS^3TS)}T^3 = 1.$$

(86) est équivalente à (17).

$$(87) \underset{4}{(T^2S^3T^2)} \underset{4}{(T^2S^3T^2ST^2)} \underset{4}{(T^2ST^2S^3T^2S)}S^2TST^2S =$$

$$\underset{5}{(S^3TSTS^3)} \underset{5}{(S^3TS)} \underset{5}{(ST)}S^3TST^2S = \underset{5}{S^3T(STS^2TS^2TS^2TS)}T^2S = 1.$$

$$(88) \underset{17}{(T^2STSTS^3)} \underset{22}{(S^3TST^2S^3TS)}STS^3TS^3 = \underset{17}{(S^2TS^2TST^2)} \underset{22}{(TS^3T^2ST)}STS^3TS^3 =$$

$$\underset{3}{S(STS^3TSTS^3T)}S^3 = 1.$$

- (89) $TS^2(ST^2STS^2TS^2)S^2T^2STS^2T^2S^2TS^2 = (TS^2TSTST^2S^2)T^2STS^2T^2S^2TS^2 =$
 $S^2(STST^2S^2T^2STSTS^2T^2S^2T)S^2 = S^2(STST^2S^2T^2S^2) (S^2TSTS^2T)TS^2TS^2 =$
 $S^2(T^2ST^2ST) (T^2S^2)TS^2TS^2 = 1.$
- (90) $T^2STS^2(S^2T^2S^2TST^2S^2) (STS^2T^2S^2)TS^2 =$
 $T^2STS^2(T^2S^2TS^2T^2) (T^2S^2T^2S^2T^2S^2T)TS^2 =$
 $T^2STS^2T^2S^2(TS^2TS^2T^2S^2T^2)S^2T^2S^2 = T^2STS^2T^2(S^2T^2S^2TST^2S^2) =$
 $T^2STS^2T^2(T^2STS^2T^2) = T(TSTS^2TSTS^2)T^2 = 1.$
- (91) $T^2S^2TS(S^2T^2S^2TST^2S^2TS^2)ST^2S^2TS = T^2S^2TS(T^2S^2T)ST^2S^2TS = 1.$
- (92) est équivalente à (3). (93) est équivalente à (22).
- (94) $T^2ST^2S^2(S^2TST^2ST^2S^2T^2S^2TS^2)ST^2S^2 = T^2ST^2S^2(T^2)ST^2S^2 = 1.$
- (95) est équivalente à (17).
- (96) $T^2STS^2(S^2T^2ST^2ST^2S^2)S^2TST^2S^2 = T^2STS^2(T^2ST^2)S^2TST^2S^2 =$
 $T^2STS^2T^2(ST^2S^2TST^2S^2) = T(TSTS^2TSTS^2)T^2 = 1.$
- (97) $TS^2T(TS^2T^2ST^2ST^2S)S^2TS^2T^2S^2T^2S^2 = TS^2T(ST^2S^2T)S^2TS^2T^2S^2T^2S^2 =$
 $TS^2TST(TS^2TS^2TS^2)ST^2S^2T^2S^2 = (TS^2TSTS^2) (S^2T^2ST^2S^2T^2S)S = 1.$
- (98) $TS^2T(TSTS^2) (S^2T^2ST^2S^2T^2S)ST^2S^2TS = TS^2T(ST^2S^2T^2) (T)ST^2S^2TS = 1.$
- (99) est équivalente à (4).
- (100) $TS^2T(TSTSTS^2T^2S^2T^2)T^2S^2T^2STS = TS^2T(S^2T^2S^2)T^2S^2T^2STS =$
 $TS^2TS(S^2T^2S^2T^2S^2T^2S^2T^2)TS^2TS = TS^2TSTS^2TS = 1.$
- (101) $(T^2STST) (TSTS^2T^2ST^2)T^2ST^2STS^2 =$
 $(S^2TS^2TST^2S) (ST^2S^2TS)T^2ST^2STS^2 =$
 $S^2TS^2TS(T^2S^2T^2S^2)TST^2ST^2STS^2 = S^2T^2(T^2S^2TS^2TS^2T^2ST^2ST^2S)TS^2 = 1.$
- (102) $TS(T^2ST^2STS^2T) (TS^2T^2S^2T)TS^2T^2S^2 =$
 $TS(STST^2S^2) (S^2TST^2S^2TS^2)TS^2T^2S^2 =$
 $(TS^2TS^2T) (TS^2TS^2TS^2T)TS^2 = S^2T^2S^2(S^2)TS^2 = 1.$

$$(103) T^2S^3(S^3T^2ST^2STS^2TS^2T)TS^3TST^2 = T^2S^3(TST)S^3TST^2 = 1.$$

$$(104) T^2S^2TS(S^2T^2STS^2T^2S^2T) (TS^3TST)TS^2 = \\ T^2S^2TS(T^2S^2TS^3) (S^3T^2S)TS^2 = T^2S^2TST^2S^2TS^2T^2STS^2 = 1.$$

$$(105) TS^2TS^3(S^2TS^2TS^2T) (TS^3TS^3TS^3T)TS^2 = \\ TS^2TS^3(T^2S^2) (S^2TS^3TS^2)TS^2 = TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1.$$

(106) est équivalente à (101).

$$(107) TS^2(S^3T^2STST^2S^2TST^2S^3)S^2TST^2S^2 = TS^2(T^2STS^2T^2)S^2TST^2S^2 = 1.$$

$$(108) (TS^3T) (TSTST^2S^2T^2S^3)T^2S^3T^2S^3TS = \\ (S^2T^2ST^2S^3) (ST^2ST)T^2S^3T^2S^3TS = 1.$$

$$(109) (TS^3T^2S^3TS^3T) (TS^2TS^3T^2S^3T^2)T^2S^3T^2S^2 = \\ (ST^2S^3T^2S^3TS^3T^2S^3) (S^2T^2S^3TS^3)T^2S^3T^2S^2 = \\ S^2(S^3T^2S^3T^2S^3T^2) (T^2S^3T^2ST^2S^3T^2) (T^2S^3) (T^2S^3T^2S^2) = \\ S^2(TS^2T^2S^3T^2S^2) (S^3) (S^3TST)S^2T^2S^3 = 1.$$

(110) est équivalente à (17). (111) est équivalente à (23).

$$(112) T^2ST(TSTSTSTST^2)ST^2S^3TS^3TS^2TS^3 = \\ T^2ST(S^2TST)ST^2S^3TS^3TS^2TS^3 = 1.$$

$$(113) TS^3T(TSTSTSTST^2T^2S^3T^2S^2)STST^3TS = TS^3TSTST^3TS = 1.$$

$$(114) T^2STS^3(S^2T^2STSTST^3TS^3T^2S^2)STST^3T^2 = T^2STS^3(T)STST^3T^2 = 1.$$

$$(115) T^2S^2TS(S^2T^2STSTST^3TS^3T^3)T^2S^3T^2S^3T^2S^3 = \\ T^2S^2TS(TS^2)T^2S^3T^2S^3T^2S^3 = 1.$$

$$(116) TS^2TSTST^3(S^2TSTST^3TST)TSTST^3 = TS^2(S^3TSTST^3TST)ST^2 = 1.$$

$$(117) (TS^3TS^3TS^3TS^3)ST(TS^3TSTST^3T)TS^3 = S^2TS^3T(ST) (S^3)TS^3 = 1.$$

- (118) $TSTS^2(S^3T^2ST^2S^3) (S^3TS^2TS^3T) (TS^3TST)TS^3 =$
 $\frac{4}{TSTS^2(TS^3T)} \frac{24}{(T^2S^2TS^3TS^3)} \frac{3}{(S^3T^2S)TS^3} =$
 $TSTS^3(S^3TSTS^3TST)TSTS^3 = TSTS^3TSTS^3 = 1.$
 $\frac{3}{3}$
- (119) $TST^2S^2(S^3T^2STST^2S^3T^2S^3)S^2TST^2ST = TST^2S^2(TST^2S^2T^3)S^2TST^2ST =$
 $\frac{77}{TS(T^2S^2TST^2S^2)T^2S^2TST^2ST} = TS(S^2T^2S^2TS^2T^2)T^2S^2TST^2ST =$
 $\frac{19}{TST^2S^2(S^2T^2S^2TS^2TS^2)S^2T^2ST} = TS^2T^2S(T^2)S^2T^2ST = 1.$
 $\frac{5}{4}$
- (120) $T^2S^2T^2S^2(S^3T^2STST^2S^3T^2S^3T)TS^3TS^3TS =$
 $\frac{77}{T^2S^2T^2S^2(TST^2S^2)TS^3TS^3TS} = T^2(S^2T^2S^2TST^2S^2T)S^3TS^3TS =$
 $\frac{19}{T^2(T^2S^3TS^3)S^3TS^3TS} = 1.$
 $\frac{3}{3}$
- (121) $TST^2STS^2(S^3T^2ST^2S^3T^2S)S^2TS^3T^2S^3T = TST^2STS^2(T)S^3TS^3T^2S^3T =$
 $\frac{4}{TST^2S^3(S^2TS^3TS^2TS^2)ST^2S^3T} = TST^2S^3T^2ST^2S^3T = 1.$
 $\frac{5}{4}$
- (122) $(TS^3T^2STST^2S^2) (S^2T^2S^2TS^2) (STS^2T)TS^2T^2S =$
 $\frac{108}{(S^3T^2STSTS^2T) (T^2S^2TS^2T^2ST) (T^2ST^2S^3)TS^2T^2S} =$
 $\frac{19}{S^2T^2STS(T^2S^2T^2S^2T^2)S^3TS^2T^2S} = S^2T^2STS(S^2TS^2)S^2TS^2T^2S =$
 $\frac{6}{S^3T(TSTS^3TSTS^3)T^2S} = 1.$
 $\frac{3}{3}$
- (123) $TST^2(T^2ST^2ST^2ST^2S^2) (ST^2S^3TST^2S^3)S^3TS =$
 $\frac{24}{TST^2(S^2T^3ST^2) (T^2ST^2S^2T^2)S^3TS} = TS(T^2S^2T^2STSTS^3)T^2S^3TS =$
 $\frac{22}{TS(S^2TST^2)T^2S^3TS} = 1.$
 $\frac{17}{3}$
- (124) $TS^2(ST^2S^2T^2) (T^2S^3T^2ST^2S^3T^2S) (ST^2S^3T^2S)ST^3 =$
 $\frac{4}{TS^2(TSTS^3)} \frac{4}{(TST)ST^2} = TS^2(TSTS^3TSTS^3)S^2T^2 = 1.$
 $\frac{4}{3}$
- (125) $T^2ST^2STS(TS^2T^2S^2T^2S^2T^2S^3T^2)T^2ST^2S^3 =$
 $\frac{15}{T^2ST^2STS(S^3T^2S^2)T^2ST^2S^3} = T^2ST^2S^2T^2ST^2S^3 = 1.$
 $\frac{4}{4}$

$$\begin{aligned}
(133) \quad & T(\overset{24}{TS^2T^2ST^2ST^2}) (\overset{17}{T^2STSTST^2T}) (\overset{24}{TS^3TS^2TS^3T}) TS^2T^2S = \\
& T(\overset{24}{ST^2S^2TS^2}) (\overset{15}{S^2TS^2TS}) (\overset{24}{S^2TS^2TS^2}) TS^2T^2S = \\
& TS^2(\overset{15}{S^2T^2S^2TSTST^2T^2}) (T^2S^2TS^2TS^2T^2S) = \\
& TS^2(TSTS)T^2S^2TS^2TS^2T^2S = \\
& TS^2(\overset{29}{S^2TSTST^2S^2}) (\overset{3}{STS^2TS}) (\overset{3}{STS^2T}) TS = \\
& TS^2(\overset{3}{T^2STST^2T}) (T^2ST^2) (T^2ST^2S^2) TS = TS^2T(\overset{3}{TSTS^2TST}) TS^2TS = \\
& TS^2TSTS^2TS = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(134) \quad & (\overset{29}{TSTST^2S^2}) (S^2T^2STST^2S^2T^2S^2T) (\overset{3}{TS^3TS}) (\overset{5}{S^2TS^2TS^2}) S = \\
& (\overset{87}{ST^2STS^2T}) (T^2STS^2TS^2) (S^2T^2ST^2) (T^2S^2T^2) S = \\
& ST(\overset{3}{TSTS^2TS}) (\overset{19}{S^2TS^2T^2STS^2T^2}) S = ST(\overset{3}{ST^2}) (TS^2T^2S^2) S = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(135) \quad & TSTS^2(S^2T^2ST^2STS^2) (S^2TST^2S^2T) (\overset{24}{TS^3TS^2TS^2}) (\overset{4}{ST^2S^2T^2S}) = \\
& TSTS^2(\overset{29}{TST^2S^2T^2}) (\overset{22}{TS^3T^2STS^2}) (\overset{24}{ST^2S^2TS^2T}) (TST) = \\
& TSTS^2TS^2(\overset{4}{S^2T^2ST^2S^2T^2}) (T^2S^2T^2ST^2) T^2 = \\
& TSTS^2TS^2(TS^2) (S^2TS) T^2 = T(\overset{5}{STS^2TS^2TS^2TS}) T^2 = 1.
\end{aligned}$$

Commentaire :

A la suite de cette élimination, il reste les cinq relations les plus simples, à savoir :

$$\begin{aligned}
(1) \quad & S^4 = 1 \\
(2) \quad & T^3 = 1 \\
(3) \quad & TS^2TSTS^2TS = 1 \\
(5) \quad & TS^2TS^2TS^2TS^2 = 1 \\
(15) \quad & TSTSTSTST^2S^2T^2S^2 = 1
\end{aligned}$$

Cette dernière relation peut être transformée de la façon suivante :

$$(15') \quad (TS)^4(\overset{3}{ST^2S^2T^2S})S = (TS)^4(TST)S = (TS)^6 = 1$$

Relations caractéristiques :

Finalement, les cinq relations caractéristiques pour la base $S_8 = (1234)$ $T_8 = (456)$ deviennent :

$$\begin{aligned}
(I) \quad & S^4 = 1 \\
(II) \quad & T^3 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad & (TS^3TS)^2 = 1 \\
 \text{(IV)} \quad & (TS^2)^4 = 1 \\
 \text{(V)} \quad & (TS)^6 = 1
 \end{aligned}$$

La reconstitution du groupe S_6 à partir de la base $S_{28} = (1234)$, $T_{28} = (12)(3456)$ comporte 320 tableaux et 142 relations. L'élimination donne pour cette base les relations caractéristiques suivantes:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & S^4 = 1 \\
 \text{(II)} \quad & (T^2S^2)^2T^{-2}S^2 = 1 \\
 \text{(III)} \quad & (T^3S)^4 = 1 \\
 \text{(IV)} \quad & (TS^2)^4 = 1 \\
 \text{(V)} \quad & TS^2T^2STS^2T^3ST^2S^3 = 1
 \end{aligned}$$

La reconstitution du groupe S_6 à partir de la base $S_{78} = (12345)$, $T_{78} = (1436)$ comporte 268 tableaux et 126 relations. Après élimination de 118 relations, il reste le système des 8 relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad & S^5 = 1 \\
 \text{(2)} \quad & T^4 = 1 \\
 \text{(3)} \quad & TSTST^3ST^2S^3 = 1 \\
 \text{(4)} \quad & T^2S^2TST^2S^2TS = 1 \\
 \text{(6)} \quad & T^2S^4TST^3S^4T^2S^2 = 1 \\
 \text{(7)} \quad & T^2ST^2ST^2ST^2S = 1 \\
 \text{(8)} \quad & T^3S^2T^2ST^3S^2T^2S = 1 \\
 \text{(11)} \quad & TS^3T^3STS^3T^3S = 1
 \end{aligned}$$

Or, parmi ces relations, ce sont les plus simples qui doivent être éliminées pour ramener à cinq le nombre des relations caractéristiques. En effet, il faut éliminer les relations:

$$\begin{aligned}
 \text{(7)} \quad & (T^2S)^4 = 1 \\
 \text{(8)} \quad & (T^3S^2T^2S)^2 = 1 \\
 \text{(11)} \quad & (TS^3T^3S)^2 = 1
 \end{aligned}$$

Éliminons d'abord la relation (8). La relation (3) peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
 \text{(3)} \quad & STS^3(S^3TST)T^2ST^2S^2 = 1 \\
 \text{(a)} \quad & STS^3(TS^4TS^4)T^2ST^2S^4 = 1
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (1) et (2):

$$\begin{aligned}
 T^3(S^4T^3)(TST) &= 1 \\
 T^3(T^2S^2TST^2S^2)(S^2TS^4TS^4) &= 1 \\
 TS^2TST^2S^4TS^4TS^4 &= 1 \\
 S(T^2S^4T)S^4TS^4TS^2T &= 1 \\
 S(S^3T^2STS^4)S^4TS^4TS^2T &= 1 \\
 S^4T^2STS^3TS^4TS^2T &= 1
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad STS^*TS^*TS^*(S^*TS^*T^*) = 1$$

En comparant les expressions (a) et (b), on obtient:

$$(8) \quad \begin{aligned} T^*ST^*S^* &= S^*TS^*T^* \\ T^*ST^*S^*T^*ST^*S^* &= 1 \end{aligned}$$

Éliminons la relation (11) par une méthode analogue. Nous utilisons à cet effet la relation (13). Mais, comme cette relation est une conséquence des relations (1), (2), (3), (6), (16) et que (16) est à son tour une conséquence de (1), (2), (3) et (6), nous n'introduisons aucune relation étrangère au système des huit relations de la page précédente.

$$(13) \quad \begin{aligned} S(STS^*T^*)(T^*S^*TS)S^*T &= 1 \\ S(STS^*T^*)(S^*T^*S^*T^*)S^*T &= 1 \\ (STS^*T^*)S^*T^*S^*T^*S^*TS &= 1 \end{aligned}$$

Ecrivons à nouveau la relation (13):

$$(13) \quad \begin{aligned} S^*(T^*S^*)T^*S^*T^*S^*T^* &= 1 \\ S^*(ST^*S^*TST^*)T^*S^*T^*S^*T^* &= 1 \\ S^*T^*S^*TST^*S^*T^*S^*T^* &= 1 \\ (TS^*T^*S^*)S^*T^*S^*T^*S^*TS &= 1 \end{aligned}$$

La comparaison des égalités (c) et (d) permet de déduire:

$$(11) \quad TS^*T^*S^* = STS^*T^*$$

Enfin, il reste à démontrer que la relation (7) est une conséquence des relations (1), (2), (3), (4) et (6). Pour ce faire, nous avons recours à nouveau à la relation (13) et aussi à la relation (11) et à la relation (8):

$$(8) \quad T^*S(ST^*ST^*)(TS^*T^*)T^*S = 1$$

$$(e) \quad T^*S(ST^*ST^*)(STS^*T^*S)T^*S = 1$$

La relation (6) peut s'écrire:

$$(f) \quad \begin{aligned} T^*(S^*T^*S^*T^*)(TS^*T)S^*T^*S &= 1 \\ T^*(TST^*S^*)(S^*T^*S^*T^*S^*)S^*T^*S &= 1 \\ T^*S(T^*S^*T^*S^*)STS^*T^*ST^*S &= 1 \end{aligned}$$

Il suffit de comparer les relations (e) et (f) pour en déduire:

$$(7) \quad (T^*S)^4 = 1$$

Les cinq relations caractéristiques de la base:

$$S_{79} = (12345) \quad T_{79} = (1436)$$

sont:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} & \quad S^5 = 1 \\
 \text{(II)} & \quad T^4 = 1 \\
 \text{(III)} & \quad (TS)^2 T^3 S T^3 S^3 = 1 \\
 \text{(IV)} & \quad (T^2 S^2 TS)^2 = 1 \\
 \text{(V)} & \quad T^3 S^4 T S T^3 S^4 T^2 S^2 = 1
 \end{aligned}$$

Pour l'étude de la base $S_{83} = (12354)$, $T_{83} = (123456)$ il convenait de commencer la reconstitution par T (voir remarque N° 4 p. 25). Cette reconstitution comporte 224 tableaux et 106 relations. Le système des relations caractéristiques de cette base est le suivant:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} & \quad T^6 = 1 \\
 \text{(II)} & \quad S^5 = 1 \\
 \text{(III)} & \quad (S^3 T^2)^2 = 1 \\
 \text{(IV)} & \quad (TS)^2 T^5 S^3 T^6 S^2 = 1 \\
 \text{(V)} & \quad (S^4 T)^4 = 1
 \end{aligned}$$

Dans les calculs précédents, comme dans tous les calculs analogues effectués par cette méthode, le système des relations caractéristiques est établi d'après la liste des relations fournies par la reconstitution du groupe. Or, il est clair qu'il existe entre S et T nombre de relations qui ne figurent pas dans cette liste. Pour ne citer qu'un exemple, les substitutions $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$ satisfont à la relation:

$$(12) \quad (T S T S^2 T S^3)^4 = 1$$

qui ne figure pas dans la liste des relations de cette base.

Il s'ensuit que les systèmes de relations caractéristiques que nous avons établis ne sont valables que si toute relation

$$(13) \quad g(S, T) = 1$$

est une conséquence des relations obtenues par la reconstitution du groupe.

Théorème 1. — Soit G un groupe d'ordre fini engendré par deux éléments générateurs S et T, respectivement d'ordre m et n. Soit (14) $f_j(S, T) = 1$ ($j = 1, 2, \dots, l$), les relations obtenues en reconstituant le groupe G à partir de S et T, l désignant le nombre de ces relations et i_j désignant le nombre des lettres S et T figurant dans le premier membre de (14). Toute relation $g(S, T) = 1$ entre S et T est une conséquence des relations (14).

Démonstration.

Les seules relations (13) comportant une seule lettre S ou T sont de la forme:

$$(15) \quad S^r = 1 \quad \text{ou} \quad T^s = 1 \quad \text{où } r \text{ et } s \text{ sont entiers.}$$

Pour que ces relations soient compatibles avec les relations (14), il faut que:

$$r = r'm \quad s = s'n \quad \text{où } r' \text{ et } s' \text{ sont entiers.}$$

Les relations:

$$(16) \quad S^{r'm} = 1 \quad T^{s'n} = 1$$

découlent immédiatement des relations $S^m = 1$ ou $T^n = 1$ qui font partie des relations (14).

Si l'expression $g(S,T)$ comporte plusieurs lettres S et T , nous pouvons supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que dans l'expression g figurent $2p$ lettres S et T , que cette expression commence par T et finit par S . (Voir remarque 7, page 26.)

Posons:

$$(17) \quad g(S,T) = T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} S^{a_4} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

Les exposants a_{2x} ($x = 1, 2, \dots, p$) sont compris entre 1 et $m-1$ et les exposants a_{2x-1} ($x = 1, 2, \dots, p$) sont compris entre 1 et $n-1$. Si ce n'était pas le cas, on les réduirait respectivement module m ou module n au moyen des relations $S^m = 1$ et $T^n = 1$.

D'ailleurs, dans ce qui suit, nous supposons implicitement que tous les exposants de S sont compris entre 1 et $m-1$ et les exposants de T entre 1 et $n-1$.

Considérons successivement les expressions:

$$(18) \quad \begin{array}{l} T \quad \quad \quad , T^2 \quad \quad \quad , \dots , T^{a_1} \quad \quad \quad , \\ T^{a_1} S \quad \quad , T^{a_1} S^2 \quad \quad , \dots , T^{a_1} S^{a_2} \quad \quad , \\ T^{a_1} S^{a_2} T \quad , T^{a_1} S^{a_2} T^2 \quad , \dots , T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \quad , \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

et ainsi de suite jusqu'à:

$$T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S^2, \dots, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{p-1}} S^{a_p}$$

si p est pair, ou:

$$T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T^2, \dots, T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{p-1}} T^{a_p}$$

si p est impair.

Une des expressions (18) comportant k facteurs S et T ($k \leq p$):

$$(19) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{k-1}} S^u \quad , \quad u \leq a_k \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$

$$(20) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots S^{a_{k-1}} T^v \quad , \quad v \leq a_k \quad \text{si } k \text{ est impair,}$$

représente nécessairement les k premiers facteurs du premier membre d'une relation (14), d'après la loi de formation de ces relations:

$$(21) \quad f_{2k, j'}^{j'}(S, T) = T^{a_1} S^{a_2} \dots T^{a_{k-1}} S^u T^{b_{k+1}} \dots T^{b_{2k-1}} S^{b_{2k}} = 1$$

si k est pair, ($j' \leq l$)

$$(22) \quad f_{2k, j''}^{j''}(S, T) = T^{a_1} S^{a_2} \dots S^{a_{k-1}} T^v S^{b_{k+1}} \dots T^{b_{2k-1}} S^{b_{2k}} = 1$$

si k est impair ($j'' \leq l$)

(Voir relations 8, 9 et remarque 7 page 26.)

Le cas $k = p$ ferait de $g(S, T)$ une relation (14). Dans ce cas, le théorème est démontré. Il reste à prouver que le théorème est vrai pour $k < p$.

Deux cas sont à envisager suivant que k est pair ou impair. Nous ferons la démonstration pour k pair. La démonstration pour k impair conduirait à des conclusions identiques. Pour k pair, deux cas sont possibles:

- a) $u = a_k$
- b) $u < a_k$

a) La relation (21) devient dans ce cas:

$$(23) \quad T^{a_1} S^{a_2} T^{a_3} \dots T^{a_{k-1}} S^{a_k} = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}}$$

Portons cette expression dans la relation (17); il vient:

$$(24) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

$$(25) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} (T^{-b_{2k-1}} \dots T^{a_{k+1}} T^{-b_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p} - b_{2k}}) S^{b_{2k}}$$

Pour démontrer que $g(S, T) = 1$, il suffit de prouver que:

$$(26) \quad g'(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{a_{k+1}} T^{-b_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p} - b_{2k}} = 1$$

Or, le nombre de droite comporte $2p_1 = 2p - 2$ lettres S et T au lieu de $2p$.

b) $u < a_k$. Posons $u_1 = a_k - u$.

En tenant compte de la relation (21), la relation (17) devient:

$$(27) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p}}$$

Le membre de droite comporte $2p+1$ lettres S et T.

$$(28) \quad g(S, T) = S^{-b_{2k}} (T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p} - b_{2k}}) S^{b_{2k}}$$

Pour démontrer que $g(S, T) = 1$, il suffit de prouver que:

$$(29) \quad g_1(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+2}} \dots T^{a_{2p-1}} S^{a_{2p} - b_{2k}} = 1$$

Le membre de droite comporte $2p$ lettres S et T, mais on a $u_1 < a_k$. D'après la loi de formation des relations (14), il existe nécessairement une relation de la forme:

$$(30) \quad f_{2k, j_1}^{j_1}(S, T) = T^{-b_{2k-1}} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u'} T^{c_{k+1}} \dots T^{c_{2k'}-1} S^{c_{2k'}} = 1$$

($k' \geq k, j_1 \leq l, u' \leq u_1$)

Quatre cas sont à distinguer:

- | | |
|-------------|------------|
| 1) $k' > k$ | $u' < u_1$ |
| 2) $k' = k$ | $u' = u_1$ |
| 3) $k' > k$ | $u' = u_1$ |
| 4) $k' = k$ | $u' < u_1$ |

1) Ce cas est en contradiction avec la loi de formation des relations (14).

2) La relation (30) devient:

$$(31) \quad f_{2k, j_2}^{j_2}(S, T) = T^{-b_{2k}-1} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{d_{k+1}} \dots T^{d_{2k}-1} S^{d_{2k}} = 1$$

Ce cas est semblable à celui étudié sous a). De (31), on déduit:

$$(32) \quad T^{-b_{2k}-1} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} = S^{-d_{2k}} T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}}$$

et la relation (29) devient:

$$(33) \quad g_1(S, T) = S^{-d_{2k}} (T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}+a_{k+1}} S^{a_{k+1}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-d_{2k}}) S^{d_{2k}}$$

Pour prouver que $g_1(S, T) = 1$, il faut prouver que:

$$(34) \quad g_2(S, T) = T^{-d_{2k}-1} \dots T^{-d_{k+1}+a_{k+1}} S^{a_{k+1}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-d_{2k}} = 1$$

Le second membre comporte $2p_1 = 2p - 2$ lettres S et T.

3) La relation (30) devient:

$$(35) \quad f_{2k, j_2}^{j_2}(S, T) = T^{-b_{2k}-1} S^{-b_{2k}-2} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u_1} T^{c_{k-1}} \dots T^{c_{2k'}-1} S^{c_{2k'}} = 1$$

Les seconds membres de (29) et (35) ont les mêmes $k'-1$ premiers facteurs S, T avec les mêmes exposants et on a $k'-1 > k-1$. (29) peut donc être transformée au moyen de (35) en remplaçant dans (29) les $k' > k$ premiers facteurs S et T.

4) La relation (30) devient:

$$(36) \quad f_{2k, j_2}^{j_2}(S, T) = T^{-b_{2k}-1} \dots T^{-b_{k+1}} S^{u'} T^{h_{k+1}} \dots T^{h_{2k}-1} S^{h_{2k}} = 1$$

Posons: $u_2 = u_1 - u'$

La relation (29) devient alors:

$$(37) \quad g_1(S, T) = S^{-h_{2k}} (T^{-h_{2k}-1} \dots T^{-h_{k+1}} S^{u_2} T^{a_{k+1}} S^{a_{k+1}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-h_{2k}}) S^{h_{2k}}$$

L'étude de $g_1(S, T)$ est remplacée par l'étude de:

$$(38) \quad g_1'(S, T) = T^{-h_{2k}-1} \dots T^{-h_{k+1}} S^{u_2} T^{a_{k+1}} \dots T^{a_{2p}-1} S^{a_{2p}-b_{2k}-h_{2k}}$$

dont le second membre comporte $2p$ lettres S et T, mais avec:

$$u_2 < u_1 < a_k.$$

2. En un nombre fini q d'opérations, nous obtenons une expression $g_1^{(q)}(S,T)$ comportant $2p$ lettres S et T et rentrant dans l'un des cas 1) ou 2).

Nous avons ainsi établi un algorithme qui permet de remplacer l'étude de l'expression $g(S,T)$:

soit par l'étude d'une expression $g'(S,T)$ ou $g_2(S,T)$ comportant $2p_1 = 2p - 2$ lettres S et T. (Cas a et b2),

soit par l'étude d'une expression comportant $2p$ lettres S, T comme $g_1(S,T)$, mais en utilisant pour la transformer une relation (14) ayant $2k' > 2k$ lettres S, T (Cas b3).

On obtient successivement des expressions comprenant $2p, 2p_1, 2p_2, \dots$ lettres S et T ($2p > 2p_1 > 2p_2 > \dots$) en utilisant des relations (14) comportant $2k, 2k', 2k'', \dots$ lettres S et T ($2k < 2k' < 2k'' < \dots$). Du fait que $p > k$, il existe nécessairement un indice inférieur y et un indice supérieur (z) tels que:

$$2p_y = 2k^{(z)}$$

si bien que l'expression comportant $2p_y$ lettres S et T fait partie des relations (14).

c.q.f.d.

Exemple pour la base S_8, T_8 :

$$g(S,T) = (TSTS^2TS^3)^4 = 1. \quad \text{En effet:}$$

$$\text{cas b} \quad (TSTS^2TS^2)STSTS^2TS^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

31

$$(TS^3T^2S^2T^2)STSTS^2TS^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\text{cas b3} \quad (TS^3T^2S^2T^2S^2S)TS^2TS^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

86

$$(T^2TST^2ST^2)TS^2TS^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\text{cas b4} \quad (T^2TST^2S^2)ST^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

37

$$(ST^2STS^2T)ST^3TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\text{cas b3} \quad S(T^2STS^2TSTS)S^2TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

79

$$S(ST^2S^2T^2ST^2ST)S^2TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\text{cas b2} \quad S^2(T^2S^2T^2S^2T^2S^2)TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

103

$$S^2(TS^3T^2S^2T^2)TSTS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\text{cas b2} \quad S^2(TS^3T^2S^2S^3)TS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

47

$$S^2(S^3TST^2S^3T)TS^2TS^3TSTS^2TS^3 =$$

$$\begin{aligned}
\text{cas b2} \quad & S(TST^2S^3T^3)S^2TS^3TSTS^2TS^3 = \\
& \quad \quad \quad 14 \\
& \quad \quad \quad S(T^2STS^3)S^2TS^3TSTS^2TS^3 = \\
\text{cas b2} \quad & S(T^2STSTS^3)TSTS^2TS^3 = \\
& \quad \quad \quad 45 \\
& \quad \quad \quad S(S^2TS^2TST^3)TSTS^2TS^3 = \\
\text{cas b2} \quad & S^3(TS^2TS^3)TS^2TS^3 = \\
& \quad \quad \quad 5 \\
& \quad \quad \quad S^3(S^2T^3S^2T^3)TS^2TS^3 = \\
\text{relation (16)} \quad & S^8 = 1
\end{aligned}$$

V. RÉPARTITION EN CLASSES DES BASES DU GROUPE S_6

Au cours de ce chapitre, nous montrons que les relations caractéristiques de toutes les bases du groupe S_6 peuvent se déduire des relations caractéristiques de quatre d'entre elles. A partir des systèmes de relations caractéristiques des bases $S_8, T_8; S_{28}, T_{28}; S_{79}, T_{79}; S_{83}, T_{83}$; étudiées dans le précédent chapitre, il est possible d'établir un système de cinq relations caractéristiques pour n'importe quelle base S, T du groupe symétrique S_n .

Connaissant les relations caractéristiques de la base $S_{28} = (1234)$, $T_{28} = (12)(3456)$ par exemple, il est inutile d'effectuer à nouveau tous les calculs pour la base $S_{30} = (1234)$, $T_{30} = (12)(3654)$. On remarque, en effet, que:

$$(1) \quad \begin{aligned} S_{28} &= S_{30} \\ T_{28} &= T_{30}^{-1}. \end{aligned}$$

Pour obtenir les relations caractéristiques de la base S_{30}, T_{30} , il suffit de remplacer T par T^{-1} dans les relations caractéristiques de S_{28}, T_{28} (page 51) du système:

$$(2) \quad \begin{aligned} S^4 &= 1 \\ (T^2 S^2)^2 T^{-2} S^2 &= 1 \\ (T^3 S)^4 &= 1 \\ (T S^2)^4 &= 1 \\ T S^2 T^2 S T S^2 T^3 S T^2 S^3 &= 1 \end{aligned}$$

on déduit immédiatement pour la base S_{30}, T_{30} :

$$(3) \quad \begin{aligned} S^4 &= 1 \\ (T^{-2} S^2)^2 T^2 S^2 &= 1 \\ (T^{-3} S)^4 &= 1 \\ (T^{-1} S^2)^4 &= 1 \\ T^{-1} S^2 T^{-1} S T^{-1} S^3 T^{-3} S T^{-2} S^3 &= 1 \end{aligned}$$

D'une façon générale, soient S, T et S', T' deux bases du groupe S_n . Comme S, T est une base du groupe S_n , S' et T' peuvent s'obtenir par composition finie de S et de T:

$$(4) \quad \begin{aligned} S' &= f'(S,T) \\ T' &= g'(S,T) \end{aligned}$$

Inversement, comme S', T' est une base de S_n , S et T peuvent s'obtenir par composition finie de S' et de T' :

$$(5) \quad \begin{aligned} S &= f(S', T') \\ T &= g(S', T') \end{aligned}$$

Définition 8. — Etant donné deux bases S, T et S', T' du groupe S_n , liées par les relations (4) et (5), nous dirons que les relations (4) sont *réversibles* si l'on peut déduire le système (5) du système (4) sans l'aide d'aucune autre relation entre les éléments du groupe.

Ainsi, les relations:

$$(6) \quad \begin{aligned} S' &= S^3 T S^2 T \\ T' &= S^2 T \end{aligned}$$

sont réversibles. On a:

$$\text{ou (7)} \quad \begin{aligned} S' T'^{-2} &= S^3 T S^2 T \cdot T^{-1} S^{-2} \cdot T^{-1} S^{-2} \\ S &= S' T'^{-2} \end{aligned}$$

D'autre part, la seconde relation (6) donne, en tenant compte de (7):

$$\text{ou (8)} \quad \begin{aligned} T' &= S' T'^{-2} S' T'^{-2} \cdot T \\ T &= T'^2 S'^{-1} T'^2 S'^{-1} T' \end{aligned}$$

Définition 9. — Nous dirons que deux bases S, T et S', T' , du groupe S_n sont de la même *classe*, si elles sont liées par un système de relations réversibles.

Au sens de cette définition, nous pouvons répartir en classes les bases du groupe S_n , deux bases faisant partie de la même classe si, et seulement si elles sont liées par un système de relations réversibles.

Remarque 8. — Les classes ainsi obtenues sont des classes d'équivalence ¹⁾.

Théorème 2. — Deux bases semblables S, T et S', T' du groupe S_n sont de la même classe.

Démonstration. — Par hypothèse, les bases S, T et S', T' sont semblables. Il existe donc une substitution R telle que l'on ait soit:

$$(9) \quad \begin{aligned} S' &= R S R^{-1} \\ T' &= R T R^{-1} \end{aligned}$$

soit:

$$(10) \quad \begin{aligned} S' &= R T R^{-1} \\ T' &= R S R^{-1} \end{aligned}$$

Nous ferons la démonstration pour le premier cas, la démonstration pour le deuxième cas étant tout à fait similaire.

¹⁾ Dubreil (3) p. 18, N° 5.

Comme S, T est une base du groupe \mathbf{S}_n , R peut s'obtenir par composition finie de S et de T :

$$(11) \quad R = f(S, T)$$

Des relations (9), on tire immédiatement:

$$(12) \quad \begin{aligned} S &= R^{-1}S'R \\ T &= R^{-1}T'R \end{aligned}$$

où R est fonction de S et de T . Comme S', T' est aussi une base de \mathbf{S}_n , R peut s'obtenir par composition finie de S' et de T' :

$$(13) \quad R = g(S', T')$$

Le théorème sera démontré si nous pouvons déduire la relation (13) des systèmes (9), (11) et (12) sans l'aide d'aucune autre relation.

Or, dans (11), remplaçons S et T par leur valeur tirée de (12):

$$(14) \quad R = f(S, T) = f(R^{-1}S'R, R^{-1}T'R)$$

où R , dans le membre de droite, est fonction de S et de T . Comme:

$$(15) \quad f(R^{-1}S'R, R^{-1}T'R) = R^{-1}f(S', T')R$$

on déduit:

$$(16) \quad R = f(S, T) = R^{-1}f(S', T')R$$

d'où, en composant à gauche avec R et à droite avec R^{-1} :

$$(17) \quad R = f(S', T')$$

Nous obtenons R en fonction de S' et de T' . Ainsi la fonction f de la relation (11) est identique à la fonction g de la relation (13). R s'obtient en composant S' et T' de la même façon que S et T . Il suffit alors de remplacer R par $f(S', T')$ dans les relations (12).

c.q.f.d.

Exemple:

$$(9)' \quad \begin{aligned} S' &= S^3T^{-2}(S)T^2S^{-3} \\ T' &= S^3T^{-2}(T)T^2S^{-3} \end{aligned}$$

$$\text{avec (11)' } \quad R = S^3T^{-2}$$

De (9)', tirons S et T :

$$(12)' \quad \begin{aligned} S &= T^2S^{-3}(S')S^3T^{-2} \\ T &= T^2S^{-3}(T')S^3T^{-2} \end{aligned}$$

Remplaçons dans (11)' S et T par leur valeur tirée de (12)':

$$(14)' \quad S^3 T^{-2} = (T^2 S^{-3} S' S^3 T^{-2})^3 (T^2 S^{-3} T' S^3 T^{-2})^{-2}$$

$$(16)' \quad S^3 T^{-2} = T^2 S^{-3} (S'^3 T'^{-3}) S^3 T^{-2}$$

$$(17)' \quad S^3 T^{-2} = S'^3 T'^{-2}$$

$$\text{d'où:} \quad S = T'^2 S'^{-3} (S') S'^3 T'^{-2}$$

$$T = T'^2 S'^{-3} (T') S'^3 T'^{-3}$$

A titre d'exemple pour le groupe S_6 , les bases:

$$\begin{aligned} S_8 &= (1234) & T_8 &= (456) \text{ et} \\ S_{33} &= (1234) & T_{33} &= (13)(2456) \end{aligned}$$

sont de la même classe, car elles sont liées par les relations

$$(18) \quad S_{33} = S_8 \quad T_{33} = S_8^2 T_8$$

qui sont réversibles:

$$(19) \quad S_8 = S_{33} \quad T_8 = S_8^{-2} T_{33} = S_{33}^{-2} T_{33}$$

Par contre, les bases:

$$\begin{aligned} S_{83} &= (12354) & T_{83} &= (123456) \\ S_{97} &= (13425) & T_{97} &= (123456) \end{aligned}$$

sont liées par des relations non réversibles:

$$(20) \quad S_{97} = S_{83}^2 \quad T_{97} = T_{83}$$

On ne peut, en effet, tirer S_{83} de ce système, à moins d'introduire une relation supplémentaire telle que $S_{97}^5 = S_{83}^5$.

Remarque 9. — Si deux bases S, T et S', T' du groupe S_n sont liées par des relations non réversibles, ce fait n'entraîne pas nécessairement que les bases S, T et S', T' soient de classes différentes.

$$\text{Les bases de } S_6: \quad \begin{aligned} S_7 &= (123456) & T_7 &= (14)(236) \\ S_{71} &= (123456) & T_{71} &= (152) \end{aligned}$$

sont liées par le système:

$$(21) \quad S_{71} = S_7 \quad T_{71} = S_7^{-1} T_7^2 S_7$$

Ces relations ne sont pas réversibles. Pourtant les bases S_7, T_7 et S_{71}, T_{71} font partie de la même classe, car il existe entre elles les relations:

$$(22) \quad \begin{aligned} S_{71} &= R S_7^{-1} R^{-1} \\ T_{71} &= R S_7^2 T_7^{-1} R^{-1} \end{aligned} \quad \text{avec } R = (13)(46)$$

Posons:

$$(23) \quad S' = R S_7 R^{-1} \quad T' = R T_7 R^{-1}$$

D'après le théorème 2, les bases S_7, T_7 et S', T' sont de la même classe. Le système (22) devient:

$$(24) \quad \begin{aligned} S_{71} &= S'^{-1} \\ T_{71} &= S'^s T'^{-1} \end{aligned}$$

Ce système est réversible:

$$(25) \quad \begin{aligned} S' &= S_{71}^{-1} \\ T' &= T_{71}^{-1} S'^s = T_{71}^{-1} S_{71}^{-s} \end{aligned}$$

Donc les bases S_7, T_7 et S_{71}, T_{71} sont de la même classe.

Remarque 10. — Soient S, T et S', T' deux bases du groupe S_n appartenant à la même classe et (26) $f_i(S, T) = 1$ ($i=1, 2, \dots, m$) un système de relations caractéristiques de la base S, T , on peut établir un système de relations caractéristiques de la base S', T' en remplaçant dans les relations (26) S et T par leur valeur en fonction de S' et de T' .

Pour connaître les relations caractéristiques de toutes les bases du groupe S_6 , il suffit de répartir les bases de ce groupe en classes et d'établir un système de relations caractéristiques pour une base de chaque classe.

Pour la répartition en classes des bases du groupe S_6 , nous avons utilisé le tableau II (p. 65). S, T étant une base de S_6 , chacun des couples d'expressions figurant dans le tableau II forme aussi une base de S_6 . Toutes ces bases sont de la même classe et sont semblables à une base du tableau I (p. 23).

Le tableau II comprend les bases $S' = f(S, T)$, $T' = g(S, T)$ où les fonctions f et g sont de la forme $S^i T^j$ ou $T^j S^i$. Les exposants i et j sont choisis de façon que les relations entre S, T et S', T' soient réversibles. Ce tableau est suffisant pour l'usage que nous en faisons et il est inutile de considérer des fonctions f et g plus complexes. Comme pour S_6 l'ordre maximum de S et de T est 6, nous n'avons pas étendu le tableau au-delà des exposants ± 3 .

Remarque 11. — La seconde colonne du tableau II s'obtient à partir de la première en changeant T en T^{-1} . La troisième colonne s'obtient à partir de la première en changeant S en S^{-1} . Enfin, la quatrième colonne s'obtient à partir de la première en changeant à la fois S en S^{-1} et T en T^{-1} .

Remarque 12. — Si les bases S, T et S, T^{-1} sont semblables, il suffit de considérer dans le tableau II les bases de numéro pair. C'est le cas, par exemple, pour la base $S_{23} = (1342)$ $T_{23} = (123456)$ car:

$$(27) \quad \begin{aligned} S_{23} &= R S_{23} R^{-1} \\ T_{23} &= R T_{23}^{-1} R^{-1} \quad \text{avec } R = (14)(23)(56) \end{aligned}$$

Remarque 13. — Si les bases S, T et S^{-1}, T sont semblables ou si les bases S, T et S^{-1}, T^{-1} sont semblables, il suffit de considérer les bases de numéro $4m$

et $4m + 1$ ($m = 0, 1, \dots, 20$). C'est le cas, en particulier, pour la base $S_4 = (123456)$, $T_4 = (13)(456)$ car :

$$(28) \quad \begin{aligned} S_4 &= RS_4^{-1}R^{-1} \\ T_4 &= RT_4^{-1}R^{-1} \quad \text{avec } R = (13)(46). \end{aligned}$$

Remarque 14. — Si les bases S, T ; S, T^{-1} et S^{-1}, T sont semblables, il suffit de considérer dans le tableau II les bases de numéro $4m$ ($m = 0, 1, \dots, 20$). C'est le cas pour $S_8 = (1234)$, $T_8 = (456)$ car :

$$(29) \quad \begin{aligned} S_8 &= RS_8R^{-1} \\ T_8 &= RT_8^{-1}R^{-1} \quad \text{avec } R = (56) \end{aligned}$$

$$(30) \quad \begin{aligned} S_8 &= RS_8^{-1}R^{-1} \\ T_8 &= RT_8R^{-1} \quad \text{avec } R = (13) \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le tableau II, en premier lieu, pour la base S_{11}, T_{11} , ce qui nous a permis d'obtenir un ensemble de 10 bases, à savoir :

1, 26 à 29, 31, 132 à 135.

Nous dirons que ces bases appartiennent à la classe I.

De la même façon, on démontre que la base S_2, T_2 fait partie de la même classe que les bases :

2, 3, 42, 43, 46 à 51, 90 à 101, 106 à 109, 148, 149.

Par définition, nous dirons que ces bases sont provisoirement de la classe II, aucune de ces bases ne figurant dans la classe I.

La base S_4, T_4 est de la classe I. En effet, l'application du tableau II fournit des bases de la classe I auxquelles viennent s'ajouter les bases :

4, 5, 30, 44, 45.

La base S_6, T_6 appartient à la classe III avec les bases :

6, 7, 38 à 41, 56, 57, 60 à 63, 68 à 71, 82 à 89, 110 à 117,
136 à 147, 150 à 155, 160 à 163.

Pour la base S_8, T_8 , qui ne s'est pas encore rencontrée dans les ensembles précédents, nous donnons le détail des calculs dans le tableau III (p. 66). Ces bases, obtenues grâce au tableau II font partie de la classe IV. La classe V a pour représentant la base S_9, T_9 . Comme les bases S_8, T_8 et S_9, T_9 se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 , les bases obtenues à partir de S_9, T_9 correspondent aux bases de la classe IV par les automorphismes externes du groupe S_6 . Nous désignerons par V cette nouvelle classe.

La base S_{10}, T_{10} fait partie de la classe II, de même que les bases suivantes :

10 à 17, 34 à 37, 78 à 81, 126 à 129.

La base S_{22}, T_{22} est de la classe III, de même que les bases: 22 à 25 et 74 à 77.

La base S_{63}, T_{63} fait partie de la classe IV comme le prouvent les calculs du tableau IV (p. 66). A nouveau, les calculs effectués à partir de la base S_{63}, T_{63} donnent les bases de la classe V qui correspondent à celles de la classe IV par les automorphismes externes du groupe S_6 .

L'ensemble des bases indépendantes du tableau I est ainsi épuisé. Le nombre des classes du groupe S_6 est donc au plus égal à 5. La même étude faite à partir d'autres bases du tableau I n'a pas permis d'abaisser le nombre des classes. Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans ce chapitre par le théorème suivant:

Théorème 3. — Les bases du groupe symétrique S_6 se répartissent au plus en cinq classes de la manière suivante:

La classe I comprend 15 bases, 3 de première catégorie et 12 de seconde catégorie.

La classe II comprend 48 bases, 2 de première catégorie et 46 de seconde catégorie.

La classe III comprend 62 bases, 2 de première catégorie et 60 de seconde catégorie.

La classe IV et la classe V comprennent chacune 19 bases de seconde catégorie.

Remarque 15. — Les automorphismes externes du groupe S_6 transforment en elles-mêmes les classes I, II et III. Par contre, ces automorphismes permutent les classes IV et V entre elles.

TABLEAU II

S , T	1) S , T ⁻¹	2) S ⁻¹ , T	3) S ⁻¹ , T ⁻¹
4) S , ST	5) S , ST ⁻¹	6) S ⁻¹ , S ⁻¹ T	7) S ⁻¹ , S ⁻¹ T ⁻¹
8) S , S ⁻¹ T	9) S , S ⁻¹ T ⁻¹	10) S ⁻¹ , ST	11) S ⁻¹ , ST ⁻¹
12) ST , T	13) ST ⁻¹ , T ⁻¹	14) S ⁻¹ T , T	15) S ⁻¹ T ⁻¹ , T ⁻¹
16) ST ⁻¹ , T	17) ST , T ⁻¹	18) S ⁻¹ T ⁻¹ , T	19) S ⁻¹ T , T ⁻¹
20) S , S ² T	21) S , S ² T ⁻¹	22) S ⁻¹ , S ⁻² T	23) S ⁻¹ , S ⁻² T ⁻¹
24) S , S ⁻² T	25) S , S ⁻² T ⁻¹	26) S ⁻¹ , S ² T	27) S ⁻¹ , S ² T ⁻¹
28) ST ² , T	29) ST ⁻² , T ⁻¹	30) S ⁻¹ T ² , T	31) S ⁻¹ T ⁻² , T ⁻¹
32) ST ⁻² , T	33) ST ² , T ⁻¹	34) S ⁻¹ T ⁻² , T	35) S ⁻¹ T ² , T ⁻¹
36) S , S ³ T	37) S , S ³ T ⁻¹	38) S ⁻¹ , S ⁻³ T	39) S ⁻¹ , S ⁻³ T ⁻¹
40) S , S ⁻³ T	41) S , S ⁻³ T ⁻¹	42) S ⁻¹ , S ³ T	43) S ⁻¹ , S ³ T ⁻¹
44) ST ³ , T	45) ST ⁻³ , T ⁻¹	46) S ⁻¹ T ³ , T	47) S ⁻¹ T ⁻³ , T ⁻¹
48) ST ⁻³ , T	49) ST ³ , T ⁻¹	50) S ⁻¹ T ⁻³ , T	51) S ⁻¹ T ³ , T ⁻¹

52) S^2T , $T^{-1}S^{-1}$	53) S^2T^{-1} , TS^{-1}	54) $S^{-2}T$, $T^{-1}S$	55) $S^{-2}T^{-1}$, TS
56) S^2T , ST	57) S^2T^{-1} , ST^{-1}	58) $S^{-2}T$, $S^{-1}T$	59) $S^{-2}T^{-1}$, $S^{-1}T^{-1}$
60) ST^2 , $T^{-1}S^{-1}$	61) ST^{-2} , TS^{-1}	62) $S^{-1}T^2$, $T^{-1}S$	63) $S^{-1}T^{-2}$, TS
64) ST^2 , ST	65) ST^{-2} , ST^{-1}	66) $S^{-1}T^2$, $S^{-1}T$	67) $S^{-1}T^{-2}$, $S^{-1}T^{-1}$
68) S^2T , $T^{-1}S^{-2}$	69) S^2T^{-1} , TS^{-2}	70) $S^{-2}T$, $T^{-1}S^2$	71) $S^{-2}T^{-1}$, TS^2
72) S^2T , S^2T	73) S^2T^{-1} , S^2T^{-1}	74) $S^{-2}T$, $S^{-2}T$	75) $S^{-2}T^{-1}$, $S^{-2}T^{-1}$
76) ST^3 , $T^{-2}S^{-1}$	77) ST^{-3} , T^2S^{-1}	78) $S^{-1}T^3$, $T^{-2}S$	79) $S^{-1}T^{-3}$, T^2S
80) ST^3 , ST^2	81) ST^{-3} , ST^{-2}	82) $S^{-1}T^3$, $S^{-1}T^2$	83) $S^{-1}T^{-3}$, $S^{-1}T^{-2}$

TABLEAU III

$$S=S_8=(1234) \quad T=T_8=(456)$$

1 $RSR^{-1}=(1234)=S_8$	$RT^{-1}R^{-1}=(456)=T_8$	$R=(56)$
2 $RS^{-1}R^{-1}=(1234)=S_8$	$RTR^{-1}=(456)=T_8$	$R=(13)$
3 $RS^{-1}R^{-1}=(1234)=S_8$	$RT^{-1}R^{-1}=(456)=T_8$	$R=(13)(56)$
4 $S=(1234)=S_{21}$	$ST=(123456)=T_{21}$	
8 $RSR^{-1}=(1432)=S_{19}$	$RS^{-1}TR^{-1}=(123456)=T_{19}$	$R=(13)$
12 $RSTR^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RTR^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(14)(25)(36)$
16 $RST^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RTR^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(14)(2536)$
20 $S=(1234)=S_{28}$	$S^2T=(13)(2456)=T_{28}$	
52 $RS^2TR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(13)(46)$
56 $S^2T=(13)(2456)=S_{123}$	$ST=(123456)=T_{123}$	
60 $RST^2R^{-1}=(123456)=S_{158}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(126543)=T_{158}$	$R=(135246)$
64 $RST^2R^{-1}=(123456)=S_{156}$	$RSTR^{-1}=(134562)$	$R=(135246)$

TABLEAU IV

$$S=S_{53}=(135624) \quad T=T_{53}=(123456)$$

1 $RSR^{-1}=(142653)=S_{55}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{55}$	$R=(14)(23)(56)$
2 $S^{-1}=(142653)=S_{55}$	$T=(123456)=T_{55}$	
3 $RS^{-1}R^{-1}=(135624)=S_{53}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{53}$	$R=(14)(23)(56)$
4 $RSTR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(15)(236)$
5 $RST^{-1}R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(1342)$
8 $RS^{-1}TR^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(14356)$
9 $RS^{-1}T^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=S_{123}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{123}$	$R=(163)(245)$
12 $T^2ST^{-2}=(14)(2536)=S_{131}$	$T=(123456)=T_{131}$	
13 $RST^{-1}R^{-1}=(15432)=S_{108}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{108}$	$R=(15)(24)$
16 $ST^{-1}=(12345)=S_{105}$	$T=(123456)=T_{105}$	
17 $RSTR^{-1}=(14)(2536)=S_{131}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{131}$	$R=(12)(36)(45)$
20 $RS^2TR^{-1}=(1432)=S_{19}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{19}$	$R=(15)(236)$
21 $RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{168}$	$RSR^{-1}=(126543)=T_{168}$	$R=(15346)$
24 $RS^{-2}TR^{-1}=(123456)=S_{156}$	$RSR^{-1}=(134562)=T_{156}$	$R=(163245)$

25	$RS^{-2}T^{-1}R^{-1}=(1234)=S_{21}$	$RSR^{-1}=(123456)=T_{21}$	$R=(253)(46)$
28	$T^{-2}ST^{-2}=(142653)=S_{55}$	$T=(123456)=T_{55}$	
29	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{59}$	$RST^{-2}R^{-1}=(12)=T_{59}$	$R=(26)(35)$
32	$T=(123456)=S_{59}$	$TST^2=(12)=T_{59}$	
33	$RST^2R^{-1}=(135624)=S_{53}$	$RT^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{53}$	$R=(16)(25)(34)$
36	$RSR^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RS^2TR^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(253)(46)$
37	$RSR^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(14356)$
44	$T^{-1}ST^{-2}=(15432)=S_{103}$	$T=(123456)=T_{103}$	
52	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_{33}$	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=T_{23}$	$R=(15362)$
53	$RTS^{-1}R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(1452)$
56	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_{33}$	$RSTR^{-1}=(13)(2456)=T_{23}$	$R=(164235)$
57	$RST^{-1}R^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(1452)$
60	$RT^{-1}S^{-1}R^{-1}=(13)(2456)=S_{123}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{123}$	$R=(12)(3465)$
61	$RTS^{-1}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(15)(24)$
64	$RSTR^{-1}=(13)(2654)=S_{125}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{125}$	$R=(12)(3465)$
65	$RST^{-1}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(15432)$
68	$RT^{-1}S^{-2}R^{-1}=(1234)=S_9$	$RS^2TR^{-1}=(456)=T_9$	$R=(15436)$
69	$RTS^{-2}R^{-1}=(123456)=S_{65}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123)=T_{65}$	$R=(143562)$
72	$RS^2TR^{-1}=(1234)=S_8$	$RS^2TR^{-1}=(456)=T_8$	$R=(154)(36)$
73	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(123456)=S_{67}$	$RS^2T^{-1}R^{-1}=(132)=T_{67}$	$R=(162354)$
76	$RST^3R^{-1}=(13524)=S_{119}$	$RT^{-2}S^{-1}R^{-1}=(123456)=T_{119}$	$R=(16342)$
77	$RST^{-3}R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RT^2S^{-1}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(165)(24)$
80	$RST^3R^{-1}=(14253)=S_{121}$	$RST^2R^{-1}=(123456)=T_{121}$	$R=(16325)$
81	$RST^3R^{-1}=(12345)=S_{72}$	$RST^{-2}R^{-1}=(56)=T_{72}$	$R=(165)(24)$

Théorème 4. — Toutes les bases du groupe symétrique S_6 peuvent être caractérisées par un système de cinq relations.

Démonstration. — La base S_8, T_8 est de la classe IV; la base S_{23}, T_{23} appartient à la classe I tandis que la base S_{72}, T_{72} est de la classe II et la base S_{93}, T_{93} de la classe III. Or, chacune de ces bases peut être caractérisée par cinq relations, comme nous l'avons établi dans le chapitre précédent. De plus, d'après la remarque 15, la base S_8, T_8 est caractérisée par les mêmes relations que la base S_8, T_8 . D'après le théorème 3, et la remarque 10, il existe un système de cinq relations caractéristiques pour toute base du tableau I. Comme toute base de S_6 est semblable à une base de ce tableau I et que deux bases semblables sont caractérisées par les mêmes relations, le théorème 4 est démontré.

M^{lle} S. Piccard a démontré que le groupe symétrique S_n peut être caractérisé par $n-1$ relations, quelle que soit la base S, T envisagée ($n = 3, 4, 5$)¹⁾. Nous pouvons donc affirmer que :

Théorème 5. — Toutes les bases S, T du groupe symétrique S_n peuvent être caractérisées par un système de $n-1$ relations pour $n = 3, 4, 5, 6$.

¹⁾ S. Piccard (24) et (27).

Le théorème 4 est avant tout un théorème d'existence. Pratiquement, les relations caractéristiques d'une base S,T de S_6 , déduites des relations caractéristiques d'une base S',T' de la même classe sont souvent compliquées. Parfois même, le système obtenu reflète mal les caractères de la base considérée. Pour cette raison, nous ne pouvions nous contenter de calculer les relations caractéristiques pour une seule base de chaque classe. Nous avons étudié spécialement 26 bases pour lesquelles nous avons établi un système de relations caractéristiques « original ». Ce sont les bases :

1, 2, 4, 8, 11, 21, 28, 35, 43, 45, 49, 57, 73, 75, 79, 83, 91,
105, 107, 111, 127, 137, 144, 150, 160, 162.

Remarque 16. — Le système de relations caractéristiques obtenu par le calcul direct n'est pas nécessairement le plus simple. Preuve en soit le système obtenu pour la base $S_2 = (123456)$, $T_2 = (12)(364)$:

$$(31) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^6 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & (TS)^9 = 1 \\ \text{IV} & T^2 S^2 T^2 S^2 T^4 S^2 S^4 = 1 \\ \text{V} & T^2 S^2 T^2 S^2 T^4 S^4 T S^5 = 1 \end{array}$$

Comme nous allons le montrer, ce système peut être transformé en un autre système équivalent et plus simple. La relation (31,IV) peut se mettre sous la forme :

$$(32) \quad \begin{array}{l} T(TS)ST^2ST^2(TST)TS^4 = T(S^6T^6)ST^2ST^2(S^6)TS^4 = 1 \text{ ou} \\ \text{III} \quad \text{III} \\ TS^5T^2ST^2ST^2S^5TS^4 = 1 \end{array}$$

en tenant compte des relations I, II, III de (31). Transformons alors la relation (31,V) :

$$\begin{array}{l} S^4TS^2T^2S^2T^2ST^4 = 1 \\ S(S^4TS^2T^2S^2T^2ST^4)TST = 1 \text{ d'après (31,III)} \\ S^5TS^2T(TS)S(ST)TST^6ST = 1 \\ \text{III} \quad \text{III} \\ S^6TS^2T(S^6T^6)S(T^6S^6)TST^6ST = 9 \text{ d'après (31,I,II)} \\ TST^2STS^2TS^6TS^6T^6ST^6S^6 = 1 \\ (TST^2S^2)S^6TS^6TS^6TS^6T^6ST^6S^6 = 1 \text{ d'après (31,I)} \\ 32 \\ (ST^2ST^2S^2T)S^6TS^6TS^6TS^6T^6ST^6S^6 = 1 \text{ d'après (31,I,II)} \\ ST^2ST^2(S^6T^6)T^6ST^6S^6 = 1 \\ (S^6T^6)T^6ST^6S^6 \cdot ST^2ST^2 = 1 \\ (ST)^6T^6(TSTS)T^3 = 1 \text{ d'après (31,I,II)} \\ \text{III} \\ \underline{(S^6T^6)^6 = 1} \text{ du fait que } T^6 = 1 \end{array}$$

Ainsi, les cinq relations caractéristiques de la base S_2, T_2 deviennent:

$$(33) \quad \begin{array}{llll} S^6 = 1 & T^6 = 1 & (TS)^2 = 1 & T^2S^2T^2ST^4ST^2S^4 = 1 \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ (S^6T)^5 = 1 & & & \text{V} \end{array}$$

Remarque 17. — Il se peut que pour certaines bases, le système des relations caractéristiques obtenu par le calcul direct soit plus compliqué que le système déduit des relations caractéristiques d'une autre base de la même classe. Si ce cas est relativement rare, il se produit cependant pour la base $S_{127} = (12)(3465)$, $T_{127} = (123456)$.

Par le calcul direct, nous avons les relations caractéristiques suivantes:

$$(34) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^4 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & S^2TSTS^2TS^2T^5 = 1 \\ \text{IV} & S^2T^8STS^3T^4ST^4 = 1 \\ \text{V} & S^3T^4STS^3T^3S^2T^4 = 1 \end{array}$$

Or, on peut déduire les relations caractéristiques de la base S_{127}, T_{127} de celles de la base $S_{36} = (1234)$, $T_{36} = (15)(2463)$ qui sont:

$$(35) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & T^4 = 1 \\ \text{II} & T^2ST^2S^{-1}T^2S^{-2} = 1 \\ \text{III} & (T^2S^2TS)^2 = 1 \\ \text{IV} & (TS^2)^5 = 1 \\ \text{V} & (TS)^6 = 1 \end{array}$$

On a, en effet:

$$(36) \quad \begin{array}{l} S_{128} = RT_{36}R^{-1} = (1234)(56) \\ T_{128} = RT_{36}S_{36}R^{-1} = (12)(456) \\ \text{avec } R = (16)(23). \end{array}$$

On déduit de ce système:

$$(37) \quad \begin{array}{l} S_{36} = R^{-1}S_{128}^{-1}T_{128}R \\ T_{36} = R^{-1}S_{128}R \end{array}$$

Pour avoir les relations caractéristiques de la base S_{128}, T_{128} il suffit de remplacer dans (35) S et T par leur valeur tirée de (37). On obtient:

$$(38) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & S^4 = 1 \\ \text{II} & S^2 \cdot S^{-1}T \cdot S^2 \cdot T^{-1}S \cdot S^2 \cdot T^{-1}ST^{-1}S = 1 \text{ ou} \\ & \underline{S^2TS^2T^{-1}S^3T^{-1}ST^{-1} = 1} \\ \text{III} & (S^2 \cdot S^{-1}TS^{-1}T \cdot S \cdot S^{-1}T)^2 = 1 \text{ ou} \\ & \underline{(T^2STS^{-1})^2 = 1} \end{array}$$

$$(38) \quad \begin{array}{l} \text{IV} \quad (\underline{S.S^{-1}TS^{-1}T})^6 = 1 \quad \text{ou} \\ \quad \quad (\underline{T^2S^{-1}})^6 = 1 \\ \text{V} \quad (\underline{S.S^{-1}T})^6 = 1 \quad \text{ou} \\ \quad \quad \underline{T^6 = 1} \end{array}$$

La base $S_{129} = (12)(3564)$, $T_{129} = (123456)$ est caractérisée par les relations (38) puisque les bases S_{128}, T_{128} et S_{129}, T_{129} se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 . Enfin pour obtenir les relations caractéristiques de S_{127}, T_{127} , on remarquera que:

$$(39) \quad \begin{array}{l} S_{129} = S_{127}^{-1} \\ T_{129} = T_{127} \end{array}$$

Les relations caractéristiques de la base S_{127}, T_{127} sont donc:

$$(40) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad S^4 = 1 \\ \text{II} \quad S^2TS^2T^3ST^3S^3T^6 = 1 \\ \text{III} \quad (T^2S^3TS)^2 = 1 \\ \text{IV} \quad (T^3S)^6 = 1 \\ \text{V} \quad T^6 = 1 \end{array}$$

Ce système est plus satisfaisant que le système (34).

Nous avons établi par le calcul direct les relations caractéristiques de la base $S_{73} = (12345)$ $T_{73} = (14)(23)(56)$:

$$(41) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad S^5 = 1 \\ \text{II} \quad T^2 = 1 \\ \text{III} \quad (TS)^8 = 1 \\ \text{IV} \quad (S^4TST)^6 = 1 \\ \text{V} \quad [(TS^2)^2(TS)^2]^2 = 1 \end{array}$$

De ce système, nous pouvons déduire les relations caractéristiques des bases $S_{68} = (123)(45)$, $T_{68} = (12)(34)(56)$ et $S_{69} = (123456)$, $T_{69} = (12)$ qui se correspondent par un automorphisme externe du groupe S_6 . On a:

$$(42) \quad \begin{array}{l} S_{68} = RS_{73}T_{73}R^{-1} \\ T_{68} = RT_{73}R^{-1} \quad \text{avec } R = (13625). \end{array}$$

On tire de ce système:

$$(43) \quad \begin{array}{l} S_{73} = R^{-1}S_{68}T_{68}^{-1}R \\ T_{73} = R^{-1}T_{68}R \end{array}$$

Le système (41), compte tenu des relations (43) devient:

$$(44) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad (ST^{-1})^6 = 1 \quad \text{ou} \quad \underline{(ST)^6 = 1} \\ \text{II} \quad \underline{T^2 = 1} \\ \text{III} \quad (T.ST^{-1})^6 = 1 \quad \text{ou} \quad \underline{S^6 = 1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV} \quad & (ST^{-1}ST^{-1}ST^{-1}ST^{-1}.T.ST^{-1}.T)^3 = I \text{ ou} \\
 & \quad \quad \quad \underline{I} \\
 & \quad \quad \quad \underline{(TS^{-1}.TS)^3 = I} \\
 \text{V} \quad & [(T.ST^{-1}ST^{-1})^2(TST^{-1})^2]^2 = I \text{ ou} \\
 & \quad \quad \quad (TST^{-1}S^2T^{-1}S^2T^{-1})^2 = I \text{ ou} \\
 & \quad \quad \quad \underline{(TS^{-2}TS^2)^2 = I}
 \end{aligned}$$

Or, ce système de relations caractéristiques de la base $S_{56} = (123456)$, $T_{56} = (12)$ est précisément le système de Moore pour le groupe symétrique de degré 6 (chap. II relations 28, p. 15) avec cinq relations au lieu de six. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre VI.

Remarque 18. — Pour quelques systèmes de relations caractéristiques du groupe S_6 , l'une des relations $S^m = 1$, $T^n = 1$ est une conséquence des autres relations. C'est le cas pour les relations caractéristiques de la base S_{35}, T_{35} (35). L'ordre de S n'apparaît pas explicitement, mais se déduit facilement des relations (35,I,II):

$$\begin{aligned}
 (35,II) \quad & T^2ST^2S^{-1}T^2S^{-2} = I \\
 \text{inverse:} \quad & S^2T^{-2}ST^{-2}S^{-1}T^{-2} = I \text{ ou d'après (35,I)} \\
 & T^2ST^2S^{-1}T^2S^2 = I \\
 \text{On a donc:} \quad & T^2ST^2S^{-1}T^2S^{-2} = T^2ST^2S^{-1}T^2S^2 \\
 & \quad \quad \quad S^{-2} = S^2 \\
 & \quad \quad \quad \underline{S^4 = 1}
 \end{aligned}$$

Comme on peut le constater dans le tableau V des bases indépendantes du groupe S_6 et de leurs relations caractéristiques, pour les bases 28, 29, 30, 31, 56, 57, 160, 161, l'ordre de T ne figure pas dans les relations caractéristiques explicitement. Dans chacun de ces cas, on trouve une relation du type:

$$(45) \quad S^{2m'} = 1 \quad \text{ou} \quad S^{m'} = S^{-m'}$$

et une relation du type:

$$(46) \quad (T^{n'}S^{m'})^2T^{-n'}S^{m'} = 1$$

L'inverse de (46) est:

$$S^{-m'}T^{n'}S^{-m'}T^{-n'}S^{-m'}T^{-n'} = 1$$

ou, en tenant compte de (45):

$$(47) \quad T^{n'}S^{m'}T^{-n'}S^{m'}T^{-n'}S^{m'} = 1$$

La comparaison des relations (46) et (47) donne:

$$\begin{aligned}
 T^{n'}S^{m'}T^{n'}S^{m'}T^{-n'}S^{m'} &= T^{-n'}S^{m'}T^{n'}S^{m'}T^{-n'}S^{m'} \\
 T^{n'} &= T^{-n'} \\
 \underline{T^{2n'} &= 1}
 \end{aligned}$$

Remarque 19. — Lorsque l'ordre de S et de T n'apparaît pas explicitement dans les relations caractéristiques d'une base et lorsque la démonstration de $S^m = 1$ ou $T^n = 1$ ne s'obtient pas aussi facilement que dans les exemples de la remarque 18, il y a avantage à conserver un système de six relations caractéristiques. Il est en effet utile de connaître immédiatement l'ordre des éléments générateurs S et T.

Donnons un exemple où l'ordre de S ne se détermine pas aisément. Les relations caractéristiques de la base S_7, T_7 sont:

$$(48) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & (ST)^4 = 1 \\ \text{II} & T^6 = 1 \\ \text{III} & (ST^3)^3 = 1 \\ \text{IV} & (T^4STS^2)^2 = 1 \\ \text{V} & (TS^{-1})^2T^6S^{-1}TS = 1 \end{array}$$

Partons de III:

$$\begin{aligned} T^3ST^2ST^2S &= 1 \\ T^3ST^2(TST)T(TS) &= 1 \\ &\quad \text{I} \quad \text{I} \\ T^3ST^2(S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}S^{-1})T(S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}) &= 1 \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(S^{-1}TS^{-1}T^{-1}S^{-1})T^{-1}S^{-1}T^{-1} &= 1 \\ &\quad \text{V} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(T^{-1}S^{-1}T^{-1})T^{-1}S^{-1}T^{-1} &= 1 \quad \text{car } T^6 = T^{-1} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(T^{-1}S^{-1})T^{-1}S^{-1}T^{-1} &= 1 \\ &\quad \text{I} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(STSTST)T^{-2}S^{-2}T^{-2} &= 1 \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(STS)T(ST^{-1}S^{-1}T^{-1}) &= 1 \quad \text{V car } STS = ST^{-1}S \\ &\quad \text{V} \quad \text{V} \\ T^3ST^2S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}(TSTS^{-1}T)T(TS^{-1}T^6S^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

$$(49) \quad \underline{T^3ST^2S^{-2}T^3S^{-1}T^6S^{-1} = 1}$$

Considérons I:

$$\begin{aligned} T^4STSTSTST^{-3} &= 1 \\ T^4(STS)T(STS^2)(S^{-1}T^{-3}) &= 1 \\ &\quad \text{49} \quad \text{IV} \quad \text{III} \\ T^4(T^3ST^2S^{-2}T^3)T(T^{-4}S^{-2}T^{-1}S^{-1}T^{-4})(T^3ST^3S) &= 1 \\ TST^2S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^3S &= 1 \quad \text{car } T^7 = T \quad \text{(II)} \\ S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^2(TSTST)T &= 1 \\ &\quad \text{I} \end{aligned}$$

$$(50) \quad \underline{S^{-4}T^{-1}S^{-1}T^{-1}ST^2(S^{-1}T^{-1}S^{-1})T = 1}$$

Enfin, la relation V devient:

$$TS^{-1}T^6S^{-1}TSTS^{-1} = 1$$

Composons le premier membre à gauche avec TS, à droite avec $S^{-1}T^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \text{(TSTS}^{-1}\text{)T}^5\text{S}^{-1}\text{TSTS}^{-2}\text{T}^{-1} = 1 \\ & \quad \quad \quad \text{V} \\ & \text{(STST}^{-1}\text{)T}^5\text{S}^{-1}\text{TSTS}^{-2}\text{T}^{-1} = 1 \\ & \text{(STST}^*\text{S}^{-1}\text{)TSTS}^{-2}\text{T}^{-1} = 1 \quad (50) \quad \text{car } T^4 = T^{-2} \quad (11) \\ & \quad \quad \quad 50 \\ & \text{(TS}^{-4}\text{T}^{-1}\text{S}^{-1}\text{T}^{-1}\text{)TSTS}^{-2}\text{T}^{-1} = 1 \\ & \quad \quad \quad \text{TS}^{-6}\text{T}^{-1} = 1 \\ & \quad \quad \quad \underline{\underline{S^6 = 1}} \end{aligned}$$

En résumé, pour obtenir les relations caractéristiques des bases du groupe S_6 , il est bon de combiner les deux méthodes que nous avons exposées. Suivant les cas, on choisira tantôt le calcul direct, tel que nous l'avons pratiqué dans le chapitre IV, tantôt on utilisera les relations réversibles entre bases de la même classe. Seul le critère de simplicité et d'élégance des relations caractéristiques entre en ligne de compte pour ce choix. Par la méthode de déduction, on peut également obtenir des systèmes de relations caractéristiques très différents pour une base S,T suivant la base S',T' de la même classe utilisée comme point de départ.

Nous donnons dans le tableau V un système de cinq relations caractéristiques pour chacune des 163 bases indépendantes du groupe symétrique de degré 6. A côté de chaque base figure en chiffres romains le numéro de la classe à laquelle elle appartient. A côté de chaque système de relations caractéristiques nous avons noté la méthode utilisée pour l'obtenir: calcul direct (c) ou déduction (d) à partir d'une autre base de la même classe.

TABLEAU V

Relations caractéristiques des bases du groupe symétrique de degré 6

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
1	(1234)	(1356)	I c	$S^4 = 1 \quad T^4 = 1$ $(ST)^4 = 1$ $(T^3S^2T^2S)^2 = 1$ $(T^2S)^2(TS^2)^2T^3S^3 = 1$
2	(123456)	(12)(364)	II c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST)^3 = 1$ $(S^5T)^6 = 1$ $T^2S^2T^2ST^4ST^2S^4 = 1$
3	(123456)	(12)(365)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST)^3 = 1$ $(S^5T)^6 = 1$ $T^2S^4T^2ST^4ST^2S^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
4	(123456)	(13)(456)	I c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST^3)^2 = 1$ $(ST)^4 = 1$ $T^3STST^4S^3T^6S^4 = 1$
5	(123456)	(13)(465)	I d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST)^2 = 1$ $(S^5T)^4 = 1$ $T^3ST^3ST^2S^3TS^4 = 1$
6	(123456)	(14)(235)	III d	$(ST)^4 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST^3)^3 = 1$ $(S^2TST^4)^2 = 1$ $STS^{-1}T^6(S^{-1}T)^3 = 1$
7	(123456)	(14)(236)	III d	$(ST)^4 = 1 \quad T^6 = 1$ $(ST^3)^3 = 1$ $(T^4STS^2)^2 = 1$ $(TS^{-1})^2T^3S^{-1}TS = 1$
8	(1234)	(456)	IV c	$S^4 = 1 \quad T^3 = 1$
9	(1234)	(152)(346)	V	$(S^3TST)^2 = 1$ $(TS^2)^4 = 1$ $(TS)^6 = 1$
10	(1234)	(125)(36)	II c	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
11	(1453)	(123456)	II	$(ST)^4 = 1$ $(TS^2)^2T^3S^2T^3S = 1$ $(ST^6)^2S^2T^3S^2T^3 = 1$
12	(1234)	(152)(36)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
13	(1435)	(123456)	II	$(ST^3)^4 = 1$ $(S^2T)^2S^3T^3S^2T^2 = 1$ $(ST)^2S^2TS^2T^3 = 1$
14	(1234)	(125)(46)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
15	(1534)	(123456)	II	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^2ST^3S^2T^2 = 1$ $(S^2T)^2S^2TS^2T^3 = 1$
16	(1234)	(152)(46)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
17	(1354)	(123456)	II	$(ST^3)^4 = 1$ $(TS^2)^2T^2S^2T^2S^3 = 1$ $(TS)^2T^3S^3TS^2 = 1$
18	(1234)	(135)(46)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
19	(1432)	(123456)	IV	$(ST)^3 = 1$ $(S^3T)^4 = 1$ $(S^2T^2)^3 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
20	(1234)	(153)(46)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
21	(1234)	(123456)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^3 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$
22	(1234)	(12)(356)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
23	(1342)	(123456)	III	$(S^2T)^5 = 1$ $(TST^2S)^2 = 1$ $(ST^2ST^2)^2(ST^4)^2 = 1$
24	(1234)	(12)(456)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
25	(1243)	(123456)	III	$(ST)^5 = 1$ $(TST^2S)^2 = 1$ $(T^2S)^2(T^4STS)^2 = 1$
26	(1234)	(13)(256)	I d	$S^4 = 1 \quad (S^2T)^4 = 1$
27	(1463)	(123456)	I	$(S^2T)^4 = 1$ $(S^2T^3)^2 = 1$ $(S^2TS^2T)^2S^2T^{-1}S^2T^2 = 1$
28	(1234)	(12)(3456)	I c	$S^4 = 1 \quad (T^2S^2)^2T^{-2}S^2 = 1$
29	(1234)	(15)(2346)	I	$(ST^3)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $TS^2T^2STS^3T^3ST^2S^2 = 1$
30	(1234)	(12)(3654)	I d	$S^4 = 1 \quad (T^2S^2)^2T^{-2}S^2 = 1$
31	(1234)	(15)(2643)	I	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $T^2S^2T^2ST^2S^3TST^2S^3 = 1$
32	(1234)	(12)(3546)	V d	$S^4 = 1 \quad T^4 = 1$
33	(1234)	(13)(2456)	IV	$(S^2T)^3 = 1$ $(S^2T)^6 = 1$ $(S^2TST)^2 = 1$
34	(1234)	(15)(2364)	II c	$T^2ST^2S^{-1}T^2S^{-2} = 1 \quad T^4 = 1$
35	(1234)	(15)(2463)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^3)^5 = 1$ $(T^2S^2TS)^2 = 1$
36	(1234)	(15)(2436)	II d	$T^2S^{-1}T^2ST^2S^2 = 1 \quad T^4 = 1$
37	(1234)	(15)(2634)	II	$(TS^3)^6 = 1$ $(TS^2)^5 = 1$ $(T^2S^2TS^3)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
38	(123)(45)	(146)	III d	$S^6 = 1 \quad (S^2T)^6 = 1$
39	(123456)	(124)(365)	III	$(TS^2)^4 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$ $(TS^4TS)^2(TS^6)^3 = 1$
40	(123)(45)	(164)	III d	$S^6 = 1 \quad (S^4T)^6 = 1$
41	(123456)	(125)(364)	III	$(TS^2)^4 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$ $(TS^2TS^6)^2(TS)^2 = 1$
42	(123)(45)	(14)(26)	II c	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
43	(123456)	(12)(35)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^2)^6 = 1$ $(TS)^2(S^2T)^2STS^2TS^6 = 1$
44	(123)(45)	(14)(56)	I c	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
45	(123456)	(12)(36)	I	$(TS)^6 = 1$ $(TS^3)^4 = 1$ $(TS)^2TS^4TS^2TS^6TSTS^2 = 1$
46	(123)(45)	(14)(36)	II d	$S^6 = 1 \quad T^2 = 1$
47	(123456)	(12)(46)	II	$(TS)^6 = 1$ $(TS^2)^6 = 1$ $(TS^4TS^6)^2S^2TS^2TS^2 = 1$
48	(123)(45)	(12)(346)	II c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
49	(156324)	(123456)	II	$(T^3S)^2 = 1$ $S^2TSTS^4T^6ST^3 = 1$ $S^2T^2STST^6S^4T^3 = 1$
50	(123)(45)	(12)(364)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
51	(132564)	(123456)	II	$(T^3S)^2 = 1$ $S^2T^6ST^6S^4TST^2 = 1$ $S^2T^4ST^6STS^4T = 1$
52	(123)(45)	(14)(236)	V d	$(T^4S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
53	(135624)	(123456)	IV	$(T^2S^2)^2 = 1$ $(ST^6)^6 = 1$ $(T^3ST^6S)^3 = 1$
54	(123)(45)	(14)(263)	V d	$(T^2S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
55	(142653)	(123456)	IV	$(T^4S^2)^2 = 1$ $(ST)^6 = 1$ $(T^3STS)^3 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
56	(123)(45)	(14)(256)	III c	$S^6 = 1 \quad (S^2T^3)^2S^3T^{-3} = 1$
57	(145623)	(123456)	III	$(T^3S)^3 = 1$ $S^2TST^4S^5T^6 = 1$ $S^5T^2STS^3T^2 = 1$
58	(123)(45)	(12)(34)(56)	V d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
59	(123456)	(12)	IV	$(TS)^5 = 1$ $(S^3TST)^3 = 1$ $(S^4TS^2T)^2 = 1$
60	(123)(45)	(124)(356)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
61	(123456)	(142)	III	$(S^2T)^5 = 1$ $(S^3TS^2T^2)^2 = 1$ $T^2STST^2S^4T^2S^2 = 1$
62	(123)(45)	(142)(365)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
63	(123456)	(124)	III	$(S^4T)^5 = 1$ $(S^3T^2S^2T)^2 = 1$ $TST^2STS^4TS^3 = 1$
64	(123)(45)	(145)(236)	V d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
65	(123456)	(123)	IV	$(ST^2)^4 = 1$ $(S^2T^2)^4 = 1$ $(S^5TST)^2 = 1$
66	(123)(45)	(154)(263)	V d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
67	(123456)	(132)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T)^4 = 1$ $(S^5TST)^2 = 1$
68	(123)(45)	(134)(256)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
69	(123456)	(125)		$(S^4T)^6 = 1$ $(S^3TS^4T^2)^2 = 1$ $TST^2STS^2TS^4 = 1$
70	(123)(45)	(143)(265)	III d	$S^6 = 1 \quad T^3 = 1$
71	(123456)	(152)		$(S^2T)^5 = 1$ $(S^3T^2S^4T)^2 = 1$ $T^2STST^2S^2T^2S^4 = 1$
72	(12345)	(56)	IV c	$S^5 = 1 \quad T^3 = 1$
73	(12345)	(14)(23)(56)	V	$(ST)^6 = 1$ $(S^4TST)^3 = 1$ $[(TS^3)^2(TS)^3]^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
74	(12345)	(1263)	III c	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
75	(12345)	(1326)	III	$(S^2T^3)^4 = 1$ $(S^3TST^2)^2 = 1$ $T^2S^4TST^2S^4T^2S = 1$
76	(12345)	(1362)	III d	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
77	(12345)	(1623)	III	$(S^2T^3)^4 = 1$ $(S^3T^2ST^2)^2 = 1$ $T^2S^4T^2STS^4T^2S = 1$
78	(12345)	(1346)	II c	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
79	(12345)	(1436)	II	$(T^2S^2TS)^2 = 1$ $(TS)^2T^3ST^3S^3 = 1$ $T^2S^4TST^2S^3T^2S^2 = 1$
80	(12345)	(1643)	II d	$S^5 = 1 \quad T^4 = 1$
81	(12345)	(1634)	II	$(T^2S^2T^3S)^2 = 1$ $(T^3S)^2TST^3S^3 = 1$ $T^2S^4T^3STS^4T^2S^2 = 1$
82	(12345)	(123)(46)	III c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
83	(12354)	(123456)	III	$(S^4T)^4 = 1$ $(S^3T^2)^2 = 1$ $(TS)^2(T^2S^2)^2 = 1$
84	(12345)	(132)(46)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
85	(12543)	(123456)		$(ST)^4 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$ $(T^6S)^2(T^3S^2)^2 = 1$
86	(12345)	(123)(56)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
87	(13452)	(123456)	III	$(S^4T)^4 = 1$ $(S^3T^2)^2 = 1$ $(S^2T^2)^2(ST)^2 = 1$
88	(12345)	(132)(56)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
89	(14532)	(123456)	III	$(ST)^4 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$ $(TS^4)^2(T^3S^2)^2 = 1$
90	(12345)	(124)(36)	II c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
91	(15243)	(123456)	II	$(S^3T)^4 = 1$ $(ST^3)^2 = 1$ $(TS^2)^2(T^3S^4)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
92	(12345)	(142)(36)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
93	(14235)	(123456)	II	$(S^2T)^4 = 1$ $(ST^4)^2 = 1$ $(ST^3)^2(S^3T)^2 = 1$
94	(12345)	(124)(56)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
95	(15324)	(123456)	II	$(S^3T)^4 = 1$ $(ST^3)^2 = 1$ $(S^4T^3)^2(S^2T)^2 = 1$
96	(12345)	(142)(56)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
97	(13425)	(123456)	II	$(S^2T)^4 = 1$ $(ST^4)^2 = 1$ $(TS^3)^2(T^3S)^2 = 1$
98	(12345)	(126)(34)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
99	(14523)	(123456)	II	$(S^2T^2)^2 = 1$ $(S^2TST)^2 = 1$ $(T^2S^2)(TS)^2 = 1$
100	(12345)	(162)(34)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
101	(14352)	(123456)	II	$(S^2T^2)^2 = 1$ $(S^3TS^4T)^2 = 1$ $(S^4T)^2(S^2T^3)^2 = 1$
102	(12345)	(126)(35)	V d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
103	(15432)	(123456)	IV	$(ST)^2 = 1$ $(S^2T^2)^2 = 1$ $(T^2ST^2S)^2 = 1$
104	(12345)	(162)(35)	V c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
105	(12345)	(123456)	IV	$(S^4T)^2 = 1$ $(S^3T^2)^2 = 1$ $(T^2STS)^2 = 1$
106	(12345)	(126)(45)	II c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
107	(12534)	(123456)	II	$(S^2T^2)^2 = 1$ $(S^2TST)^2 = 1$ $(ST)^2(S^3T^3)^2 = 1$
108	(12345)	(162)(45)	II d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
109	(13254)	(123456)	II	$(S^2T^4)^2 = 1$ $(S^4TS^3T)^2 = 1$ $(ST^5)^2(S^3T^3)^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
110	(12345)	(136)(24)	III c	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
111	(13245)	(123456)	III	$(ST^4)^3 = 1$ $(S^2T^4ST)^2 = 1$ $S^4TSTS^2T^4 = 1$
112	(12345)	(163)(24)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
113	(15342)	(123456)	III	$(ST^2)^3 = 1$ $(S^2T^2ST^5)^2 = 1$ $T^4S^2TS^4TS = 1$
114	(12345)	(136)(25)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
115	(12435)	(123456)	III	$(ST^4)^3 = 1$ $(ST^4S^2T)^2 = 1$ $TSTS^4T^4S^3 = 1$
116	(12345)	(163)(25)	III d	$S^5 = 1 \quad T^6 = 1$
117	(15423)	(123456)	III	$(ST^2)^3 = 1$ $(S^2T^4S^4T)^2 = 1$ $STS^4TS^2T^4 = 1$
118	(12345)	(136)(45)	V d	$S^5 = 1 \quad (ST)^6 = 1$
119	(13524)	(123456)	IV	$(S^2T)^2 = 1$ $(S^2TST)^3 = 1$ $(T^3STS)^2 = 1$
120	(12345)	(163)(45)	V d	$S^5 = 1 \quad (S^4T)^6 = 1$
121	(14253)	(123456)	IV	$(S^2T)^2 = 1$ $(S^4TS^4T)^3 = 1$ $(T^3S^4TS^4)^2 = 1$
122	(1234)(56)	(12)(345)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
123	(13)(2456)	(123456)	IV	$(S^2T)^4 = 1$ $(S^2T^2)^3 = 1$ $(ST^5ST)^2 = 1$
124	(1234)(56)	(12)(354)	V d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
125	(13)(2654)	(123456)	IV	$(ST)^4 = 1$ $(ST^2)^3 = 1$ $(ST^6ST)^2 = 1$
126	(1234)(56)	(12)(356)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
127	(12)(3465)	(123456)	II	$(T^2S)^5 = 1$ $(T^2S^3TS)^2 = 1$ $S^2TS^2T^5ST^5S^2T^6 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
128	(1234)(56)	(12)(456)	II d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
129	(12)(3564)	(123456)	II	$(T^4S)^5 = 1$ $(T^2STS^2)^2 = 1$ $S^2TS^2T^6S^3T^6ST^5 = 1$
130	(1234)(56)	(13)(256)	V d	$(T^3S)^2 = 1 \quad T^6 = 1$
131	(14)(2536)	(123456)	IV	$(T^4S)^5 = 1$ $(T^5STS)^2 = 1$ $(T^2ST^4S)^3 = 1$
132	(1234)(56)	(15)(234)	I d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
133	(12)(3645)	(123456)	I	$(TS)^6 = 1$ $(T^2S)^3 = 1$ $(TS)^2T^4S^2TS^2T^5S^2 = 1$
134	(1234)(56)	(15)(243)	I d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
135	(12)(3546)	(123456)	I	$(T^5S)^6 = 1$ $(T^4S)^2 = 1$ $(ST^5)^2S^2TS^2T^6S^2T^2 = 1$
136	(1234)(56)	(15)(236)	III c	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
137	(13)(2546)	(123456)	III	$(T^4S)^3 = 1$ $(T^3STS^2)^2 = 1$ $S^3TST^2S^2T = 1$
138	(1234)(56)	(15)(263)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
139	(13)(2564)	(123456)	III	$(T^3S)^3 = 1$ $(T^3ST^6S^2)^2 = 1$ $S^3TSTS^2T^2 = 1$
140	(1234)(56)	(15)(346)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
141	(13)(2465)	(123456)	III	$(T^4S)^3 = 1$ $(T^3S^2TS^2) = 1$ $S^3TS^2T^2ST = 1$
142	(1234)(56)	(15)(364)	III d	$S^4 = 1 \quad T^6 = 1$
143	(13)(2645)	(123456)	III	$(T^2S)^3 = 1$ $(T^3S^3TS^2)^2 = 1$ $S^3T^2S^2TST = 1$
144	(123456)	(12)(345)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
154	(13)(265)	(123456)	III	$(TS^5)^3 = 1$ $T^2S^2TS^2T^4S = 1$ $S^4T^2ST^2S^2T^2 = 1$

N°	S	T	Classe	Relations caractéristiques
146	(123456)	(12)(354)	III d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
147	(13)(245)	(123456)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^4S^2T^5S^2T^2S = 1$ $S^4T^4ST^3S^2T^4 = 1$
148	(123456)	(12)(346)	II d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
149	(12)(356)	(123456)	II	$(TS)^6 = 1$ $(T^6S)^2 = 1$ $T^4S^2T^4ST^2ST^4S^4 = 1$
150	(123456)	(12)(456)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
151	(13)(254)	(123456)	III	$(T^3STS)^2 = 1$ $T^4S^2TS^2T^2S = 1$ $S^4T^2S^2T^3ST^2 = 1$
152	(123456)	(12)(465)	III d	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
153	(13)(256)	(123456)	III	$(T^3ST^3S)^2 = 1$ $T^2S^2T^5S^2T^4S = 1$ $S^4T^4S^2T^3ST^4 = 1$
154	(123456)	(14)(253)	III d	$(T^5S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
155	(14)(263)	(123456)	III	$(T^3S)^3 = 1$ $(S^2T^6ST^2)^2 = 1$ $(TS)^2T^5STS^{-1} = 1$
156	(123456)	(134562)	IV d	$(T^3S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
157	(123)(45)	(16)(243)	V	$(T^6S)^3 = 1$ $(T^4S)^4 = 1$ $(T^4ST^2S)^2 = 1$
158	(123456)	(126543)	IV d	$(T^3S)^4 = 1 \quad T^6 = 1$
159	(123)(45)	(16)(234)	V	$(ST)^2 = 1$ $(T^2S)^4 = 1$ $(T^4ST^3S)^2 = 1$
160	(123456)	(132654)	III c	$S^6 = 1 \quad (T^3S^3)^2T^{-3}S^{-3} = 1$
161	(123)(45)	(14)(356)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^3S^2TS^2T^6S = 1$ $S^3T^2ST^2S^5T = 1$
162	(123456)	(143265)	III c	$S^6 = 1 \quad T^6 = 1$
163	(123)(45)	(14)(265)	III	$(TS)^3 = 1$ $T^5S^2TS^2T^3S = 1$ $S^5T^2ST^2S^9T = 1$

VI. INDÉPENDANCE DES RELATIONS CARACTÉRISTIQUES

Définition 10. — Soit S, T une base du groupe S_n , caractérisée par m relations (1) $f_i(S, T) = 1$ ($i=1, 2, \dots, m$). On dit que les m relations caractéristiques sont indépendantes si aucune d'elles n'est une conséquence des autres.

Considérons les m relations caractéristiques d'une base S, T de S_n :

$$(1) \quad \begin{aligned} f_1(S, T) &= 1 \\ f_2(S, T) &= 1 \\ f_3(S, T) &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ f_{i-1}(S, T) &= 1 \\ f_i(S, T) &= 1 \\ f_{i+1}(S, T) &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(S, T) &= 1 \end{aligned}$$

Supposons que la relation (2) $f_i(S, T) = 1$ soit indépendante des autres. Si, contrairement à l'hypothèse, la relation (2) était une conséquence des autres relations du système (1), tout couple de substitutions S', T' qui satisfait au système:

$$(3) \quad \begin{aligned} f_1(S', T') &= 1 \\ f_2(S', T') &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ f_{i-1}(S', T') &= 1 \\ f_{i+1}(S', T') &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(S', T') &= 1 \end{aligned}$$

devrait satisfaire à la relation:

$$(4) \quad f_i(S', T') = 1$$

Pour prouver l'indépendance de (2), il suffit donc de trouver un couple de substitutions S', T' qui satisfassent aux relations (3) sans satisfaire à la relation (4).

M. Dubreil ¹⁾ donne comme relations fondamentales du groupe symétrique S_3 les relations:

$$\begin{aligned} (5) \quad & S^3 = 1 \\ (6) \quad & T^2 = 1 \\ (7) \quad & STS = T \end{aligned}$$

Ces 3 relations sont indépendantes. En effet, les substitutions $S = (12)$, $T = (34)$ satisfont aux relations (6) et (7) sans satisfaire à la relation (5), ce qui prouve l'indépendance de (5). D'autre part, les substitutions $S = (123)$, $T = (12)(456)$ satisfont aux relations (5) et (7) sans satisfaire à la relation (6), d'où l'indépendance de (6). Enfin, les substitutions $S = (123)$, $T = (45)$ satisfont les relations (5) et (6) sans satisfaire à (7) car:

$$STS = (132)(45) \neq T = (45)$$

ce qui prouve l'indépendance de (7).

Pourtant, cette indépendance des 3 relations caractéristiques du groupe S_3 ne signifie pas qu'il s'agisse d'un système minimum. Il existe, en effet, un système de deux relations caractéristiques qui suffisent à définir ce groupe ²⁾:

$$\begin{aligned} (8) \quad & T^2 = 1 \\ (9) \quad & TSTS^{-2} = 1 \end{aligned}$$

Ces relations sont indépendantes. ³⁾ Les substitutions $S = (123)$, $T = (132)$ démontrent l'indépendance de (8), alors que les substitutions $S = (12)$, $T = (34)$ prouvent l'indépendance de (9).

De (9), on déduit par composition à droite avec S^2

$$(10) \quad TST = S^2$$

En composant à gauche et à droite avec T^{-1} qui est égal à T d'après (8), on a:

$$\begin{aligned} (11) \quad & S = TS^2T \\ (12) \quad & S.S = TS^2T.TS^2T = TS^2T^2S^2T \quad \text{et d'après (8):} \\ & S^2 = TS^4T \end{aligned}$$

Remplaçons S^2 par sa valeur tirée de (10):

$$TST = TS^4T \quad \text{ou} \quad S^3 = 1$$

Ainsi, M. Dubreil ne donne pas pour le groupe S_3 un système minimum de relations caractéristiques. Moore, d'ailleurs, fournit également 3 relations

¹⁾ Dubreil (3) p. 113 N° 3.
²⁾ S. Piccard (24) p. 89 et (27).
³⁾ Démontré en 1946 par M²¹⁶ S. Piccard.

caractéristiques indépendantes pour ce groupe ¹⁾, la relation (7) étant écrite sous la forme:

$$(13) \quad (ST)^2 = 1$$

Ce système est cité sous la même forme par Burnside ²⁾. Miller ³⁾ caractérise ce groupe par les relations indépendantes suivantes:

$$(14) \quad S^2 = 1$$

$$(15) \quad T^2 = 1$$

$$(16) \quad (ST)^3 = 1$$

L'indépendance de (14) découle de $S = (1234)$, $T = (12)$

L'indépendance de (15) découle de $S = (12)$, $T = (1234)$

L'indépendance de (16) découle de $S = (12)$, $T = (34)$.

Dans ce cas aussi, il existe un système de deux relations caractéristiques indépendantes ⁴⁾:

$$(17) \quad T^2 = 1$$

$$(18) \quad TS(TS^{-1})^2 = 1$$

On démontre que $S^2 = 1$ par un procédé analogue à celui décrit dans la remarque 18.

Il semble que les différents auteurs qui se sont occupés de cette question aient tous tenu à conserver dans chaque système de relations caractéristiques les relations donnant l'ordre des éléments fondamentaux. Cette idée de conserver les relations $S^m = 1$, $T^n = 1$ prend même une telle importance chez Burnside, qu'il néglige de démontrer l'indépendance de ces deux relations. On trouve, en effet, dans un de ses mémoires ⁵⁾ le système suivant qui caractérise S_3 :

$$(19) \quad S^2 = 1$$

$$(20) \quad (T^{-1}STS)^3 = 1$$

$$(21) \quad (ST)^4 = 1$$

$$(22) \quad T^5 = 1$$

Burnside affirme: « Il reste à montrer que ces relations sont indépendantes. Si elles ne le sont pas, soit la seconde, soit la troisième des équations est superflue. Ce ne peut être la seconde, car les relations:

$$S^2 = 1 \quad T^5 = 1 \quad (ST)^4 = 1$$

n'engendrent pas un groupe d'ordre fini ⁶⁾. A nouveau, les relations:

$$S^2 = 1 \quad T^5 = 1 \quad (T^{-1}STS)^3 = 1$$

¹⁾ Moore (20) p. 364.

²⁾ Burnside (10) p. 119.

³⁾ Müller (19) p. 368.

⁴⁾ S. Piccard (24) et 27.

⁵⁾ Burnside (10) p. 125, ligne 22.

⁶⁾ Burnside renvoie à l'étude de van Dyck (13) N° 15.

ne définissent certainement pas un groupe simplement isomorphe avec le groupe symétrique de cinq symboles, car les substitutions ¹⁾:

$$S = (13)(25) \quad T = (12345)$$

satisfont à ces relations et engendrent le groupe alterné de cinq symboles.

Par suite, finalement, les relations (19 à 22) sont *nécessaires* ²⁾ et suffisantes pour définir le groupe symétrique de 5 symboles. »

De même, dans son traité ³⁾, Burnside déclare :

“ Moreover though no one of the generating operations can be expressed in terms of the remainder, there must be relations of the general form :

$$S_m^a S_n^b \dots S_p^c = E$$

among them, as otherwise the group would be of infinite order; and the number of these relations, which are independent of one another, must be finite. Among them there necessarily occur the relations :

$$S_1^{a_1} = E \quad S_2^{a_2} = E \quad \dots \quad S_n^{a_n} = E$$

giving the orders of the fundamental operations. ”

Théorème 6. — Il existe pour le groupe symétrique de degré 6 au moins un système de 5 relations caractéristiques indépendantes.

Démonstration. — Les relations caractéristiques de la base $S_5 = (1234)$, $T_5 = (456)$ sont :

$$(23) \quad \begin{array}{l} \text{I} \quad S^4 = 1 \\ \text{II} \quad T^3 = 1 \\ \text{III} \quad (S^3 T S T)^2 = 1 \\ \text{IV} \quad (T S^2)^4 = 1 \\ \text{V} \quad (T S)^6 = 1 \end{array}$$

Considérons les substitutions $S = (1234)(789)$ $T = (456)(789)$. On a :

$$(24) \quad S^3 T S T = (35)(46) \\ (25) \quad T S^2 = (13)(2564) \\ (26) \quad T S = (123564)(798)$$

Toutes les relations (23) sont satisfaites sauf (I), ce qui prouve l'indépendance de (I).

Considérons maintenant $S = (1234)$, $T = (456)(78)$:

$$(27) \quad S^3 T S T = (35)(46) \\ (28) \quad T S^2 = (13)(2564)(78) \\ (29) \quad T S = (123564)(78)$$

¹⁾ Nous changeons les notations pour les rendre conformes à celles utilisées tout au long du présent travail.

²⁾ C'est nous qui soulignons.

³⁾ Burnside (2) p. 20-21, paragraphe 16, ligne 23.

Toutes les relations (23) sont satisfaites sauf (II), ce qui prouve l'indépendance de (II).

Envisageons les substitutions $S = (1234)(7,8,9,10)$ $T = (456)(7,9,11)$.

On a :

$$(30) \quad S^*TST = (35)(46)(7,9,10,8,11)$$

$$(31) \quad TS^2 = (13)(2564)(7,11)(8,10)$$

$$(32) \quad TS = (123564)(7,8,11)(9,10)$$

Comme les relations (23) sont satisfaites à l'exception de (III) l'indépendance de (III) est démontrée.

Les substitutions $S = (1234)(78)$ $T = (456)(789)$ prouvent l'indépendance de (IV), car :

$$(33) \quad S^*TST = (35)(46)$$

$$(34) \quad TS^2 = (13)(2564)(789)$$

$$(35) \quad TS = (123564)(79)$$

Enfin, on démontre l'indépendance de (V) à l'aide des substitutions $S = (1234)(7,8,9,10)$ $T = (456)$:

$$(36) \quad S^*TST = (35)(46)$$

$$(37) \quad TS^2 = (13)(2564)(79)(8,10)$$

$$(38) \quad TS = (123564)(7,8,9,10)$$

c.q.f.d.

Corollaire 1. — Toutes les bases du groupe S_n appartenant à la classe IV peuvent être caractérisées par un système de cinq relations indépendantes.

Comme S_8, T_8 appartient à la classe IV, on peut déduire des relations (23) un système de cinq relations caractéristiques indépendantes pour n'importe quelle base de cette classe.

Corollaire 2. — Toutes les bases du groupe S_n appartenant à la classe V peuvent être caractérisées par un système de cinq relations indépendantes.

En effet, par les automorphismes externes du groupe S_n , nous savons que le système (23) caractérise non seulement la base S_8, T_8 mais aussi la base S_8, T_8 de la classe V.

Le système des relations caractéristiques de Moore pour le groupe S_n est surabondant. Les relations ne sont pas indépendantes, puisque certaines d'entre elles sont superflues.

Théorème 7. — Dans le système donné par Moore pour caractériser le groupe symétrique de degré n :

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(4) \quad (S^{-1}TST)^3 = 1$$

$$(5) \quad (S^{-k}TST^k)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, n-2$$

la relation (4) est une conséquence des autres relations du système.

Ce théorème a été établi par M^{lle} S. Piccard en 1946 et communiqué à la Société Mathématique Suisse en 1953 ¹⁾.

Indépendamment de M^{lle} S. Piccard, nous avons établi une démonstration de ce théorème qui repose sur deux lemmes :

Lemme 1. — Quels que soient les éléments S et T satisfaisant au système de Moore, on a :

$$(a) \quad (S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k-1}TS^{k+1}(TS)^{n-k-2} = (S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k}TS^k(TS)^{n-k-2}$$

$$k = 2, 3, \dots, n-2$$

Démonstration :

La relation (a) est une conséquence des relations (2) et (5) pour $k = 2, 3, \dots, n-2$. En effet,

$$(S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k-1}TS^{k+1}(TS)^{n-k-2} = (S^{-1}T)^{n-k-2}T^{-1}S^{-k-1}TS^{k+1} \\ \cdot S^{-1}T^{-1}(TS)^{n-k-2} = (S^{-1}T)^{n-k-2}(T^{-1}S^{-k}TS^kT^{-1})(TS)^{n-k-2} =$$

$$= (S^{-1}T)^{n-k-2}(T^{-1}S^{-k}T^{-1}S^kT^{-1})(TS)^{n-k-2} =$$

$$= (S^{-1}T)^{n-k-2}S^{-k}TS^k(TS)^{n-k-2}$$

c.q.f.d.

Lemme 2. — Quels que soient les éléments S et T satisfaisant au système de Moore, on a :

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

Démonstration :

Appliquons l'égalité (a) du lemme 1 successivement pour $k = n-3, n-4, \dots, 3, 2$.

$$S^2TS^{-2} = S^{-n}S^2TS^{-2}S^n = S^{-n+2}TS^{n-2} = (S^{-1}T)^0S^{-n+2}TS^{n-2}(TS)^0 =$$

$$\stackrel{(1)}{=} (S^{-1}T)^1S^{-n+3}TS^{n-3}(TS)^1 \stackrel{(a) \text{ pour } k=n-3}{=} (S^{-1}T)^2S^{-n+4}TS^{n-4}(TS)^2 = \dots$$

$$\stackrel{(a) \text{ pour } k=n-4}{\dots} \stackrel{(a) \text{ pour } k=n-5}{=} (S^{-1}T)^{n-5}S^{-2}TS^2(TS)^{n-5} \stackrel{(a) \text{ pour } k=n-5}{=} (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

$$\stackrel{(3) \text{ pour } k=2}{=} (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

c.q.f.d.

¹⁾ S. Piccard (25) et (27).

Démonstration du théorème 7.

Partons de la relation (5) pour $k = 2$:

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

$$S^{-2}T(S^2TS^{-2})TS^2T = 1$$

(b)

$$S^{-2}T(S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}TS^2T = 1$$

$$S^{-1}(S^{-1}T)^{n-3}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}TS^2T = 1$$

(3)

$$S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(ST)^{n-4}S^2T = 1 \text{ d'après (1) et (2)}$$

(3)

$$S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(TS^{-1})^2S^2T = 1 \text{ d'après (1) et (2)}$$

$$S^{-1}TSTS^{-1}TS^2T^2S^{-1}TS^{-1}TST = 1$$

(2)

$$\underline{(S^{-1}TST)^3 = 1}$$

c.q.f.d.

Remarque 20. — Les relations (5) pour $k > \frac{n}{2}$ sont une conséquence des relations (1) et (5) pour $k \leq \frac{n}{2}$.

De ce fait le système de Moore, compte tenu du théorème 7, devient:

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(5)' \quad (S^{-k}T^kT)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} \text{ ou } \frac{n-1}{2}$$

suivant que n est pair ou impair.

Corollaire 3. — D'après la remarque 20, on a pour $n = 5$ un système de 4 relations caractéristiques:

$$S^5 = 1$$

$$T^2 = 1$$

$$(ST)^4 = 1$$

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

C'est le système établi directement par M^{lle} S. Piccard dans son travail ¹⁾ sur les relations caractéristiques des bases du groupe S_6 pour la base 17.

Théorème 8. — Le système:

$$(1) \quad S^n = 1$$

$$(2) \quad T^2 = 1$$

$$(3) \quad (ST)^{n-1} = 1$$

$$(5)' \quad (S^{-k}T^kT)^2 = 1 \quad k = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} \text{ ou } \frac{n-1}{2}$$

¹⁾ S. Piccard (24) p. 90-91, ligne 17.

est équivalent au système:

- (1) $S^n = 1$
- (2) $T^2 = 1$
- (3) $(ST)^{n-1} = 1$
- (4) $(S^{-1}TST)^3 = 1$
- (5)'' $(S^{-k}TS^kT)^2 = 1$ pour $k = 2, \dots, i-1, i+1, \dots, \frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$
 $i \geq 3$

Autrement dit, on peut remplacer dans le système de la remarque 20 la relation $(S^{-1}TS^1T)^2 = 1$ par la relation $(S^{-1}TST)^3 = 1$.

Démonstration: D'après le théorème 7, du système des relations (1),(2), (3),(5)' on peut déduire le système des relations (1),(2),(3),(4),(5)''. Il reste à prouver que l'on peut inversement déduire le système (1),(2),(3),(5)' des relations (1),(2),(3),(4) et (5)''.
 Démontrons d'abord que la relation:

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

est une conséquence des relations (1),(2),(3),(4) et (5)'' pour $k=2$. En effet, d'après (5)'' pour $k=2$:

$$(c) \quad \begin{aligned} (S^{-2}TS^2T)^2 &= 1 \quad \text{ou} \\ S^2TS^{-2} &= TS^2TS^{-2}T \quad \text{d'après (2)} \end{aligned}$$

D'autre part:

$$(4) \quad \begin{aligned} (S^{-1}TST)^3 &= 1 \\ S^{-1}TSTS \cdot S^{-2}TS^2T \cdot TS^{-1}TS^{-1}TS^{-1} \cdot S^2T &= 1 \\ &\quad (2) \\ S^{-1}(TS)^2S^{-2}TS^2T(TS^{-1})^3S^2T &= 1 \\ &\quad (3) \quad (3) \\ S^{-1}(S^{-1}T)^{n-3}S^{-2}TS^2T(ST)^{n-4}S^2T &= 1 \quad \text{d'après (2)} \\ (d) \quad TS^2TS^{-2}T(S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4} &= 1 \end{aligned}$$

En comparant (c) et (d), on obtient:

$$(b) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4}$$

Le lemme 1 est valable dans le système (1)(2)(3)(4)(5)'' pour les valeurs $k = 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n-2$. On peut donc l'utiliser pour toute valeur de k différente de i . En appliquant ce lemme 1 successivement pour $k = n-3, n-4, \dots, i+1$, comme nous l'avons fait pour la démonstration du lemme 2, nous obtenons:

$$(e) \quad S^2TS^{-2} = (S^{-1}T)^{n-i-3}S^{-i-1}TS^{i+1}(TS)^{n-i-3}$$

En appliquant ce lemme pour $k = 2, 3, \dots, i-1$, nous avons:

$$(f) \quad (S^{-1}T)^{n-4}S^{-2}TS^2(TS)^{n-4} = (S^{-1}T)^{n-i-2}S^{-i}TS^i(TS)^{n-i-2}$$

En comparant les relations (b), (e) et (f), on déduit :

$$(S^{-1}T)^{n-i-3}S^{-i-1}TS^{i+1}(TS)^{n-i-3} = (S^{-1}T)^{n-i-2}S^{-i}TS^i(TS)^{n-i-2}$$

Composons à gauche avec $S(S^{-1}T)^{-n+i+3}$ et à droite avec

$(TS)^{-n+i+3}S^{-1}$ chacune des expressions de l'égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} S.S^{-i-1}TS^{i+1}.S^{-1} &= S.S^{-1}T.S^{-i}TS^i.TS.S^{-1} \\ S^{-i}TS^i &= TS^{-i}TS^iT \quad \text{et d'après (2)} \\ \underline{(S^{-i}TS^iT)^2} &= 1 \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Corollaire 4. — D'après le théorème 8, on a pour $n = 6$ et $i = 3$ les relations caractéristiques suivantes pour le groupe S_6 :

$$\begin{aligned} S^6 &= 1 \\ T^2 &= 1 \\ (ST)^5 &= 1 \\ (S^{-1}TST)^3 &= 1 \\ (S^{-2}TS^2T)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Or, ce système est précisément celui dont nous avons fait mention dans le chapitre précédent (chap. V, relations 44).

En résumé, le système de Moore est surabondant. Dans le système :

$$\begin{aligned} (1) \quad & S^n = 1 \\ (2) \quad & T^2 = 1 \\ (3) \quad & (ST)^{n-1} = 1 \\ (4) \quad & (S^{-1}TST)^3 = 1 \\ (5) \quad & (S^{-k}TS^kT)^2 = 1 \\ & k = 2, 3, \dots, n-2 \end{aligned}$$

on peut se contenter de considérer les relations (5) pour lesquelles $k = 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ suivant que n est pair ou impair. De plus, on peut éliminer une des relations restantes : soit la relation (4), soit une quelconque des relations (5), à condition de conserver la relation (5) pour $k = 2$:

$$(S^{-2}TS^2T)^2 = 1$$

Ainsi le groupe symétrique de degré n peut être défini de façon abstraite par un système de $\frac{n}{2} + 2$ ou de $\frac{n-1}{2} + 2$ relations caractéristiques selon que n est pair ou impair. En particulier, pour le groupe symétrique de degré six, il existe un système de cinq relations caractéristiques, ce qui est conforme au théorème 4.

VII. CONCLUSION

Soit G un groupe d'ordre fini, engendré par deux éléments fondamentaux S et T . Nous donnons, dans le présent travail, l'exposé d'une méthode qui permet d'établir un système de relations caractéristiques du groupe G . Nous démontrons que toute relation $g(S,T) = 1$ liant S et T est une conséquence des relations $f(S,T) = 1$ obtenues en reconstituant le groupe G à partir de ses éléments générateurs S et T .

Pour l'étude des relations caractéristiques du groupe symétrique de degré 6, les bases de ce groupe se répartissent en cinq classes, deux bases semblables appartenant à la même classe. Nous prouvons que toute base S,T du groupe S_6 peut être caractérisée par un système de cinq relations et nous donnons un tel système pour les 163 bases d'un système complet de bases indépendantes de ce groupe. Chaque base appartenant soit à la classe IV, soit à la classe V, peut être caractérisée par cinq relations indépendantes.

Enfin, nous démontrons que le système donné par Moore pour caractériser le groupe symétrique de degré n est surabondant. Nous déterminons quelles sont les relations indispensables et quelles sont les relations qui sont superflues.

RÉPERTOIRE

<i>Définitions</i>	<i>Remarques</i>	<i>Théorèmes</i>	<i>Lemmes</i>
N° 1 page 9	N° 1 page 11	N° 1 page 53	N° 1 page 88
N° 2 page 11	N° 2 page 11	N° 2 page 60	N° 2 page 88
N° 3 page 18	N° 3 page 18	N° 3 page 65	
N° 4 page 18	N° 4 page 25	N° 4 page 67	
N° 5 page 19	N° 5 page 26	N° 5 page 67	
N° 6 page 19	N° 6 page 26	N° 6 page 86	
N° 7 page 21	N° 7 page 26	N° 7 page 87	
N° 8 page 60	N° 8 page 60	N° 8 page 89	
N° 9 page 60	N° 9 page 62		
N° 10 page 83	N° 10 page 63		
	N° 11 page 63		
	N° 12 page 63		
	N° 13 page 63		
	N° 14 page 64		
	N° 15 page 65		
	N° 16 page 68		
	N° 17 page 69		
	N° 18 page 71		
	N° 19 page 72		
	N° 20 page 89		

<i>Corollaires</i>	<i>Tableaux</i>
N° 1 page 87	I pages 23-24
N° 2 page 87	II pages 65-66
N° 3 page 89	III page 66
N° 4 page 91	IV pages 66-67
	V pages 73-82

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Bourbaki, N.
Algèbre, chapitre I.
Hermann, Paris 1942.
- (2) Burnside, W.
Theory of Groups of Finite Order.
Cambridge 1911 (2^e édition).
- (3) Dubreil, P.
Algèbre, tome I.
Gauthier-Villars, Paris 1954.
- (4) Jordan, C.
Traité des substitutions.
Paris 1870.
- (5) Klein, F.
Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom
fünften Grade.
Teubner, Leipzig 1884.
- (6) Netto, E.
Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra.
Teubner, Leipzig 1882.
- (7) Serret, J.-A.
Algèbre, tome II.
Gauthier-Villars, Paris 1928 (7^e édition).
- (8) van der Waerden, B.-L.
Moderne Algebra, tome I.
Springer-Verlag, Berlin 1950 (3^e édition).

- (9) Burckhardt, H.
Endliche Diskrete Gruppen.
Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, tome 1, A.6.
- (10) Burnside, W.
Note on the Symmetric Group.
Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXVIII, 1896-97.
- (11) Burnside, W.
Note on the Symmetric Group.
Mess. of Math. Vol. XXX, 1901.
- (12) Cayley, A.
Collected Mathematical Papers 2, 1889.
- (13) van Dyck, W.
Gruppentheoretische Studien.
Math. Ann. Bd. XX, 1882.
- (14) van Dyck, W.
Gruppentheoretische Studien II.
Math. Ann. Bd. XXII, 1883.
- (15) Hamilton, W.-R.
Icosian Calculus.
Proc. of Roy. Ir. Ac. Vol. VI, 1853-57.
- (16) Hölder, O.
Bildung zusammengesetzter Gruppen.
Math. Ann. Bd. XLVI, 1895.
- (17) Hoyer, P.
Verallgemeinerung zweier Sätze aus der Theorie der Substitutionen-
gruppen.
Math. Ann. Bd. XLVI, 1895.
- (18) Hoyer, P.
Über Definition und Behandlung transitiver Gruppen.
J. reine und ang. Math. Bd. 124, 1902.
- (19) Miller, G.-A.
Abstract Definition of all the Substitution Groups whose Degrees do not
exceed Seven.
Amer. J. Math. Vol. XXIII, 1911.

- (20) Moore, E.-H.
Concerning the Abstract Groups of Order $k!$ and $\frac{1}{2} k!$ Holohedrally
Isomorphic with the Symmetric and the Alternating Substitution-
Groups on k letters.
Proc. Lond. Math. Soc. Vol. XXVIII, 1896-97.
- (21) Netto, E.
Über die Bildung abstrakter Gruppen aus zwei Elementen.
J. reine und ang. Math. Vol. 128, 1905.
- (22) Piccard, S.
Sur les bases du groupe symétrique et les couples de substitutions qui
engendrent un groupe régulier.
Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome 19, 1946.
- (23) Piccard, S.
Sur les bases du groupe symétrique II.
Librairie Vuibert, Paris 1948.
- (24) Piccard, S.
Relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.
Mathematica XXIII, 1947-48.
- (25) Piccard, S.
Quelques problèmes de la théorie des substitutions.
Actes Soc. Helv. Sc. Nat. Lugano, 1953.
- (26) Piccard, S.
Les relations caractéristiques des bases du groupe alterné.
Actes Soc. Helv. Sc. Nat. Altdorf, 1954.
- (27) Piccard, S.
Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.
Comptes rendus. Paris, t. 240, p. 1751-1754.

ABRÉVIATIONS

Proc. Lond. Math. Soc.:	Proceedings of the London Mathematical Society.
Mess. of Math.:	Messenger of Mathematics.
Math. Ann. Bd.:	Mathematische Annalen, Volume.
Proc. of Roy. Ir. Ac.:	Proceedings of the Royal Irish Academy.
J. reine und ang. Math.:	Journal für die reine und angewandte Mathematik.

TABLE DES MATIÈRES

I. Introduction	page 7
II. Historique	page 9
III. Les bases du groupe symétrique	page 17
IV. Etude de quelques bases du groupe S_n et de leurs relations caractéristiques	page 21
Etude de la base S_n, T_n	page 27
V. Répartition en classes des bases du groupe S_n	page 59
VI. Indépendance des relations caractéristiques	page 83
VII. Conclusion	page 93
Répertoire	page 95
Bibliographie	page 97